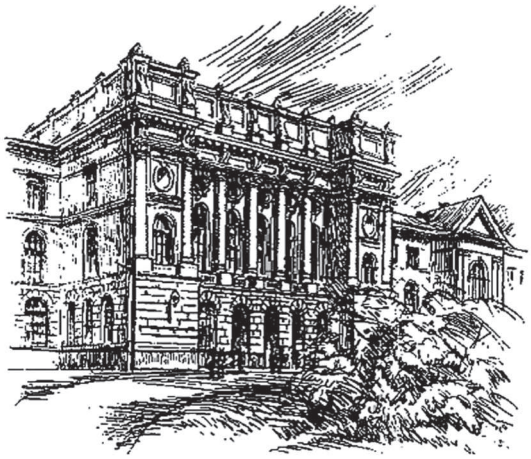
Министерство образования и науки Российской Федерации



НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математические науки

3(153) 2012

Издательство Политехнического университета
Санкт-Петербург
2012

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА

Васильев Ю.С., академик РАН, Президент СПбГПУ – председатель;
Алферов Ж.И., академик РАН – зам. председателя; *Костюк В.В.*, академик РАН;
Лопота В.А., чл.-кор. РАН; *Окрепилов В.В.*, академик РАН;
Патон Б.Е., академик РАН и НАН Украины;
Рудской А.И., чл.-кор. РАН; *Федоров М.П.*, академик РАН; *Фортов В.Е.*, академик РАН.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

Васильев Ю.С., академик РАН, Президент СПбГПУ – главный редактор;
Арсеньев Д.Г., д-р техн. наук, профессор;
Бабкин А.В., д-р экон. наук, профессор – зам. гл. редактора;
Боронин В.Н., д-р техн. наук, профессор; *Глухов В.В.*, д-р экон. наук, профессор;
Дегтярева Р.В., д-р истор. наук, профессор; *Иванов А.В.*, д-р техн. наук, профессор;
Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор; *Козловский В.В.*, д-р физ.-мат. наук, профессор;
Райчук Д.Ю., – зам. гл. редактора; *Юсупов Р.М.*, чл.-кор. РАН.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Алферов Ж.И., академик РАН — председатель;
Боровков А.И., проректор по перспективным проектам;
Варшалович Д.А., академик РАН;
Глухих В.А., академик РАН;
Жуков А.Е., чл.-кор. РАН — зам. председателя;
Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Индейцев Д.А., чл.-кор. РАН;
Рудской А.И., чл.-кор. РАН — зам. председателя;
Рутберг Ф.Г., академик РАН;
Сурис Р.А., академик РАН;

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор — председатель;
Антонов В.И., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Блинов А.В., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Капралова В.М., канд. физ.-мат. наук, доцент — отв. секретарь;
Кожевников Н.М., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Козловский В.В., д-р физ.-мат. наук, профессор – зам. председателя;
Остряков В.М., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Самойлов В.О., чл.-кор. РАМН, профессор;
Топтыгин И.Н., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Тропп Э.А., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Фирсов Д.А., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Фотиади А.Э., д-р физ.-мат. наук, профессор — зам. председателя.

Журнал с 1995 г. издается под научно-методическим руководством Российской академии наук.

Журнал с 2002 г. входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Сведения о публикациях представлены в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН, в международной справочной системе «Ulrich's Periodical Directory»

Журнал зарегистрирован в Госкомпечати РФ. Свидетельство № 013165 от 23.12.94.

Подписной индекс **18390** в каталоге «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать».

Журнал включен в базу данных «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ), размещенную на платформе Научной электронной библиотеки на сайте http://www.elibrary.ru

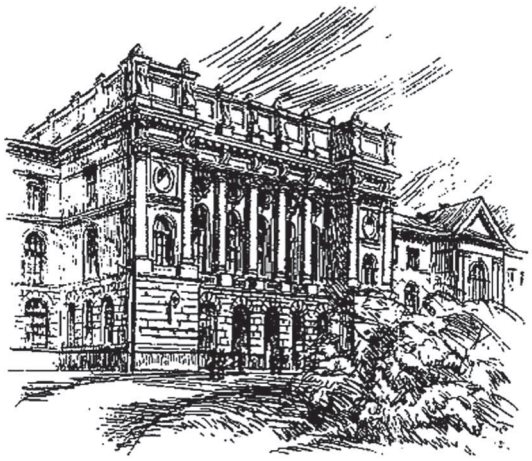
При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

Точка зрения редакции может не совпадать с мнением авторов статей.

Адрес редакции и издательства: Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.
Тел. редакции серии (812) 294-22-85.

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2012

THE MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF THE RUSSIAN FEDERATION



ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL

Physics and Mathematics

3(153) 2012

Polytechnical University Publishing House
Saint Petersburg
2012

ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL

EDITORIAL COUNCIL

Yu.S. Vasiliev – full member of RAS, President of St. Petersburg State Polytechnical University, editor-in-chief;
Zh.I. Alferov – full member of RAS;
V.V. Kostiuk – full member of RAS;
V.A. Lopota – corresponding member of RAS; *V.V. Okrepilov* – full member of RAS;
B.E. Paton – full member of RAS and NAS of Ukraine;
A.I. Rudskoy – corresponding member of RAS;
M.P. Fedorov – full member of RAS; *V.E. Fortov* – full member of RAS.

EDITORIAL BOARD

Yu.S. Vasiliev – full member of RAS, President of St. Petersburg State Polytechnical University, editor-in-chief;
D.G. Arseniev – Dr.Sc.(tech.), prof.;
A.V. Babkin – Dr.Sc. (econ.), prof., deputy editor-in-chief; *V.N. Boronin* – Dr.Sc.(tech.), prof.;
V.V. Glukhov – Dr.Sc. (econ.), prof.;
R.V. Degtyareva – Dr.Sc. (history), prof.;
A.V. Ivanov – Dr.Sc.(tech.), prof.; *V.K. Ivanov* – Dr.Sc.(phys.-math.), prof.;
V.V. Kozlovsky – Dr.Sc.(phys.-math.), prof.; *D.Yu. Raychuk* – deputy editor-in-chief;
R.M. Yusupov – corresponding member of RAS.

PHYSICS AND MATHEMATICS

EDITORIAL COUNCIL

Zh.I. Alferov – full member of RAS, head of the editorial council;
A.I. Borovkov – vice-rector for perspective projects;
D.A. Varshalovich – full member of RAS; *V.A. Glukhikh* – full member of RAS;
A.Ye. Zhukov – corresponding member of RAS, deputy head of the editorial council;
V.K. Ivanov – Dr.Sc.(phys.-math.), prof.; *D.A. Indeitsev* – corresponding member of RAS;
A.I. Rudskoy – corresponding member of RAS, deputy head of the editorial council;
Ph.G. Rutberg – full member of RAS;
R.A. Suris – full member of RAS.

EDITORIAL BOARD

V.K. Ivanov – Dr.Sc.(phys.-math.), prof. – head of the editorial board;
V.I. Antonov – Dr.Sc.(phys.-math.), prof.; *A.V. Blinov* – Dr.Sc.(phys.-math.), prof.;
V.M. Kapralova – Candidate of phys.-math. sc., associate prof. – executive secretary;
N.M. Kozhevnikov – Dr.Sc.(phys.-math.), prof.;
V.V. Kozlovsky – Dr.Sc.(phys.-math.), prof. – deputy head of the editorial board;
V.M. Ostryakov – Dr.Sc.(phys.-math.), prof.; *V.O. Samoilov* – corresponding member of RAMS, prof.;
I.N. Toptygin – Dr.Sc.(phys.-math.), prof.; *E.A. Tropp* – Dr.Sc.(phys.-math.), prof.;
D.A. Firsov – Dr.Sc.(phys.-math.), prof.;
A.E. Fotiadi – Dr.Sc.(phys.-math.), prof. – deputy head of the editorial board.

The journal is published under the scientific and methodical guidance of RAS since 1995.

The journal is included in the List of leading peer-reviewed scientific journals and other editions to publish major findings of theses for the research degrees of Doctor of Sciences and Candidate of Sciences.

The publications are presented in the VINITI RAS Abstract Journal and Ulrich's Periodical Directory International Database.

The journal is registered with the State Printing Committee. Certificate № 013165 issued December 23, 1994.

Subscription index **18390** in the "Journals and Magazines" catalogue, Rospechat agency.

The journal is in the Russian Science Citation Index (RSCI) database
© Scientific Electronic Library (http://www.elibrary.ru).

No part of this publication may be reproduced without clear reference to the source.

The views of the authors may not represent the views of the Editorial Board.

Address: 195251 Politekhnicheskaya St. 29, St. Petersburg, Russia.
Phone: (812) 294-22-85.

© St. Petersburg State Polytechnical University, 2012

Содержание

Физика конденсированного состояния

Винниченко М.Я., Фирсов Д.А., Машко М.О., Штеренгас Л. (Shterengas L.), Беленький Г. (Belenky G.), Воробьев Л.Е. *Рекомбинация и захват электронов в лазерных наноструктурах с квантовыми ямами InGaAsSb/AlGaAsSb* 9

Шаганов А.П., Филимонов А.В., Королева Е.Ю., Фотиади А.Э. *Формирование полярных нанообластей и нанодоменов в одноосных релаксорах SBN-61* 15

Юрова В.А., Федорцов А.Б., Климчицкая Г.Л., Чуркин Ю.В. *Давление силы Казимира на слой диэлектрика в наноразмерных слоистых твердотельных структурах алюминий – оксид кремния – кремний*..... 22

Ламкин И.А., Менькович Е.А., Тарасов С.А. *Ультрафиолетовые фотодиоды на основе контактов металл – твердые растворы нитридов галлия и алюминия*..... 28

Радчук Н.Б., Ушаков А.Ю. *Оптические свойства нанокомпозитов переходных металлов* 31

Квашенкина О.Е. *Особенности электронного фазового перехода в VO_2* 36

Приборы и техника физического эксперимента

Басалкевич Т.М., Тальнишних Н.А., Шмидт Н.М. *Особенности развития деградационного процесса в мощных синих светодиодах InGaN/GaN*..... 45

Гончар И.В., Иванов А.С., Федорцов А.Б. *Быстродействующий интерферометрический измеритель толщины пленок в диапазоне от десяти до тысячи микрон* 48

Физическая электроника

Золотов С.А., Привалов В.Е. *Влияние геометрии активного элемента на коэффициент усиления газового лазера* 56

Ковалевский Д.В. *Эффекты неоднородности потенциальных барьеров и ограниченности решетки в модели Кронига – Пенни* 59

Карасёв П.А., Карабешкин К.В. *Особенности образования дефектов в кремнии при бомбардировке молекулярными ионами* 64

Физическая оптика

Кизеветтер Д.В., Савина А.Ю. *Аппроксимация спектров флуоресценции родаминовых красителей* .. 71

Биофизика и медицинская физика

Юхнев А.Д., Синицына Д.Э. *Разработка технологии изготовления и исследование моделей кровеносных сосудов*..... 75

Лукашова О.Ф., Мокрова Д.В., Кафидова Г.А., Перевозник Д.С. *Неинвазивный спекл-датчик скорости кровотока в микроциркуляторном русле* 80

Капралова В.М., Назарова Е.А., Иванова Н.Е., Шадрин Е.Б. *Конформационные изменения альбумина как диагностический параметр*..... 83

Физика молекул

Хайруллин А.Р., Степанова Т.П., Рожкова Н.Н., Гладченко С.В. *Дипольные моменты фуллерена C_{60} в бензоле, толуоле и ортоксилоле*..... 92

Ядерная физика

Бердников А.Я., Иванищев Д.А., Котов Д.О., Рябов В.Г., Рябов Ю.Г., Самсонов В.М. *Измерение электромагнитных признаков образования кварк-глюонной плазмы в столкновениях тяжелых ионов при энергии 62,4 ГэВ* 96

Павлов Ф.Ф. *Вычисление матричных элементов электромагнитного тока дейтрона в переменных светового конуса* 99

Павлов Ф.Ф., Бердников Я.А. *Угловое условие для матричных элементов электромагнитного тока дейтрона* 111

Бердников Я.А., Иванов А.Е., Ким В.Т., Суетин Д.П. *Ядерные эффекты в адрон-ядерных взаимодействиях при высоких энергиях* 118

Математика

Вишневский В.Э., Пустовалова О.А., Иванова О.А., Стрекопытова М.В. *Устойчивость равновесного режима стационарного многообразия* 124

Первадчук В.П., Шумкова Д.Б., Дектярев Д.Н. *Вопросы разрешимости и получения оптимизационных систем в вариационных задачах, описываемых двумерными уравнениями параболического типа* ..128

Федотов А.И., Лисин С.К. *Применение нелинейной теории минимизации в прикладных задачах синтеза свойств объектов* 133

Васильев А.Н., Тархов Д.А. *Параметрические нейросетевые модели классических и неклассических задач для уравнения теплопроводности* 136

Механика

Нгуен Ван Тханг, Арсеньев Д.Г., Беляев А.К. *Устойчивость движения шипа в подшипнике скольжения и его автоколебания с учетом гидродинамики смазки и центробежных сил* 145

Жгутов В.М. *Геометрически нелинейные математические модели термопластичности оболочек переменной толщины* 155

Теоретическая физика

Санин А.Л., Семёнов Е.А. *Свободные и связанные квантовые осцилляторы Дуффинга, влияние шума* 171

Радиофизика

Апушкинский Е.Г. *Нелинейные преобразования спектров сигналов* 182

Астрофизика

Васильев Г.И., Холупенко Е.Е., Яблоков С.Н., Байко Д.А., Быков А.М., Красильщиков А.М., Павлов Г.Г. *Влияние оптического фона ночного неба на наземные наблюдения гамма-всплесков в диапазоне 1 – 10 ГэВ* 191

Быков А.М., Гладилин П.Е., Осипов С.М., Павлов Г.Г. *Роль шланговой неустойчивости в ускорении заряженных частиц ударными волнами* 195

Уваров Ю.А., Быков А.М., Павлов Г.Г., Левенфиш К.П., Кропотина Ю.А. *Пульсарная туманность Вела:определение анизотропии функции распределения ускоренных частиц* 201

Хроника

Кожевников Н.М. *Юбилейное заседание президиума Научно-методического совета по физике Министерства образования и науки Российской Федерации* 211

Сведения об авторах, контактные данные 215

Аннотации, ключевые слова 222

Contents

Condensed matter physics

Vinnichenko M.Ya., Firsov D.A., Mashko M.O., Shterengas L., Belenky G., Vorobjev L.E. *Electron recombination and capture in laser nanostructures with InGaAsSb/AlGaAsSb quantum wells* 9

Shaganov A.P., Filimonov A.V., Koroleva E.Yu., Fotiadi A.E. *The formation of polar nanoregions and nanodomains in SBN-61 single-axis relaxors* 15

Yurova V.A., Fedortsov A.B., Klimchitskaya G.L., Churkin Yu.V. *The Casimir force pressure on the dielectric layer in nanoscale solid-state multilayer Al – SiO_2 – Si structures* 22

Lamkin I.A., Menkovich E.A., Tarasov S.A. *Ultraviolet photodiodes on the basis of the contacts of metal and aluminum-nitride gallium solid solutions* 28

Radchuk N.B., Ushakov A.Yu. *Optical properties of transition metals nanocomposites* 31

Kvashenkina O.E. *Features of electronic phase transition in VO_2* 36

Experimental technique and devices

Basalkevich T.M., Talnishnikh N.A., Shmidt N.M. *Development features of degradation processes in high-power blue InGaN/GaN light-emitting diodes* 45

Gonchar I.V., Ivanov A.S., Fedortsov A.B. *A fast-operating interferometry device for measuring films thickness over the range from ten to one thousand microns* 48

Physical electronics

Zolotov S.A., Privalov V.E. *The influence of active element geometry on gas discharge laser gain factor* 56

Kovalevsky D.V. *Effects of heterogeneity of potential barriers and lattice finiteness in the Kronig – Penney model* 59

Karaseov P.A., Karabeshkin K.V. *The features of defect formation in silicon under molecular ion bombardment* 64

Physical optics

Kiesewetter D.V., Savina A.Yu. *The approximation of Rhodamine dyes fluorescence spectra* 71

Biophysics and medical physics

Yukhnev A.D., Sinitsyna D.E. *The blood vessel models: the technology development for making and following investigation* 75

Lukashova O.F., Mokrova D.V., Kafidova G.A., Perevoznik D.S. *A noninvasive speckle sensor of blood flow velocity in the microvasculature* 80

Kapralova V.M., Nazarova E.A., Ivanova N.E., Shadrin E.B. *Albumin conformational changes as a diagnostic parameter* 83

Physics of molecules

Khayrullin A.R., Stepanova T.P., Rozhkova N.N., Gladchenko S.V. *Dipole moments of C_{60} fullerene in benzene, toluene and orthoxylene* 92

Nuclear physics

Berdnikov A.Ya., Ivanishchev D.A., Kotov D.O., Riabov V.G., Riabov Yu.G., Samsonov V.M. *The measurement of electromagnetical signs of quark-gluon plasma in heavy ion collisions at 62.4 GeV*.. 96

Pavlov F.F. *The calculation of matrix elements for the electromagnetic deuteron current in a formal light description cone*..... 99

Pavlov F.F., Berdnikov Ya.A. *Angular condition for matrix elements of the electromagnetic deuteron current*..... 111

Berdnikov Ya.A., Ivanov A.E., Kim V.T., Suetin D.P. *Nuclear effects in hadron-nuclear interactions at high energies*..... 118

Mathematics

Vishnevsky V.E., Pustovalova O.A., Ivanova O.A., Strekopitova M.V. *The stability of the stationary polymeasure equilibrium regime*..... 124

Pervadchuk V.P., Shumkova D.B., Dektyarev D.N. *Matters of solvability and derivation of optimization systems in variational problems described by two-dimensional parabolic equations*..... 128

Fedotov A.I., Lisin S.K. *Using of nonlinear minimization theory for applied problems of design of objects properties*..... 133

Vasilyev A.N., Tarkhov D.A. *Parametrical neural network models of classical and nonclassical problems for heat conduction equation*..... 136

Mechanics

Nguyen Van Thang, Arseniev D.G., Belyaev A.K. *The stability of motion of the shaft supported by floating ring bearings and its self-oscillation with allowance of lubrication hydrodynamics and centrifugal forces*.. 145

Zhgoutov V.M. *Geometrically nonlinear thermoplasticity mathematic models of shells with the variable thickness*..... 155

Theoretical physics

Sanin A.L., Semyonov E.A. *Quantum Duffing oscillators: free and coupled, noise action*..... 171

Radiophysics

Apushkinsky E.G. *Nonlinear signal spectra transformations*..... 182

Astrophysics

Vasil'ev G.I., Kholupenko E.E., Yablokov S.N., Bayko D.A., Bykov A.M., Krasil'shchikov A.M., Pavlov G.G. *The influence of the night-sky background on ground-based observations of gamma-ray bursts in the range between 1 and 10 GeV*..... 191

Bykov A.M., Gladilin P.E., Osipov S.M., Pavlov G.G. *The role of firehose instability in diffusive shock acceleration*..... 195

Uvarov Yu.A., Bykov A.M., Pavlov G.G., Levenfish K.P., Kropotina Yu.A. *Vela pulsar wind nebula: determination of the anisotropy of accelerated particle distribution function*..... 201

Chronicle

Kozhevnikov N.M. *The anniversary session of the Presidium of the Scientific and Methodological Council on Physics of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation*..... 211

About the authors, contact information..... 215

Abstracts, key words..... 228

УДК 535.3

М.Я. Винниченко, Д.А. Фирсов, М.О. Машко,
Л. Штеренгас (L. Shterengas),
Г. Беленький (G. Belenky), Л.Е. Воробьев

РЕКОМБИНАЦИЯ И ЗАХВАТ ЭЛЕКТРОНОВ В ЛАЗЕРНЫХ НАНОСТРУКТУРАХ С КВАНТОВЫМИ ЯМАМИ InGaAsSb/AlGaAsSb

Объектом исследований настоящей статьи являются наноструктуры с квантовыми ямами (КЯ) InGaAsSb/InAlGaAsSb, которые применяются для создания лазеров на средний инфракрасный диапазон длин волн (λ = = 2–4 мкм). Этому спектральному диапазону соответствуют области поглощения различных органических веществ и газов, например CO_2 (2004 и 2680 нм), CO (2330 нм), C_2H_2 (3030 нм), CH_4 (3330 нм). Наличие линий поглощения в среднем инфракрасном диапазоне определяет перспективность использования таких лазеров для экологического мониторинга, химического и биологического спектрального анализа, дистанционного обнаружения взрывчатых веществ, медицинской диагностики и лечения, инфракрасной подсветки в устройствах обнаружения, телекоммуникаций и т. п. При конструировании лазеров и оптимизации их характеристик необходимо знать механизмы рекомбинации носителей заряда, в частности характеристики оже-рекомбинации, которая при определенных условиях может становиться резонансной [1].

Основная задача настоящей работы – анализ динамики фотолюминесценции (ФЛ) и определение механизмов рекомбинации носителей заряда в структурах с квантовыми ямами InGaAsSb/InAlGaAsSb двух типов: содержащих и не содержащих индий (In) в твердом растворе, формирующем барьер.

Методы и объекты исследований

Зависимости интенсивности фотолюминесценции от времени были получены экспериментально методом «up-conversion». Метод основан на преобразовании частоты излучения фотолюминесценции вверх при сложении сигнала фотолюминесценции и возбуждающего излучения с помощью нелинейного кристалла [2]. Это позволяет использовать чувствительные малоинерционные детекторы – фотоумножители. Использование линии задержки для возбуждающего излучения, падающего на нелинейный кристалл, позволяет изучать зависимость сигнала фотолюминесценции от времени. Данную зависимость можно назвать динамикой фотолюминесценции.

В качестве источника излучения накачки использовался лазер на неодимовом стекле с синхронизацией мод. Энергия кванта излучения лазера составляла 1,172 эВ (длина волны 1058 нм), длительность импульса излучения Δt = 150 фс, частота повторения импульсов – 100 МГц. Излучение фокусировалось на поверхности структуры в виде пятна диаметром около 10 мкм. Максимальная средняя мощность возбуждающего излучения была равна 30 мВт. Излучение с частотой, равной сумме частот излучения фотолюминесценции и возбуждающего излучения, после взаимодействия с нелинейным кристаллом PPLN (periodically poled lithium niobate) отфильтровывалось спек-

трометром и регистрировалось охлаждаемым фотоумножителем с областью чувствительности 160 – 930 нм. Линия задержки, управляемая компьютером, позволяла получить максимальный сдвиг импульсов 10 нс при временном разрешении системы около 0,5 пс. Исследование динамики фотолюминесценции проводилось при температурах 77, 230 и 300 K.

Объектами исследований являлись лазерные структуры с напряженными квантовыми ямами двух типов.

В структурах первого типа с квантовыми ямами $In_{0,545}Ga_{0,455}As_{0,238}Sb_{0,762}$ (степень рассогласования постоянных решетки – 1,75 %) барьер был образован четырехкомпонентным твердым раствором $Al_{0,35}Ga_{0,65}As_{0,03}Sb_{0,97}$. Схематичная зонная диаграмма структур первого типа приведена на рис. 1, *а*.

Структуры второго типа с квантовыми ямами $In_{0,545}Ga_{0,455}As_{0,255}Sb_{0,745}$ (степень рассогласования постоянных решетки – 1,63 %) имели барьер из пятикомпонентного твердого раствора $In_{0,25}Al_{0,20}Ga_{0,55}As_{0,245}Sb_{0,755}$. Схематично зонная диаграмма структур приведена также на рис. 1, *а*.

Обе структуры содержали по четыре квантовые ямы шириной 17 нм, разделенные туннельно непрозрачными барьерами толщиной 40 нм. На расстоянии 300 нм от квантовых ям с обеих сторон находились ограничивающие слои $Al_{0,60}Ga_{0,40}As_{0,05}Sb_{0,95}$. Ширина запрещенной зоны материала барьера при $T = 300$ K для четырехкомпонентной структуры составляет около 1,1 эВ, а для пятикомпонентной – около 0,7 эВ, что меньше энергии накачки; таким образом, в данных структурах оптическая накачка осуществлялась в области барьера структур.

Все структуры были выращены методом молекулярно-пучковой эпитаксии с использованием реактора Veeco GEN-930. Кроме слоев квантовых ям, все слои в структуре были согласованы по постоянной решетки с подложкой GaSb.

Расчет энергетического спектра носителей заряда был проведен в рамках модели Кейна, учитывающей непараболичность зон. Данное приближение было необходимо использовать, поскольку энергия электронов в подзонах размерного квантования исследуемых структур составляет величину порядка ширины запрещенной зоны. Параметры твердых растворов для расчета были взяты из обзорной статьи [3]. Схематично энергетическая диаграмма первой структуры с КЯ InGaAsSb/AlGaAsSb при температуре $T = 300$ K приведена на рис. 1, *б*.

Величины ширины запрещенной зоны барьера E_g^{barr} и квантовой ямы E_g^{QW}, разрыва дна зоны проводимости ΔE_c, разрыва потолка валентной зоны ΔE_v, а также энергия основного уровня размерного квантования электронов E_{e1}, отсчитываемая от дна зоны проводимости КЯ, и энергия основного уровня размерного квантования дырок E_{hh1}, отсчитываемая от потолка валентной зоны КЯ, для структур первого и второго типов при $T = 300$ K приведены в таблице.

Рис. 1. Схематичные диаграммы исследованных структур: *а* – с КЯ InGaAsSb и барьерами, образованными твердыми растворами AlGaAsSb или InAlGaAsSb; *б* – зонная диаграмма КЯ InGaAsSb/AlGaAsSb; $h\nu_{pump}$, $h\nu$ – энергии квантов накачки и излучения фотолюминесценции

Энергетические параметры, использованные в расчетах, для структур двух типов

Энергетический параметр	Значение энергии, эВ	
	I тип	II тип
E_g^{barr}	1,177	0,713
E_g^{QW}	0,296	0,289
ΔE_c	0,728	0,238
ΔE_v	0,153	0,186
E_{e1}	0,023	0,023
E_{hh1}	0,003	0,003

Отметим, что в структуре II типа с пятикомпонентным материалом барьера InAlGaAsSb глубина квантовой ямы ΔE_c для электронов меньше, чем энергия основного перехода носителей заряда $e1 \rightarrow hh1$:

$$h\nu \cong E_g^{QW} + E_{e1} + E_{hh1}. \qquad (1)$$

В таких условиях помимо излучательной рекомбинации электрона и дырки возможен процесс безызлучательной рекомбинации электрона на уровне $e1$ и дырки на уровне $hh1$ с передачей энергии третьему электрону, который забрасывается в непрерывный спектр. Такой процесс называется беспороговой оже-рекомбинацией [1].

В структуре I типа с четырехкомпонентным твердым раствором барьера AlGaAsSb глубина квантовой ямы ΔE_c больше, чем энергия кванта излучения (1). В этом случае основным механизмом рекомбинации при достаточно высоком уровне инжекции электронно-дырочных пар может стать пороговый оже-процесс типа *CHCC* (C – уровень электрона в зоне проводимости, H – уровень тяжелой дырки в валентной зоне, обозначение взято из [1]), когда оже-электрон забрасывается в одну из подзон размерного квантования электронов с энергией E_{ej}. Более того, если при определенной температуре выполняется условие

$$E_g^{QW}(T) + E_{e1} + E_{hh1} \cong E_{ej} - E_{e1}, \qquad (2)$$

то оже-процесс может стать резонансным [1], что резко увеличивает его вероятность. Стоит также отметить, что беспороговый механизм оже-рекомбинации с забросом электрона в непрерывный спектр идет с меньшей скоростью, чем пороговый механизм оже-рекомбинации, и тем более меньшей, чем резонансный оже-процесс, если таковой может наблюдаться в структуре.

Экспериментальные результаты и их анализ

Оптическая накачка исследованных структур осуществлялась в области барьера, а рекомбинация происходила, в основном, в квантовых ямах. Для анализа захвата носителей заряда в квантовые ямы из барьера была предварительно

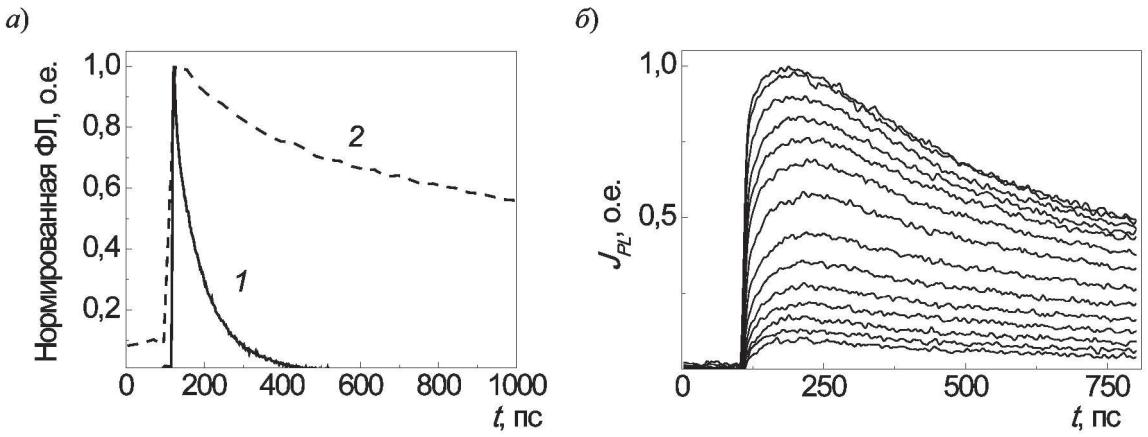


Рис. 2. Зависимости интенсивности ФЛ от времени при $T = 300$ К: *а* – динамика фотолюминесценции на длине волны, соответствующей излучательной рекомбинации в материале барьера в структуре II типа InGaAsSb/InAlGaAsSb с КЯ (*1*), и в слое того же материала InAlGaAsSb без КЯ (*2*); *б* – динамика интенсивности ФЛ из КЯ при разных интенсивностях накачки в максимуме спектра излучения в той же структуре, что и (*1*)

измерена интенсивность фотолюминесценции из материала барьера InAlGaAsSb в структуре второго типа с квантовыми ямами InGaAsSb и из слоя того же материала InAlGaAsSb без квантовых ям (объемный материал). Полученные временные зависимости фотолюминесценции представлены на рис. 2, *а*. Видно, что уход носителей заряда из барьера и их захват в квантовую яму протекает быстрее, чем рекомбинация носителей заряда в объемном материале без квантовых ям. Характерное время захвата, определенное по спаду фотолюминесценции со временем в структуре с квантовой ямой, составляет около 70 пс.

На рис. 2, *б* представлены нормированные зависимости от времени интенсивности фотолюминесценции из квантовой ямы в максимуме спектра излучения для структуры второго типа при комнатной температуре. Аналогичный вид имеют эти зависимости для более низких температур, и сходным образом они выглядят для структуры первого типа. При возбуждении неравновесных электронов и дырок в области барьера участок нарастания ФЛ содержит быструю и инерционную части. Процесс быстрого нарастания определяется энергетической релаксацией электронов в КЯ. Наличие инерционного участка можно объяснить особенностями захвата носителей заряда в КЯ из барьера. Отметим, что данные зависимости получены для комнатной температуры при высоком уровне возбуждения. В связи с этим, образованием горячих экситонов и их релаксацией [4] можно пренебречь и использовать приближение электронно-дырочной релаксации.

Для определения времен захвата и релаксации носителей заряда рассмотрим следующую модель динамики носителей заряда при возбуждении их световым импульсом. Поглощенное излучение рождает носители заряда во всей структуре между ограничивающими слоями (см. рис. 1). Мысленно разделим все неравновесные свободные носители заряда на два типа: рожденные в области над барьером и рожденные в области над квантовыми ямами. Носители заряда обоих типов релаксируют на основной уровень размерного квантования в КЯ и участвуют в измеряемой нами ФЛ (см. рис. 2, *б*), однако процесс захвата электронов в квантовую яму для них различен.

Опишем процессы захвата и рекомбинации в приближении трехуровневой системы. Обозначим концентрации электронов на двух верхних уровнях как n_{QW} (электроны, рожденные над квантовой ямой) и n_{barr} (электроны, рожденные в области барьера). Третий уровень с концентрацией n_0 соответствует основному уровню квантовой ямы, с которого наблюдается ФЛ. В начальный момент времени все носители заряда находятся на двух верхних уровнях. Для изменения заселенностей каждого уровня можно записать скоростное уравнение; например, для уровня с концентрацией n_{QW} оно выглядит так:

$$\frac{\partial n_{QW}(t)}{\partial t} = -\tau_{QW}^{-1}\ n_{QW}(t)\,, \qquad (3)$$

где τ_{QW}^{-1} – обратное время жизни электронов на уровне с концентрацией n_{QW}, или скорость ухода электронов с этого уровня.

Совместное решение скоростных уравнений для всех уровней в структуре дает следующую временную зависимость концентрации носителей заряда на основном уровне размерного квантования в КЯ:

$$n_0(t) = \left[A(1-\exp(-t/\tau_1)) + B(1-\exp(-t/\tau_2))\right]\exp(-t/\tau_3), \qquad (4)$$

где A, B – амплитуды быстрого и медленного нарастания ФЛ (см. рис. 2,*б*); τ_1, τ_2 – соответственно времена жизни носителей заряда, рожденных над квантовой ямой n_{QW} (быстрое нарастание ФЛ) и рожденных над барьером n_{barr} (инерционный участок нарастания ФЛ); τ_3 – время рекомбинации носителей заряда с основного уровня n_0, которое определяет характерное время спада интенсивности ФЛ и включает в себя излучательную и безызлучательную рекомбинацию.

Изменение интенсивности ФЛ со временем для структуры с КЯ InGaAsSb/InAlGaAsSb было аппроксимировано функцией (4), что позволило определить времена жизни и время рекомбинации в зависимости от интенсивности оптической накачки J_{pump} (рис. 3).

Время τ_1 быстрого нарастания ФЛ определяется процессами релаксации носителей заряда, рожденных над квантовой ямой, на основной уровень размерного квантования *e*1.

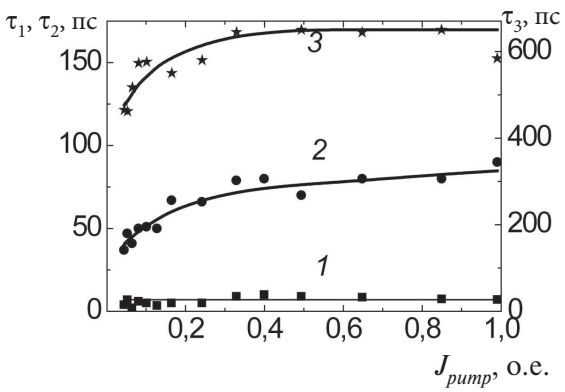


Рис. 3. Зависимости характерных времен захвата τ_1 (*1*), τ_2 (*2*) и рекомбинации τ_3 (*3*) носителей заряда от интенсивности оптической накачки в структуре с КЯ InGaAsSb/ InAlGaAsSb

Возбужденные в квантовую яму высокоэнергичные электроны с $\varepsilon >> \hbar\omega_{ПО}$ теряют свою энергию при испускании продольных оптических (ПО) фононов с энергией $\hbar\omega_{ПО}$. Основным механизмом релаксации энергии в структурах типа InGaAsSb/AlGaAsSb является внутризонное испускание полярных оптических фононов. Время τ_1 составляет величину порядка 7 пс (см. рис. 3), энергия возбужденных электронов – 755 мэВ. Таким образом, если принять энергию продольного оптического фонона равной 30 мэВ (как в GaSb), то можно считать, что происходит испускание 25 фононов, откуда следует, что $\tau_{ПО} \cong 0{,}28$ пс. Кроме того, релаксация энергии электронов, имеющих после испускания последнего фонона энергию $k_Б T < \varepsilon < \hbar\omega_{ПО}$, может происходить за время релаксации энергии τ_ε при межэлектронных столкновениях с последующим испусканием ПО фонона [5]. При высоких концентрациях носителей заряда время релаксации энергии τ_ε примерно равно времени испускания ПО фонона $\tau_{ПО}$. Отметим также, что при взаимодействии электронов с импульсом излучения длительностью $\Delta t = 150$ фс электроны, в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга, возбуждаются в состояния с диапазоном энергий $\Delta\varepsilon \approx \hbar/\Delta t$. Вклад в расширение диапазона энергий рождаемых электронов вносит также гофрировка изоэнергетических поверхностей.

Инерционное время нарастания интенсивности ФЛ τ_2 определяется процессами диффузии и баллистического пролета носителей заряда из барьера в область квантовой ямы, где происходит их быстрый захват на основной уровень размерного квантования. Увеличение времени τ_2 с ростом интенсивности накачки (см. рис. 3), возможно, связано с замедлением процессов диффузии электронов при высоких уровнях накачки. С ростом интенсивности накачки увеличивается концентрация электронов в области барьера, что приводит к росту рассеяния при столкновениях носителей заряда и уменьшению подвижности и коэффициента диффузии электронов. Дополнительным фактором, приводящим к увеличению интенсивности рассеяния, является генерация неравновесных оптических фононов высокоэнергичными неравновесными электронами. Отметим, что значение времени τ_2 лежит в интервале 50 – 100 пс, что соответствует характерному времени захвата носителей заряда в КЯ из барьера, определенного из эксперимента (см. рис. 2, *а*) и равного 70 пс.

Из анализа спада интенсивности ФЛ со временем $J_{PL}(t)$, характеризующегося временем τ_3, можно найти время жизни неравновесных носителей заряда, связанное с различными механизмами рекомбинации. Скорость рекомбинации R, определяемая как обратное время жизни $R = 1/\tau_3$, находилась из следующих соотношений (в предположении, что на начальной стадии релаксации концентрация электронов n пропорциональна интенсивности накачки):

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n}{\tau_3} = -n \cdot R(n); \qquad (5)$$

$$n\big|_{t\approx 0} \equiv n_0 \propto J_{pump}; \qquad (6)$$

$$R(n) = -\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{J_{pump}}\frac{dJ_{pump}}{dJ_{PL}}\frac{dJ_{PL}}{dt} = -\frac{1}{J_{pump}}\left(\frac{dJ_{PL}}{dJ_{pump}}\right)^{-1}\frac{dJ_{PL}}{dt}. \qquad (7)$$

Следуя соотношению (7), можно найти зависимость скорости рекомбинации носителей заряда в квантовой яме от интенсивности накачки, если известна зависимость интенсивности фотолюминесценции на заданной длине волны, соответствующей максимуму спектра

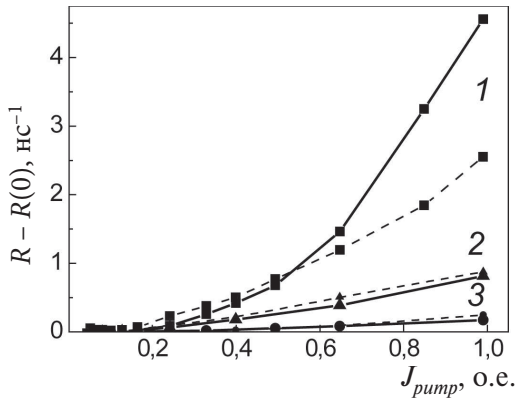


Рис. 4. Зависимость обратного времени жизни (по отношению к оже- и излучательной рекомбинации) от уровня накачки в структурах I (сплошные линии) и II (штриховые линии) типов для температур 300 K (*1*), 230 K (*2*) и 77 K (*3*)

при слабом уровне возбуждения $J_{PL}(\nu)$, от интенсивности накачки $J_{PL}(J_{pump})$, которая была также найдена экспериментально. На рис. 4 показаны зависимости $R(J_{pump})$ для обоих образцов при трех температурах. Видно, что с повышением температуры наблюдается уменьшение времени жизни (увеличение скорости рекомбинации). То же самое наблюдалось авторами работы [6] при относительно низких уровнях накачки импульсами излучения с длительностью 80 фс для квантовых ям $In_{0,37}Ga_{0,63}As_{0,095}Sb_{0,905}/Al_{0,25}Ga_{0,75}As_{0,016}Sb_{0,984}$. Авторы статьи [6] связывают уменьшение времени жизни с выбросом дырок из квантовой ямы высотой 141 мэВ.

Из рис. 4 видно, что при низких температурах скорость рекомбинации в структурах обоих типов примерно одинакова, однако при $T = 300$ K в образце с четырехкомпонентным материалом барьера AlGaAsSb скорость оже-рекомбинации выше, чем в образце с пятикомпонентным материалом барьера InAlGaAsSb. Это можно объяснить возникновением резонансной оже-рекомбинации.

Скорость резонансной оже-рекомбинации экспоненциально зависит от температуры и степени расстройки [7]:

$$R(T) \propto \exp\left\{\frac{\left[E_g(T)+E_{e1}+E_{hh1}\right]-\left[E_{ej}-E_{e1}\right]}{k_{\text{Б}}T}\right\}. \quad (8)$$

Как уже упоминалось, резонансная оже-рекомбинация в структуре II типа невозможна из-за малой глубины квантовой ямы для электронов. При низких температурах условие резонанса (2) не выполняется и для структуры I типа. С ростом температуры меняется ширина запрещенной зоны, и в структуре I типа величина расстройки для переходов $e1 \rightarrow ej$ уменьшается, что в силу соотношения (8) приводит к увеличению скорости рекомбинации.

Для пятикомпонентной структуры II типа глубина квантовой ямы для электронов меньше, чем энергия основного излучательного перехода носителей заряда $e1 \rightarrow hh1$. В таких условиях в ней может протекать только слабый беспороговый оже-процесс [1]. Наличие глубокой ямы для дырок увеличивает их локализацию, повышая вероятность излучательной рекомбинации, а это важно для повышения эффективности лазеров на основе данных структур.

Стоит также отметить, что беспороговый механизм оже-рекомбинации с забросом электрона в непрерывный спектр идет с меньшей скоростью, чем пороговый механизм оже-рекомбинации, и тем более медленнее, чем резонансный оже-процесс, если таковой может наблюдаться в структуре [1].

Итак, в работе исследованы зависимости интенсивности фотолюминесценции в пикосекундном и наносекундном временных диапазонах в квантовых ямах InGaAsSb/InAlGaAsSb с различными составами барьеров квантовых ям. Определены времена захвата носителей заряда в квантовые ямы, времена энергетической релаксации, времена жизни, в том числе и время жизни по отношению к резонансной оже-рекомбинации при различных уровнях оптического возбуждения. Показано, что при определенных параметрах в структурах с квантовыми ямами InGaAsSb/InAlGaAsSb наблюдается резонансная оже-рекомбинация.

Работа поддержана грантами Правительства Санкт-Петербурга, РФФИ №11-02-01128 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Данилов, Л.В.** Теоретическое исследование процессов оже-рекомбинации в глубоких квантовых ямах [Текст] / Л.В. Данилов, Г.Г. Зегря // Физика и техника полупроводников. – 2008. – Т. 42. – Вып. 5. – С. 566 – 572.

2. **Shah, J.** Ultrafast luminescence spectroscopy using sum frequency generation [Text] / J. Shah // IEEE J. Quantum Electron. – 1988. – Vol. 24. – Iss. 2. – P. 276 – 288.

3. **Vurgaftman, I.** Band parameters for III–V compound semiconductors and their alloys [Text] / I. Vurgaftman, J.R. Meyer, R. Ram-Mohan // J. Appl. Phys. – 2001. – Vol. 89. – No. 11. – P. 5815 – 5875.

4. **Amo, A.** Interplay of exciton and electron-hole plasma recombination on the photoluminescence dynamics in bulk GaAs [Text] / A. Amo, M.D. Mart n, L. Vi a, [et al.]// Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 73. – No. 3. – P. 035205 – 035212.

5. **Гельмонт, Б.Л.** Функция распределения и потери энергии горячими электронами при взаимодействии с оптическими фононами [Текст] / Б.Л. Гельмонт, Р.И. Лягущенко, И.Н. Яссиевич // Физика твердого тела. –1972. –Т. 14. –Вып. 2. – С. 533 (10 с.).

6. **Rain , G.** Subpicosecond timescale carrier dynamics in GaInAsSb/AlGaAsSb double quantum wells emitting at 2.3 μm [Text] / G. Rain , A. Salhi, V. Tasco, [et al.]// Appl. Phys. Lett.–2008. – Vol. 92. . – Iss. 10. – P. 101931– 101934.

7. **Воробьев, Л.Е.** Оже-лазер среднего ИК диапазона на межподзонных переходах носителей заряда в квантовых ямах [Текст] / Л.Е. Воробьев, Д.А. Фирсов, Г.Г. Зегря // Известия РАН. Серия физическая. – 2001. –Т. 65. – Вып. 2. – С. 230 –232.

УДК 538.913: 620.22 - 022.53

А.П. Шаганов, А.В. Филимонов, Е.Ю. Королева, А.Э. Фотиади

ФОРМИРОВАНИЕ ПОЛЯРНЫХ НАНООБЛАСТЕЙ И НАНОДОМЕНОВ В ОДНООСНЫХ РЕЛАКСОРАХ SBN-61

Сегнетоэлектрики-релаксоры привлекают к себе неослабевающее внимание в течение многих лет как вариант не полностью упорядоченных систем, получивших широкое применение в радиоэлектронике, акустике и других важных разделах современной техники. Для релаксоров характерны высокие значения диэлектрических, пьезо-, пироэлектрических, электро- и нелинейно-оптических характеристик с большой нелинейностью и слабыми температурными зависимостями благодаря размытию фазовых переходов.

Сегнетоэлектрики-релаксоры представляют собой широкий класс материалов, специфика свойств которых обусловлена фундаментальным структурным разупорядочением [1]. Большинство известных релаксоров являются смешанными кубическими перовскитоподобными кристаллами. Но наряду с этим существуют слоистые, например на основе $SrBi_2Ta_2O_6$, и одноосные ($Sr_xBa_{1-x}Nb_2O_6$-$SBN_{x/(1-x)}$) релаксоры. Интерес к кристаллам SBN возник в связи с высокими значениями практически важных параметров, в частности, колоссальным значением пироэлектрического коэффициента [2], большой нелинейностью спонтанной поляризации в определенном интервале температур, сравнительно низкими коэрцитивными полями (E = 1 – 2 В/см) и возможностью широкого варьирования свойств путем изменения соотношения Sr/Ba [3] либо легирования примесями редкоземельных элементов [4]. Представляют также интерес их оптические и пьезоэлектрические свойства.

Диэлектрические свойства стронций-бариевых ниобатов исследуются очень широко. При температурах, зависящих от соотношения Sr/Ba, они претерпевают размытый фазовый переход из тетрагональной сегнетоэлектрической фазы (пространственная группа $P4bm$) в цен-

тросимметричную ($P\bar{4}b2$), и эта температура снижается с увеличением содержания стронция [5]. Отмечаются большие аномалии диэлектрической восприимчивости вблизи фазового перехода: широкий максимум, сильная температурная и частотная зависимости; присутствие полярных явлений при температурах существенно выше температуры фазового перехода, а также широкий диапазон значений времен релаксации и неравномерное по кристаллу коэрцитивное поле [6].

Несмотря на достаточно интенсивные исследования SBN в последние годы, до сих пор нет достаточного понимания микроскопического механизма наблюдаемых явлений, определяющих его релаксорные свойства. В последние годы идет дискуссия, касающаяся критического поведения SBN-61. Одной из проблем, препятствующих однозначной интерпретации критических свойств SBN, является то обстоятельство, что большинство экспериментов проводится во внешних электрических полях, влияющих на характеристики как обычных микродоменов, так и полярных нанокластеров. Альтернативой является изучение критических свойств системы путем проведения «невозмущающих» экспериментов по рассеянию рентгеновского излучения.

Экспериментальная установка и методика эксперимента

Для исследования пространственного распределения поляризации в SBN нами были проведены опыты по рассеянию когерентного СИ. Эксперименты по рассеянию СИ были поставлены на 22-й линии синхротрона SPring-8 (Япония) [7].

Источником СИ в данной линии является вакуумный ондулятор. Рабочий диапазон излучения 3 – 70 кэВ (первые пять гармоник). В линии установлено два кристаллических монохроматора, первый из которых рассчитан на диапазон энергий 37 – 70 кэВ, второй – на диапазон 3 – 37 кэВ. Монохроматор представляет собой кремниевый кристалл с сечением (111), охлаждаемый жидким азотом. Для фокусировки используется бериллиевая линза, расположенная сразу после монохроматоров. Вся конструкция имеет длину 120 м, образует пучок 0,5 × 0,4 мм с энергетическим разрешением $\Delta E/E = 10^{-4}$. Далее излучение с длиной волны 1,4 проходит через дополнительный регулируемый коллиматор, вырезающий из оставшегося потока пучок 10 × 10 мкм, после чего излучение попадает на экспериментальную установку.

На установке закрепляется монокристаллический образец, помещенный в криостат (рис. 1). Излучение падает на образец и отра-

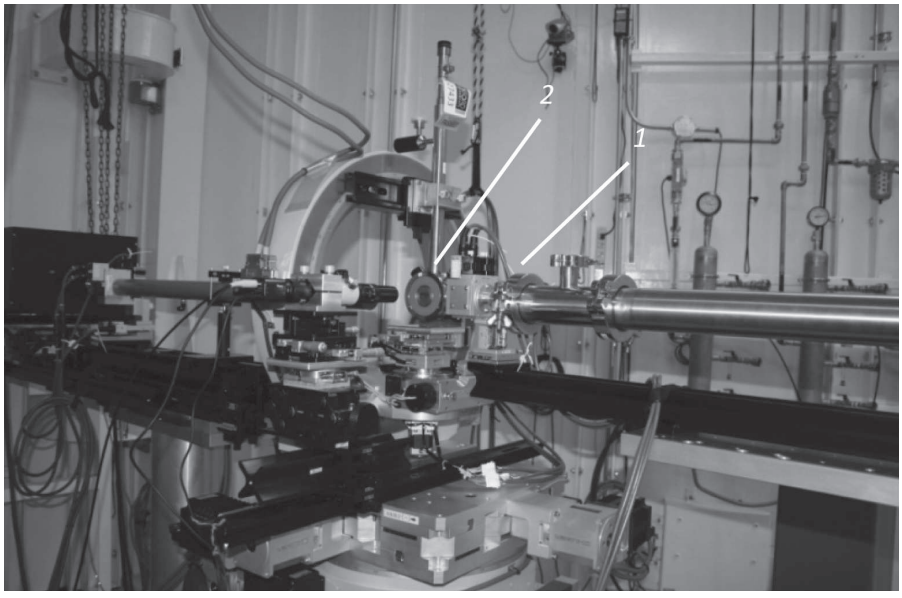


Рис. 1. Спектрометр когерентного рассеяния синхротронного излучения 22-й линии синхротрона SPring-8: *1* – источник, *2* – камера с образцом

жается в регистрирующую CCD-камеру. Изображение, регистрируемое CCD-камерой, оцифровывается и сохраняется на жестком диске ЭВМ в виде картинки размером 4000 × 2624 пикселя. Каждый пиксель соответствует точке 5,9 × 5,9 мкм. Расстояние от образца до CCD-камеры равно 1,3 м.

Были выполнены измерения в зеркальной (брэгговской) геометрии и незеркальной (диффузной). При исследовании SBN эксперимент по диффузному рассеянию проводился дважды для разных углов отклонения образца от брэгговского угла: 0,015 и 0,030 град. Измерения проводились последовательно для температур (K): 480, 460, 420, 380, 360, 340, 320, 300, 280, 250. Для изучения был выбран узел обратного пространства [220]; это связано с тем, что SBN имеет некубическую структуру с межатомными расстояниями 12,445; 12,445; 3,935 .

В результате эксперимента был получен набор картин брэгговского и диффузного рассеяний когерентного рентгеновского излучения (спекл-картин) для исследуемого образца при разных температурах. Полученные картины дифракции подвергались обработке, включающей в себя подавление шумовой составляющей изображения и оценку остаточного уровня шумов, получение пространственной корреляционной функции методом быстрого Фурье-преобразования, деление полученного изображения на аппаратную функцию, определение осей анизотропии и расчет направлений этих осей в системе координат кристаллической решетки образца, получение срезов пространственной корреляционной функции вдоль найденных направлений, разделение сигналов зеркального и «незеркального» рассеяния. Появление шумов на изображениях картин дифракции когерентного рентгеновского излучения связано в первую очередь с тем, что при попадании фотона в одну из ячеек CCD-камеры соседние ячейки также имитируют некоторое количество электронов, поэтому для подавления шума применялся метод пороговой редукции.

Дифракция когерентного рентгеновского излучения на SBN-61 (La)

Как уже отмечалось выше, измерения проводились в двух режимах: зеркальном и незеркальном. На рис. 2 представлены картины дифракции когерентного рентгеновского излучения, полученные при рассеянии СИ на образце SBN-61 при различных значениях температуры образца в зеркальной геометрии.

Для описания распределения поляризации в объеме был использован метод [8], при ко-

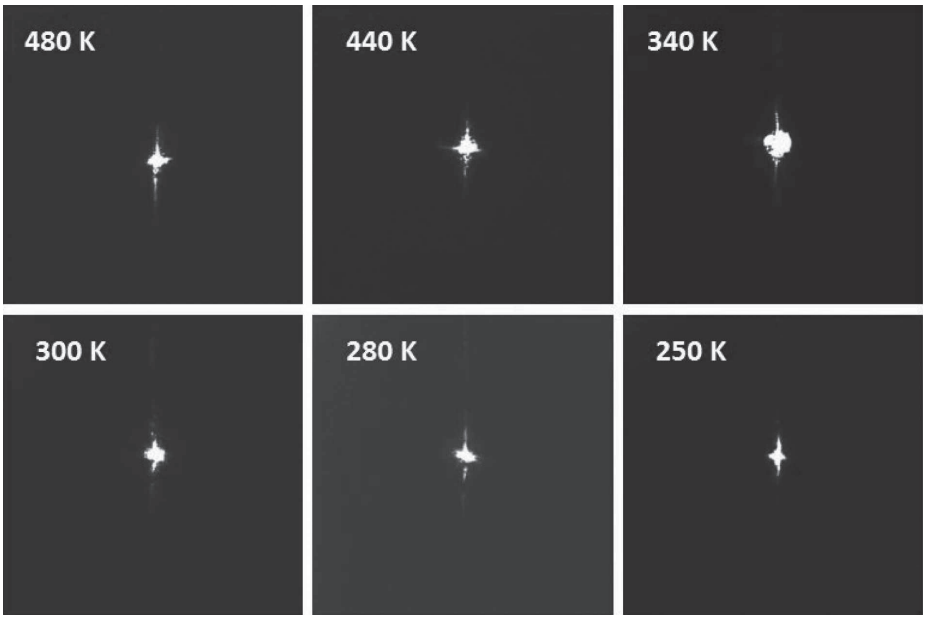


Рис. 2. Картины рассеяния когерентного рентгеновского излучения на образце SBN-61 при различных значениях температуры в зеркальной геометрии.
Время экспозиции – 10 с

тором вводится в рассмотрение комплексный коэффициент пропускания

$$\tau(\mathbf{r}) = \tau_0(\mathbf{r}) \cdot e^{i\varphi(\mathbf{r})}, \qquad (1)$$

связанный непосредственно с величиной поляризации в точке **r** в реальном пространстве. Здесь $\tau_0(\mathbf{r})$ – амплитуда прошедшего излучения; $\varphi(\mathbf{r})$ – фаза, характеризующая запаздывание излучения при прохождении данного участка объема.

Для $\tau(\mathbf{r})$ можно также определить вещественную корреляционную функцию:

$$\gamma(\mathbf{r}) = \frac{\int \tau^*(\mathbf{r})\tau(\mathbf{r}+\mathbf{r}')d\mathbf{r}}{\int \tau^*(\mathbf{r})\tau(\mathbf{r})d\mathbf{r}}.$$

Прямой расчет корреляционной функции не представляется возможным, так как вид $\tau(\mathbf{r})$ неизвестен. Однако автокорреляционная функция может быть вычислена как

$$\gamma(\mathbf{r}) = \frac{F(I(\mathbf{q}))}{F(I_{sp}(\mathbf{q}))}, \qquad (2)$$

где F – оператор Фурье-преобразования; $I(\mathbf{q})$ – интенсивность картины дифракции когерентного рентгеновского излучения вдоль направления **q**; $I_{sp}(\mathbf{q})$ – интенсивность картины дифракции, получаемой при идеальном зеркальном отражении.

На практике $I_{sp}(\mathbf{q})$ является ничем иным, как аппаратной функцией, обусловленной последовательной дифракцией пучка на кристалле и на выходной щели, размер которой сопоставим с длиной пространственной когерентности пучка. Аппаратная функция может быть получена при рассеянии на образце с температурой, значительно превышающей температуру фазового перехода, или (как вариант) при рассеянии на «идеальном» монокристалле. Получаемая вещественная автокорреляционная функция содержит в себе информацию об амплитудной составляющей Фурье-спектра искомой функции $\tau(\mathbf{r})$, частотная же составляющая остается неизвестной. По этой причине невозможно полностью восстановить вид функции комплексного пропускания, однако можно частично восстановить ее частотный спектр.

Для определения аппаратной функции был поставлен отдельный эксперимент по рассеянию СИ на образце $KTaO_3$ (КТО) (рис. 3). Полученный Фурье-образ использовался в качестве делителя в выражении (2).

На рис. 4 представлены картины рассеяния когерентного рентгеновского излучения в незеркальной геометрии. Можно видеть, что форма получаемых пятен гораздо сложнее, чем для аналогичных в зеркальной геометрии. Помимо своей объективной сложности в плане анализа формы диффузного рассеяния, возникают дополнительные трудности, связанные с предварительной обработкой изображения.

Вследствие того, что SBN очень хорошо упорядочен, интенсивность рассеяния очень быстро падает при изменении угла рассеяния относительно брэгговского. По этой причине получить картину дифракции когерентного рентгеновского излучения с достаточным временем экспозиции можно лишь при относи-

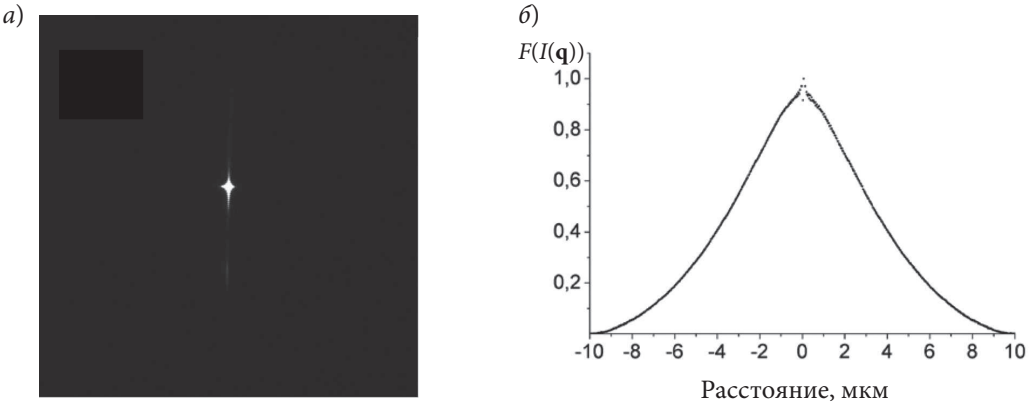


Рис. 3. Картина рассеяния СИ на образце $KTaO_3$ при размере выходной щели пучка 10 мкм (*а*); срез Фурье-образа (*б*)

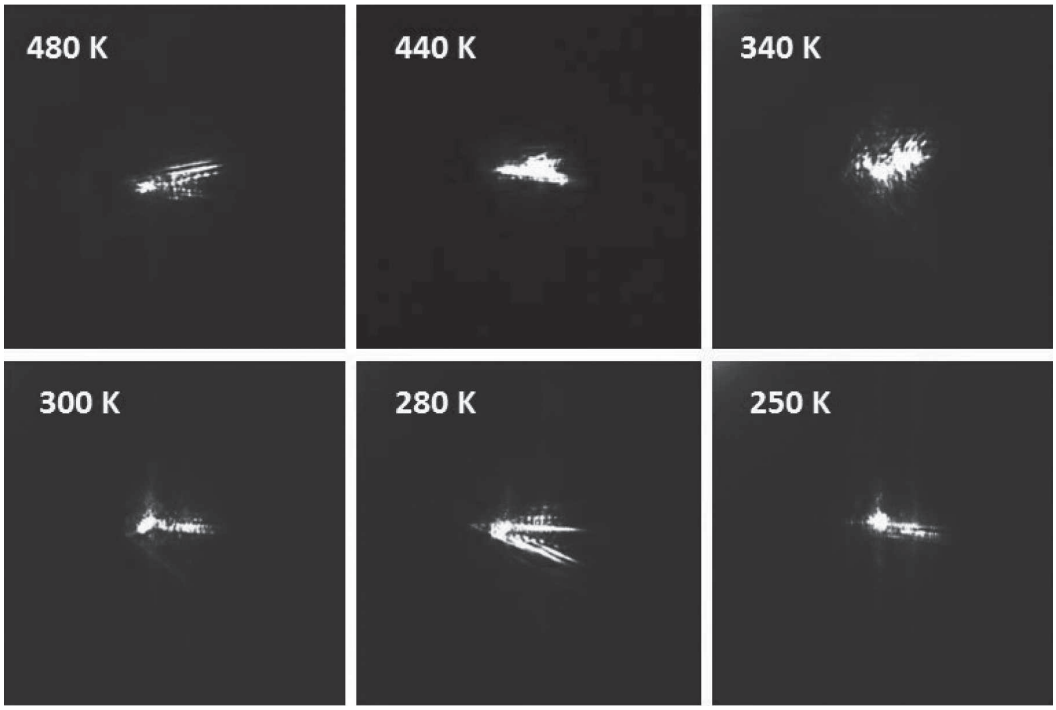


Рис. 4. Картины рассеяния когерентного рентгеновского излучения на образце SBN-61 при различных значениях температуры в незеркальной геометрии.
Время экспозиции – 10 с

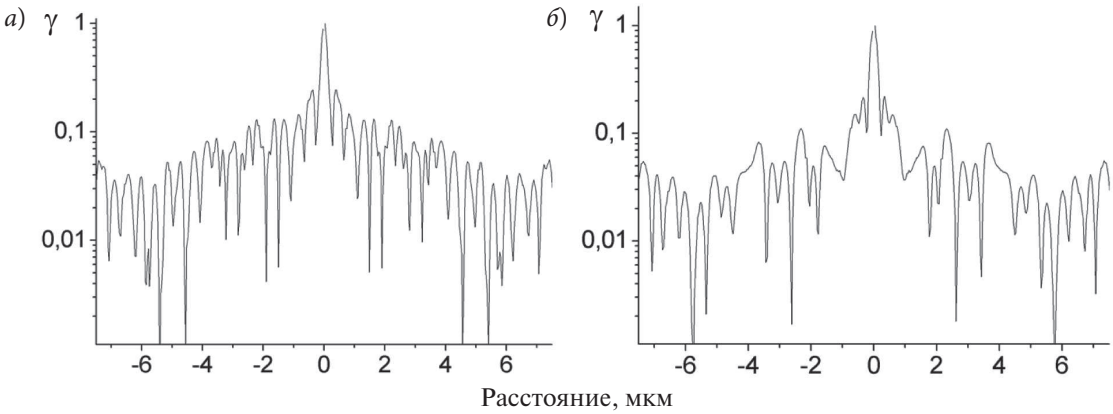


Рис. 5. Срезы пространственной автокорреляционной функции для SBN-61, выполненные без удаления (*а*) и с удалением (*б*) брэгговской составляющей с изображения

тельно малых углах отклонения (в нашем случае это около 0,015 град). К сожалению, при столь малых углах и фиксированном расстоянии образец – детектор не удается полностью пространственно разделить брэгговскую и диффузную компоненты. Кроме всего прочего, попадание брэгговской компоненты в CCD-камеру накладывает дополнительные ограничения на время экспозиции картины рассеяния СИ.

Таким образом, все полученные картины диффузного рассеяния содержали высокоинтенсивную брэгговскую компоненту. Наличие этой компоненты на изображении приводило к появлению столь же интенсивной высокочастотной составляющей в спектре пространственной автокорреляционной функции. Однако видимое пространственное разделение этих двух компонент на изображении позволило

принудительно замаскировать брэгговскую составляющую и выделить сигнал, частично и или полностью соответствующий только диффузному рассеянию (полное разделение компонент присутствовало не на всех полученных изображениях). В конечном итоге, полученных данных оказалось достаточно для качественного анализа диффузного рассеяния.

На рис. 5 представлены срезы автокорреляционной функции, полученные для одной и той же картины дифракции когерентного рентгеновского излучения без удаления брэгговской компоненты и с ее удалением. Оба графика приведены в логарифмическом масштабе. Картины дифракции когерентного рентгеновского излучения, представленные на рис. 4, уже не содержат брэгговской составляющей.

Известно, что эволюция структуры сегнетоэлектриков-релаксоров может занимать длительное время, вплоть до нескольких часов. По этой причине все измерения в зеркальной и незеркальной геометриях проводились дважды. Все измерения показали полную воспроизводимость и повторяемость результатов. Это свидетельствовало о том, что система успела перейти в состояние равновесия.

В ходе анализа картин рассеяния было установлено наличие корреляций поляризации в объеме образца при температурах как ниже, так и выше температуры перехода. Было также установлено, что фазовый переход сопровождается снижением контраста между полярными областями и остальным объемом. Это можно объяснить возрастанием флуктуаций поляризации.

Диэлектрическая спектроскопия образцов SBN-61

Были проведены исследования низкочастотного диэлектрического отклика монокристалла SBN-61 в направлении приложенного измерительного поля (001) в диапазоне измерительных частот от 10 мГц до 20 МГц, в области температур от 200 до 500 K. Проведение низкочастотных исследований представляет особый интерес при изучении сегнетоэлектри-

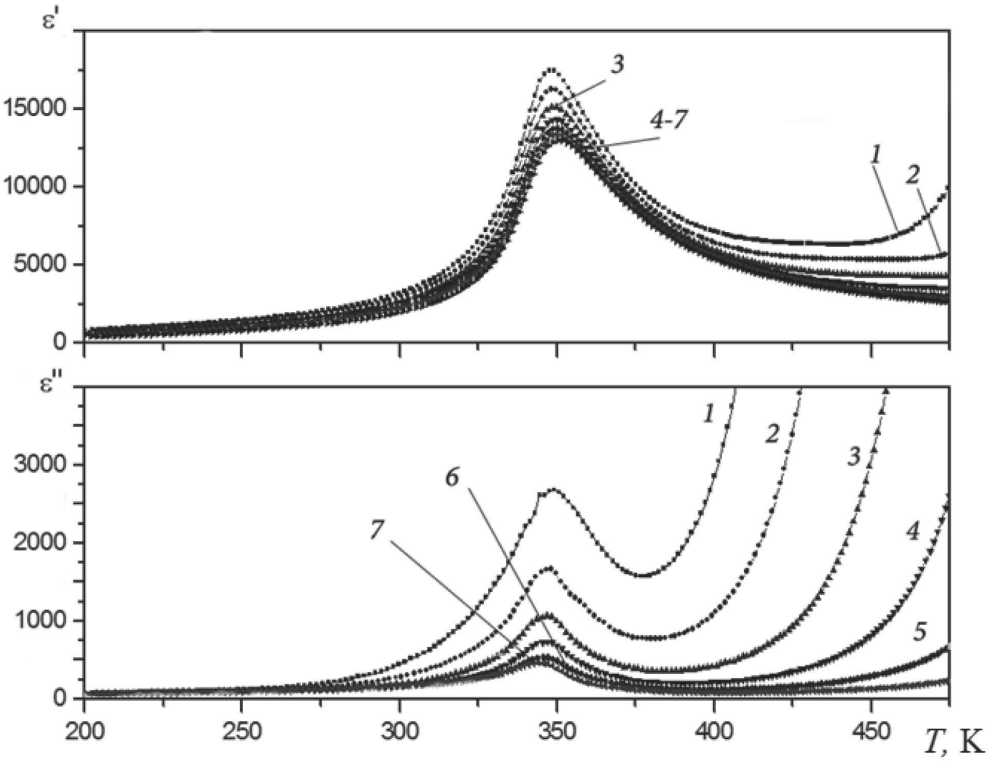


Рис. 6. Температурные зависимости диэлектрического отклика образцов SBN-61 в направлении (001) на нескольких измерительных частотах, Гц: 0,1(*1*); 0,4(*2*); 2,3(*3*); 13,5(*4*); 78(*5*); 457(*6*); 2700(*7*)

ков-релаксоров, так как позволяет проследить низкочастотную динамику их свойств.

На рис. 6 представлены экспериментальные температурные зависимости вещественной и мнимой частей диэлектрического отклика SBN-61 на нескольких частотах.

Как и ожидалось, на температурных зависимостях диэлектрического отклика SBN-61 наблюдается широкий максимум в районе 350 K. Положение максимума несколько смещается в сторону более низких температур при уменьшении частоты измерительного сигнала. Также в районе максимума и ниже наблюдается заметная частотная дисперсия диэлектрического отклика. Такое поведение характерно для всех сегнетоэлектриков-релаксоров.

Итак, в результате исследований брэгговского и диффузного рассеяний синхротронного излучения на образцах SBN-61 было установлено наличие в образцах при высокой температуре поляризационных центров варьируемого размера, с расстоянием между центрами до единиц микрон.

Было также установлено, что формирование доменной структуры сопровождается частичным разупорядочением, обусловленным возрастанием флуктуаций поляризации. Показано, что поляризация в объеме данных образцов скоррелирована, а направление преимущественной корреляции может меняться в зависимости от общей упорядоченности системы.

Обнаружено, что процесс перехода в низкотемпературную фазу для образцов SBN-61 демонстрирует сильные пространственные корреляции на больших расстояниях (порядка нескольких микрон), что в итоге приводит к «окончательному» (в пределах разрешения метода) формированию доменной структуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке государства в лице Министерства образования и науки РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bokov, A.A. Recent progress in relaxor ferroelectrics with perovskite structure [Text] / A.A. Bokov, Z.G. Ye // Journal of Mat. Science. – 2006. – Vol. 41. –P. 31–52.

2. Glass, A.M. Ferroelectric $Sr_{1-x}Ba_xNb_2O_6$ as a fast and sensitive detector of infrared radiation [Text] / A.M. Glass // Appl. Phys. Lett. – 1968. – Vol. 13. – P. 147–149.

3. Cross, E. Relaxor ferroelectrics [Text] / E. Cross // Ferroelectrics. – 1987. – Vol. 76. – P. 241–267.

4. Волк, Т.Р. Сегнетоэлектрические свойства кристаллов ниобата бария-стронция с примесями некоторых редкоземельных металлов [Текст] / Т.Р. Волк, В.Ю. Салобутин, Л.И. Ивлева [и др.] // ФТТ. – 2000. – Вып. 42. – С. 2066–2073.

5. Кузьминов, Ю.С. Сегнетоэлектрические кристаллы для управления лазерным излучением [Текст] / Ю.С. Кузьминов.– М.: Наука, 1982. – 400 с.

6. Volk, T.R. Peculiarities of the ferroelectric switching in Strontium-Barium Niobate relaxor ferroelectrics [Text] / T.R. Volk, D.V. Isakov, V.V. Gladkii, [et al.] // Ferroelectrics. – 2007. – Vol. 354. – P. 246–258.

7. Филимонов, А.В. Локальные структурные искажения и образование полярных нанодоменов в тонких пленках сегнетоэлектриков релаксоров [Текст] / А.В. Филимонов, С.Б. Вахрушев, Р.Г. Бурковский, А.И. Рудской // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2010. – № 3. – С. 66–75.

8. Tai, R.Z. Picosecond view of microscopic-scale polarization clusters in paraelectric $BaTiO_3$ [Text] / R.Z. Tai, K. Namikawa, A. Sawada, [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 93. – P. 087601 (4 p.).

УДК 53.043, 539.196.3

В.А. Юрова, А.Б. Федорцов, Г.Л. Климчицкая, Ю.В. Чуркин

ДАВЛЕНИЕ СИЛЫ КАЗИМИРА НА СЛОЙ ДИЭЛЕКТРИКА В НАНОРАЗМЕРНЫХ СЛОИСТЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ АЛЮМИНИЙ – ОКСИД КРЕМНИЯ – КРЕМНИЙ

Слоистые твердотельные структуры металл – диэлектрик – полупроводник (МДП-структуры) имеют многочисленные применения в производстве электронных устройств [1]. Эти структуры широко используются для создания интегральных схем, приборов с зарядовой связью, полевых транзисторов, конденсаторов, оптоэлектронных устройств и т. п. Толщина диэлектрика в первых приборах с МДП-структурой составляла 10 – 20 нм, а в настоящее время она приблизилась к 1 нм. Разработчики электронных компонентов в последние годы стремятся уменьшить данную толщину, так как это позволяет снизить рабочие напряжения, энергопотребление и повысить радиационную стойкость электронных приборов. Специфическим видом МДП-структур являются так называемые МОП-структуры, в которых роль диэлектрического слоя выполняет окисел полупроводниковой подложки. Чаще всего это диоксид кремния SiO_2 на монокристаллической кремниевой подложке. В качестве металлизации обычно используется алюминий.

Поскольку с уменьшением размеров электронных устройств дисперсионные силы должны играть все большую роль [2], мы провели исследование дисперсионных сил в таких широко распространенных наноразмерных структурах современной электроники, как МДП-структуры. На первой стадии наших работ [3] мы исследовали классические МОП-структуры на основе монокристаллического кремния, покрытого окислом в качестве диэлектрика и имеющего алюминиевую металлизацию. Такая структура широко используется во многих приложениях и является хорошей моделью для вычисления давления силы Казимира, действующего на диэлектрический слой. В работе [3] мы рассматривали структуры с толщиной диэлектрика в диапазоне от 80 до 40 нм. Было показано, что толщина слоя алюминиевой металлизации очень слабо влияет на величину казимировского давления в характерном для МОП-структуры диапазоне. При этом установлен резкий рост давления дисперсионных сил: от 5 – 6 Па при толщине диэлектрика $a = 80$ нм до 70 Па при $a = 40$ нм.

В настоящей работе мы рассматриваем структуру Al–SiO_2–Si, но со значительно более тонким изолирующим слоем – вплоть до 1 нм, и сравниваем полученные значения казимировского давления с величинами, предсказываемыми нерелятивистской теорией для сил Ван-дер-Ваальса.

Теория Лифшица для многослойных структур

Давление силы Казимира, действующей на слой диэлектрика SiO_2 толщиной a в структуре Al–SiO_2–Si, может быть рассчитано по теории Лифшица [2, 3]:

$$P(a,T) = \frac{k_B T}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty}{}' \int_0^{\infty} k_\perp dk_\perp k_l^{(0)} \times \times \sum_\alpha \left[\frac{e^{2ak_l^{(0)}}}{R_\alpha^{(\mathrm{Al})}(i\xi_l, k_\perp) R_\alpha^{(\mathrm{Si})}(i\xi_l, k_\perp)} - 1 \right]^{-1}, \quad (1)$$

где k_B – постоянная Больцмана; $T = 300$ K; $\xi_l = 2\pi k_B T l / \hbar \, (l = 0, 1, 2, \ldots)$ – мацубаровские частоты; $k_\perp$ – проекция волнового вектора на плоскость слоя; функции $R^{(\mathrm{Al,\,Si})}$ – это коэффициенты отражения для двух независимых поляризаций электромагнитного поля от границы раздела слоя SiO_2 и Al (или Si).

Штрих в первой сумме означает, что первый член суммы с $l = 0$ делится на 2 в отличие от остальных.

Строго говоря, надо использовать коэффициенты отражения для многослойных структур, так как слои алюминия и кремния имеют конечную толщину, а в кремнии, кроме того, вблизи поверхности может существовать тонкий слой с повышенной (или пониженной) концентрацией свободных носителей заряда. Однако пред-

варительные исследования [3], проведенные для значений толщины диэлектрика в диапазоне от 40 до 80 нм, показали, что характерные для МДП-структур значения толщины слоев алюминия и кремния достаточно велики, чтобы рассматривать их как полубесконечные. На основе полученных результатов исследования дисперсионных сил в МДП-структуре [3] было установлено, что присутствие приповерхностного слоя с повышенной концентрацией носителей заряда также оказывает лишь незначительное влияние на давление Казимира. Этот эффект еще ослабляется с уменьшением толщины изолирующего слоя [3]. Причины явления не вполне ясны, однако указанное ослабление согласуется с данными экспериментальных работ [4], где под действием лазерных импульсов также менялась поверхностная концентрация носителей заряда. Указанное изменение, однако, не приводило к заметному отклонению измеряемых значений силы Казимира от таковых при сходных значениях параметров обогащенного слоя. Возможно, это связано с очень малой толщиной слоя, имеющего повышенную концентрацию носителей заряда. Для зависимости коэффициентов отражения от мнимой части частоты мы можем использовать следующие выражения:

$$R_{TM}^{(X)}\left(i\xi_l k_\perp\right)=\frac{\varepsilon_l^{(X)}k_l^{(0)}-\varepsilon_l^{(0)}k_l^{(X)}}{\varepsilon_l^{(X)}k_l^{(0)}+\varepsilon_l^{(0)}k_l^{(X)}};$$
$$R_{TE}^{(X)}\left(i\xi_l k_\perp\right)=\frac{k_l^{(0)}-k_l^{(X)}}{k_l^{(0)}+k_l^{(X)}}, \qquad (2)$$

где

$$k_l^{(X)}=\sqrt{k_\perp^2+\varepsilon_l^{(X)}\frac{\xi_l^2}{c^2}}, \qquad \varepsilon_l^{(X)}\equiv\varepsilon^{(X)}\left(i\xi_l\right),$$
$$k_l^{(0)}=\sqrt{k_\perp^2+\varepsilon_l^{(0)}\frac{\xi_l^2}{c^2}}. \qquad (3)$$

Здесь индекс (X) означает либо (Al), либо (Si) и $\varepsilon_l^{(0)}\equiv\varepsilon^{(\mathrm{SiO_2})}\left(i\xi_l\right)$. Уравнения (1) – (3) позволяют вычислить давление Казимира в МДП-структурах.

Результаты вычислений

В предыдущей работе мы использовали простейшие модели для описания диэлектрической проницаемости материалов, из которых выполнены слои исследуемой структуры металл – диэлектрик – полупроводник. Для описания диэлектрической проницаемости алюминия, из которого выполнен контактный слой МДП-структуры, были использованы как модель Друде:

$$\varepsilon_{\mathrm{D}}^{(\mathrm{Al})}\left(i\xi\right)=1+\frac{\omega_{p,\mathrm{Al}}^2}{\xi\left(\xi+\gamma_{\mathrm{Al}}\right)}, \qquad (4)$$

так и плазменная модель:

$$\varepsilon_{p}^{(\mathrm{Al})}\left(i\xi\right)=1+\frac{\omega_{p,\mathrm{Al}}^2}{\xi^2}. \qquad (5)$$

Здесь $\omega_{p,\mathrm{Al}}$ = 13 эВ – частота колебаний плазмы; γ_{Al} = 0,0645 эВ – параметр релаксации для алюминия.

Было показано, что при толщине диэлектрического слоя диоксида кремния a = 80 нм расхождение результатов расчета величины давления, создаваемого силой Казимира на этот слой в МДП-структуре, полученных с использованием двух рассмотренных моделей описания диэлектрических проницаемостей алюминия, не превышает 0,5 %. Это расхождение является весьма малым для рассматриваемых нами расстояний между объектами, и, по-видимому, определяется точностью исходных данных, которые используются в вычислениях [2, 5].

В настоящей работе для расчетов давления, создаваемого силой Казимира на диэлектрический слой в МДП-структуре, мы используем более точные модели описания диэлектрических проницаемостей веществ. Дело в том, что для случая со значениями толщины диэлектрического слоя в исследуемой МДП-структуре, составляющими единицы нанометров, для определения величины дисперсионного взаимодействия необходима более полная информация для описания диэлектрической проницаемости материалов в весьма большом диапазоне частот (энергий), вплоть до $\xi \approx 658$ эВ.

Как известно, применение простых моделей (4) и (5) в области столь высоких частот является неверным. Поэтому для проведения вычислений давления силы Казимира для диапазона толщин диэлектрического слоя от a = 40 нм до a = 1 нм мы используем экспериментальные данные [6] для комплексного показателя пре-

ломления для диапазона частот от $\xi = 0{,}04$ эВ до $\xi = 10$ кэВ. Значение диэлектрической проницаемости вдоль мнимой оси частот можно вычислить с помощью дисперсионных соотношений Крамерса – Кронига, применительно к модели Друде описания диэлектрической проницаемости [2]:

$$\varepsilon(i\xi) = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\,\mathrm{Im}\left[\varepsilon(\omega)\right]}{\omega^2 + \xi^2} d\omega, \qquad (6)$$

и для плазменной модели [3, 8] –

$$\varepsilon(i\xi) = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\,\mathrm{Im}\left[\varepsilon(\omega)\right]}{\omega^2 + \xi^2} d\omega + \frac{\omega_p^2}{\xi^2}. \qquad (7)$$

В уравнении (6) мы использовали табличные данные [6] для определения мнимой части диэлектрической проницаемости алюминия в области частот менее 0,04 эВ, вычислив с помощью уравнения (4) мнимую часть диэлектрической проницаемости вдоль действительной оси частот:

$$\mathrm{Im}\left[\omega_D(\omega)\right] = \frac{\omega_{p,\mathrm{Al}}^2 \gamma_{\mathrm{Al}}}{\omega\left(\omega^2 + \gamma_{\mathrm{Al}}^2\right)}. \qquad (8)$$

При этом мы использовали значения плазменной частоты и параметра релаксации для алюминия, представленные ранее. В уравнении (7) значение диэлектрической проницаемости учитывает также вклад электронов проводимости.

На рис. 1 представлены графики частотной зависимости диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{(\mathrm{Al})}$ алюминия. Значения величины $\varepsilon^{(\mathrm{Al})}$ получены на основе табличных данных, экстраполированных в область низких частот (с помощью уравнений (6) и (7) соответственно). Отметим, что сходные результаты могут быть получены с помощью более точных методов вычислений, таких как дисперсионные соотношения Крамерса – Кронига, с использованием так называемой весовой функции [7, 8].

Для описания диэлектрической проницаемости кремния, из которого выполнена полупроводниковая подложка в МДП-структуре, в предыдущей работе мы использовали простую аналитическую формулу [9]:

$$\varepsilon^{(\mathrm{Si})}(i\xi) = 1{,}035 + \frac{10{,}73\omega_{\mathrm{Si}}^2}{\xi^2 + \omega_{\mathrm{Si}}^2}, \qquad (9)$$

где частота $\omega_{\mathrm{Si}} = 6{,}6\cdot 10^{15}$ рад/с.

Как было показано в работе [2], при вычислении давления силы Казимира с использованием выражения (9), при расстояниях между взаимодействующими слоями порядка 100 нм, погрешность вычислений составляет менее 1%. В данном исследовании толщина диэлектрического слоя берется значительно меньшей, поэтому значения диэлектрической проницаемости кремния были рассчитаны с помощью уравнения (6) и с использованием оптических данных, представленных в работе [10]. Расчеты выполнены аналогично проделанным в работе [11], где сравнивались с теорией экспериментальные данные, полученные при измерении дисперсионных сил между двумя кремниевыми пластинами. Значения комплексного показа-

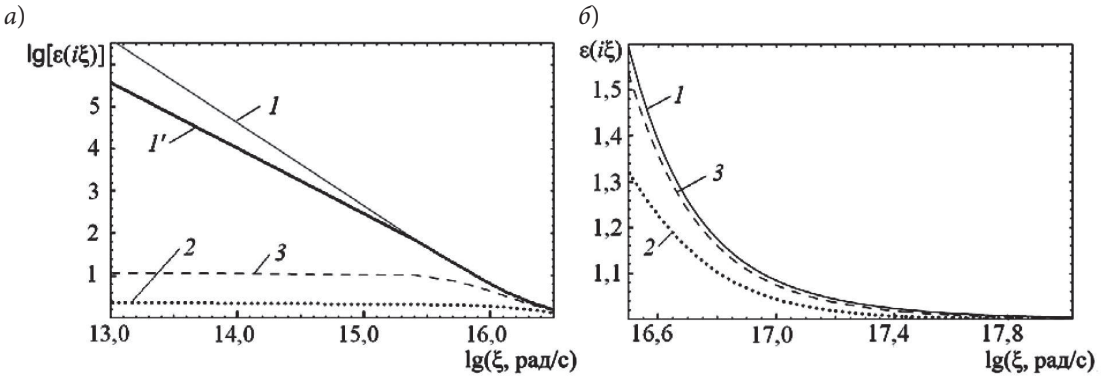


Рис. 1. Расчетные зависимости диэлектрической проницаемости материалов МДП-структуры от мнимой части частоты; области низких, средних, высоких (*а*) и очень высоких (*б*) частот; *1*, *1'* – Al; *2* – SiO_2; *3* –Si; *1*, *1'* – расчеты с помощью уравнений (6) и (7) соответственно

теля преломления для кремния определены экспериментально для области частот от $\omega_{min} =$ $= 4{,}96$ мэВ до $\omega_{max} = 2$ кэВ [10]. Исходя из этих данных, получаем, что $\mathrm{Im}[\varepsilon^{(Si)}(\omega)] = 0$ в частотном диапазоне от 4,96 мэВ до 0,5 эВ. Таким образом, при частотах $\omega < 4{,}96$ мэВ применяется метод приближения, при котором мнимая часть диэлектрической проницаемости кремния может быть приравнена к нулю. Метод аппроксимации также используется при рассмотрении диэлектрической проницаемости в области высоких частот. Тогда интеграл в выражении (6) можно переписать в виде

$$\varepsilon^{(Si)}(i\xi) = 1 + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \frac{\omega\,\mathrm{Im}\left[\varepsilon^{(Si)}(\omega)\right]}{\omega^2+\xi^2} d\omega + \\ + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\omega_{max}}^{\infty} \frac{\omega\,\mathrm{Im}\left[\varepsilon^{(Si)}(\omega)\right]}{\omega^2+\xi^2} d\omega. \qquad (10)$$

Первый интеграл в правой части уравнения (10) вычисляется с использованием таблиц оптических данных веществ [10]. Значение второго интеграла в правой части выражения (10) дает существенный вклад при вычислении диэлектрической проницаемости кремния. При аппроксимации табличных данных в области высоких частот следует учитывать, что мнимая часть диэлектрической проницаемости представляет собой убывающую функцию, которая обратно пропорциональна кубу частоты флуктуаций электромагнитного поля ($\sim 1/\omega^3$). С учетом того, что основной вклад в величину диэлектрической проницаемости даже при малых толщинах диэлектрического слоя вносят частоты, меньшие рассматриваемого максимального значения, т. е. $\omega < \omega_{max}$, получим:

$$\mathrm{Im}\left[\varepsilon^{(Si)}(\omega)\right] = \mathrm{Im}\left[\varepsilon^{(Si)}(\omega_{max})\frac{\omega^3_{max}}{\omega^3}\right]. \qquad (11)$$

Затем второй интеграл в правой части выражения (10) может быть вычислен аналитически:

$$I(\xi,\omega_{max}) = \int\limits_{\omega_{max}}^{\infty} \frac{\omega\,\mathrm{Im}\left[\varepsilon^{(Si)}(\omega)\right]}{\omega^2+\xi^2} d\omega = \\ = \mathrm{Im}\left[\varepsilon^{(Si)}(\omega_{max})\frac{\omega^3_{max}}{\xi^3}\left(\frac{\xi}{\omega_{max}} - \mathrm{arctg}\frac{\xi}{\omega_{max}}\right)\right]. \qquad (12)$$

Это выражение можно упростить, так как нас интересуют частоты ξ, дающие основной вклад в величину давления силы Казимира. При частотах $\xi << \omega_{max}$, что обычно имеет место при использовании табличных данных для комплексного показателя преломления в расчетах сил Казимира, получим:

$$I(\xi,\omega_{max}) \approx \frac{\mathrm{Im}\left[\varepsilon^{(Si)}(\omega_{max})\right]}{3}. \qquad (13)$$

Полученные значения диэлектрической проницаемости кремния представлены на рис. 1 (кривые *3*).

Для слоя диоксида кремния SiO_2 мы использовали приближение двухосцилляторной модели для описания диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon^{SiO_2}(i\xi) = 1 + \frac{C_{UV}\omega^2_{UV}}{\omega^2_{UV}+\xi^2} + \frac{C_{IR}\omega^2_{IR}}{\omega^2_{IR}+\xi^2}. \qquad (14)$$

Значения параметров, входящих в это выражение, приведены в статье [12]:

$$C_{UV} = 1{,}098,\ \omega_{UV} = 2{,}033\cdot 10^{16}\ \text{рад/с},$$
$$C_{IR} = 1{,}703,\ \omega_{IR} = 1{,}88\cdot 10^{14}\ \text{рад/с}.$$

Значения диэлектрической проницаемости диоксида кремния вдоль мнимой оси частот, полученные при использовании двухосцилляторной модели, также представлены на рис. 1 (кривые *2*).

Как видно из рис. 1, для рассматриваемой трехслойной системы во всем диапазоне частот выполняется следующее неравенство:

$$\varepsilon^{(Al)}(i\xi) > \varepsilon^{(Si)}(i\xi) > \varepsilon^{(SiO_2)}(i\xi). \qquad (15)$$

Это означает, что дисперсионное взаимодействие между слоями алюминия и кремния является притягивающим для любой толщины диэлектрического слоя.

Результаты вычислений величины давления силы Казимира по формуле (1), оказываемого на слой диэлектрика в МДП-структуре при температуре $T = 300$ K, приведены на рис. 2 в виде функции от толщины *a* диэлектрического слоя SiO_2. Давление возрастает от 70 Па до 8 МПа при уменьшении толщины слоя от 40 до 1 нм. Отметим, что при вычислении

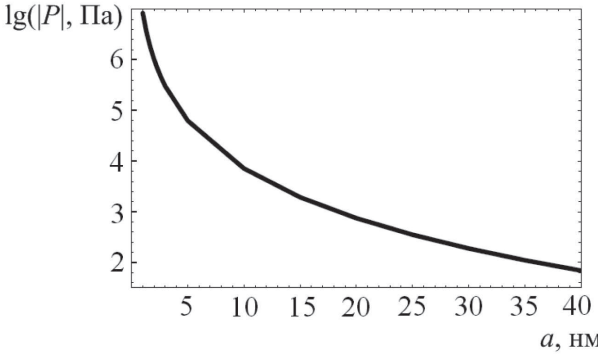


Рис. 2. Зависимость давления силы Казимира в структуре Al–SiO_2–Si от толщины диэлектрического слоя SiO_2

давления дисперсионных сил с использованием простой модели Друде и плазменной (см. формулы (4) и (5) соответственно) для описания диэлектрической проницаемости алюминия и приближенного аналитического выражения для кремния (9), мы получили [3], что давление составляет величину 67 Па при значении $a = 40$ нм, т. е. всего на 3 % меньше результата расчетов с использованием рассмотренных в данной статье более точных методов вычислений.

Нерелятивистское приближение

При значениях толщины слоя диоксида кремния в единицы нанометров дисперсионное взаимодействие может быть рассмотрено как частный случай сил Ван-дер-Ваальса в нерелятивистском приближении. Такой случай рассматривается в настоящем разделе и позволяет определить область применения нерелятивистской теории дисперсионного взаимодействия.

Давление сил Ван-дер-Ваальса между двумя пластинами в нерелятивистском приближении определяется выражением

$$P_{nr}(a) = -\frac{H}{6\pi a^3}, \qquad (16)$$

где H – константа Гамакера.

Для рассматриваемой структуры $Al - SiO_2 - Si$ она может быть записана как

$$H = \frac{3\hbar}{8\pi}\int_0^\infty d\xi \int_0^\infty y^2 dy \left[\frac{e^y}{r_{Al}(i\xi) r_{Si}(i\xi)} - 1\right]^{-1}, \qquad (17)$$

где коэффициенты отражения следуют выражениям

$$r_X(i\xi) \equiv \frac{\varepsilon^{(X)}(i\xi) - \varepsilon^{(SiO_2)}(i\xi)}{\varepsilon^{(X)}(i\xi) + \varepsilon^{(SiO_2)}(i\xi)}, \qquad (18)$$

причем X соответствует либо Al, либо Si.

Эти коэффициенты отражения зависят только от частоты. Отметим, что нерелятивистское выражение (16) с константой Гамакера (17) получено из формулы Лифшица (1) для случая, когда расстояние между пластинами меньше, чем характеристическая длина волны поглощения в материале и когда характеристическая частота эффекта Казимира $\omega_c = c/(2a)$ много больше частоты поглощения.

Используя разложение в ряд

$$\left[\frac{e^y}{r_{Al}(i\xi) r_{Si}(i\xi)} - 1\right]^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[r_{Al}(i\xi) r_{Si}(i\xi)\right]^k e^{-ky}, \qquad (19)$$

можно провести интегрирование каждого члена суммы в правой части уравнения (19) по переменной y:

$$\int_0^\infty y^2 e^{-ky} dy = \frac{2}{k^3}. \qquad (20)$$

Затем уравнение (17) можно переписать в виде

$$H = \frac{3\hbar}{4\pi}\int_0^\infty d\xi \,\mathrm{Li}_3\left[r_{Al}(i\xi) r_{Si}(i\xi)\right], \qquad (21)$$

где $\mathrm{Li}_n(z)$ – полулогарифмическая функция

$$\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}. \qquad (22)$$

Вычисление константы Гамакера (21) с учетом значений диэлектрической проницаемости (см. рис. 1) дает значение $H = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж ≈ 1 эВ. Этот результат не зависит от модели диэлектрической проницаемости, использованной для алюминия. Чтобы проиллюстрировать предел применения выражения (21), мы приводим на рис. 3 зависимость относительной разности давлений δP, вычисленных по нерелятивистской теории и теории Лифшица (1):

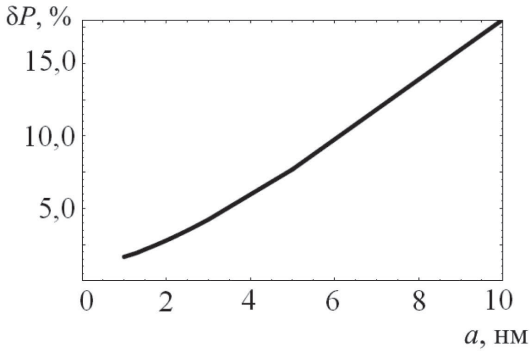


Рис. 3. Относительная разница результатов вычисления давления силы Казимира в структуре $Al - SiO_2 - Si$ в нерелятивистском пределе и на основе теории Лифшица как функция толщины оксида

$$\delta P(a) = \left| \frac{P_{nr}(a) - P(a)}{P(a)} \right|, \qquad (23)$$

от толщины слоя диэлектрика a.

Видно, что δP меньше 5 % только в узком диапазоне при $a \le 3{,}5$ нм и быстро возрастает при увеличении толщины диэлектрика a. Данный результат находится в соответствии с данными работы [13], полученными для двух металлических пластин, разделенных слоем вакуума, и подтверждает, что нерелятивистская теория применима только на очень малых расстояниях между взаимодействующими слоями. Однако именно такие расстояния представляют наибольший интерес для современных МДП-устройств.

Исследование давления дисперсионных сил в твердотельных слоистых структурах, изготовленных на основе кремниевых монокристаллических подложек со слоем диоксида кремния в качестве диэлектрика и имеющих алюминиевую металлизацию, показало, что казимировское давление в диэлектрическом слое растет примерно от 70 Па до 8 МПа при уменьшении толщины слоя диэлектрика от 40 до 1 нм. Величина казимировского давления, полученная для наиболее тонких слоев оксида кремния, – весьма большая и должна приниматься во внимание при конструировании электронных приборов вследствие возможного влияния этого давления на процесс их функционирования.

Можно ожидать, что замена алюминия в структуре металл – диэлектрик – полупроводник на какой-либо другой металл не должна привести к существенному изменению в величине казимировского давления. Для выяснения этого предположения было бы интересно провести исследования структур металл – диэлектрик – полупроводник с палладиевой металлизацией. Именно такие структуры используются в датчиках водорода [14], предназначенных для водородной энергетики.

Большие изменения можно ожидать в величине казимировского давления в структурах металл – диэлектрик – полупроводник с новыми типами диэлектриков, например с нитридом кремния. Особенно интересно было бы исследовать МДП-структуры с диэлектрическим слоем, имеющим ультравысокую диэлектрическую проницаемость (k-high dielectric) [15]. Подобные структуры на основе диэлектрических слоев окисла галлия толщиной менее 3 нм специально производятся для использования в электронной аппаратуре фирмой «Intel».

Авторы благодарят Министерство образования и науки РФ за поддержку работы в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гранты 16.740.11.0144 и П898).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sedra, A.S.** Microelectronics circuits [Text] / A.S. Sedra, K.C. Smoth. – Oxford: Oxford University Press, 2003. – 1459 p.

2. **Borgad, M.** Advances in the Casimir effect [Text] / M. Borgad, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko. – Oxford: Oxford University Press, 2007. – 750 p.

3. **Федорцов, А.Б.** Давление силы Казимира на слой диэлектрика в структурах металл – диэлектрик – полупроводник [Текст] / А.Б. Федорцов, Г.Л. Климчицкая, Ю.В. Чуркин, В.А. Юрова // Физика твердого тела. – 2011. – № 53. – С. 1820–1825.

4. **Chen, F.** Demonstration of optically modulated dispersion forces [Text] / F. Chen, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko // Optics Express. – 2007. – Vol. 8. – N.5. – P. 4823 – 4829.

5. **Chen, F.** Theory confronts experiment in the Casimir force measurements: quantification of errors and precision [Text] / F. Chen, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen [et al.] // Phys. Rev. A. – 2004. – Vol. 69. – P. 022117–022128.

6. **Palik, E.D.** (ed.) Handbook of optical constants of solids [Text] / ed. E.D. Palik. – New York: Academic Press, 1985. – Vol. I. – 749 p.

7. **Klimchitskaya, G.L.** Kramers – Kronig relations for plasma-like permittivities and the Casimir force [Text] / G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko // J. Phys. A. – 2007. – Vol. 40. – P. 340–347.

8. **Bimonte, G.** Making precise predictions of the Casimir force between metallic plates via a weighted Kramers – Kronig transform [Text] / G. Bimonte // Phys. Rev. A. – 2011. – Vol. 83. – P. 042109–42126.

9. **Lambrecht, A.** The Casimir effect for silicon and gold slabs [Text] / A. Lambrecht, I. Pirozhenko, L. Duraffourg, Ph. Andreucci // Europhys. Lett. – 2007. – Vol. 77. – N. 4. – P. 44006–440011.

10. **Palik, E.D.** (ed.) Handbook of optical constants of solids [Text] / ed. E.D. Palik. – New York: Academic Press, 1985. – Vol. II. – 1096 p.

11. **Klimchitskaya, G.L.** Control of the Casimir force using semiconductor test bodies [Text] / G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko // Int. J. Mod. Phys. B. – 2011. – Vol. 25. – P. 171–230.

12. **Bergström, L.** Hamaker constants of inorganic materials [Text] / L. Bergström// Adv. Coll. Interface Sci. – 1997. – Vol. 70. – P. 125–169.

13. **Klimchitskaya, G.L.** Casimir and van der Waals forces between two plates or a sphere (lens) above a plate made of real metals [Text] / G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko // Phys. Rev. A. – 2000. – Vol. 61. – P. 062107–062119.

14. **Гусев, А.Л.** Датчики водорода и водородосодержащих молекул [Текст] / А.Л. Гусев, И.В. Золотухин, Ю.Е. Калинин, А.В. Ситников // Международный научный журнал «Альтернативная энергетика и экология». – 2005. – № 5. – С. 23–31.

15. **Chau, R.** High- metal-gate stack and its MOSFET characteristics [Text] / R. Chau, S. Datta, M. Doczy, B. Doyle // EDL. – 2004. – Vol. 25. – P. 408–410.

УДК 621.315.592

И.А. Ламкин, Е.А. Менькович, С.А. Тарасов

УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ ФОТОДИОДЫ НА ОСНОВЕ КОНТАКТОВ МЕТАЛЛ – ТВЕРДЫЕ РАСТВОРЫ НИТРИДОВ ГАЛЛИЯ И АЛЮМИНИЯ

В настоящее время одной из важных задач оптической наноэлектроники является разработка коротковолновых фотоприемников, обладающих высокой эффективностью. Особенно актуально создание ультрафиолетовых (УФ) фотодетекторов, которые становятся все более востребованными для ряда медицинских, экологических, биотехнологических, астрономических, астронавигационных, военных и других применений. Во многих случаях требуются структуры, не чувствительные к излучению видимого и ИК-диапазонов спектра, так называемые «видимослепые» фотоприемники ($\lambda_{max} < 0{,}38$ мкм) или даже «солнечнослепые» ($\lambda_{max} < 0{,}30$ мкм) приборы, не реагирующие на ультрафиолетовую часть спектра излучения Солнца. Применение для таких целей кремниевых или арсенид-галлиевых фотодетекторов весьма затруднительно, поскольку требует использования весьма дорогостоящих оптических фильтров. Кроме того, чувствительность этих материалов к УФ-излучению существенно ниже, чем к видимому свету.

Решить эту проблему позволяет использование широкозонных соединений на основе твердых растворов нитрида галлия и алюминия. AlN-GaN образуют непрерывный ряд прямозонных твердых растворов, дающих возможность создавать фотоприемники с резким длинноволновым краем чувствительности в заданной области, в том числе видимо- и солнечнослепые. Дополнительные преимущества дает использование при создании фотодетекторов выпрямляющих контактов металл –полупроводник. Фотоприемные структуры на основе барьера Шоттки обладают повышенной чув-

ствительностью, высоким быстродействием и сравнительно невысокой стоимостью.

В работе представлены созданные ультрафиолетовые фотоприемники на основе контактов металл – $Al_xGa_{1-x}N$, где состав варьировался для различных образцов в диапазоне значений x от 0 до 0,7. Структуры фотоприемников выращивались на сапфировой подложке методом молекулярно-пучковой эпитаксии с плазменной активацией азота. Толщина эпитаксиального слоя твердого раствора $Al_xGa_{1-x}N$ составляла порядка 1 мкм. Далее методом вакуумного термического напыления создавались омический и выпрямляющие контакты. Напыление проводилось в вакууме, при давлении не хуже $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ мм рт. ст. Для хорошей адгезии при напылении подложка подогревалась до температуры 300 °С. Расстояние от лодочки с испаряемым веществом до образца составляло 10 см для соблюдения однородности пленки металла по поверхности образца. Толщина пленки задавалась массой испаряемого металла и рассчитывалась по формуле:

$$d_{Me} = \frac{M_{Me}}{\pi \rho_{Me} h_{\text{нап}}^2 \left(1 + \left(\frac{L_{\text{нап}}}{h_{\text{нап}}}\right)^2\right)^2},$$

где M_{Me} – масса навески, ρ_{Me} – плотность испаряемого материала, $h_{\text{нап}}$ – расстояние от источника до объекта напыления, $L_{\text{нап}}$ – расстояние от центра объекта напыления до его периферии.

На первом этапе исследовалось влияние очистки поверхности структуры перед напылением контактов. Образцы перед загрузкой в вакуумную камеру напыления погружались в такие химические реактивы, как изопропиловый спирт, перекись водорода, четыреххлористый углерод, «царская водка», разбавленная соляная кислота (1:1). После 5-минутной очистки образцы промывались в дистиллированной воде в течение 1 мин и загружались в камеру напыления. Установлено, что очистка в четыреххлористом углероде позволяет получить наименьшее сопротивление [1].

Была отработана технология создания омических контактов к эпитаксиальным слоям с большой долей алюминия. Омические контакты создавались по оптимизированной технологии: структура контакта – Ti/Al, где титан является подслоем для алюминия. Толщина титанового слоя составляла 15 нм, а алюминиевого – 35 нм. Для сильнолегированных образцов n-AlGaN можно было использовать однослойные алюминиевые контакты с последующим отжигом в вакууме при температуре 800 °С в течение 30 мин для получения омической вольтамперной характеристики. Однако использование двухслойного контакта Ti/Al позволяет снизить контактное сопротивление и уменьшить время и температуру отжига. Также использование сильнолегированных эпитаксиальных слоев невозможно при создании фоточувствительных структур на основе барьера Шоттки. Кроме того, для слаболегированного твердого раствора n-типа AlN-GaN не удалось добиться омической характеристики при использовании однослойного контакта, даже проводя отжиг при температуре 930 °С в течение длительного времени. Поэтому предпочтение было отдано двухслойным контактам Ti/Al. Для получения омической характеристики проводился отжиг при температуре 750 °С в течение 10 мин (рис. 1). Чтобы не допустить окисления титана и алюминия, особенно при высоких температурах, отжиг проводился в вакууме при давлении остаточных газов 10^{-3} мм рт. ст.

Результаты, полученные при отжиге омических контактов, можно объяснить следующим образом. При высокой температуре (750 °С и

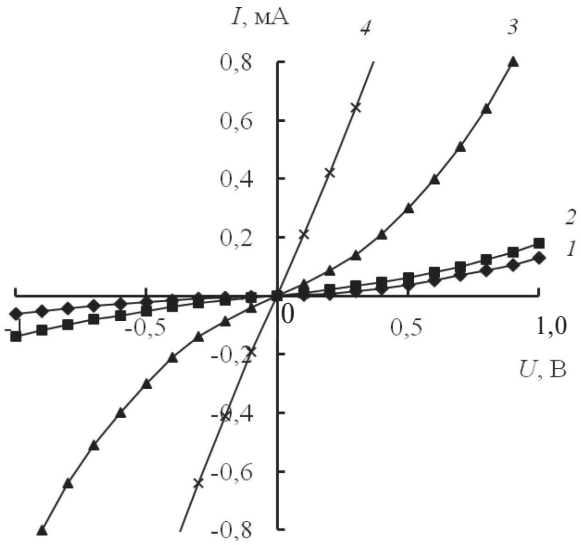


Рис. 1. Влияние температуры отжига на вольтамперные характеристики контакта Ti/Al; температура, °С: 450 (*1*), 550 (*2*), 650 (*3*), 750 (*4*)

выше) происходит взаимодиффузия титана и азота из твердого раствора с формированием промежуточного слоя нитрида титана. При этом у поверхности AlGaN возникает большое количество вакансий азота, что позволяет рассматривать верхний слой полупроводника как высоколегированный. Между этим слоем и слоем нитрида титана, по-видимому, существует очень тонкий барьер, который становится туннельно-прозрачным для носителей заряда благодаря наличию подлегированного вакансиями слоя. Образование нитрида титана, возможно, препятствует проникновению алюминия в полупроводник, этот металл может уширять барьер.

При низких температурах образование слоя TiN затруднено. При увеличении продолжительности отжига в этом случае, возможно, происходит деградация контактов с образованием оксинитрида алюминия.

Фоточувствительный контакт для соблюдения эффекта полупрозрачности создавался толщиной менее 15 нм. В качестве пробных металлов выпрямляющего контакта исследовались никель, золото, серебро, олово, теллур, индий и другие. Контакты наносились методом вакуумного термического напыления через маску, диаметр контакта – 2 мм.

Установлено, что структуры с золотым прозрачным контактом проявляют наибольшую чувствительность, а температурная обработка структуры показала, что отжиг этого контакта увеличивает фоточувствительность в три раза (рис. 2).

Такое поведение спектральной характеристики можно объяснить следующим образом. Перед загрузкой эпитаксиальных слоев в вакуумную камеру для формирования полупрозрачного контакта на поверхности образца образуется слой оксида. Предварительная очистка позволяет убрать только органические и иные загрязнения с поверхности. После напыления золотого контакта получается структура металл – диэлектрик (тонкий слой оксида) – полупроводник. В процессе отжига сформированной структуры золото, вероятно, частично диффундирует через слой оксида ближе к поверхности полупроводника, что уменьшает сопротивление структуры в целом и, как следствие, повышает ее фоточувствительность.

Следующим этапом в работе было исследование влияния состава твердого раствора на спектральный диапазон фоточувствительности. Как видно из рис. 3, использование твердого раствора AlGaN, в котором доля алюминия $x = 0{,}08$, позволяет создать «видимослепой» ультрафиолетовый фотоприемник. Такой фотоприемник обладает чувствительностью в диапазоне длин волн 200 – 360 нм. Кроме того, он абсолютно не чувствителен к излучению длиной волны более 370 нм, что позволяет его применять для детектирования ультрафиолетового излучения при сильной внешней засветке.

Увеличение доли алюминия в структуре позволило сместить край чувствительности в коротковолновую область, в том числе создать «солнечнослепой» фотоприемник при значении $x = 0{,}42$. Красная граница «солнечнослепого» ультрафиолетового фотодиода состави-

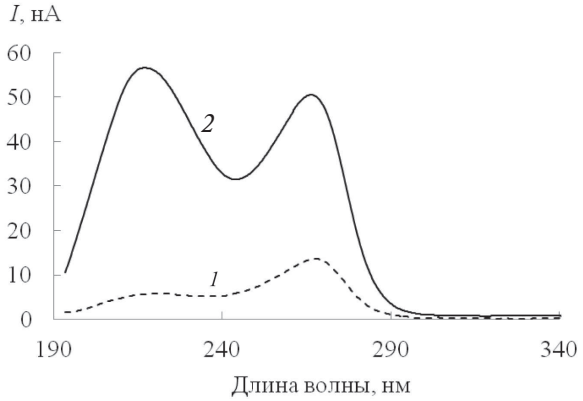


Рис. 2. Влияние отжига золотого контакта на величину фоточувствительности структуры:
1 – зависимость без отжига, *2* – зависимость с отжигом

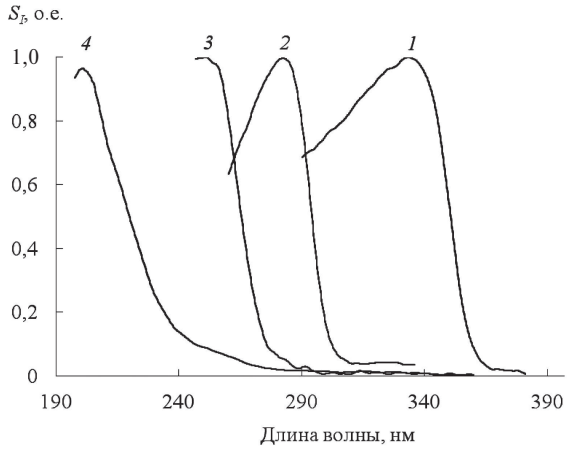


Рис. 3. Влияние состава твердого раствора $Al_xGa_{1-x}N$ на длинноволновую границу фоточувствительности:
$x = 0{,}08$ (*1*); 0,42 (*2*); 0,52 (*3*); 0,70 (*4*)

ла 290 нм. При значении x более 0,7 диапазон чувствительности структуры $Al_xGa_{1-x}N$ будет находиться уже в вакуумном ультрафиолете, длина волны которого меньше 200 нм.

Коротковолновый край определяется в первую очередь состоянием границы раздела металл – полупроводник и соответствующим значением скорости поверхностной рекомбинации. Наибольшую чувствительность коротковолновой области демонстрировали структуры с золотым контактом, что можно объяснить наименьшей скоростью поверхностной рекомбинации в таких образцах. Однако спектральная характеристика фоточувствительной структуры на основе эпитаксиального слоя с долей алюминия $x = 0{,}7$ (см. рис. 3), имеет более резкий спад коротковолновой части спектра. Такой эффект можно объяснить сильным поглощением ультрафиолетового света в этом диапазоне длин волн при проведении измерений в атмосфере.

Итак, проведенные исследования приводят к выводу о высокой перспективности фоточувствительных структур на основе контактов металл – полупроводниковые нитриды для использования в ультрафиолетовой области спектра. Фотодиоды с золотыми контактами проявили наилучшие характеристики. Данный контакт обеспечивает не только более высокую фоточувствительность, но также обладает рядом других преимуществ, например стойкостью к окислению и высокой проводимостью.

При формировании омических контактов к твердым растворам n-AlGaN следует использовать структуру Ti/Al с отжигом при температуре 750 °C в течение 10 мин, причем необходимо отжигать ее в вакууме при давлении не выше 10^{-3} мм рт. ст. Перед нанесением контакта подложку следует очищать в четыреххлористом углероде. Для повышения чувствительности можно также провести отжиг в вакууме при температуре 800 °C в течение 20 мин.

Использование твердого раствора $Al_xGa_{1-x}N$ с долей алюминия $x = 0{,}08$ позволяет создать «видимослепой» фотоприемник, а увеличение мольной доли алюминия до $x = 0{,}42$ дает возможность создать «солнечнослепой» фотоприемник.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ламкин, И.А.** Оптимизация технологии получения омических контактов к эпитаксиальным слоям p-GaN [Текст] И.А. Ламкин, С.А. Тарасов, А.О. Фемоктистов // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2011. – № 5. – С. 14–17.

УДК 674.032.14

Н.Б. Радчук, А.Ю.Ушаков

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОКОМПОЗИТОВ ПЕРЕХОДНЫХ МЕТАЛЛОВ

В последние годы все больший интерес проявляется к наноразмерному состоянию металлов и их оксидов. Это объясняется огромными возможностями применения данных соединений в современных нанотехнологиях: в качестве биологически активных веществ, катализаторов, магнитных материалов, нелинейных оптических сред.

Обычно синтез наноразмерных частиц осуществляется либо деструкцией объемного материала, либо конденсационными методами: испарением при высоких температурах, осаждением из расплава, восстановлением металла из соответствующих солей путем химических реакций. В последнем случае чаще всего применяются сильные (не всегда безвредные) восста-

новители: гидрохинон, формальдегид, цитрат натрия. Путем варьирования концентрации растворов реагентов, последовательности их смешения, температуры и других условий получают наночастицы либо сферической формы в виде полых сфер, либо цилиндрической с отношением длины к диаметру порядка 10, либо прочих форм [1]. Для предотвращения слипания наночастиц в реакционную среду вводится специальное вещество – стабилизатор, разделяющий образующиеся частицы.

Особый интерес представляет методика синтеза металлических наночастиц путем восстановления солей металлов полисахаридом арабиногалактаном (АГ). Это вещество природного происхождения, содержащееся в древесине лиственницы сибирской (и других растений), концентрация которого может достигать 10 – 15 %. АГ обладает уникальной комбинацией свойств: водорастворимостью, проницаемостью через клеточные барьеры живых организмов, иммуномодулирующими свойствами, оптической активностью, а также простотой технологии и доступностью сырья [2]. Арабиногалактан находится в древесине преимущественно в свободном состоянии, что в сочетании с водорастворимостью позволяет извлекать его водной экстракцией.

При взаимодействии АГ с солями металлов происходит реакция восстановления, образуются частицы металла размерами около 5 – 20 нм, окруженные оболочкой из АГ. При этом последний выполняет одновременно как роль восстановителя, так и стабилизатора, ограничивающего размеры металлического ядра. Весьма ценно, что этот металлоорганический композит не теряет свойств чистого АГ – водорастворимости и способности проникать через клеточные мембраны. Такие особенности данного соединения открывают большой комплекс возможностей его применения: в медицине и биологии – для введения лекарственных препаратов и микроэлементов, оптических маркеров, катализаторов, в технике – для создания новых устройств нелинейной оптики.

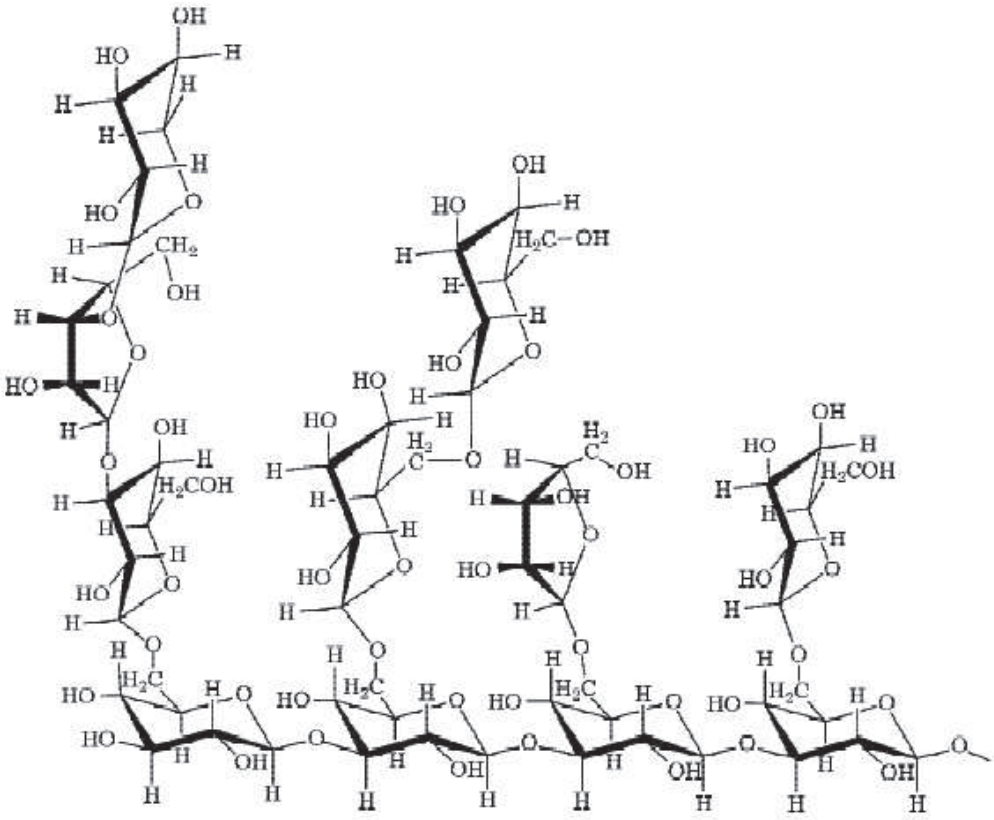


Рис. 1. Структурная формула фрагмента молекулы арабиногалактана

Структурная формула молекулы арабиногалактана имеет высоко разветвленное строение: главная цепь состоит из звеньев галактозы, а боковые цепи – из звеньев галактозы и арабинозы (рис. 1) [3]. Эти боковые звенья обеспечивают водорастворимость и высокую реакционную способность АГ.

Молекулярная масса молекулы АГ колеблется (по данным разных авторов) от 10 до 2000 кДа, что связано с различием свойств макромолекул, выделенных из разных источников, а также различием используемых методов определения [4].

Технология получения металлоорганических нанокомпозитов (НК) включает в себя смешивание растворов АГ и соли соответствующего металла при интенсивном перемешивании и нагреве до температуры около 80 °С. В реакционную смесь добавляют раствор щелочи (NaOH или NH_4OH) до достижения величины pH порядка десяти [5, 6].

Для синтеза металлоорганических нанокомпозитов была построена технологическая установка, состоящая из прозрачного кварцевого реактора, в нижней части которого наклеены силиконовым герметиком нагреватель и термопара. Электронная схема поддерживает необходимую температуру. Перемешивание реакционной смеси производится магнитной мешалкой, облицованной тефлоном. Контроль хода реакции выполняется оптическим датчиком, состоящим из светодиода и фотодиода, установленных на противоположных сторонах реактора. По мере формирования металлических наноядер фотодиод регистрирует возрастание поглощения света в сине-зеленой области видимого спектра; неизменность выходного сигнала фотодиода свидетельствует о завершении реакции.

Раствор АГ с концентрацией 50 % в количестве 10 мл смешивался с растворами хлористых солей цинка, никеля, марганца или кобальта, содержащими по 0,5 г металла, в течение 20 мин, затем добавлялся раствор щелочи (гидрата окиси аммония или едкого натра), и смесь нагревалась до 80 °С. Реакция завершалась в течение 15 – 30 мин, в нанокомпозит переходило около 95 % металла. После охлаждения в жидкость добавлялся изопропиловый спирт в соотношении 1 : 3, и выпавший в осадок нанокомпозит отфильтровывался, промывался спиртом, растворялся в воде и заправлялся в стеклянную кювету для дальнейших исследований. При выборе элемента для формирования металлического ядра нанокомпозита учитывались химические, физические и биологические свойства металлов: все они биологически активные, никель и кобальт – магнитные вещества.

На рис. 2 представлены спектры поглощения растворов нанокомпозитов никеля и кобальта, полученные на решеточном спектрометре в ви-

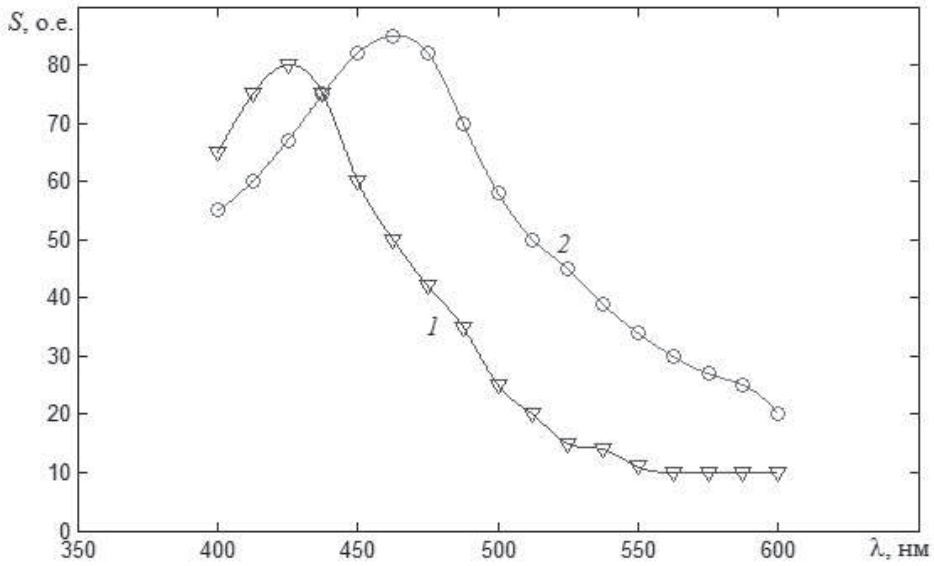


Рис. 2. Спектры оптического поглощения нанокомпозитов никеля (*1*) и кобальта (*2*)

димом диапазоне. Максимумы в коротковолновой части спектра при длинах волн 420 нм (для никеля) и 460 нм (для кобальта), как и в работе [7], можно объяснить плазмонным резонансом на металлических наночастицах. Спектры нанокомпозитов цинка и марганца не приводятся ввиду малой информативности; у НК марганца он подобен спектру кобальта, у спектра цинка он отличается отсутствием коротковолнового резонансного пика и меньшей оптической плотностью, что может быть объяснено меньшей электропроводностью этого металла.

Поскольку резонанс наблюдается при равенстве скоростей электромагнитной волны на поверхности металлической наночастицы и в окружающем ее пространстве, частота резонансного максимума поглощения зависит от формы частицы, ее материала и окружающего вещества. Так, в объемных металлических образцах золота плазмонный резонанс наблюдается в ультрафиолете, а в наночастицах золота – на длине волны порядка 520 нм и смещается в длинноволновую область при увеличении размеров частиц [1]. Положение максимума спектра поглощения НК зависит в числе прочего от размера ядра каждого конкретного металла, что может быть использовано для расчета размеров ядер, а ширина пика в спектре несет информацию о дисперсии их размеров.

Большинство моно- и полисахаридов обладают оптической активностью (гиротропией) – способностью поворачивать плоскость поляризации линейно-поляризованного света, связанной с различными скоростями распространения лево- и право-поляризованного света. Как известно, оптическая активность органических соединений вызвана асимметрией окружения атомов углерода, причем изменение порядка расположения атомов или функциональных групп окружения при неизменном химическом составе изменяет направление поворота. Многие органические вещества существуют в виде таких стереоизомеров – левовращающих (*l*) или правовращающих (*d*).

Оптическая активность вещества характеризуется углом поворота плоскости поляризации φ:

$$\varphi = \alpha c L,$$

где α – удельная постоянная вращения, зависящая от частоты света, *c* – концентрация активного вещества, *L* – длина пути света в растворе.

Один из нерешенных на сегодняшний день вопросов физикохимии металлоорганических нанокомпозитов – это характер связи металлического ядра с оболочкой, т. е. молекулой арабиногалактана. Такая информация может быть получена сравнением оптических характеристик арабиногалактана и синтезированных на его основе нанокомпозитов. Поскольку результирующая оптическая активность молекулы зависит от межатомных взаимодействий и вклады в нее от отдельных асимметричных центров суммируются, ее измерение является очень информативным методом структурных исследований.

Построенный с этой целью поляриметр (рис. 3) содержит полупроводниковый лазер *1*, генерирующий поляризованный свет с длиной волны 650 нм. Свет проходит через оптическую кювету *2* с исследуемым препаратом и затем призмой Волластона *3* разделяется на два пучка с ортогональными поляризациями. Измерения производятся компенсационным методом. Дифференциальным фотодиодом *4* с подключенным к его выводам милливольтметром *5* измеряется разница потоков в световых пучках. Предварительно (без образца) вращением лазера вокруг продольной оси выставляется нулевой отсчет по шкале углов. Возникающие при уста-

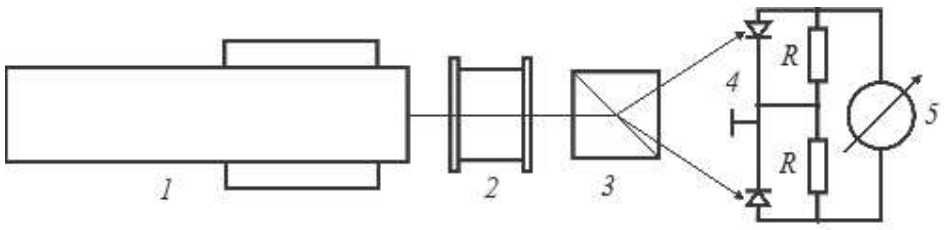


Рис. 3. Блок-схема поляриметра:
1 – полупроводниковый лазер, *2* – оптическая кювета, *3* – призма Волластона, *4* – дифференциальный фотодиод, *5* – милливольтметр

новке кюветы поворот плоскости поляризации светового пучка и разбаланс устройства фиксируются милливольтметром *5* и компенсируются поворотом лазера, на котором закреплен стрелочный измерительный механизм.

Измерения проводились на 30 – 50%-м водном растворе арабиногалактана и синтезированных на том же растворе образцах нанокомпозитов в кюветах с оптической длиной пути 10 мм. При этом наблюдался поворот плоскости поляризации вправо, величина угла поворота при температуре 21°С составила 20,0 град для раствора арабиногалактана, 10,1 град для НК никеля, 15,0 град для НК кобальта и 2,0 град для НК марганца. Точность измерений с помощью данного отсчетного устройства составила ± 0,2 град.

Таким образом, металлические наноядра, взаимодействуя с молекулами арабиногалактана, изменяют их энергетические состояния, величина изменения оптической активности зависит от конкретного металла, образующего наноядро. Различие оптических активностей НК и АГ можно объяснить изменениями энергий электронных переходов в молекуле АГ и соответствующих им частот ω_i [8].

Гораздо больше информации, чем значение угла поворота плоскости поляризации на одной частоте, дает исследование дисперсии оптической активности, т. е. зависимости угла поворота от длины волны [8]. Как известно, спектральная зависимость вращательной активности с хорошей точностью описывается уравнением Друде:

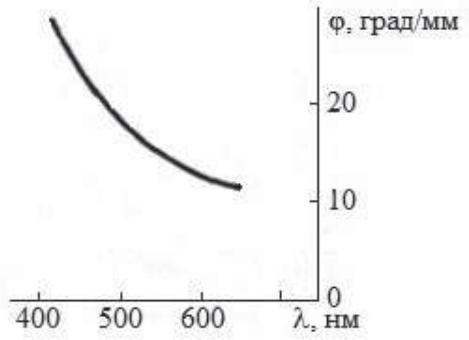


Рис. 4. Теоретическая спектральная зависимость дисперсии оптической активности в соответствии с уравнением Друде

$$\varphi_\lambda^t \lambda^2 = \lambda_0^2 \varphi_\lambda^t + K,$$

где K, λ_0 – вращательная и дисперсионная константы соответственно.

Типичный спектр угла поворота полисахарида от волнового числа приведен на рис. 4.

Таким образом, в данной работе исследованы оптические свойства металлических нанокомпозитов арабиногалактана, получены их спектры поглощения и по характерному коротковолновому пику плазмонного резонанса подтвержден синтез НК, обнаружено изменение оптической активности нанокомпозитов кобальта, никеля, марганца по сравнению с чистым АГ. Показана перспективность дальнейшего изучения оптических свойств этих материалов, в частности, дисперсии оптического вращения.

В работе использовался арабиногалактан, произведенный ЗАО «Аметис», г. Благовещенск.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Богатырев, В.А.** Методы синтеза наночастиц с плазмонным резонансом [Текст] / В.А. Богатырев, Л.А. Дыкман, Н.А. Хлебцов. – Саратов: Изд-во Саратовского гос. ун-та, 2009. – 35 с.

2. **Дубровина, В.И.** Иммуномодулирующие свойства арабиногалактана лиственницы сибирской [Текст] / В.И. Дубровина, А.С. Медведева, Г.П. Александрова [и др.] // Фармация. – 2001. – № 5 – С. 26 – 27.

3. **Хвостов, М.В.** Фармакологические свойства комплексов растительных углеводсодержащих метаболитов со средствами, влияющими на сердечно-сосудистую систему [Текст] / М.В. Хвостов, А.О. Брызгалов, Т.Г. Толстикова // Химия в интересах устойчивого развития. – 2010. – Т. 18. – С. 535 – 541.

4. **Yamada, S**. Structural characterization of anticomplementary rabinogalactan from the roots of Angelica acutiloba [Text] / S. Yamada, K. Kitagawa., J.C. Cyong, [et el.] // Carbohydrate Research. – 1987. – Vol. 159. – № 2. – P. 275 – 291.

5. **Медведева, А.С.** Арабиногалактан лиственницы – перспективная полимерная матрица для биогенных металлов [Текст] / А.С. Медведева, Г.П. Александрова, В.И. Дубровина [и др.] // Химия и компьютерное моделирование. Бутлеровские сообщения. – 2002. – № 7. – С. 45 – 50.

6. **Сухов, Б.Г.** Нанобиокомпозиты благородных металлов на основе арабиногалактана: получение и строение [Текст] / Б.Г. Сухов, Г.П. Александрова, Л.А. Грищенко [и др.] // Журнал структурной химии. – 2007. – Т. 48. – № 5. – С. 979 – 984.

7. **Грищенко, Л.А**. Металлосодержащие нанокомпозиты на основе арабиногалактана [Текст]: дис. ...

канд. хим. наук: 02.00.03: защищена 2007 / Грищенко Людмила Анатольевна. – Иркутск: Иркутский институт химии им. А.Е. Фаворского СО РАН. – 179 с.

8. **Джерасси, К.** Дисперсия оптического вращения [Текст] / К. Джерасси. – М.: Изд-во ИЛ, 1962. – 397 с.

УДК 538.9

О.Е. Квашенкина

ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ДИОКСИДЕ ВАНАДИЯ

Диоксид ванадия (VO_2) представляет собой модельный объект для изучения межэлектронных взаимодействий в твердых телах ввиду яркой выраженности в этом материале корреляционных эффектов. Благодаря наличию сильных электронных корреляционных взаимодействий данное соединение демонстрирует ряд уникальных физических свойств, главным из которых является способность совершать фазовый переход (ФП) полупроводник – металл. Понимание природы электронных корреляций и их теоретическое описание относятся к числу интереснейших вопросов современной физики твердого тела и, в частности, такого ее раздела, как физика сильно коррелированных систем.

Необычные свойства диоксида ванадия привлекали внимание исследователей, начиная с 30-х годов прошлого столетия. Так, в работах Андерсона [1 – 3] в несколько этапов исследовались различные свойства оксидов ванадия. Позднее, в 50-х годах XX века, стало активно развиваться направление исследования непосредственно механизма ФП в диоксиде ванадия. При этом на протяжении уже более 50 лет обсуждается вопрос о природе ФП полупроводник – металл в VO_2; не прекращается дискуссия [4 – 7] о том, какую роль в данном фазовом превращении играют электронный переход Мотта [8 – 10], структурный переход Пайерлса [8 – 10] и каково соотношение их вкладов в общую энергетику процесса фазового превращения. Проблема заключается в сложности четкого разделения этих переходов, поскольку в термодинамически равновесном случае оба эти перехода тесно связаны, взаимно влияя друг на друга.

Так, в работах [11, 12] экспериментально и теоретически показано, что при повышении температуры макрокристаллического образца VO_2 в области температур от комнатной до критической $T_c = 67$ °C (температуры равновесия моноклинной и тетрагональной фаз) в диоксиде ванадия совершается непрерывный по температуре электронный ФП Мотта, инициирующий в макрокристалле VO_2 структурный ФП при $T = T_c$. Установлено [5], что при этой температуре в макроскопическом монокристалле скачком меняется симметрия кристаллической решетки от моноклинной (M-фазы) до тетрагональной (рутильной R-фазы) а также электропроводность материала, которая возрастает по величине на несколько порядков.

Кроме того, установлено [11, 12], что при росте температуры в области $T > T_c$ наступает заключительный этап совершения перехода Мотта. На этом этапе в пленке наблюдается нестандартная специфика перехода, усложняющая его исследования. Она связана с тем, что во всех зернах пленки, кроме непрерывного по температуре электронного перехода Мотта, происходит серия отдельных для каждого зерна пленки переходов Пайерлса, характеризующихся скачкообразными структурными фазовыми превращениями при различных температурах T_i. В каждом отдельном кристаллите (зерне) пленки эти температуры отличаются друг от

друга сдвигом от T_c (температуры равновесия моноклинной и тетрагональной фаз) на величину ΔT_i ($T_i = T_c + \Delta T_i$). В свою очередь, величина ΔT_i обратно пропорциональна квадратному корню из среднего поперечника зерна [13]. Кроме того, исследования экспериментальных проявлений перехода Мотта дополнительно затруднены неизбежным разбросом температур T_c различных зерен вблизи некоторого среднего значения. Будучи затенен указанными структурными превращениями, электронный переход Мотта, тем не менее, проявляется, как показано в настоящей работе, в неискаженном виде в узких (2 – 3 °C) температурных интервалах, соответствующих начальным участкам частных петель гистерезиса, стартующих от различных точек ветвей главной петли гистерезиса отражательной способности пленочного образца VO_2. Так, переход Мотта проявляет себя в неискаженном виде на начальном этапе процесса охлаждения образца от любой температурной точки нагревной ветви главной петли гистерезиса в температурном интервале, простирающемся вплоть до температуры $T_i = T_c - \Delta T_i$, то есть до совершения обратного структурного ФП. То же относится к начальному этапу процесса нагрева от любой точки охладительной ветви главной петли гистерезиса.

Проблематичной является также принадлежность фазового перехода металл – полупроводник в диоксиде ванадия к переходу 1-го или 2-го рода. До сих пор термический ФП металл – полупроводник в VO_2 относили к ФП 1-го рода из-за необходимости подведения тепловой энергии для совершения ФП при постоянной температуре T_c ($dQ = T_c dS$). Подвод тепла соответствует скачку энтропии в точке перехода и сопровождается скачкообразным изменением симметрии кристаллической структуры этого соединения при достижении температуры перехода $T_c = 67$ °C [10, 11, 14]. Однако полученные в настоящей работе результаты, подробно описанные ниже, позволяют внести уточнения в данное утверждение.

Целью данной работы является изучение характера перехода Мотта как электронной составляющей комплексного ФП металл – полупроводник в тонких пленках диоксида ванадия, выполняемое методом экспериментального выделения этой составляющей путем ступенчатого нагрева (охлаждения) образцов в области температур, располагающейся внутри петель гистерезиса коэффициента отражения и коэффициента пропускания пленок VO_2.

Методика эксперимента

В данной работе были проведены две серии экспериментов.

Задача первой (предварительной) серии состояла в выборе оптического параметра пленки диоксида ванадия, наиболее чувствительного к изменению температуры. Решение этой задачи оказалось принципиально важным для проведения второй (главной) серии экспериментов, отвечающих основной цели данной работы.

В первой серии экспериментов изучалась зависимость коэффициента пропускания пленки диоксида ванадия, нанесенной на прозрачную подложку, от длины волны при различных фиксированных температурах. Измерения проводились в диапазоне длин волн от 500 до 900 нм при фиксированных температурах в диапазоне от 10 до 100 °C. Шаг по температуре составлял 1 °C.

Спектры пропускания пленок VO_2 получены с помощью установки с компьютерным управлением температурой образца, основанной на встроенной в нее ремонтной станции MS9000SAN. Помимо традиционных элементов оптического спектрометра, в установку входили нагревательный элемент с электронным компьютерным управлением, оптическая система формирования увеличенного действительного изображения образца, а также компьютер для цифровой регистрации сигнала.

Использование в данной серии экспериментов установки с автоматическим компьютерным контролем параметров измерений позволило представить экспериментальные результаты в виде трехмерных графиков $U(\lambda, T)$ – оптического пропускания как функции длины волны и температуры.

Для второй серии экспериментов использовалась стандартная установка по измерению зависимости коэффициента отражения $R(T)$ пленки от температуры на длине волны $\lambda = 1{,}5$ мкм, соответствующей области сильного изменения оптических констант пленки.

Для лучшей регистрации изменений коэффициента отражения пленочного образца

VO_2 применялся метод интерференционного увеличения контраста, а именно – использовалось то обстоятельство, что пленка диоксида ванадия толщиной около 70 нм, нанесенная на зеркальный алюминиевый слой толщиной порядка 60 нм, расположенный на ситалловой подложке, представляет собой тонкопленочный интерферометр Фабри – Перо. Интерферометр, в свою очередь, представляет собой систему с высокой чувствительностью к температурным изменениям оптических параметров исследуемого материала, приводящим к резким изменениям отражательной способности интерферометра. Это позволило фиксировать малые температурные изменения оптических констант диоксида ванадия, приводящие к значительным изменениям суммарного коэффициента отражения пленки даже при небольшом изменении температуры.

Стартовой температурой каждого измерительного цикла была комнатная, далекая от $T_c = 67$ °C и расположенная вне главной петли. В процессе эксперимента регистрировались главные ветви петли термического гистерезиса отражательной способности образца совместно с серией начальных участков частных петель – нагревной и охладительной.

Изменение температуры образца производилось следующим образом: для нагревной ветви главной петли сначала осуществлялся плавный нагрев, то есть прохождение по ней на 5 – 6 °C, остановка нагрева при $T = T_k$, реверс температуры с последующим небольшим охлаждением на 2 – 3 °C, возврат на главную петлю нагревом на те же 2 – 3 °C, а затем повторный нагрев по нагревной ветви главной петли на 5 – 6 °C. После этого цикл повторялся снова. Для охладительной ветви главной петли осуществлялось плавное уменьшение температуры на 5 – 6 °C, остановка охлаждения при $T = T_k$, реверс температуры – теперь уже в виде нагрева на 2 – 3 °C и затем вновь охлаждение на 5 – 6 °C. Таким образом, для охладительной ветви схема проведения эксперимента была обратной: пошаговое охлаждение вдоль ветви – короткий нагрев. В результате на обеих ветвях главной петли температурного гистерезиса коэффициента отражения появлялся набор безгистерезисных отрезков, наклоненных под различными углами к температурной оси (рис. 2, *б*). Отметим, что результаты подобных экспериментов описаны в работах других авторов [16], но без интерпретации.

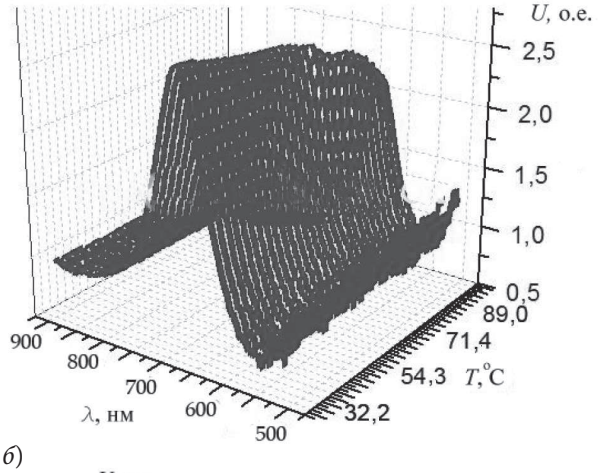
Проведенные подобным образом эксперименты позволили выявить необычную зависимость коэффициента отражения от температуры (см. далее).

Экспериментальные результаты и их обсуждение

Первая серия экспериментов. На рис. 1 показаны в двух ракурсах трехмерные графики зависимости коэффициента пропускания $U(\lambda, T)$ пленок диоксида ванадия от длины световой волны при различных температурах.

Видно, что при увеличении температуры максимум коэффициента пропускания, во-первых, уменьшает свое значение с 2,4 до 2,0 относительных единиц (о.е.), а во-вторых, дан-

а)



б)

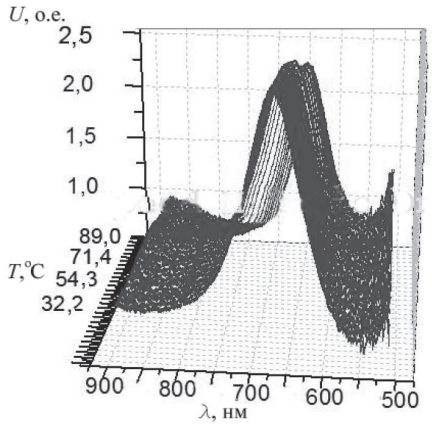


Рис. 1. График зависимости коэффициента пропускания пленок диоксида ванадия при нагреве от длины волны при различных температурах (в двух ракурсах)

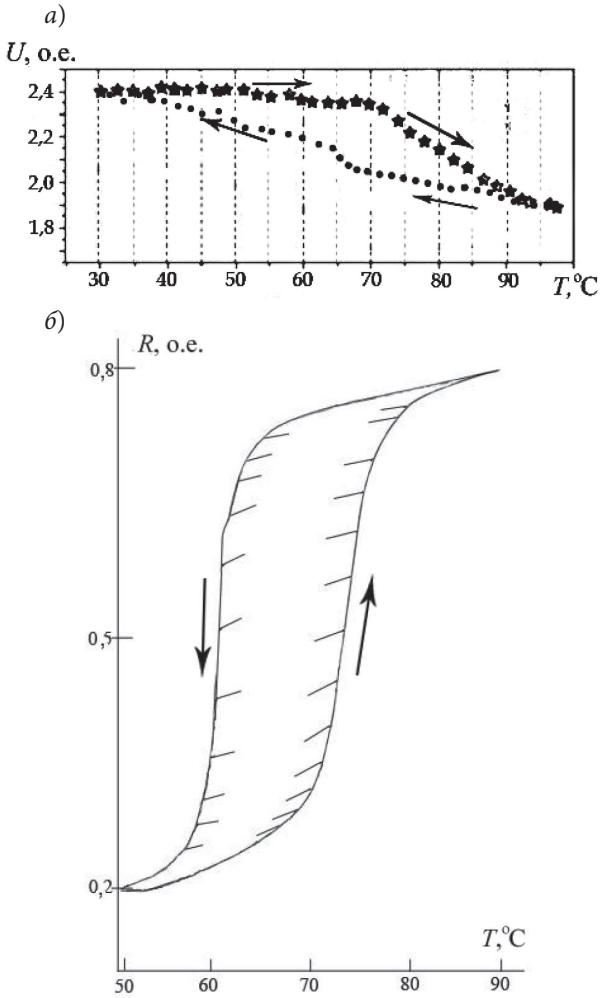


Рис. 2. Петли температурного гистерезиса коэффициентов пропускания (*а*) и отражения (*б*) тонкой пленки диоксида ванадия; длина волны λ = 700 нм. На рис. 2,*б* показаны безгистерезисные отрезки

ный максимум смещается в коротковолновую сторону на 50 нм. Подобные результаты наблюдаются и при охлаждении образца с той, однако, разницей, что все происходит в обратном порядке. Наблюдаемые изменения обладают гистерезисом по температуре. На рис. 2, *а* представлена петля температурного гистерезиса коэффициента пропускания для λ = 700 нм. Протяженность петли – 69 °С (от 29 до 98 °С). Пропускание для этой длины волны изменяется от 2,4 о.е. в низкотемпературной области (T = 30 °С) до 2,0 о.е. в высокотемпературной области (T = 90 °С).

Температурные изменения пропускания в тонкой пленке диоксида ванадия и их гистерезис объясняются следующим образом.

Как известно [4], металлы являются непрозрачными в видимом световом диапазоне. Это обусловлено тем, что при взаимодействии с квантом света свободные электроны могут перейти в возбужденное состояние. Прозрачность вещества определяется толщиной скин-слоя. Вследствие высокой концентрации свободных электронов в металле поглощение света происходит в тонком приповерхностном слое, составляющем доли микрона. Если образец существенно толще скин-слоя, то свет поглощается полностью и материал становится непрозрачным. Для тонких пленок дело обстоит иначе. Толщина большинства тонких пленок VO_2 меньше скин-слоя даже в металлической фазе из-за относительно небольшой концентрации в них электронов. Это и есть причина полупрозрачности тонкой пленки диоксида ванадия при высоких температурах. При переходе пленки диоксида ванадия из металлического состояния в полупроводниковое при ее охлаждении уменьшается концентрация свободных носителей заряда – электронов. Поэтому пропускание и коэффициент отражения пленок диоксида ванадия зависят от температуры. Данная зависимость подробно рассматривалась нами в работах [9, 17]. Причем, если при охлаждении пленки коэффициент пропускания увеличивается, то коэффициент отражения, наоборот, уменьшается.

Как видно из рис. 1, максимум способности пропускания пленки смещается в коротковолновую сторону с увеличением температуры. Характер смещения максимума с ростом температуры по шкале длин волн – монотонный, без резких изломов, однако при высоких температурах он ускоряется. Описанное смещение максимума пропускания можно объяснить наличием интерференции в полупрозрачной пленке с границами воздух – пленка и пленка – стекло. Поскольку при нагреве пленки показатель преломления VO_2 уменьшается от 2,5 до 2,0, интерференционные полосы смещаются в коротковолновую сторону. Однако интенсивность этих интерференционных полос мала по сравнению с их интенсивностью в пленке, напыленной на ситаловую подложку с алюминиевым подслоем.

Из анализа экспериментальных данных видно, что коэффициент пропускания пленоч-

ного образца не обладает достаточной чувствительностью к малому изменению температуры. Как уже отмечалось выше, это обстоятельство и послужило причиной использования метода интерференционного усиления контраста, основанного на использовании интерферометра Фабри – Перо и позволяющего на порядок повысить чувствительность. Это дало возможность уверенно регистрировать изменения коэффициента отражения величиной 1 – 3 %, характерные для малого интервала изменения температуры.

Вторая серия экспериментов. Как уже отмечалось, в результате проведения второй серии экспериментов было установлено, что на главной петле температурного гистерезиса коэффициента отражения пленки появился ряд наклонных отрезков с протяженностью по температуре около 2,5 °С, не обладающих гистерезисом (см. рис. 2, *б*).

Идея выполнения данной серии экспериментов, а также интерпретация их результатов основана на возможности протекания при определенных условиях в пленках диоксида ванадия чисто электронного перехода Мотта, не содержащего структурного ФП. Суть идеи заключается в следующем.

Если в процессе регистрации начального участка частной петли гистерезиса при охлаждении пленки от какой-либо промежуточной точки нагревной ветви главной петли гистерезиса отступить вниз по температуре от этой точки T_{ks} не на 2,5 °С, а на больший температурный интервал, например на 5 °С, то структурный ФП в соответствующих интервалу 5 °С (крупных) зернах вновь произойдет (в обратную сторону) ввиду превышения при таком отступлении ширины элементарной петли гистерезиса данной категории зерен. При этом на нагревной ветви температурного гистерезиса коэффициента отражения вместо безгистерезисного отрезка появится неполная частная петля гистерезиса, целиком расположенная внутри главной петли и соответствующая определенному виду (категории, размеру) зерен. Если выполнить охлаждение до точки слияния обеих ветвей главной петли (то есть до начала главной петли), то будет получена частная петля гистерезиса, называемая полной нагревной частной петлей и представляющая собой результат прохода «вверх» по температуре лишь части нагревной ветви главной петли до $T = T_{ks}$, а затем возврата по температуре «вниз» по частной охладительной ветви до ее слияния с началом нагревной ветви главной петли. Площадь нагревной частной петли, расположенной внутри главной, меньше, чем площадь всей главной петли. Аналогично этому можно получить охладительную частную петлю при частичном прохождении охладительной ветви главной петли путем понижения температуры до $T_k < T_c$, такой, что еще не все зерна, а только зерна определенных размеров перешли из тетрагональной фазы в моноклинную. Таким образом будет получена одна их охладительных частных петель. Получив набор частных петель, можно сделать соответствующие выводы о характере электронного перехода в пленках диоксида ванадия.

Проанализируем полученные результаты по гистерезису температурных зависимостей.

Характерной особенностью ступенчатого нагрева (охлаждения) пленки всех частных петель является то, что при небольшом (2 – 3 °С) отступлении внутрь главной петли от температуры T_{ks} по охладительной или по нагревной (рис. 2, *б*) ветвям частной петли ни одно зерно пленки не испытывает обратного структурного ФП даже при некотором, не слишком большом разбросе чисел элементарных петель по температурам T_{ci} равновесия фаз в пределах *i*-й категории зерен (то есть при разбросе по T_{ci}, меньшем, чем протяженность безгистерезисных участков всех частных петель).

Короткие безгистерезисные отрезки (рис. 2, *б*), представляющие симбатные изменения коэффициента отражения пленки, выражают монотонные по температуре изменения коэффициента отражения, не связанные с совершением скачкообразных структурных ФП. Это означает, что изменение коэффициента отражения пленки на коротких безгистерезисных отрезках начальных участках частных петель вызвано чисто электронным ФП (в данном случае – переходом Мотта). Прослеживая поведение тангенсов углов наклона отрезков вдоль всей главной петли, можно восстановить дифференциал температурного хода отражательной способности пленки VO_2, обусловленный чисто электронным переходом Мотта, который после интегрирования по температуре будет представ-

лять собой чисто электронную составляющую ФП в данном соединении.

Для точного математического описания безгистерезисной кривой термического изменения отражательной способности интерферометра, выражающей монотонный по температуре переход Мотта, нами использовалась следующая методика математического моделирования.

Как уже отмечалось выше, начало нагревной ветви петли температурного гистерезиса коэффициента отражения, равно как и пропускания, формируется при температурах ниже T_{ci} для зерен, наиболее мелких по размерам, с предельно широкими элементарными петлями. На таком участке наблюдается плавный рост коэффициента отражения, что говорит о наличии информации в этой части ветви о чисто электронной составляющей ФП в диоксиде ванадия. Характер наклона данного участка нагревной ветви свидетельствует о быстроте изменения коэффициента отражения при переходе Мотта в данной температурной точке нагревной ветви главной петли. Зависимость изменения отражательной способности совокупности кристаллитов пленки от количества свободных носителей заряда в зоне проводимости нанокристаллов VO_2 [9, 11] позволяет судить, в свою очередь, о быстроте изменения концентрации электронов в этой зоне, а значит и о характере температурного поведения электронного перехода Мотта. Таким образом, по наклону безгистерезисных отрезков, примыкающих в точках T_{ks} к главной петле, можно судить о характере протекания перехода Мотта во всех зернах, различающихся своими размерами и, соответственно, ΔT_i. Как уже отмечалось, главная петля температурного гистерезиса коэффициента отражения формируется из элементарных петель гистерезиса групп зерен различных размеров, присутствующих в образце. Таким образом, можно сделать вывод о том, что кривая, отражающая изменения коэффициента отражения за счет увеличения концентрации свободных электронов в зоне проводимости, т. е. переход Мотта, также суммируется из частных кривых, отражающих моттовский переход в зернах определенных размеров, т. е. из полученных безгистерезисных отрезков.

На рис. 3, *а* представлен график зависимости тангенса угла наклона безгистерезисных отрезков от температуры. График, как указывалось, в дифференциальной форме ($Y = dR/dT$) несет информацию о характере изменения коэффициента отражения пленки с изменением температуры для всей совокупности зерен любого размера. Эта кривая совпадает с экспериментальными результатами (см. рис. 3, *а*) с погрешностью 5,7 %. Она получена путем аппроксимации экспериментальных данных тремя гауссианами. Итоговый дифференциал имеет следующий аналитический вид:

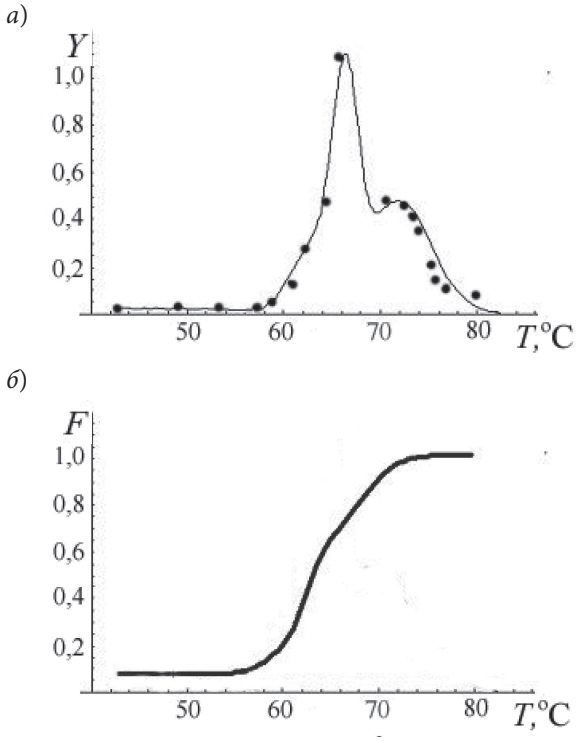


Рис. 3. Результаты обработки экспериментальных данных, описывающих электронный переход Мотта (см. рис. 2,*б*): *а* – дифференциальная кривая температурной зависимости коэффициента отражения (точки – экспериментальные данные); *б* – интегральная кривая по данным рис. 3,*а*

$$Y = 3y_0 + (\pi/2)^{-1/2}\{(A_1/w_1)\exp[-2(T-T_{c1})/w_1] + (A_2/w_2)\exp[-2(T-T_{c2})/w_2] + (A_3/w_3)\exp[-2(T-T_{c3})/w_3]\}.$$

Числовые коэффициенты имеют следующие значения:

$$T_{c1} = 63{,}32;\ A_1 = 1{,}86;\ w_1 = 5{,}02;$$

$$T_{c2} = 66{,}37;\ A_2 = 2{,}65;\ w_2 = 2{,}55;$$

$$T_{c3} = 71{,}87;\ A_3 = 4{,}1;\ w_3 = 6{,}83.$$

При построении кривых $Y(T) = dR/dT$ и $F(T) = \int Y(T)dT$ мы получили следующие результаты.

Интеграл $F(T)$ функции $Y(T)$ описывает ход монотонных изменений коэффициента отражения $F(T)$ пленки диоксида ванадия с изменением температуры, возникающих исключительно за счет изменения количества свободных носителей заряда при чисто электронном переходе (переход Мотта). Графически интеграл F представлен на рис. 3, *б*. Его график имеет вид:

$$F = \left(\int_0^x Ydx \right) \Big/ \left(\int_0^{100} Ydx \right).$$

В результате проведения двух серий экспериментов стало возможным предложить вариант ответа на вопрос, поставленный в начале настоящей работы, к какому типу ФП относится ФП металл – изолятор в диоксиде ванадия.

Поскольку ФП металл – изолятор в пленке VO_2 при любой температуре в области главной петли гистерезиса включает в себя одновременно две составляющие, а именно электронный переход Мотта и структурный переход Пайерлса, тесно переплетенные друг с другом, то однозначно отнести ФП металл – изолятор к ФП 1-го или 2-го рода нельзя. Так, безгистерезисный и протяженный по температуре электронный переход Мотта может быть отнесен, согласно определению Л.Д. Ландау, к ФП 2-го рода, а структурный переход Пайерлса, обладающий гистерезисом и сопровождающийся скачкообразным изменением симметрии решетки и скачком энтропии при $T = T_c$, – к переходу 1-го рода.

Рассмотрим причины, по которым две составляющие ФП металл – полупроводник относятся к переходам разного типа.

Переход Мотта в VO_2. ФП второго рода характеризуются непрерывным изменением параметра порядка от максимального значения в одной фазе (чаще низкотемпературной и низкосимметричной) до нуля в другой фазе (чаще высокотемпературной и высокосимметричной) при изменении каких-либо внешних факторов. При этом первая производная термодинамического потенциала Гиббса по температуре не испытывает скачков, в отличие от второй производной по температуре. Вторая производная свободной энергии по температуре определяет теплоемкость вещества.

Таким образом, при переходах второго рода должен наблюдаться скачок теплоемкости вещества. Скачок энтропии, а вместе с ним и скачок скрытой теплоты перехода равны нулю при $T = T_c$.

Поскольку по обе стороны от T_c система, обладающая ФП второго рода, неустойчива в точке перехода по отношению к любым, сколь угодно малым флуктуациям термодинамического потенциала (любые флуктуации для такой системы являются большими), то при переходах второго рода не должны наблюдаться ни перегрев, ни переохлаждение, то есть должен отсутствовать температурный гистерезис термодинамических параметров вблизи точки ФП. На практике при изменении симметрии решетки в точке ФП второго рода гистерезис почти всегда существует, однако любое движение по петле гистерезиса ФП второго рода переводит систему в квазиравновесное (то есть, строго говоря, термодинамически неравновесное) состояние, которое спустя длительное (в пределе – бесконечное) время разрушается, и система выходит из петли гистерезиса.

В нашем случае изменения симметрии при чисто электронном переходе Мотта, не инициирующем структурного ФП Пайерлса, не происходит, а время релаксации электронной подсистемы кристалла составляет десятки фемтосекунд [16]. Поэтому гистерезис мог бы в принципе наблюдаться лишь на временах фемтосекундного масштаба. Поэтому при выделении нами чисто электронной составляющей ФП металл – полупроводник в VO_2, т. е. при переходе Мотта, гистерезис не наблюдается (см. рис. 3,*б*). Отсюда представляется разумным предположение о том, что чисто электронный переход Мотта в VO_2 является ФП 2-го рода.

В качестве параметра порядка здесь можно предложить некую функцию, выражающую зависимость смещения электронных зон диоксида ванадия относительно положения равновесия в тетрагональной фазе от температуры. Более математически точно описать параметр порядка для электронной составляющей ФП металл – изолятор МП в диоксиде ванадия на данном этапе исследований не представляется возможным. Это может послужить темой для дальнейших, более глубоких теоретических исследований.

Из всего вышеизложенного можно сделать однозначный вывод, что электронная составляющая ФП металл – изолятор МП в диоксиде ванадия, то есть переход Мотта – это фазовый переход 2-го рода.

Переход Пайерлса в VO_2. Эту составляющую ФП металл – полупроводник в VO_2 можно отнести к ФП 1-го рода, обладающую «скрытой» теплотой перехода. Действительно, указанный род ФП характеризуются скачком параметра порядка в точке ФП, скачком первой производной термодинамического потенциала по температуре, то есть наличием «скрытой» теплоты перехода, а также термодинамически равновесным температурным гистерезисом физических параметров вблизи точки ФП. Последнее утверждение для диоксида ванадия отражено в наличии температурного гистерезиса различных оптических параметров вещества, таких как коэффициент отражения или пропускания (см. рис. 2) и др.

Возникает вопрос, что является скрытой теплотой перехода в данном случае. Ответ на данный вопрос становится понятным, если обратиться к физическому рассмотрению этапов ФП металл – полупроводник в VO_2. Как уже отмечалось выше, электронный переход Мотта инициирует совершение структурного ФП. Для изменения симметрии решетки принципиально важно, чтобы при фиксированном значении T_c возникли условия разрушения критического количества σ-связей V-V-димеров [9]. Подобные условия реализуются, если при передаче теплоты от нагревателя к образцу энергия расходуется не на повышение энергии фононных колебаний системы, то есть на повышение температуры, а на перестройку электронной подсистемы, инициирующей совершение структурного ФП путем термического разрушения σ-связей V-V-димеров. Последний процесс происходит лавинообразно благодаря чрезвычайно быстрому опусканию π*-зоны при ее заселении электронами из разрушенных σ-связей, что возможно лишь при наличии сильных межэлектронных корреляций, которые и имеют место в диоксиде ванадия, представляющего собой сильнокоррелированный материал [10]. Таким образом, скрытой теплотой фазового перехода в данном случае является энергия, требуемая для перестройки при постоянной температуре T_c электронной подсистемы материала (корреляционного сужения запрещенной зоны) плюс энергия, требуемая для структурной перестройки кристаллической решетки при распространении границы раздела полупроводниковой и металлической фаз через весь монокристалл VO_2.

У ФП 2-го рода, как указывалось, нет скрытой теплоты перехода, точнее, она бесконечно мала, так как бесконечно малое введение теплоты уже сопровождается совершением ФП, тогда как в случае ФП 1-ого рода при постоянном значении T_c необходимо ненулевое количество тепла для его совершения:

$$\Delta Q = \left(\int_{Q1}^{Q2} dQ \right) = T_c \left(\int_{S1}^{S2} dS \right) = \Delta S,$$

где ΔS – суммарный скачок энтропии обоих фазовых превращений.

Таким образом, параметр порядка в нашем случае комплексного мотт-пайерлсовского фазового перехода должен представлять собой комбинированную функцию, зависящую от взаимного расположения электронных зон π* и $d_{||}^{bott}$, глубины положительной обратной связи корреляционного опускания (подъема) зон при их заселении (опустошении) электронами и химической энергии образования границы разделения полупроводниковой и металлической фаз.

Подводя итог, можно утверждать, что электронная составляющая ФП металл – полупроводник в диоксиде ванадия отражает совершение чисто электронного перехода Мотта во всех тех случаях, когда по какой-либо причине структурный (пайерлсовский) ФП затруднен или отсутствует.

Этот переход относится к ФП 2-го рода с непрерывно изменяющейся энтропией системы. Параметр порядка при этом изменяется непрерывно.

Структурный фазовый переход относится к ФП 1-го рода со скрытой теплотой перехода, представляющей собой энергию перестройки электронной и решеточной подсистем при сообщении им тепла. Параметр порядка вблизи T_c изменяется скачкообразно, поскольку взаимное расположение зоны проводимости π* и валентной зоны $d_{||}^{bott}$ меняется практически

скачком в бесконечно узком температурном интервале благодаря наличию положительной обратной связи между положением зон и их заселенностью. Образование межфазной границы также происходит скачком при достижении критического числа разрушенных σ-связей V-V-димеров.

В целом ФП металл – полупроводник в диоксиде ванадия, происходящий в широком температурном интервале, необходимо отнести к смешанному типу фазовых переходов, поскольку две его составляющие (моттовская и пайерлсовская), будучи неразделимо связаны друг с другом, относятся к ФП разных родов.

Обобщая полученные данные, следует подчеркнуть, что главный результат настоящей работы состоит в определении принадлежности электронной и структурной составляющих ФП металл – полупроводник в VO_2 к конкретному роду ФП, а также в разработке метода выделения чисто электронной составляющей ФП с возможностью установления характеризующих ее параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Andersson, G.T.** The heat capacity of vanadium trioxide, vanadium tetroxide and vanadium pentoxide at low temperatures [Text] / G.T. Andersson // J. Amer. Chem. Soc. – 1936. – Vol. 58. – № 4. – P. 564 – 566.

2. **Andersson, G.T.** Studies on vanadium oxides. I. Phase analysis [Text] / G.T. Andersson //Acta Chem. Scand. – 1954. – Vol. 8. – IT 9. – P. 1599 – 1606.

3. **Andersson, G.T.** Studies on vanadium oxides. II. Crystal structure of vanadium dioxide [Text] / G.T. Andersson // Acta Chem. Scand. – 1956. – Vol. 10. – IT 4. – P. 623 – 628.

4. **Мотт, Н.Ф.** Переходы металл – изолятор [Текст] / Н.Ф. Мотт. – М.: Наука, 1979. – 342 р.

5. **Bruckner, W.** Vanadiumdioxide [Text] / W. Bruckner, H. Opperman, W. Reichelt. – Berlin: Akademie – Verlag, 1983. – 252 s.

6. **Шадрин, Е.Б.** О природе фазового перехода металл – полупроводник в диоксиде ванадия [Текст] / Е.Б. Шадрин, А.В. Ильинский // ФТТ. – 2000. – Т. 42. – Вып. 6. – С. 1092 – 1100.

7. **Ильинский, А.В.** Фазовый переход металл – полупроводник в гидрированных пленках диоксида ванадия [Текст] / А.В. Ильинский, В.М. Капралова, Е.Б. Шадрин // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2008. – № 6 (67). – С. 103–109.

8. **Ильинский, А.В.** Электронные процессы при фазовом переходе диэлектрик – металл в гидрированных пленках диоксида ванадия [Текст] / А.В. Ильинский, С.Д. Ханин, Е.Б. Шадрин // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. – 2009. – № 11 (79). – С. 61–68.

9. **Ильинский, А.В.** Металлизация гидрированием моноклинной фазы в пленках VO_2 [Текст] / А.В. Ильинский, О.Е. Квашенкина, Е.Б. Шадрин // Физика и техника полупроводников. – 2011. – Т. 45. Вып. 9. – С. 1197–1202.

10. **Бугаев, А.А.** Фазовый переход металл – полупроводник и его применение [Текст] / А.А. Бугаев, Б.П. Захарченя, Ф.А. Чудновский. – Л.: Наука, – 1979. – 183 с.

11. **Shin, S.** Vacuum-ultraviolet reflectance and photoemission study of the metal – insulator phase transition in VO_2, V_6O_{13}, and V_2O_3 [Text] / S. Shin, S. Suga, M. Taniguchi [et. al.] // Phys.Rev. B. – 1990. – № 41. – P. 4993.

12. **Jiang, H.** First-principles modeling of localized *d* states with the *GW*@LDA+*U*approach [Text] / H. Jang, R. I. Gomez-Abal, P. Rinke, M. Scheffler // Phys. Rev. B. – 2010. – № 82. – P. 045108 (16 p).

13. **Голубев, В.Г.** Гистерезис фотонной зоны в фотонном кристалле диоксида ванадия при фазовом переходе полупроводник – металл [Текст] / В.Г. Голубев, Д.А. Курдюков, А.Б. Певцов [и др.] // ФТП. – 2002. – Т. 36. – Вып. 9. – С. 1122–1127.

14. **Изюмов, Ю.А.** Фазовые переходы и симметрия кристаллов [Текст] / Ю.А. Изюмов, В.Н. Сыромятников. – М.: Наука, 1984. – 245 с.

15. **Климов, В.А.** Формирование петли температурного гистерезиса при фазовом переходе металл – полупроводник в пленках диоксида ванадия [Текст] / В.А. Климов, И.О. Тимофеева, С.Д. Ханин, Е.Б. Шадрин [и др.] // ЖТФ. – 2002. – Т. 72. – Вып. 9. – С. 67–74.

16. **Gurvitch, M.** Treating the case of incurable hysteresis in VO_2 [Text] / M. Gurvitch, S. Luryi, A. Polyakov, A. Shabalov // J. Appl. Phys. – 2009. – № 106. – P. 104504 (7 p).

17. **Ильинский, А.В.** Фазовый переход и корреляционные эффекты в диоксиде ванадия [Текст] / А.В. Ильинский, О.Е. Квашенкина, Е.Б. Шадрин // Физика и техника полупроводников. – 2012. – Т. 46. – С. 439–446.

ПРИБОРЫ И ТЕХНИКА ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

УДК. 621.382.038

Т.М. Басалкевич, Н.А. Тальнишних, Н.М. Шмидт

ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ДЕГРАДАЦИОННОГО ПРОЦЕССА В МОЩНЫХ СИНИХ СВЕТОДИОДАХ InGaN/GaN

В последние несколько лет проблема деградации мощных синих светодиодов InGaN/GaN встала наиболее остро в связи с развитием в разных странах мира программ по созданию твердотельного энергосберегающего освещения и жесткими требованиями к сроку службы светодиодов до 100 тыс. часов. Данная проблема усугубляется отсутствием общепринятых моделей, адекватно описывающих этот процесс, и особенностями его развития в мощных светодиодах InGaN/GaN [1]. Как правило, наблюдается три сценария развития этого процесса [2]:

постепенное снижение внешней квантовой эффективности (*EQE*) с ростом времени наработки более 1000 часов;

рост значений *EQE*, преимущественно в первые 10 – 100 часов, а затем постепенное их снижение;

резкое падение *EQE* при временах меньше 100 часов.

Эта неоднозначность результатов старения светодиодов с практически одинаковыми исходными параметрами, а также причины быстрого развития деградационного процесса не нашли общепринятого объяснения, несмотря на многолетние исследования [1]. Неоднозначность развития деградационного процесса в мощных синих светодиодах InGaN/GaN не позволяет прогнозировать надежность целых партий по результатам ускоренного старения небольшого количества приборов из каждой партии, как это принято при испытаниях традиционных материалов A^3B^5. В результате за короткие сроки эксплуатации наблюдается непредсказуемый выход из строя светодиодных ламп (содержащих, как правило, до 10 светодиодов), предназначенных для энергосберегающего освещения, что делает нерентабельным переход на твердотельное освещение.

Целью данной работы явилось выяснение причин и природы быстрого развития деградационного процесса в синих мощных светодиодах InGaN/GaN, предназначенных для создания ламп твердотельного энергосберегающего освещения.

В соответствии с поставленной целью было исследовано несколько партий коммерческих светодиодов различных фирм с внешней квантовой эффективностью 35 – 50 % после разных временных стадий процесса старения. Светодиоды были собраны методом флип-чип-монтажа из чипов на основе квантоворазмерных структур InGaN/GaN с соотношением толщин ям и барьеров 3/7 нм, выращенных методом эпитаксии из металлорганических соединений.

Применялся следующий режим старения: плотность тока – 35 А/см^2, температура – 100 °С, время наработки – от 10 до нескольких тысяч часов.

Исследовались следующие параметры и характеристики светодиодов до и после разных временных стадий процесса старения: вольтамперные характеристики в диапазоне напряжений 0,1 – 4 В и токов 10^{-13} – 1 А, зависимости *EQE* от тока *I*, а также спектры электролюминесценции при температуре 300 К. Определе-

ние значений *EQE*, исследование зависимостей *EQE* (*I*) и спектров электролюминесценции проводилось в соответствии с международными стандартами в интегрирующей сфере, излучение регистрировалось калиброванным кремниевым фотоприемником.

Для всех партий светодиодов наблюдались все три сценария развития деградационного процесса. При этом для большей части светодиодов во всех партиях процесс старения развивался по первому сценарию. Однако в каждой партии от 1 до 10 % от общего количества светодиодов быстро деградировало по третьему сценарию. Типичные изменения зависимостей *EQE* (*I*) во времени для светодиодов с быстрым развитием деградационного процесса приведены на рис. 1.

Выяснилось, что вероятность развития процесса по третьему сценарию повышена на партиях светодиодов с «преждевременным включением», т. е. с началом слабой излучательной рекомбинации при напряжениях на 0,2 – 0,3 В ниже напряжения, соответствующего энергии фотонов в максимуме спектра электролюминесценции этих светодиодов. Из опыта исследования светодиодов на основе традиционных A^3B^5 известно, что «преждевременное включение» типично для светодиодов, имеющих локальные паразитные $p - n$ - переходы с пониженной высотой барьера [3]. Появление таких переходов может быть вызвано как локальными неоднородностями состава твердого раствора, так и несовершенствами гетерограницы. Для светодиодов на основе InGaN/GaN это означает присутствие некоторой доли областей твердого раствора с повышенным содержанием индия. Хорошо известно [4], что присутствие в InGaN локальных (с нанометровой размерностью) областей, обогащенных индием, типично для светодиодных структур на этих материалах, но такие области выявляются только методами с высоким пространственным разрешением; в спектрах электролюминесценции они не проявляются. В исследованных нами исходных светодиодах с преждевременным включением спектры электролюминесценции имели один

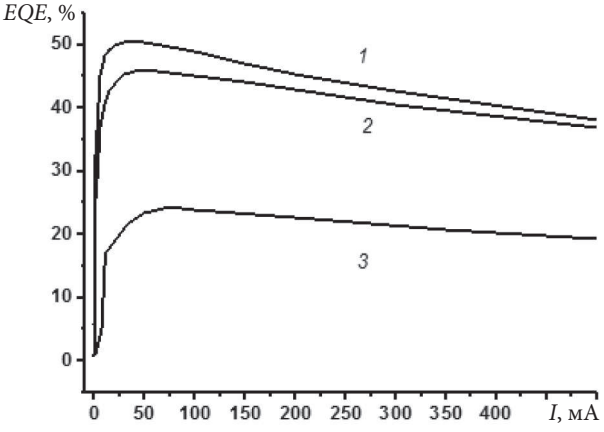


Рис. 1. Зависимости внешней квантовой эффективности светодиодов от тока при быстром развитии деградационного процесса до (*1*) и после (*2, 3*) разных временных интервалов старения: 10 ч (*2*) и 60 ч (*3*)

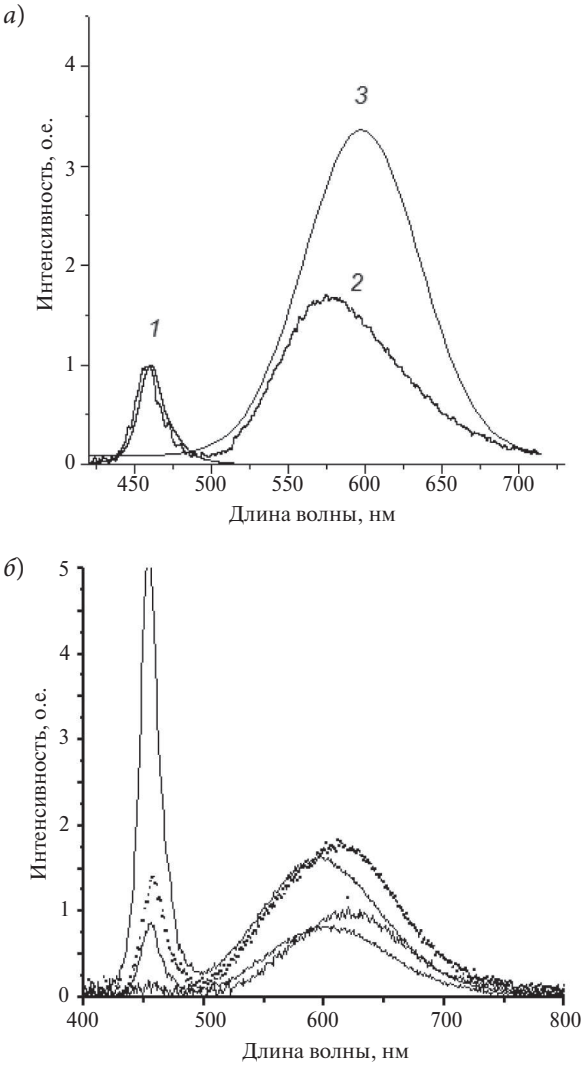


Рис. 2. Спектры электролюминесценции для одного (*а*) и нескольких (*б*) светодиодов одной партии с быстрым развитием деградационного процесса до (*1*) и после (*2, 3*) разных временных стадий процесса старения: 10 ч (*2*) и 60 ч (*3*)

ярко выраженный пик на длине волны 450 нм (рис. 2, *а*, кривая *1*). Однако после 10 часов режима старения на небольшой части светодиодов (до 10 % от общего числа в партии), деградировавших по значениям *EQE* (см. рис. 1, кривая *2*) в спектрах электролюминесценции наблюдалось появление длинноволновой полосы (рис. 2, *а*, кривая *2*), причем ее интенсивность при малых уровнях возбуждения была выше основной. При этом в области рабочих токов 200 – 350 мА никаких заметных изменений значений *EQE* не наблюдалось. Кроме того, наблюдался разброс соотношения интенсивностей этой и основной полосы, а также положения длинноволнового максимума (рис. 2, *б*) для светодиодов из одной партии, деградировавших после 10 часов старения. При этом зависимости *EQE* (*I*) этих светодиодов практически не отличались ни между собой, ни от *EQE* (*I*), представленной на рис. 1 (кривая *2*).

Изменение значений *EQE* светодиодов после 10 часов старения сопровождалось изменением прямой ветви вольтамперной характеристики (рис. 3, кривая *3*). При этом на обратной ветви ВАХ заметных изменений не наблюдалось, и она совпадала с исходной (рис. 3, кривая *1*). Характерный сдвиг прямой ветви в сторону меньших напряжений сопровождался быстрым нарастанием тока. Согласно результатам работы [3], такое поведение является типичным для светодиодов с локальными паразитными $p - n$ - переходами.

Усиление вклада в ВАХ паразитных $p - n$ - переходов с одновременным появлением длинноволновой полосы в спектре электролюминесценции и отсутствием изменений на обратной ветви ВАХ позволяют предполагать, что наблюдаемые явления связаны с изменением состава твердого раствора в локальных областях, причем, скорее всего, в областях с неравновесным составом твердого раствора с высоким содержанием индия и обогащенных структурными дефектами. Такие области могут не давать вклада в электролюминесценцию до проведения процесса старения; но, являясь более узкозонными, могут служить локальными каналами для протекания тока. Под действием инжекционного тока на стадии старения возможен локальный разогрев и миграция и/или диффузия индия в соседние дефектные области. Следует отметить, что оба эти механизма наблюдались в работах разных авторов [1 – 5], а локальный характер развития деградационного процесса в светодиодах InGaN/GaN многократно подтвержден [6 – 8]. Действие этих механизмов приводит к перераспределению индия и формированию локальных областей более равновесного состава, чем в исходном светодиоде, и к излучательной рекомбинации в длинноволновой области спектра. Интенсивность этой полосы растет с уровнем инжекции так же, как и основной, и так же, как для основной полосы, наблюдается сдвиг максимума в коротковолновую область. Площадь, занимаемая паразитными диодами, много меньше площади основного состава твердого раствора, поэтому при повышении уровня инжекции вклад длинноволновой полосы в спектры электролюминесценции становится незаметным.

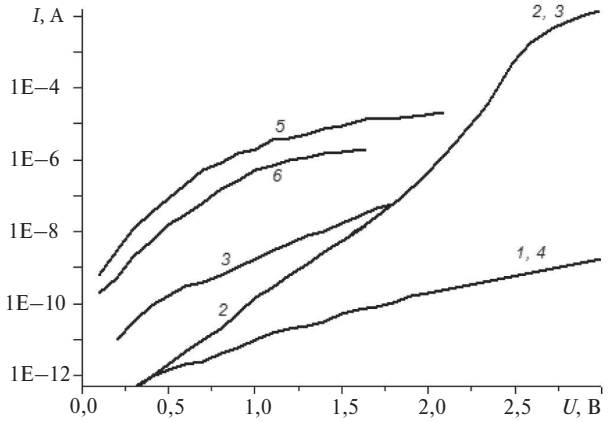


Рис. 3. Обратные (*1,4,6*) и прямые (*2,3,5*) ветви ВАХ светодиодов до (*1, 2*) и после (*3–6*) разных временных стадий старения: 10 ч (*3, 4*); 60 ч (*5, 6*)

Предположение о том, что ускоренное старение связано с качеством твердого раствора, хорошо согласуется с данными работы [5], в которой наблюдали ускоренное старение на светодиодах, выращенных в условиях пониженных скоростей роста твердого раствора, что, как известно, приводит к усилению неоднородности его состава [9]. Кроме того, ранее проведенные исследования на светоизлучающих структурах InGaN/GaN с разным уровнем упорядоченности показали, что по мере ухудшения упорядоченности наноматериала светодиодных структур скорость развития деградационного процесса повышается в десятки раз [8].

Таким образом, неоднородность состава и локальная неравновесность твердого раствора InGaN, неоднородное протекание инжекцион-

ного тока, локальные перегревы, приводящие к миграции и/или диффузии индия – это причины быстрого развития деградационного процесса в мощных синих светодиодах InGaN/GaN, осложняющие прогнозирование срока службы светодиодов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Meneghesso, G.** Recent results on the degradation of white LEDs for lighting [Текст] / G. Meneghesso, M. Meneghiniand, E. Zanoni // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2010. – Vol. 43. – P. 354007.

2. **Meneghini, M.** Degradation of InGaN-based laser diodes analyzed by means of electrical and optical measurements [Текст] / M. Meneghini, N. Trivellin, K. Orita [et al.] // IEEE Electron Device Letters. – 2009. – Vol. 30. – P. 356 – 358.

3. **Шуберт, Ф.Е.** Светодиоды [Текст] / Ф.Е. Шуберт; пер. с англ. под ред. А.Э. Юновича // М.: Физматлит, 2008. – 496 с.

4. **Akio Kaneta.** Spatial and temporal luminescence dynamics in an $In_xGa_{1-x}N$ single quantum well probed by near-field optical microscopy [Текст] / Akio Kaneta, Koichi Okamoto, Giichi Marutsuki [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2002. – Vol. 81. – P. 4353 – 4355.

5. **Leung, K.K.** Physical mechanisms for hot-electron degradation in GaN light-emitting diodes [Текст] / K.K. Leung, W.K. Fong, P.K.L. Chan, C. Surya // J. Appl. Phys. – 2010. – Vol. 107. – P. 073103.

6. **Бочкарева, Н.И.** Туннельно-рекомбинационные токи и эффективность электролюминесценции InGaN/GaN светодиодов [Текст] / Н.И. Бочкарева, А.А. Ефремов, Ю.Т. Ребане [и др.] // ФТП. – 2005. – Т. 39. – Вып. 5. – С. 627–632.

7. **Egawa, T.** Optical degradation of InGaN/AlGaN light-emitting diode on sapphire substrate grown by metalorganic chemical vapor deposition [Текст] / T. Egawa, H. Ishikawa, T. Jimbo, M. Umeno // Appl. Phys. Lett. – 1996. – Vol. 69. – P. 830 – 832.

8. **Kamanin, A.V.** Degradation of blue LEDs related to structural disorder [Текст] / A.V. Kamanin, A.G. Kolmakov, P.S. Kopev [et al.] // Phys. Stat. Sol. – 2006. – Vol. 3. – P. 2129 – 2132.

9. **Liubing Huang.** Different degradation behaviors of InGaN/GaN MQWs blue and violet LEDs [Текст] / Liubing Huang, Tongjun Yu, Zhizhong Chen [et al.] // Journal of Luminescence. – 2009. – Vol. 129 – P. 1981–1987.

УДК 535.8.667.6

И.В. Гончар, А.С. Иванов, А.Б. Федорцов

БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИЙ ИЗМЕРИТЕЛЬ ТОЛЩИНЫ ПЛЕНОК В ДИАПАЗОНЕ ОТ ДЕСЯТИ ДО ТЫСЯЧИ МИКРОН

Задача измерения толщины пленок возникает при проведении разнообразных исследований. Особенно актуальны быстродействующие методы, позволяющие измерять нестабильные во времени пленки, изменяющие свою толщину, например, вследствие растекания или испарения. Путем таких измерений оказывается возможным определять разнообразные физико-химические свойства пленок. Так, исследование кинетики растекания пленок жидкости по поверхности позволяет определить их вязкость, а кинетики изменения толщины при испарении – скорость испарения и т. п.

Контроль толщины прозрачных в видимой или инфракрасной областях спектра тонких слоев, диэлектрических и полупроводниковых, чаще всего осуществляется при помощи ла-

зерных интерферометрических методов. Последние основаны на интерференции лучей, отраженных от верхней и нижней поверхностей слоя (пленки).

Принцип измерений основан на том, что отражение и пропускание света пленкой вследствие интерференции зависит от соотношения между ее оптической толщиной Δ и длиной волны зондирующего излучения λ. Коэффициент отражения света пленкой R описывается функцией Эйри [1]. Эта функция имеет экстремумы (чередующиеся минимумы и максимумы) при выполнении условия

$$\frac{k\lambda}{2} = \Delta, \qquad (1)$$

где k – целое число; $\Delta = d(n^2 - \sin^2\theta)^{1/2}$ (d, n – толщина и показатель преломления пленки; θ – угол падения света на пленку).

Функция R является периодической по любому из трех аргументов: λ, d и θ, при рассмотрении двух других в качестве параметров.

Следует отметить, что существует обширная литература, посвященная различным методам контроля толщины пленок. Однако измерениям «толстых», более 10 мкм, пленок посвящено лишь небольшое количество работ.

Т. Ояма и Й. Мори [2] предложили определять толщину так называемых «толстых» пленок (диапазон от 10 мкм до 1 мм) путем измерения зависимости коэффициента отражения R лазерного луча пленкой от угла его падения θ при изменении последнего в широком диапазоне значений от θ_1 до θ_2.

При изменении угла θ изменяется величина Δ, которая в соответствии с формулой (1) попеременно совпадает то с целым, то с полуцелым числом длин волн λ. Вследствие этого при изменении угла падения луча коэффициент отражения проходит через минимумы и максимумы (рис. 1).

Если подсчитать число M всех интерференционных максимумов, возникающих при изменении угла от θ_1 до θ_2, то толщину пленки можно определить по следующей формуле [2]:

$$d = \frac{M\lambda}{2\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_2} - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}\right)}. \qquad (2)$$

Для экспериментального определения зависимости $R(\theta)$ в работе [2] использовалась оптическая схема, в которой лазер и фотоэлемент крепились на соседних плечах пантографа, а измеряемая пленка располагалась так, чтобы ее поверхность находилась на оси шарнира, соединявшего эти плечи. Падающий на пленку луч лазера отражался от нее на фотоэлемент при любом угле падения луча. Установка позволила реализовать предложенный метод, однако достигнутый минимум времени измерения (10 с) оказался недостаточным для решения ряда научных и технических задач, например для измерения толщины жидких пленок, изменяющих свою толщину вследствие растекания и испарения.

Для устранения указанного недостатка нами была предложена и реализована усовершен-

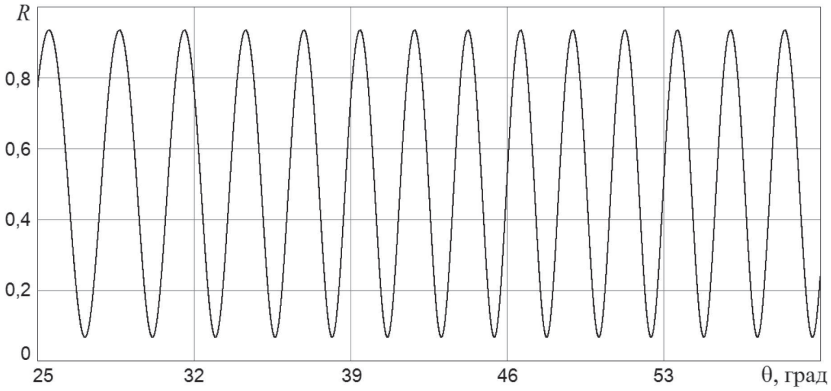


Рис. 1. Угловая зависимость коэффициента отражения лазерного излучения при интерференции в пленке

ствованная оптико-механическая схема [3], в которой единственным подвижным элементом является вращающееся плоское зеркало. В этой схеме использовано известное свойство зеркального эллипсоида: световой луч, вышедший из одного его фокуса, попадает после отражения от любой точки эллипсоидной поверхности в его другой фокус.

Созданный на основе предложенной схемы прибор [4, 5] позволил производить 50 измерений толщины пленки в секунду при времени одного измерения менее 0,001с. Это позволило производить измерения толщины не только твердых, но и жидких пленок, причем в быстропротекающем процессе их растекания и испарения [6]. Впоследствии мы доказали возможность замены в данной оптической схеме эллиптических зеркал сферическими зеркалами либо сферическими линзами [7], что позволило значительно удешевить конструкцию и использовать широкодоступные оптические элементы.

Наряду с преимуществами (быстродействие, высокая локальность) рассматриваемый метод, основанный на подсчете числа максимумов в пределах изменения угла падения, обладает недостаточной точностью измерения для ряда применений. Это связано с тем, что в эксперименте регистрируется интерференционная зависимость $R(\theta)$, у которой обычно в пределах от θ_1 до θ_2 укладывается нецелое число интерференционных периодов. При этом число максимумов M – целое, оно равно целой части числа периодов. Другими словами, ошибка в определении числа периодов может составить в предельном случае единицу. В результате при расчетах по формуле (2) максимальная абсолютная ошибка метода при реальных значениях λ, n, θ_1 и θ_2 составляет единицы микрон.

Вместе с тем, при измерениях тонких (толщиной в доли микрона) пленок разработаны методы, в которых абсолютная погрешность составляет всего 3 нм [8]. В работе [8] использовалась зависимость коэффициента отражения R излучения пленкой от ее толщины d при фиксированных длине волны λ и угле падения θ. Эта зависимость имеет периодический характер (рис. 2).

Если измерить величину R при точно заданном фиксированном угле падения луча θ, то оказывается возможным по расчетному графику $R(d)$ достаточно точно определить толщину пленки d. Но для однозначного определения толщины периодичность графика $R(d)$ требует знать заранее диапазон ожидаемых значений. В случае тонких пленок с хорошо воспроизводимыми параметрами, имеющих толщину в доли микрон, это требование обычно выполняется. Для более толстых пленок, в единицы микрон, для устранения неоднозначности результата можно использовать предложенный нами трехлучевой метод [9]. Однако для «толстых», толщиной более 10 мкм, пленок, предпочтительнее оказался метод Оямы и Мори [2], а также его дальнейшие модификации [4, 5, 10].

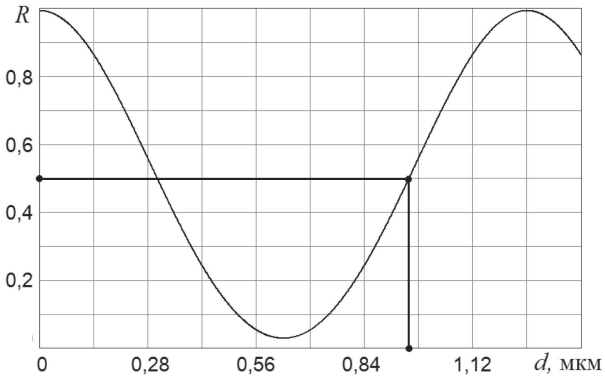


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения луча лазера пленкой от ее толщины при фиксированных значениях длины волны и угла падения луча

Экспериментальная часть

Принцип измерений. В настоящей работе мы предлагаем объединение двух методов, реализуемых в одном комплекте аппаратуры, с целью совместить широкий диапазон измеряемых значений толщины толстых пленок и быстродействие способа, основанного на исследовании числа максимумов зависимости $R(\theta)$, с высокой точностью другого способа определения толщины, основанного на измерении величины R при заданном значении угла падения θ при одновременном обеспечении скорости и частоты измерений, необходимых для контроля нестабильных во времени пленок. С учетом последнего требования очевидно, что требуемый результат может быть достигнут только с использованием современной цифровой техники обработки сигналов.

Для достижения поставленной цели было необходимо решить несколько задач.

1. Получить вид экспериментальной зависимости коэффициента отражения лазерного луча пленкой в широком интервале углов падения зондирующего лазерного луча.

2. Из анализа полученной зависимости определить с точностью до полупериода функции $R(d)$ диапазон возможных значений толщины.

3. Как можно более точно определить значение коэффициента отражения при одном угле падения, соответствующего крутому участку зависимости $R(\theta)$.

4. Организовать вычисления с использованием полученных экспериментальных данных для получения наиболее точного значения толщины пленки, основанного не только на подсчете числа интерференционных максимумов, но и на величине коэффициента отражения зондирующего луча пленкой при выбранном угле падения.

Для этого нам потребовалось модифицировать оптико-механический блок, перейти к цифровому представлению данных и разработать программный комплекс для обработки данных и вычисления результатов измерений.

Оптико-механический блок экспериментальной установки. Для реализации предложенного метода использовалась модификация оптико-механического блока, ранее описанного нами в статье [6]. Упрощенная схема модернизированного блока представлена на рис. 3,*а*. В качестве зондирующего использовался гелий-неоновый лазер ЛГ-207А с рабочей длиной волны 0,6328 мкм.

Необходимость эксплуатации блока совместно с аналого-цифровым преобразователем (АЦП) и особенности обработки информации в предлагаемом методе потребовали доработки оптико-механической схемы блока. Необходимо было решить три дополнительные задачи: во-первых, выработать стартовый импульс начала рабочего диапазона изменения угла падения зондирующего луча для запуска АЦП; во-вторых, выработать реперный импульс-метку заданного значения угла падения; в-третьих, ввести схему стабилизации и регулировки скорости вращения плоского зеркала.

Для правильного задания момента включения АЦП при оцифровке данных в оптико-механический блок введена дополнительная оптико-электронная схема (рис. 3,*б*), состоящая из полупроводникового лазера *7* и датчика излучения этого лазера *8*. Луч лазера направлен на вращающееся зеркало *2*. Расположение лазера *7* и фотодиода *8* подобраны так, что при положении вращающегося зеркала, соответствующего началу рабочего интервала изменения угла падения зондирующего луча на образец, вспомогательный луч синхронизации отражается этим зеркалом на фотодиод *8*, который вырабатывает импульс запуска АЦП.

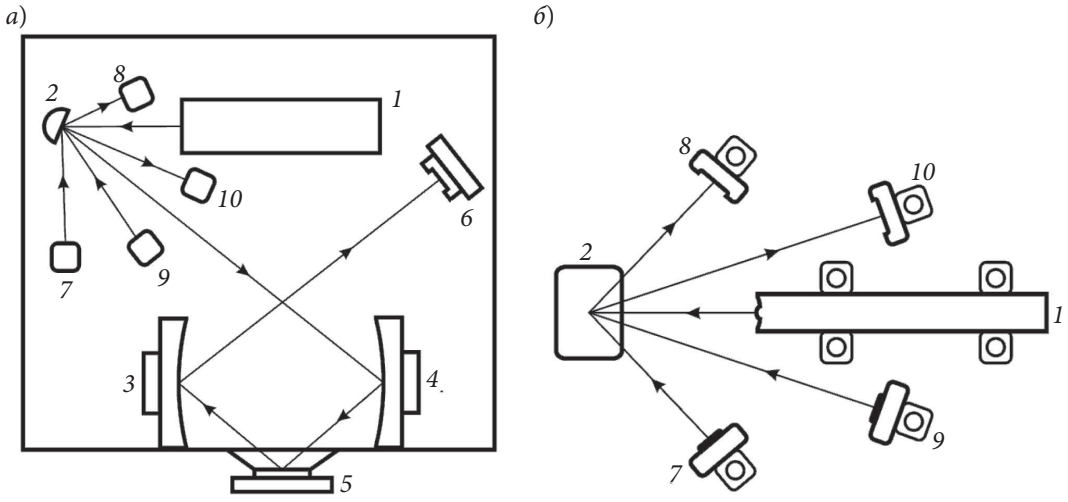


Рис. 3. Упрощенная схема оптико-механического блока: *а* – вид спереди, *б* – вид сверху, показывающий расположение дополнительных элементов; *1* – лазер; *2* – вращающееся зеркало; *3,4* – эллиптические зеркала; *5* – образец пленки на держателе; *6* – фотоприемник; *7, 9* – дополнительные лазеры; *8, 10* – дополнительные фотоприемники

В оптико-механический блок была введена еще одна оптико-электронная схема, которая поставляет информацию о прохождении зондирующим лучом заданного значения угла падения. Эта схема также состоит из полупроводникового лазера *9* и фотоприемника *10*. Углы падения и отражения луча лазера на плоское вращающееся зеркало *2* подобраны так, что при определенном положении плоского зеркала в момент времени, соответствующий заданному углу падения, с помощью данной схемы оптико-механический блок вырабатывает реперный импульс-метку.

В оптико-механический блок также дополнительно была введена схема регулировки и стабилизации цепи питания электродвигателя, приводящего во вращение плоское зеркало.

Сопряжение с ЭВМ. Выходные сигналы оптико-механического блока подаются на аналого-цифровой преобразователь. Для сопряжения интерферометра с ЭВМ нами применен двухканальный АЦП фирмы National Instruments, модель NI-5122, с разрядностью 14 бит и возможностью оцифровки входных сигналов на частотах до 100 МГц.

При реализации предложенного метода были задействованы вход синхронизации и оба канала преобразователя. Схема сопряжения оптико-механического блока с АЦП представлена на рис. 4.

Для измерений толщины была выбрана частота дискретизации аналогового сигнала, выдаваемого оптико-механическим блоком на вход АЦП, равная 3 МГц. Это обеспечивает 900 отсчетов за интервал времени, соответствующий рабочему интервалу изменения угла падения зондирующего луча от 25 до 60 град. С учетом особенностей конструкции оптико-механического блока это время составляет примерно $3 \cdot 10^{-4}$ с при частоте вращения плоского зеркала 25 Гц. С АЦП информация поступает на ПЭВМ на базе двухядерного процессора Intel Core i3.

Программная часть. Повышение точности измерений потребовало не только изменений аппаратной, но и разработки новой программной части интерферометра. Структура программы-обработчика цифровых данных на ЭВМ представлена на рис. 5.

Программный модуль 1 выполняет предварительную подготовку входного сигнала, выделяя его часть, несущую полезную информацию об интерференционной картине. При каждом обороте вала двигателя, на котором находится вращающееся зеркало, мы получаем от АЦП полный вид функции коэффициента отражения в установленном диапазоне углов падения лазерного луча и преобразуем его в одномерный массив чисел.

Для возможности совместного применения в реальном режиме времени двух методов – метода измерений толщины образца, основанного на подсчете интерференционных максимумов, и метода, вычисляющего толщину по значению коэффициента отражения R лазерного излучения от образца при выбранном значении угла падения, пришлось разделить общий поток данных, получаемых от прибора, на две части. Поэтому динамический массив данных после обработки в модуле 1 подается на модули 2 и 3.

Модуль 2 выполняет выборку каждого 10-го элемента из массива данных, несущего полную и подробную информацию об интерференции, так как для вычислений толщины, основанных на подсчете числа интерференционных макси-

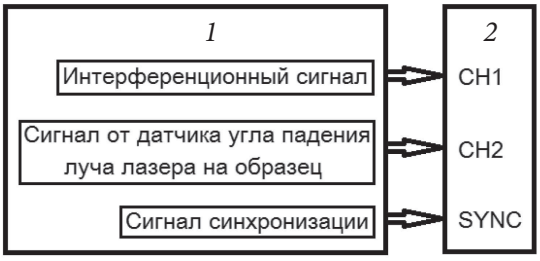


Рис. 4. Схема соединения оптико-механического блока (*1*) с аналогово-цифровым преобразователем NI-5122 (*2*)

Рис. 5. Аналогово-цифровой преобразователь и структура программы – обработчика данных

мумов, нет необходимости в точном воспроизведении формы сигнала. Затем полученная выборка передается в блок подпрограмм 4. Подпрограммы этого блока проводят вычисления толщины образца приближенным методом, по формуле (2). Для этих вычислений важна информация только о наличии интерференционного максимума для его учета. Блок подпрограмм 4 определяет диапазон возможных значений толщины с точностью до периода функции $R(d)$.

Разделение данных на два потока со снижением интенсивности одного из них продиктовано необходимостью снижения нагрузки на центральный процессор ЭВМ для повышения быстродействия всей программы в целом, для ее работы в реальном режиме времени при исследовании нестабильных пленок.

В отличие от блока 4, блок подпрограмм 3 получает на вход все данные, передаваемые от АЦП в результате оцифровки сигнала. Он определяет полупериод функции $R(d)$, в котором находится сигнал-репер и использует для своих вычислений данные о значении коэффициента отражения R образца при выбранном значении угла падения θ. Для этого в блок 3 поставляется сигнал-репер от второго канала АЦП о прохождении заданного угла падения лазерным зондирующим лучом.

Данные, полученные от программных модулей 3 и 4, поступают в модуль 5, объединяющий вычисления на основе двух реализованных методов измерений толщины. Результат работы модуля 5 – точное значение толщины измеряемых образцов, основанное не только на подсчете количества интерференционных максимумов, но и на величине коэффициента отражения зондирующего луча пленкой при заданном угле его падения.

Программа выводит на монитор значения толщины в символьном и графическом видах. Числовые значения толщины могут быть сохранены в файл для последующей статистической обработки либо для внесения в базу данных. Программа-обработчик поступающих данных в ЭВМ от АЦП написана при помощи среды разработки LabView. Ввиду большого объема распечатки программы в статье приводится только блок-схема алгоритма ее работы. Сама программа опубликована в [11].

Результаты эксперимента

С целью апробации комбинированного метода измерения толщины было измерено 17 образцов пленок биаксиально ориентированного полипропилена, имеющих различную толщину в диапазоне от 10 до 60 мкм. Для вычислений толщин пленок в эксперименте использовалось

Результаты измерения толщины пленок полипропилена

Параметр	Единица измерения	Значение параметра	
		Образец №1	Образец №10
Среднее значение толщины	**мкм**	**23,0685**	**12,6393**
Количество измерений	–	1005	1121
Дисперсия	10^{-4} мкм^2	7,4496	4,4722
Стандартное отклонение	10^{-2} мкм	2,7294	2,1148
Коэффициент вариации	%	0,12	0,17
Стандартная ошибка	10^{-4} о.е.	8,60961	6,31622
Минимальная толщина	мкм	22,9692	12,5892
Максимальная толщина		23,2592	12,6992
Диапазон значений		0,29	0,11
Граница доверительного интервала с вероятностью 0,95:			
левая	мкм	23,0668	12,6381
правая		23,0702	12,6406

значение показателя преломления полипропилена $n = 1{,}47$.

Были проведены многократные лабораторные эксперименты по измерению толщины каждого из исследуемых образцов. Для каждого объекта измерения проводились примерно 1000 раз. Данные для двух типичных образцов сведены в таблицу, содержащую измеренные значения толщины, информацию о доверительных интервалах и другие данные статистической обработки. Из данных таблицы видно, что характеристики точности и воспроизводимости результатов весьма высоки.

Обсуждение результатов

Точность измерений. В методе Ояма и Мори [2] и его модификациях [4, 6, 10] определение толщины пленки основано на подсчете числа интерференционных максимумов M в интервале изменения угла падения луча от θ_1 до θ_2.

Важным достоинством метода Ояма – Мори является то, что для него несущественно угловое положение конкретных максимумов. Необходимо лишь зарегистрировать их наличие и количество. Это резко снижает требования к отношению сигнал/шум в оптико-электронном тракте. Число максимумов M – целое, в отличие от числа периодов. В пределе эти два значения могут различаться на $\Delta M \le 1$. Тогда в соответствии с формулой из работы [2] для типичных значений параметров $\lambda = 0{,}6328$ мкм; $n = 1{,}5$; $\theta_1 = 25°$; $\theta_2 = 60°$ получаем, что вызванное возможной ошибкой $\Delta M = 1$ максимальное отклонение в измеренной величине толщины может составить примерно 2 мкм. При этом оно остается одинаковым во всем диапазоне измеряемых толщин. При сравнительно небольших толщинах в 10 – 20 мкм относительная ошибка может достигать 20 и 10 %. Для пленок толщиной сотни микрон ошибка в 2 мкм может быть несущественной, кроме тех случаев, когда измеряется толщина пленки, имеющей высокую скорость изменения.

Как видно из таблицы, в описываемом устройстве эта величина на порядок меньше.

Частота измерений и время одного измерения. Эти параметры исключительно важны для контроля толщины нестабильных пленок. При динамическом режиме работы интерферометра возникают неточности в экспериментальном определении как угла падения, так и величины сигнала отражения, соответствующего этому углу. Причинами неточности определения этого угла являются дискретность его определения и неравномерность вращения плоского зеркала. На практике оказалось, что оптимальной является такая частота дискретизации, при которой на один период функции $R(d)$ приходится примерно 150 актов дискретизации. Это дает принципиальную возможность измерения толщины пленки с неопределенностью не более 10 нм.

При экспериментально исследовавшихся толщинах образцов и предпринятой стабилизации скорости вращения плоского зеркала оказалось, что оптимальной является частота вращения, равная примерно 25 об/с, а частота дискретизации составляет 3 МГц. Реализованный динамический режим позволяет измерять толщины пленок с неопределенностью 150 нм, т. е. выигрывать в точности, по сравнению с прототипом метода Ояма – Мори, более чем в 10 раз.

При выбранном режиме определения толщины обеспечивается проведение 25 измерений за секунду, а время одного измерения – $3 \cdot 10^{-4}$ с, что достаточно для контроля многих нестабильных, например жидких, пленок.

При бóльших частотах вращения повышается уровень высокочастотных помех, наводимых на вход АЦП, и начинает сказываться ошибка, определяемая временем включения АЦП. Повышение частоты дискретизации приводит также к перегрузке процессора. Это не позволяет работать в режиме реального времени, что необходимо при измерении толщины нестабильных пленок.

Кроме того, аналогово-цифровой преобразователь NI-5122, использованный нами, выполнен в форм-факторе PCI. Поэтому питание на АЦП поступает от общего импульсного блока питания системного блока компьютера. При повышенной вычислительной нагрузке центрального процессора это снижает качество фильтрации постоянных напряжений и повышает уровень высокочастотных помех, поступающих по цепям питания на АЦП, что также может влиять на результаты работы АЦП при оцифровке полезного сигнала. На практике оказалось, что при увеличении частоты вращения плоского зеркала (частоты измерений)

до 50 Гц точность измерений на используемом нами оборудовании снижалась почти в 3 раза.

Таким образом, из проведенного нами анализа следует, что точность и частота измерений находятся в некотором противоречии. Следовательно, выбор частоты измерения и частоты дискретизации должен определяться конкретной исследовательской задачей и используемым оборудованием. Предлагаемый метод позволяет при необходимости на порядок и более повысить точность измерений по сравнению с аналогом при обеспечении высокой скорости и частоты измерений.

Так, при частоте измерений 25 Гц и длительности одного измерения $3 \cdot 10^{-4}$ с абсолютная погрешность не превосходила 150 нм.

Работа была выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гранты 16.740.11.0144 и 14.740.11.1013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Калитеевский, Н.И.** Волновая оптика [Текст]: Учеб. пос. для студентов вузов; 5-е изд. /Н.И. Калитеевский. – СПб.: Лань, 2008. – 480 с.

2. **Ohyama, T.** Optical method for measuring uniform thickness of the order of 10 Mm – 1 μm of transparent solid and liquid films [Text] / T. Ohyama, Y.H. Mori // Review of Scientific Instruments. – 1987.–Vol. 58. – No. 10. –P. 1860 – 1864.

3. **Летенко, Д.Г.** Быстрое измерение угловой зависимости коэффициента отражения лазерного луча неподвижным образцом [Текст] / Д.Г. Летенко, А.Б. Федорцов, Ю.В. Чуркин [и др.] // Приборы и техника эксперимента. – 1991. – № 4. – С. 222 – 224.

4. **Torchinsky, I.A.** A fast operating device for measuring the thickness of transparent solid and liquid films [Text] / I.A. Torchinsky, A.B. Fedortsov, Yu.V. Churkin, [et al.] // Review of Scientific Instruments. – 1992. – Vol. 63. – No. 7. – P. 3597–3582.

5. **Федорцов, А.Б.** Прибор для измерения толщины прозрачных пленок [Текст]/ А.Б. Федорцов, Д.Г. Летенко, Ю.В. Чуркин [и др.] // Дефектоскопия. – 1995. – № 6. – С. 22–27.

6. **Ценципер, Л.М.** Прибор для измерения кинетики растекания и испарения жидких пленок в реальном масштабе времени [Текст] / Л.М. Ценципер, А.Б. Федорцов, Д.Г. Летенко // Приборы и техника эксперимента. – 1996. – № 1. – С. 154–157.

7. **Иванов, А.С.** Быстродействующий прибор для контроля угловой зависимости коэффициента отражения лазерного луча [Текст] / А.С. Иванов, А.Б. Федорцов, Ю.В. Чуркин [и др.] // Известия вузов. Приборостроение. – 2011. – Т. 53. – № 3.– С. 61 – 64.

8. **Федорцов, А.Б.** Применение гелий-неонового лазера в интерференционном методе измерения толщины пленок [Текст] / А.Б. Федорцов, К.К. Прокофьева // Электронная техника. Материалы.–1974. – № 4. – С. 117–122.

9. **Кононович, И.Ю.** Трехлучевой лазерный метод измерения толщины прозрачных пленок на отражающих подложках. [Текст] / И.Ю. Кононович, К.Ф. Комаровских, Ю.В. Чуркин [и др.] // Электронная техника. Материалы.–1990.– № 6/251.– С. 70 – 73.

10. **Nosoko, T.** Improved interferometer for measuring unsteady film thickness [Text] / T. Nosoko, Y.H. Mori, T. Nagata // Review of Scientific Instruments. – 1996. – Vol. 6. – No. 8. – P. 2685 – 2689.

11. **Гончар, И.В.** Программа обработки данных программно-аппаратного комплекса «Автоматизированный быстродействующий лазерный интерферометр для контроля толщины прозрачных твердых и жидких пленок» [Текст] / И.В. Гончар, А.Б. Федорцов, Ю.В. Чуркин, А.С. Иванов. Свидетельство о госрегистрации № 2012611152.

УДК 621.373.8

С.А. Золотов, В.Е. Привалов

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА НА КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ ГАЗОВОГО ЛАЗЕРА

В лазере на смеси гелия и неона традиционно используется активный элемент цилиндрической геометрии в резонаторе плоскость-сфера. Учитывая форму каустики в резонаторе подобного типа, легко понять, что определенная доля активной среды не участвует в генерации излучения. Известно также, что, изменяя геометрию активного элемента, можно влиять на значение коэффициента усиления в капилляре, его пространственное распределение и вследствие этого получать выигрыш в мощности, в равномерности усиления, осуществлять селекцию мод. Изменение геометрии вызывает изменение параметров плазмы, температуры газа, может вызвать те или иные колебания в разряде, изменить характер диффузии [1].

Известно, что величина и стабильность газоразрядных лазеров (ГРЛ) оказывают существенное влияние на точность измерений, осуществляемых с их помощью, а усиление есть одна из основных характеристик ОКГ. С энергетической точки зрения выгодно обеспечить максимальное перекрытие модового объема резонатора и объема, в котором обеспечена инверсия населенностей активной среды. Когда радиус пятна генерации в несколько раз меньше радиуса капилляра (условие выполняется практически во всех ГРЛ, кроме волноводных), это требование сводится к получению распределения инверсии населенностей, не убывающего по мере удаления от оси. Это нереально, но необходимо стремиться к наиболее пологому распределению.

Для того чтобы определить, каким образом изменение геометрии влияет на коэффициент усиления, необходимо рассчитать геометрическую часть коэффициента усиления; в общем случае ее можно искать в следующем виде [2]:

$$k = \frac{1}{S}\int_V k_0 \cdot f(V)\, dV, \qquad (1)$$

где $f(V)$ – пространственное распределение усиления в объеме V разрядного промежутка; S – площадь поперечного сечения.

Данное распределение $f(V)$ подобно концентрации возбужденных атомов [3, 4] и находится из следующего диффузионного уравнения (граничные условия $f\big|_\Gamma = u(x,y)$, зависимость от продольной координаты считаем несущественной):

$$\Delta f(V) + \lambda^2 f(V) = 0, \qquad (2)$$

где λ – постоянная величина, характеризующая параметры среды: коэффициент диффузии, форму разрядного промежутка.

Ищем решение в виде

$$f(x, y) = W(x, y) - v(x, y),$$

где функция $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям

$$v\big|_\Gamma = u(x,y).$$

Для нахождения $W(x, y)$ необходимо решить следующую задачу:

$$\Delta W + \lambda^2 W = \lambda_\alpha^2 W,\ W\big|_\Gamma = 0.$$

Рассмотрим соответствующий однородный вариант данной задачи:

$$\Delta f(V) + \lambda^2 f(V) = 0,\ f\big|_\Gamma = 0,$$

и ее решение, которое выглядит следующим образом [1]:

$$f = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2 \Omega_\alpha}{\lambda^2 - \lambda_\alpha^2} - \Omega_\alpha \right). \qquad (3)$$

Отсюда видно, что если удается найти условия, при которых $\lambda^2 \to \lambda_\alpha{}^2$, то при $\Omega_\alpha \neq 0$ функция $f(V)$, а значит и все выражение (3) будет стремиться к бесконечности. Это позволяет сделать вывод о том, что в активной среде с граничными условиями, отличными от нуля, возможен резонансный характер зависимости усиления от параметров среды и разрядного промежутка. Если взять другие граничные условия для этой же области, то в решении изменяется лишь Ω_α и резонанс будет иметь место при тех же собственных значениях λ_α. Изменение граничных условий будет влиять лишь на форму резонансной кривой.

Как поперечная, так и продольная геометрии влияют на значение коэффициента усиления, о чем свидетельствуют литературные данные. В 1969 году возникла идея создания конической трубки [5, 6]; затем эксперимент подтвердил правильность идеи и методов расчета усиления для данного случая [7]; в 1971 году был предложен комбинированный вариант (рис. 1, *б*) [8].

Таким образом, изменение геометрии активного элемента приносит свои плоды. Опираясь на вид каустики в резонаторе плоскость-сфера, можно сделать заключение, что наилучшим способом получить максимальный коэффициент усиления за счет изменения продольной геометрии будет производство трубки газоразрядного лазера (ГРЛ), геометрия которой точно бы совпадала с геометрией поля (рис. 1,*а*), однако это сопряжено со значительными технологическими трудностями.

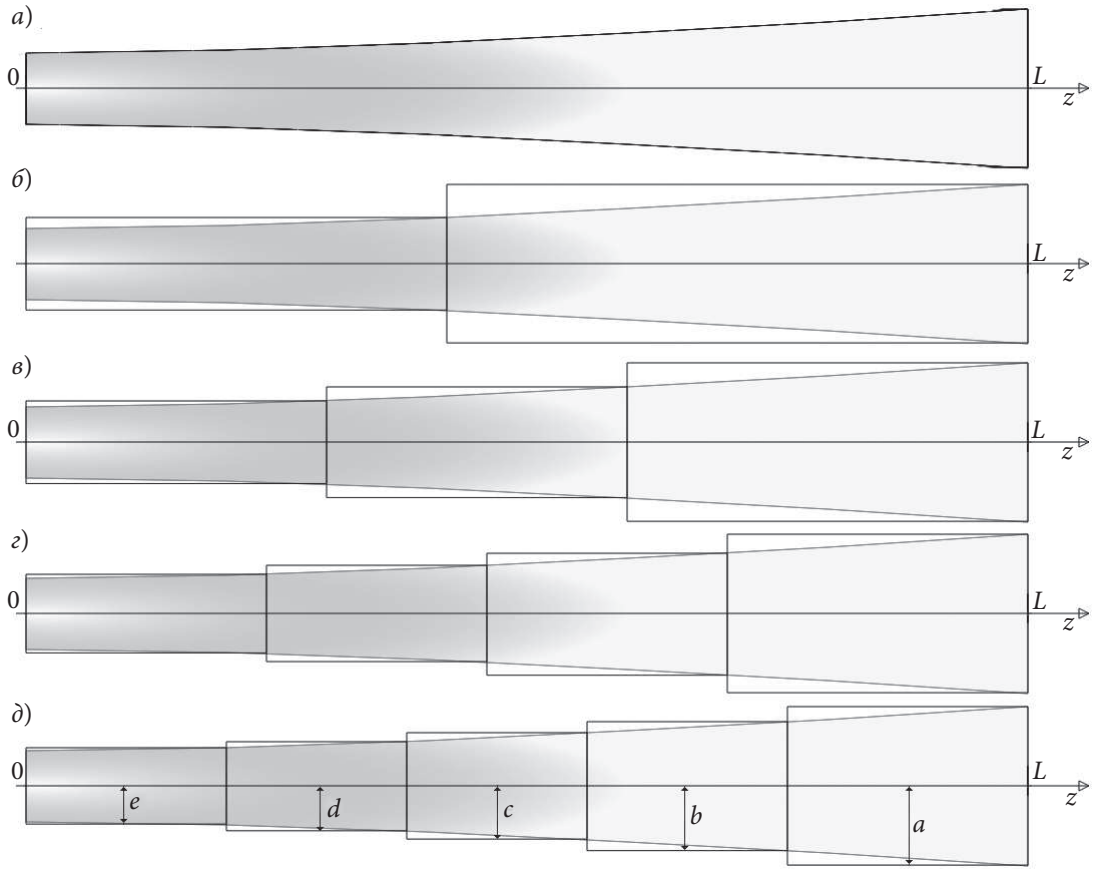


Рис. 1. Постановка задачи для расчета одной газоразрядной трубки (*а*) и комбинированного активного элемента, состоящего из двух (*б*), трех (*в*), четырех (*г*) и пяти (*д*) секций; L – длина резонатора; a, b, c, d, e – радиусы трубок

Именно из таких соображений ведутся поиски способов наибольшего приближения к указанным характеристикам газоразрядной трубки, но при этом способ должен обеспечивать более простую конструкцию. В настоящей статье мы излагаем результаты расчетов для трубок, состоящих из секций количеством от двух до пяти (см. рис. 1), полученные после июня 2010 года [9].

В ходе расчета комбинированный активный элемент разбивался на секции, из которых он состоит. Коэффициент усиления каждой секции можно рассчитать по следующей формуле [6]:

$$k(\alpha, l_1, l_2) = \int_{l_1}^{l_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \frac{1}{\pi a^2} \frac{J_0\left(\frac{2{,}405r}{a}\right) r}{a} \partial r \partial\theta \partial l, \quad (4)$$

где a – радиус трубки; l_1, l_2 – координаты секции; r, θ, l – система координат, J_0 – функция Бесселя нулевого порядка.

Данная формула широко используется при расчетах активных элементов газоразрядных лазеров с цилиндрической геометрией. Поскольку каждая секция вносит свой вклад в общий коэффициент усиления, то полное усиление трубки будет равно сумме коэффициентов усиления каждой секции.

Следует также отметить, что при удлинении отдельно взятой секции ее радиус увеличивается за счет того, что радиус пятна каустики поля растет по мере приближения к сферическому зеркалу резонатора. Поэтому, чтобы избежать потерь на стыке, воображаемая линия границы модового объема не должна касаться границы капилляра. Таким образом, встает вопрос об оптимальных соотношениях между длинами секций комбинированного активного элемента.

Расчетным путем были найдены коэффициенты усиления и оптимальные длины секций для исследуемых комбинированных капилляров.

Коэффициент усиления всего активного элемента, состоящего из пяти секций, будет выражаться как

$$k = k_1(a, z_1, z_0) + k_2(b, z_2, z_1) + \\ + k_3(c, z_3, z_2) + k_4(d, z_4, z_3) + k_5(e, z_5, z_4),$$

где $z_0 - z_5$ – координаты секции от ее начала до конца; *a, b, c, d, e* –соответственно их радиусы, которые рассчитываются по известной формуле из работы [2]:

$$w(z) = \sqrt{L\left(1 + \frac{4z^2}{L^2}\right)}, \quad (5)$$

где L – длина резонатора, z – текущая координата вдоль его оси.

При использовании активных элементов с нестандартной геометрией, состоящих из двух и более секций, коэффициент усиления возрастает до 49 % при условии, что капилляр имеет оптимальное соотношение секций. Полученные результаты расчетов отображены в таблице. Видно, что при увеличении количества секций растет выигрыш в усилении. В предельном случае мы приходим к активному элементу, геометрия которого полностью повторяет форму каустики поля резонатора плоскость-сфера. Производство такого капилляра, как отмеча-

Результаты расчетов коэффициента усиления газоразрядного лазера с секционным активным элементом

Количество секций	Коэффициент усиления		Оптимальное соотношение секций
	о.е.	%	
1	0,13651305	0	1
2	0,177345553	29,91	42 : 58
3	0,191756127	40,47	30 : 30 : 40
4	0,199003725	45,78	24 : 22 : 24 : 30
5	0,203341465	48,95	20 : 18 : 18 : 20 : 24
∞	0,377007902	96,60	–

лось выше, связано с серьезными технологическими трудностями, в то время как создать многосекционную трубку гораздо легче.

Таким образом, предлагаемые конструкции капилляра позволят сократить размеры газоразрядного лазера при сохранении мощности излучения либо увеличить мощность при тех же самых геометрических размерах лазера.

Можно также совместить представленные результаты с полученными ранее [1], что позволит создать принципиально новые активные элементы для лазеров на смеси гелия и неона с увеличенной мощностью и малыми размерами.

Сокращение размеров резонатора позволит повысить пассивную стабильность лазера.

Обнаруженный выигрыш в усилении позволил провести дальнейшие поиски, на некоторые из которых получены патенты [10 – 13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Привалов, В.Е.** Влияние граничных условий на усиление активной среды газового лазера [Текст] / В.Е. Привалов, С.Ф. Юдин // ЖПС.–1975. – Т. 12. – С. 42 – 46.

2. **Привалов, В.Е.** Газоразрядные лазеры в измерительных комплексах [Текст] / В.Е. Привалов. – Л.: Судостроение, 1989. – 260 с.

3. **Молчанов, М.И.** Измерение коэффициента усиления в смеси He-Ne [Текст] / М.И. Молчанов, А.Ф. Савушкин // Радиотехника и электроника.– 1970. – Т. 15. – С. 1544 – 1546.

4. **Троицкий, Ю.В.** Радиальное распределение усиления в He-Ne смеси [Текст] / Ю.В. Троицкий, В.П. Чеботаев // Оптика и спектроскопия. – 1966. – Т. 20. – С. 362 – 365.

5. **Привалов, В.Е.** Кольцевой газовый лазер [Текст] / В.Е. Привалов, С.А. Фридрихов // УФН.– 1969.–Т. 97.–С. 377 – 402.

6.**Привалов, В.Е.** He-Ne лазер с трубкой конусообразного сечения [Текст]/ В.Е. Привалов, С.А. Фридрихов // ЖПС.–1970. –Т. 12.–С. 937 – 940.

7. **Федотов, А.А**. Исследование возможности увеличения мощности излучения He-Ne ОКГ применением разрядных трубок профильного (конического сечения [Текст]: Автореферат дис. ... канд. техн. наук / А.А. Федотов. – Л.: ЛЭТИ, 1974. – 14 с.

8. **Привалов, В.Е**. He-Ne лазер с комбинированной разрядной трубкой [Текст]/ В.Е. Привалов //Электронная техника. Сер. 3.–1971.–Вып. 3.–С. 29 – 31.

9. **Золотов, С.А.** Уход от стандартных геометрий приводит к выигрышу в усилении/ С.А. Золотов, В.Е. Привалов // Труды конференции «Лазеры. Измерения. Информация». – 2010. – С. 109.

10. **Пат. 95909 Российская Федерация МПК[7] H 01 S 3/03** Газоразрядный лазер [Текст]/ Привалов В.Е., Золотов С.А.; заявитель и патентообладатель СПбГПУ. – № 2010109095/22. заявл. 11.03. 2010; опубл. 10.07. 2010, Бюл. № 19. – 33 с.: ил.

11. **Пат. 101276 Российская Федерация МПК[7] H 01 S 3/03** Газоразрядный лазер [Текст] / Привалов В.Е., Золотов С.А.; заявитель и патентообладатель СПбГПУ. – № 2010139554/28. заявл. 24.09. 2010; опубл. 10.01. 2011, Бюл. № 1. – 37 с.: ил.

12. **Пат. 102856 Российская Федерация МПК[7] H 01 S 3/03** Газоразрядный лазер [Текст] / Привалов В.Е.; заявитель и патентообладатель СПбГПУ. – № 2010144441, заявл. 29.10 2010; опубл. 10.03. 2011, Бюл. № 8 –77 с.: ил.

13. **Пат. 104758 Российская Федерация МПК[7] H 01 S 3/03** Газоразрядный лазер [Текст] / Привалов В.Е.; заявитель и патентообладатель СПбГПУ. – № 2010149517, заявл. 03.12 2010, опубл. 20.05. 2011, Бюл. № 14 – 29с.: ил.

УДК 538.915

Д.В. Ковалевский

ЭФФЕКТЫ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ БАРЬЕРОВ И ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕТКИ В МОДЕЛИ КРОНИГА – ПЕННИ

Модель Кронига – Пенни, описывающая движение электрона в поле одномерного периодического потенциала, образованного системой идентичных эквидистантных δ-образных барье-

ров, является одной из простейших в зонной теории твердого тела. Аппроксимируя потенциал одномерной кристаллической решетки идеализированным периодическим потенциалом модели Кронига – Пенни, путем простых выкладок можно выявить наличие в системе энергетических зон с непрерывным спектром, разделенных запрещенными зонами [1]. Рассмотрев полубесконечную решетку подобного типа, И.Е. Тамм показал наличие в системе локализованных поверхностных (таммовских) состояний (см. [2], а также обзор современных исследований по проблеме в недавно опубликованной работе [3]). Стохастические версии модели Кронига – Пенни со случайным шагом между соседними барьерами и/или случайными добавками к мощности барьеров служат важными моделями для исследования движения электронов в неупорядоченных средах [4 – 6].

В настоящей работе при помощи матричного формализма рассчитаны волновые функции состояний непрерывного спектра и энергии поверхностных состояний в полубесконечной модели Кронига – Пенни со специальной геометрией потенциала (см. раздел «Постановка задачи»), а также исследован случай размерного квантования в решетке конечной длины. Отметим, что выбранная геометрия потенциала отличается как от задачи, рассмотренной Таммом, так и от ряда новейших исследований [3].

Постановка задачи

Рассмотрим движение частицы в одномерном потенциале, образованном полубесконечной последовательностью δ-образных барьеров (рис. 1). Барьеры расположены эквидистантно, в узлах одномерной решетки $z_n = n$ ($n \geq 1$), при этом мощность n-го барьера равна ε_n. (Отметим, что величина ε_n может быть и отрицательной – это будет соответствовать наличию потенциальной ямы.) Предположим далее, что частица может двигаться лишь по положительной полуоси $z > 0$, а в области $z < 0$ находится бесконечно высокий потенциальный барьер ($U_0(z) = U_\infty = +\infty$), делающий невозможным движение частицы по отрицательной полуоси.

Отметим, что в оригинальном исследовании Тамма, в котором была показана возможность существования поверхностных состояний, величина потенциального барьера U_0 при $z < 0$ полагалась конечной, а мощности δ-образных барьеров – равными между собой ($\varepsilon_n = \varepsilon = \text{const.}$).

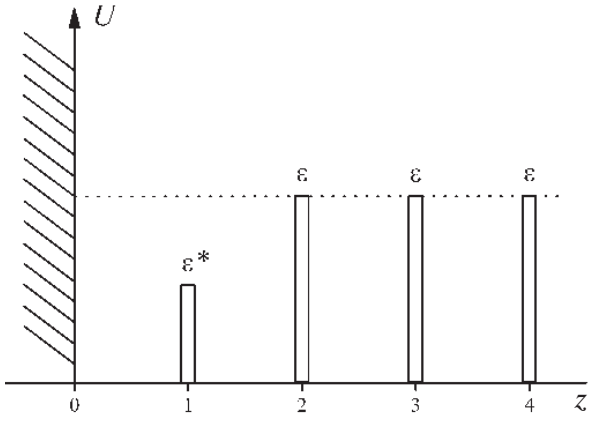


Рис. 1. Рассматриваемый вид одномерного потенциала: полубесконечная решетка δ-образных потенциальных барьеров с бесконечно высокой «стенкой» в начале координат.

Мощность ε* первого барьера отлична от мощностей ε всех остальных, предполагаемых идентичными

Мы же рассмотрим случай, когда мощность ближайшего к началу координат барьера ($n = 1$) отлична от всех остальных, а прочие барьеры ($n \geq 2$) – идентичны:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^*, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon. \qquad (1)$$

Как станет ясно из дальнейшего (см. раздел «Дискретный спектр (поверхностные состояния)»), бесконечность потенциального барьера $U_0(z) = U_\infty = +\infty$ на границе решетки (при $z = 0$) приводит к новому, по сравнению с таммовским, типу локализации носителей заряда, для которого мы предлагаем термин «подповерхностная локализация».

Стационарное уравнение Шредингера записывается в виде

$$-\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \delta(z-n) + U_\infty \theta(-z)\right]\psi(z) = E\psi(z),$$

где $\theta(z)$ – функция Хевисайда, а набор $\{\varepsilon_n\}$ задается соотношением (1).

Можно показать [4], что в подобной системе значения волновых функций ψ_n в трех соседних узлах решетки связаны соотношением

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = \nu_n \psi_n, \qquad (2)$$

где введено обозначение

$$v_n = 2\cos q + \varepsilon_n \frac{\sin q}{q},\ q^2 = E. \qquad (3)$$

Объединяя значения волновой функции в двух соседних узлах решетки в двухкомпонентный вектор

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}$$

и вводя матрицу

$$\mathbf{Q}_n = \begin{pmatrix} v_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

можем переписать соотношение (2) в рекуррентной форме:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{Q}_n \mathbf{X}_n. \qquad (5)$$

Обозначим левую часть соотношения (3) при $\varepsilon_1 = \varepsilon^*$ как v^*, при $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon$ – как v, а соответствующие матрицы (4) – как $\mathbf{Q}^*$ и $\mathbf{Q}$. Волновая функция в начале координат, очевидно, равна нулю из-за наличия потенциальной «стенки»; поэтому, отвлекаясь от вопроса о нормировке волновой функции, можем выбрать в качестве $\mathbf{X}_1$ вектор

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, в соответствии с соотношениями (4), (5),

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{Q}^* \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} v^* \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

и

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{Q}^{n-2} \mathbf{X}_2 = \mathbf{Q}^{n-2} \mathbf{Q}^* \mathbf{X}_1 \quad (n \geq 3). \qquad (7)$$

Хорошо известно, что свойства волновых функций рассматриваемой системы определяются собственными значениями матриц (4). Рассмотрим последовательно случай непрерывного спектра (энергетические зоны) и дискретного (таммовские состояния).

Непрерывный спектр

Если выполнено условие $-2 < v < 2$, то собственные значения матрицы $\mathbf{Q}$ равны

$$\lambda_\pm = e^{\pm i\varphi}, \qquad (8)$$

где

$$\cos\varphi = \frac{v}{2}, \qquad (9)$$

а соответствующие собственные векторы задаются соотношениями

$$\mathbf{X}_\pm = \begin{pmatrix} \lambda_\pm \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Разлагая вектор $\mathbf{X}_2$ (соотношение (6)) по собственным векторам (10), легко находим:

$$\mathbf{X}_2 = A_+ \mathbf{X}_+ + A_- \mathbf{X}_-, \qquad (11)$$

где

$$A_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \mp i \frac{v^* - \cos\varphi}{\sin\varphi}\right). \qquad (12)$$

В частном случае одинаковой мощности всех δ-образных барьеров, включая первый ($\varepsilon^* = \varepsilon,\ v^* = v$), соотношение (12), с учетом (9), упрощается:

$$A_\pm^0 = \frac{1}{2}(1 \mp i\,\mathrm{ctg}\varphi).$$

Вектор $\mathbf{X}_n$, в соответствии с (7) и (11), в общем случае можно вычислить по формуле

$$\mathbf{X}_n = A_+ \lambda_+^{n-2} \mathbf{X}_+ + A_- \lambda_-^{n-2} \mathbf{X}_-. \qquad (13)$$

Подставляя в последнее равенство соотношения (8), (10), (12), находим после некоторых преобразований:

$$\mathbf{X}_n = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{pmatrix} v^* \sin(n-1)\varphi - \sin(n-2)\varphi \\ v^* \sin(n-2)\varphi - \sin(n-3)\varphi \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

В частном случае идентичных барьеров соотношение (14) принимает особенно простой вид:

$$\mathbf{X}_n = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{pmatrix} \sin n\varphi \\ \sin(n-1)\varphi \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

соответствующий, как и следовало ожидать, стоячей блоховской волне, образованной суперпозицией двух волн, бегущих в противоположных направлениях (отражение блоховской волны от бесконечно высокой потенциальной «стенки»). Изменение высоты первого

δ-образного барьера ($v^* \neq v$), как видно из выражения (14), сдвигает фазу данной стоячей волны.

Дискретный спектр (поверхностные состояния)

Обратимся теперь к противоположному случаю, когда $|v| > 2$. Собственные значения матрицы **Q** запишем в виде

$$\lambda_{\pm} = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}. \qquad (16)$$

При $|v| > 2$ собственные значения являются вещественными, при этом одно из них оказывается по модулю большим единицы, а другое – по модулю меньшим единицы.

Вновь разлагая вектор $\mathbf{X}_2$ по собственным векторам (10), в соответствии с (11), находим аналог формулы (12):

$$A_{\pm} = \pm \frac{v^* - \lambda_{\mp}}{\lambda_+ - \lambda_-}. \qquad (17)$$

Подставим соотношения (17) в формулу (13) и предположим для определенности, что $|\lambda_-| < 1 < |\lambda_+|$. Желая получить решение, ограниченное при $n \to +\infty$, мы должны, очевидно, потребовать, чтобы

$$A_+ = 0,$$

или

$$v^* = \lambda_-, \ |\lambda_-| < 1. \qquad (18)$$

В противоположном случае, когда $|\lambda_+| < 1 < |\lambda_-|$, аналогичное условие примет форму

$$v^* = \lambda_+, \ |\lambda_+| < 1. \qquad (19)$$

С учетом соотношений (3), (16) мы получаем тем самым уравнения, определяющие дискретный спектр значений q, соответствующих поверхностным (таммовским) состояниям. Легко видеть, что, например, в случае идентичности всех барьеров ($v^* = v$) поверхностные состояния отсутствуют: действительно, с одной стороны, рассматривается случай $|v| > 2$, а с другой, в соответствии с уравнениями (18) или (19), должно быть $|v^*| = |v| < 1$. Однако при $v^* \neq v$ решения уравнений (18) или (19), в принципе, уже могут существовать. На рис. 2 приведен пример графического решения уравнений (18), (19) для случая потенциальной ямы при $z = 1$ ($\varepsilon^* < 0$). Горизонтальные отрезки на кривых $\lambda_+(q)$ и $\lambda_-(q)$ символически изображают области комплексных собственных значений или вещественных значений, по модулю больших единицы. Точки пересечения кривой $v^*(q)$ с кривой $\lambda_+(q)$ ($\lambda_-(q)$) при $|\lambda_+(q)| < 1$ ($|\lambda_-(q)| < 1$) соответствуют дискретным значениям спектра, отвечающим поверхностным (таммовским) состояниям.

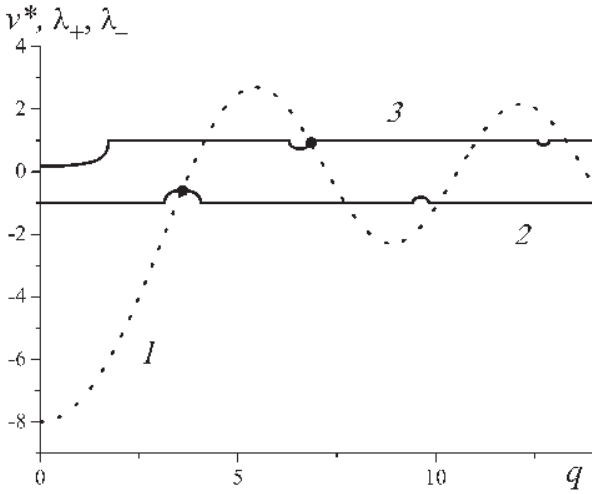


Рис. 2. Пример графического решения уравнений (18), (19) для случая потенциальной ямы при $z = 1$ ($\varepsilon^* = -10$, $\varepsilon = 4$). Приведены кривые $v^*(q)$ (*1*), $\lambda_+(q)$ (*2*), $\lambda_-(q)$ (*3*). Точки пересечения отвечают поверхностным (таммовским) состояниям

Отметим, что рассматриваемая система отличается от детально исследованной в работе [3], во-первых, наличием бесконечно высокого потенциального барьера U вместо барьера конечной высоты U_0 при $z < 0$, во-вторых, расположением потенциального барьера (ямы) при $z = 1$ вместо такового при $z = 0$, в-третьих, неэквивалентностью первого барьера всем остальным.

Подчеркнем, что при рассматриваемой нами геометрии потенциала, которая характеризуется бесконечностью «поверхностного» потенциального барьера U_∞ при $z = 0$, имеет место несколько иной характер локализации носителей заряда, нежели рассмотренный в пионерском исследовании И.Е. Тамма или в работе [3]. Действительно, в случае конечности

«поверхностного» потенциального барьера волновая функция носителя заряда характеризуется экспоненциальным спаданием как в область «вакуума» ($z < 0$), так и в глубь решетки ($z > 0$), т. е. характерная длина локализации отлична от нуля по обе стороны границы $z = 0$. В рассматриваемом же нами случае бесконечности «поверхностного» потенциального барьера имеем строгое равенство нулю волновой функции на границе $z = 0$, т. е. носитель заряда вообще не может проникнуть в область «вакуума». Мы предлагаем для подобного типа локализации термин «подповерхностная локализация».

Конечная решетка барьеров

Предположим теперь, что в точке $z = N + 1$ расположена вторая бесконечно высокая потенциальная «стенка»; движение частицы тем самым ограничено конечной областью $0 < z < N + 1$, в которой расположено ровно N δ-образных барьеров. Примем, что все эти барьеры идентичны ($v^* = v$). Тогда, в соответствии с выражением (15), имеем в системе четное либо нечетное состояние, соответствующее стоячей волне; при этом (в зависимости от четности состояния)

$$X_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ либо } X_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

и условие $\psi_{N+1} = 0$ накладывает ограничение на угол φ, фигурирующий в соотношении (15):

$$\sin(N+1)\varphi = 0,$$

откуда

$$\varphi_k = \pi \frac{k}{N+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Следовательно, спектр системы становится дискретным (размерное квантование). Однако с ростом N влияние граничных условий на структуру спектра начинает ослабевать. При больших значениях N он становится квазинепрерывным, и мы вновь возвращаемся к случаю, описанному выше (разрешены произвольные значения v из диапазона $-2 < v < 2$).

Расчеты, выполненные в настоящей работе, продемонстрировали эффективность применения матричного формализма к вычислению значений волновых функций в узлах решеток в моделях типа модели Кронига – Пенни. При исследовании состояний непрерывного спектра в полубесконечной решетке выявлено влияние величины мощности первого (выделенного) барьера на структуру волновой функции: не меняя качественных свойств решения, представляющего собой стоячую блоховскую волну, указанная особенность потенциала приводит, однако, к сдвигу фазы волновой функции. Расчет поверхностных (таммовских) состояний в подобных системах, в том числе и для данной геометрии задачи, может быть выполнен на основе уравнений, имеющих в обозначениях матричного формализма особенно наглядный и естественный вид. Наконец, в предположении конечности решетки идентичных барьеров, предложенная модель представляет собой один из простейших примеров учета влияния размерного квантования в кристаллических решетках малой протяженности.

Перспективным направлением дальнейших исследований может стать анализ динамического аналога модели Кронига – Пенни с зависящими от времени добавками к статическому потенциалу. В случае периодической зависимости потенциала от времени подобные системы могут быть исследованы в рамках теории Флоке [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kronig, R. de L.** Quantum mechanics of electrons in crystal lattices [Text] / R. de L. Kronig, W.G. Penney // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.– 1931. – Vol. 130. – No. 814.– P. 499 – 513.

2. **Бонч-Бруевич, В.Л.** Физика полупроводников [Текст] / В.Л. Бонч-Бруевич, С.Г. Калашников. – М.: Наука, 1977. – 672 с.

3. **Аверков, Ю.О.** Влияние δ-образной квантовой ямы на границе одномерной решетки на свойства поверхностных электронных состояний таммовского типа [Текст] / Ю.О. Аверков, В.М. Яковенко // Физика твердого тела. – 2012. – Т. 54. – Вып. 3. – С. 588 – 593.

4. **Kottos, T.** Transport properties of one-dimensional Kronig – Penney models with correlated disorder [Text] / T. Kottos, G.P. Tsironis, F.M. Izrailev // J. Phys: Condens. Matter. – 1997. – Vol. 9. – P. 1777 – 1791.

5. **Ossipov, A.** Statistical properties of phases and delay times of the one-dimensional Anderson model with one open channel [Text] / A. Ossipov, T. Kottos, T. Geisel // Phys. Rev. B. – 2000. – Vol. 61. – No. 17. – P. 11411 –11415.

6. **Ковалевский, Д.В.** Электронные свойства модели Кронига – Пенни с полубесконечной решеткой случайных потенциальных барьеров [Текст] / Д.В. Ковалевский // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2011. – № 4. – С. 36 – 39.

7. Martinez, D.F. Transmission properties of the oscillating δ-function potential [Text] / D.F. Martinez, L.E. Reichl // Phys. Rev. B. – 2001. – Vol. 64. – P. 245315-1 – 245315-9.

УДК 539.534.9

П.А. Карасёв, К.В. Карабешкин

ОСОБЕННОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕФЕКТОВ В КРЕМНИИ ПРИ БОМБАРДИРОВКЕ МОЛЕКУЛЯРНЫМИ ИОНАМИ

Развитие интегральной электроники неразрывно связано с миниатюризацией элементов микросхем, основным материалом для которых служит кремний. Наиболее удобным способом создания $p-n$-переходов на кристалле является ионная имплантация, поскольку этот технологический этап позволяет с высокой точностью контролировать концентрацию и распределение внедренной примеси по глубине [1]. Однако дальнейшее технологическое развитие требует перехода к все меньшим и меньшим энергиям ионов, чего существующий парк имплантеров обеспечить не может. Одним из путей решения указанной проблемы является переход от облучения атомарными ионами к облучению молекулярными. Действительно, в этом случае энергия иона делится между составляющими его атомами пропорционально их массе и в расчете на атом удовлетворяет требованиям технологии.

Торможение ускоренных ионов всегда сопровождается образованием нарушений в структуре мишени. Исследование накопления и отжига дефектов в различных материалах продолжается уже более пятидесяти лет. К настоящему времени довольно хорошо изучено взаимодействие атомарных ионов с кристаллами. В то же время процессы и механизмы воздействия молекулярных и малых кластерных ионов на структуру мишени изучены слабо. Установлено, что при внедрении молекулы в приповерхностной области возникает повышенное количество дефектов по сравнению со случаем внедрения соответствующего количества атомарных ионов [2 – 7] (молекулярный эффект, МЭ). Очевидно, что причиной МЭ является перекрытие каскадов, создаваемых атомами-компонентами молекулы. Предложено несколько механизмов возникновения МЭ.

Во-первых, это нелинейное (по сравнению с моделью парных столкновений) повышение эффективности генерации первичных точечных дефектов в ходе торможения компонентов молекулы [2, 3]. Соответственно, из большего количества простейших образуется и большая концентрация стабильных повреждений структуры. Подобное явление называется эффектом нелинейных энергетических пиков. Дополнительно для описания процессов, происходящих в кремнии, был предложен еще один каскадный механизм. Он предполагает спонтанный переход некоторого малого объема мишени в аморфное состояние при достижении в нем критической концентрации первичных смещений [4].

Во-вторых, после термализации каскада, к более быстрому росту разупорядочения может приводить повышение скорости связывания первичных дефектов в устойчивые [7]. Действительно, если эффективность процесса образования устойчивых нарушений нелинейно зависит от локальной концентрации простейших де-

фектов, то увеличение последней будет существенно ускорять рост повреждений решетки.

Выделение вклада каждого из механизмов – нетривиальная задача, которая вызывает как научный, так и практический интерес. Первое, что необходимо для ее решения, – это выполнять моделирование каскадов столкновений. Существует два подхода к такому моделированию. Первый – использовать метод молекулярной динамики, который покажет все возможные нелинейные каскадные процессы. Однако на результаты расчетов сильно влияет выбор потенциалов взаимодействия. Кроме того, метод требует большого вычислительного времени, что делает практически невозможными статистически значимые расчеты. Второй подход состоит в использовании метода Монте-Карло в приближении парных столкновений, что, конечно, не позволяет учесть возникновение нелинейных процессов в каскадах смещений, но позволяет получать статистически значимые данные для любой пары атомарный ион – мишень за приемлемое время. Популярная реализация этого метода – программа SRIM [8] дает возможность проследить все смещения, происходящие в мишени в ходе торможения иона и атомов отдачи. Анализируя полученные данные, можно попытаться определить параметры каскадов столкновений. Однако нахождение плотности усредненного каскада оказалось довольно трудной задачей, поскольку индивидуальные каскады сильно отличаются друг от друга и имеют чрезвычайно сложную форму.

В работах [9, 10] был предложен метод расчета эффективности МЭ, когда последний вызван исключительно спонтанным переходом разупорядоченного микрообъема мишени в аморфное состояние при достижении в нем критической концентрации смещений [7]. Прочие возможные причины не принимались во внимание. Параметрами модели являются длина ребра ячейки L_c и величина критической концентрации вакансий $n_{крит}$ (подробнее см. далее). В работе [10] проведен анализ крайних случаев, в которых рассматриваемый механизм либо полностью определяет МЭ, как при внедрении ионов $Bi_{1,2}$ при температуре жидкого азота [5], либо вообще не проявляется, как при имплантации ионов $N_{1,2}$ при комнатной температуре [4]. Из первого случая для довольно широкого диапазона величин L_c были найдены соответствующие значения $n_{крит}$ и установлено, что эти параметры образуют жестко связанную пару. Второй случай показал, что конкретные значения параметров не влияют на расчетную зависимость эффективности МЭ γ_{casc}. В работе [9] была сделана первая попытка применить рассмотренный подход к анализу механизмов МЭ при бомбардировке кремния ионами PF_n (n = 0, 2, 4) с энергией 2,1 кэВ/а.е.м. Однако ни подробные расчеты, ни анализ влияния параметров на результаты в этом (более сложном) случае не проводились.

Удобным инструментом исследования МЭ служат ускоренные ионы компонентов фторида фосфора PF_5, поскольку, с одной стороны, он широко используется в современных технологических цепочках, а с другой – позволяет в довольно широких пределах варьировать количество атомов в ионе. Ранее было начато изучение дефектообразования при бомбардировке кремния этими ионами [11], но при этом авторы использовали только одно значение энергии ионов, поэтому расширение диапазона энергий представляет интерес.

В настоящей работе описаны первые результаты экспериментального исследования накопления устойчивых дефектов в кремнии при его облучении ионами P^+ и PF_4^+ в диапазоне энергий от 0,6 до 3,2 кэВ/а.е.м. при комнатной температуре и моделирования каскадных эффектов в соответствующих условиях.

Методика эксперимента

Кремний (100), легированный бором, облучался при комнатной температуре ионами P^+ и PF_4^+ с энергиями E, равными 0,6; 1,3; 3,2 кэВ/а.е.м. Имплантация проводилась под углом 7° по отношению к направлению [100] для подавления эффекта каналирования.

Для корректного сравнения радиационных повреждений, создаваемых атомарным и молекулярным облучением, необходимо, чтобы разница между этими видами облучения состояла только в том, что атомарные ионы падают на поверхность мишени в случайных точках, а компоненты молекулярного иона – в одной. Для этого, как показано в работе [11], необходимо, чтобы профили распределения первичных дефектов, определяемые в приближении

парных столкновений с помощью программы SRIM, оставались одинаковыми. Это условие реализуется, если энергия, приходящаяся на атомную единицу массы, поддерживается постоянной, а также количество и скорость введения смещений поддерживаются постоянными. Последние два условия соответствует постоянству доз в единицах DPA (Displacements Per Atom) и плотности потока ионов в единицах DPA/c. Значение DPA при данной дозе ионов рассчитывалось как полная концентрация вакансий решетки, созданных при бомбардировке ионами на глубине максимума упругих потерь энергии, отнесенная к атомной концентрации кремния ($4{,}97 \cdot 10^{22}$ ат/см^3). Таким образом, DPA есть среднее число смещений каждого атома решетки в области максимума упругих потерь энергии за все время облучения. Это число было получено с помощью программы SRIM (версия SRIM-2003.26) [8]. Для всех случаев имплантации, там описанных, плотность потока ионов составляла $5{,}5 \cdot 10^{-4}$ DPA/c, диапазон доз варьировался от 0,29 до 1,3 DPA.

Степень нарушения кристаллической структуры определялась с помощью метода резерфордовского обратного рассеяния в сочетании с каналированием RBS/C пучком ионов He^{++} с энергией 0,7 МэВ, рассеивающимся в детектор под углом 103° по отношению к направлению падения для увеличения разрешения системы по глубине, что необходимо для исследования повреждения структуры в тонких приповерхностных слоях. Профили распределения относительной концентрации дефектов по глубине, нормированной на концентрацию атомов в мишени, рассчитывались из оригинальных спектров RBS/C по одному из общепринятых алгоритмов [12].

Экспериментальные значения эффективности МЭ $\gamma_{эксп}$ на данной глубине рассчитывались как отношение уровней разупорядочения при облучении ионами P^+ и PF_4^+ при соблюдении корректных условий наблюдения МЭ:

$$\gamma_{эксп} = n_{PF_4^+} / n_{P^+}.$$

Результаты и обсуждение

Экспериментальные результаты. На рис. 1 представлены извлеченные из спектров RBS/C зависимости концентрации дефектов, созданных в мишени при внедрении ионов с энергией 3,2 кэВ/а.е.м. Как видно из рис. 1, распределения разупорядочения при облучении кремния ионами P^+ и PF_4^+ одинаковыми дозами очень сильно различаются. В случае облучения атомарными ионами P^+ наблюдается бимодальное распределение дефектов. Помимо объемного максимума дефектов, лежащего на глубине максимума упругих потерь энергии (~ 95 нм), имеет место поверхностный пик дефектов, который соответствует поверхностному аморфному слою (см., например, работу [13]). В целом распределение дефектов аналогично случаю облучения кремния ионами небольших и средних масс [14, 15].

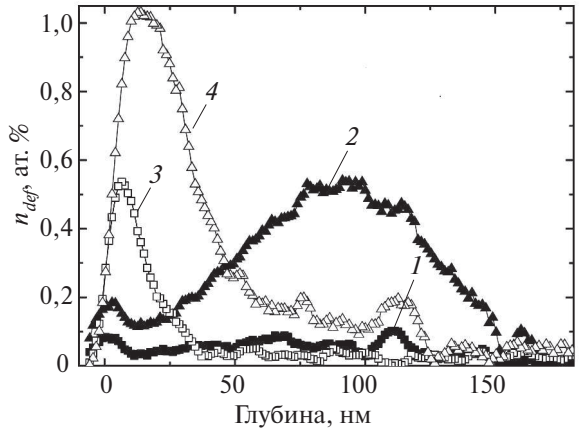


Рис. 1. Профили распределения относительной концентрации дефектов по глубине при имплантации в кремний ионов P^+ с энергией 100 кэВ и плотностью потока $2{,}1 \cdot 10^{11}$ см$^{-2} \cdot$с$^{-1}$ (*1*, *2*), а также ионов PF_4^+ – со значениями 340 кэВ и $6{,}7 \cdot 10^{10}$ см$^{-2} \cdot$с$^{-1}$ соответственно (*3*, *4*).

Нормированные дозы ионов: 0,29 DPA (*1*, *3*) и 0,87 DPA (*2*, *4*); реальные дозы ионов (в ед. 10^{13} см$^{-2}$): 11,2 (*1*), 33,6 (*2*), 3,56 (*3*), 11, 7 (*4*)

Кроме того, видно, что уровень разупорядочения, созданный ионами P^+ в объеме кристалла, выше уровня разупорядочения, созданного ионами PF_4^+. Это становится понятным, если учесть, что для корректного сравнения повреждений необходимо одновременное облучение ионами P^+ и F^+ дозами и потоками, соответствующими дозам и потокам компонентов иона PF_4^+. Однако такой эксперимент невозможно осуществить на существующих имплантерах; ввиду этого обстоятельства мы сравниваем эффективность введения повреждений ионами PF_4^+ с разупорядочением, созданным ионами

P^+. Поскольку полное число и скорость введения смещений остаются постоянными, определяющими факторами в накоплении нарушений выступают плотность и полное число смещений в каскадах. Чем они больше, тем эффективнее первичные дефекты могут связываться в устойчивые кластеры. Каскады ионов F^+ меньше и их плотность ниже, чем у ионов P^+. Поэтому когда компоненты иона PF_4^+ расходятся на значительное расстояние и дефектообразование идет за счет связывания точечных дефектов только из их индивидуальных каскадов, ионы P^+ создают больше устойчивых дефектов. Этот же эффект приводит к тому, что экспериментальные значения эффективности МЭ ($\gamma_{эксп}$) на больших глубинах становится меньше единицы (рис. 2).

При анализе экспериментальных данных мы должны учитывать, что с ростом дозы увеличивается толщина поверхностных аморфных слоев. Поскольку перекрытие каскадов компонентов молекулярного иона и, соответственно, МЭ имеют место вблизи поверхности, при наличии толстого аморфного слоя МЭ проявляется все слабее. Действительно, чем толще аморфный слой, тем на большее расстояние успевают разойтись компоненты молекулярного иона за время его прохождения и, следовательно, тем меньше будет перекрытие каскадов в кристаллической части мишени. Кроме того, скорость образования устойчивых нарушений сильно зависит от накопленной в данной области концентрации дефектов. По мере приближения к уровню полной аморфизации происходит замедление дефектообразования. Поэтому для того, чтобы анализировать максимальный возможный эффект, а также по возможности избежать ошибок, связанных с насыщением дефектообразования, мы определяли эффективность МЭ при наименьшей из имеющихся экспериментальных доз (0,29 DPA). На рис. 2 представлены полученные зависимости от глубины для разных энергий ионов. Видно, что для всех энергий величина $\gamma_{эксп}$ довольно быстро спадает в глубь мишени, отражая расхождение каскадов, и практически исчезает на глубине около 40 нм. У поверхности наиболее сильный МЭ наблюдается при максимальной энергии 3,2 кэВ/а.е.м., и с уменьшением энергии его величина тоже уменьшается. Отличие в ходе зависимости для минимальной энергии (0,6 кэВ/а.е.м.) вызвано тем обстоятельством, что в этом случае рассматриваемая доза уже слишком велика для корректного определения МЭ. Действительно, толщина аморфного слоя, созданного молекулярными ионами при имплантации до нее, по нашим оценкам составляет приблизительно 25–30 нм. А поскольку, как было отмечено выше, при приближении уровня разупорядочения к полной аморфизации происходит замедление накопления дефектов, величина эффективности МЭ, полученная путем сравнения аморфных слоев, не вполне корректна. Таким образом, для анализа МЭ при малых энергиях требуется использовать еще меньшие дозы ионов (это будет выполнено в дальнейшем).

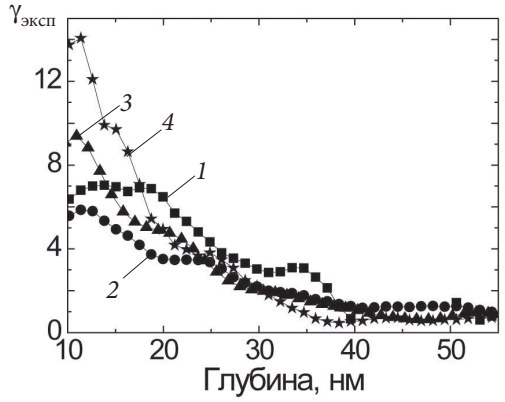


Рис. 2. Экспериментальные зависимости эффективности МЭ от глубины при облучении кремния атомарными (P^+) и кластерными (PF_4^+) ионами различных энергий, (кэВ/а.е.м.): 0,6 (*1*), 1,3 (*2*), 2,1 (*3*), 3,2 (*4*)

Результаты моделирования каскадных эффектов. Как уже было указано во введении, к появлению МЭ могут приводить как нелинейности развития каскада смещений, так и нелинейности вторичного дефектообразования. Для того чтобы разделить вклады этих процессов в экспериментально обнаруженный МЭ, мы выполнили расчет его эффективности, принимая в качестве причины возникновения эффекта спонтанный переход решетки в аморфное состояние при достижении в микрообъемах критической концентрации дефектов [7]. Мы использовали данные о пространственных координатах вакансий, рассчитанные TRIM. Объем мишени разбивался на кубические ячейки с длиной ребра L_c, в которых определялась концентрация вакансий. Если она превышала критическую величину $n_{крит}$, то ячейка счита-

лась аморфизованной. Эффективность МЭ γ_{casc} принималась равной отношению количества таких ячеек на данной глубине при внедрении молекулярных и атомарных ионов в одинаковых нормированных дозах DPA. Для наиболее полного соответствия эксперименту при моделировании мы сравнивали уровни разупорядочения, созданные ионами P^+ и ионами PF_4^+, поддерживая одинаковым количество первичных смещений. Кроме того, рассчитывалась эффективность МЭ, возникающего при попадании в кремний ионов PF_2^+. Каскад молекулярного иона составлялся как линейная комбинация каскадов атомов – его компонент. Более подробно алгоритм расчетов описан в работе [10]. Там же были найдены значения критической концентрации смещений $n_{крит}$, соответствующие каждой длине ребра кубической ячейки L_c. Представляла интерес проверка сделанного ранее (см. работу [10]) вывода об отсутствии влияния конкретных значений параметров на результаты моделирования в более сложном, чем рассмотренные в работе [10], случае. С этой целью мы провели расчет МЭ для трех пар параметров (L_c = 15; 20; 25 нм; $n_{крит}$ = 15; 8; 4,5 ат.%, соответственно) при всех экспериментальных значениях энергии. Для каждой комбинации (E, L_c, $n_{крит}$) анализировалось не менее 50 тыс. независимых случаев падения ионов PF_2^+ и PF_4^+.

Рис. 3 иллюстрирует полученные результаты на примере имплантации ионов с энергией 0,6 кэВ/а.е.м. Видно, что как для малых (PF_2^+), так и для больших (PF_4^+) молекул расчетные кривые, соответствующие разным значениям L_c и $n_{крит}$, практически полностью совпадают. Величина эффективности МЭ в приповерхностной области, как и ожидалось, существенно увеличивается с увеличением количества атомов в молекуле. То же самое наблюдается и в моделировании для остальных значений энергии. Таким образом, поскольку от значений параметров результат не зависит, предложенная в работе [10] методика может быть использована для расчета эффективности МЭ, обусловленного нелинейными энергетическими пиками.

На рис. 4 представлены расчетные зависимости эффективности МЭ γ_{casc} от глубины для всех рассматриваемых энергий, усредненные по трем случаям, полученным при использовании разных пар параметров. Видно, что они, так же

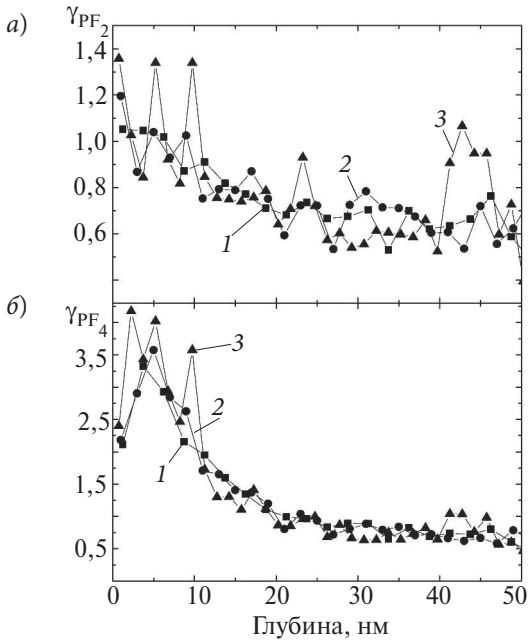


Рис. 3. Эффективность каскадного МЭ при облучении кремния атомарными (P^+ (*а*, *б*)) и кластерными (PF_2^+ (*а*), PF_4^+(*б*)) ионами с энергией 3,2 кэВ/а.е.м. при различных значениях длины ребра ячейки L_c и критической концентрации смещений $n_{крит}$: 25 Å и 4,5 (*1*); 20 Å и 8,0 (*2*); 15 Å и 15 (*3*)

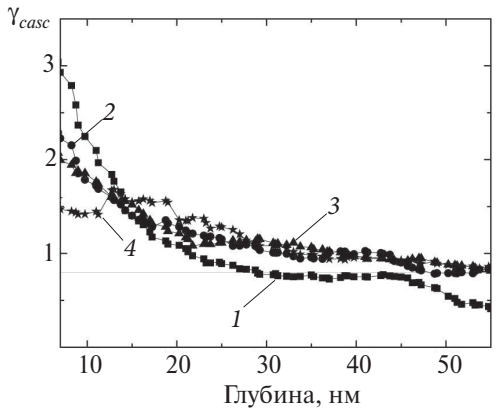


Рис. 4. Расчетные зависимости эффективности МЭ, обусловленного нелинейными энергетическими пиками в каскадах столкновений, при облучении кремния атомарными (P^+) и кластерными (PF_4^+) ионами для разных энергий, (кэВ/а.е.м.): 0,6 (*1*), 1,3 (*2*), 2,1 (*3*), 3,2 (*4*)

как и экспериментальные кривые, быстро спадают с ростом глубины, причем области глубин, до которых проявляется МЭ, неплохо совпадают с экспериментом. Когда каскады столкновений перестают перекрываться, эффективность

МЭ становится меньше единицы, поскольку более тяжелые ионы фосфора создают более плотные каскады и большее количество вакансий, чем ионы фтора, и, следовательно, вероятность возникновения аморфизованных ячеек для них оказывается выше.

При наименьшей использованной энергии $E = 0{,}6$ кэВ/а.е.м. каскадная эффективность МЭ оказывается равной около 3. С ростом энергии величина МЭ падает приблизительно до 1,5 при $E = 3{,}2$ кэВ/а.е.м. Таким образом, роль нелинейных процессов внутри каскадов смещений должна падать с ростом энергии ионов, что соответствует существующим представлениям [2, 3]. По экспериментальным данным, МЭ для энергии 0,6 кэВ/а.е.м. составляет значение около 6, что близко к полученному по модели. Некоторое различие в числах может быть вызвано двумя причинами. Во-первых, полученное расхождение обусловлено сложностью корректного определения величины МЭ при энергии 0,6 кэВ/а.е.м из имеющихся экспериментальных результатов для данной дозы. Во-вторых, в наших расчетах учитывался только один из возможных механизмов возникновения нелинейности в каскадах. Действительно, мы не учитывали повышения плотности каскадов молекулярного иона в области перекрытия каскадов его компонентов (вблизи поверхности), которое вызывается тем, что столкновения перестают быть парными. Этот эффект может приводить к существенному увеличению генерации первичных смещений. В дальнейшем мы попытаемся оценить увеличение генерации на основании анализа скоростей нарастания поверхностных аморфных слоев.

Нетрудно заметить, что расчетная зависимость величины МЭ у поверхности от энергии иона противоположна экспериментальной. Возможно, это связано со следующим. Каскады компонентов молекулярного иона для всех энергий перекрываются, хотя эффективность нелинейных процессов внутри каскадов смещений и, соответственно, количество смещений, производимых в индивидуальных каскадах ионов P^+ и PF_4^+ в приповерхностной области, падают с ростом энергии. Перекрытие каскадов способствует эффективному связыванию дефектов в устойчивые кластеры на стадии их вторичного взаимодействия. Для атомарных ионов подобного перекрытия каскадов нет, поэтому с ростом энергии эффективность образования устойчивых нарушений в случае облучения ионами P^+ падает быстрее, чем для ионов PF_4^+. Тогда эффективность той доли МЭ, которая связана со вторичным дефектообразованием, может возрастать при увеличении энергии ионов, и энергетическая зависимость интегрального МЭ будет подобна экспериментальной.

Итак, в результате проведенных исследований экспериментально обнаружено существенное различие в образовании нарушений структуры при облучении кремния атомарными ($P^{+)}$ и молекулярными (PF_4^+) ионами (молекулярный эффект). С ростом энергии иона эффективность МЭ у поверхности растет. Глубина, до которой проявляется молекулярный эффект, мало зависит от энергии иона и составляет около 40 нм. Анализ моделирования нелинейных каскадных эффектов при различных значениях параметров показал отсутствие их влияния на результат. Сравнение расчетных и экспериментальных данных позволяет заключить, что МЭ у поверхности при $E = 0{,}6$ кэВ/а.е.м. практически полностью определяется каскадными эффектами. С ростом энергии их влияние понижается и возрастает роль процессов вторичного дефектообразования. Для более полного количественного анализа и разделения вклада указанных механизмов в эффективность МЭ при больших энергиях требуются дальнейшие исследования.

Авторы выражают благодарность доктору физико-математических наук, профессору кафедры физической электроники СПбГПУ А.И. Титову за более чем полезное обсуждение данной работы, а также студентке радиофизического факультета СПбГПУ Н.С. Васильевой за помощь в проведении расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Nastasi, M.** Ion implantation and synthesis of materials [Text] / M. Nastasi, J.W. Mayer. – Berlin, Heidelberg, NY: Springer, 2006. – 263 p.

2. **Thompson, D.A.** High density cascade effects [Text] / D.A. Thompson // Radiat. Eff. – 1981. – Vol. 56. – P. 105 – 150.

3. **Davies, J.A.** Ion implantation and beam processing [Text] / J.A. Davies; J.S Williams, J.M. Poarte (eds). – Sydney: Academic Press, 1984. – 419 p.

4. **Аброян, И.А.** Молекулярный эффект при имплантации легких ионов в полупроводники [Текст] / И.А. Аброян, Л.М. Никулина // ФТП. – 1997. – № 31. – С. 1164-1167.

5. **Titov, A.I.** Damage buildup in Si under bombardment with MeV heavy atomic and molecular ions [Text] / A.I. Titov, S.O. Kucheyev, V.S. Belyakov, [et al.] // J. Appl. Phys. – 2001. – Vol. 90. – P. 3867–3873.

6. **Titov, A.I.** Molecular effect in semiconductors under heavy-ion bombardment: Quantitative approach based on the concept of nonlinear displacement spikes[Text] / A.I. Titov, V.S. Belyakov, S.O. Kucheyev // Nucl. Instr. and Meth. Phys. Res. B. – 2002. – Vol. 194. – P. 323–332.

7. **Titov, A.I.** Mechanism for the molecular effect in Si bombarded with clusters of light atoms [Text] / A.I. Titov, A.Yu. Azarov, L.M. Nikulina, [et al.] // Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 73 – P. 064111–064117.

8. **Ziegler, J.F.** The stopping and range of ions in solids [Text] / J.F. Ziegler, J.P. Biersack, U. Littmark. – Oxford: Pergamon, 1985. – P. 109.

9. **Titov, A.I.** Effects of the density of collision cascades: Separating contributions from dynamic annealing and energy spikes [Text] / A.I. Titov, P.A. Karaseov, A.Yu. Azarov, [et al.] // Nucl. Instr. and Meth. Phys. Res. B. – 2009. – Vol. 267. – P. 2701–2704.

10. **Карасёв П.А.** Методика расчета молекулярного эффекта при ионном облучении на основе пороговой плотности каскадов смещений [Текст] / П.А. Карасёв, Т.М. Кучумова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2009. – № 2(77). – С. 29–34.

11. **Азаров, А.Ю.** Накопление структурных нарушений в кремнии при облучении кластерными ионами PF^{+}_{n} средних энергий [Текст] / А.Ю. Азаров, А.И. Титов // ФТП. – 2007. – № 41 – С. 7–13.

12. **Schmid, K.** Some new aspects for the evaluation of disorder profiles in silicon by backscattering [Text] / K. Schmid // Rad. Eff. – 1973. – Vol. 17. – P. 201–207.

13. **Tetelbaum, D.I.** On the peculiarities of silicon amorphization at ion bombardment [Text] / D.I. Tetelbaum, E.I. Zorin, A.I. Gerasimov, [et al.] // Phys. Stat. Sol. A. – 1972. – Vol. 12. – P. 679–685.

14. **Аброян, И.А.** Профили распределения структурных нарушений в кремнии, облученном ионами [Текст] / И.А. Аброян, Н.Ф. Зитта, В.В. Конышев [и др.] // Изв. АН СССР. Сер. физическая. – 1976. – № 40 – С. 1749–1753.

15. **Titov, A.I.** Defect accumulation during room temperature N^{+} irradiation of silicon [Text] / A.I. Titov, G. Carter. // Nucl. Instr. and Meth. Phys. Res. B. – 1996. – Vol. 119. – P. 491–500.

УДК 532.372.082.5: 628.953.2

Д.В. Кизеветтер, А.Ю. Савина

АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРОВ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ РОДАМИНОВЫХ КРАСИТЕЛЕЙ

В настоящее время флуоресцирующие красители находят широкое применение в медицине, технике и других отраслях. Одним из наиболее распространенных органических красителей является родамин.

Спектральные характеристики родаминов, как и других красителей, хорошо известны [1–3]. Спектры поглощения и флуоресценции обусловлены свойствами энергетических уровней молекул красителя, наглядное представление о которых дает диаграмма Яблонского [3]. Спектры поглощения и флуоресценции многих органических красителей зеркально симметричны относительно центральной длины волны [3].

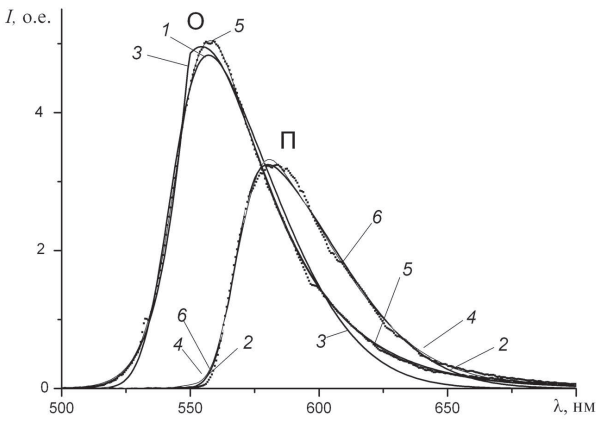
Существует возможность намного упростить расчет оптических характеристик устройств, например лазеров на красителях, в том числе волоконных лазеров, концентраторов солнечной энергии, датчиков температуры, если применить аппроксимацию спектральных характеристик флуоресценции. Для аппроксимации спектральной плотности флуоресценции $I(\lambda)$ родамина предложены следующие выражения:

$$I(\lambda) = I_0\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{t_1}\right)\right]\exp\left[-\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{t_2}\right)^2\right]; \quad (1)$$

$$I(\lambda) = I_0\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{t_1}\right)\right]\exp\left(-\frac{|\lambda-\lambda_0|}{t_2}\right); \quad (2)$$

$$I(\lambda) = I_0\left\{1+\exp\left[(\lambda-\lambda_1)/t_1)\right]\right\}^{-1}\times \times\left\{1+\exp\left[(\lambda_2-\lambda)/t_2\right]\right\}^{-1}, \quad (3)$$

а)



б)

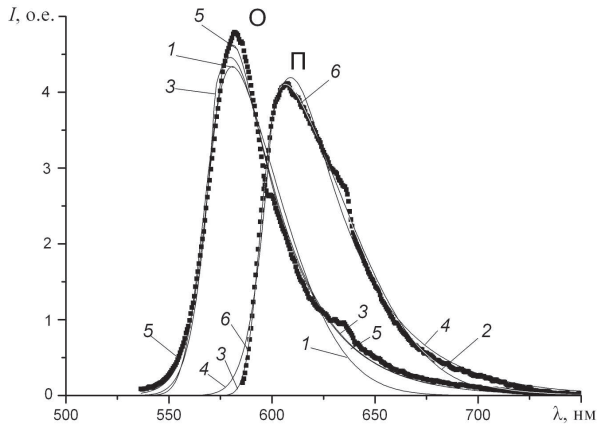


Рис. 1. Сравнение экспериментальных (символы) спектров флуоресценции водных растворов родаминовых красителей 6Ж(*а*) и С(*б*), испускаемой в обратном (О) и прямом (П) направлениях относительно излучения накачки, с кривыми аппроксимации функциями (1)(кривые *1*, *2*); (2)(*3*, *4*) и (3)(*5*, *6*)

где λ – длина волны; λ_0, λ_1, λ_2 – характерные длины волн спектрального распределения; t_1, t_2 – характерные спектральные величины длины фронта и длины спада спектральной характеристики; I_0 – коэффициент, связанный с интенсивностью излучения, erf – функция ошибок.

В связи с тем, что спектр флуоресценции раствора родамина может зависеть от концентрации красителя, температуры и других факторов, а литературные данные противоречивы, было проведено экспериментальное исследование, представленное ниже. Измерения проводились на водных растворах родамина 6Ж (R6G) и родамина С (RB) при концентрациях 5, 25 и 250 мг/кг. Для оптической накачки красителя использовался полупроводниковый лазер с длиной волны $\lambda_p = 532$ нм. Регистрировалось излучение флуоресценции, испускаемое в обратном (по отношению к излучению накачки) направлении, а также излучение в прямом направлении, выходящее из оптической кюветы с раствором красителя. Примеры измеренных спектров флуоресценции родамина 6Ж и родамина С, а также аппроксимирующих функций приведены на рис. 1, 2. Коэффициенты (подгоночные параметры) аппроксимации представлены в таблице.

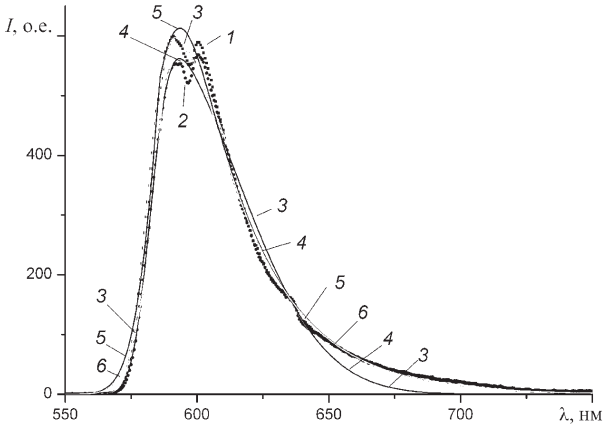


Рис. 2. Сравнение экспериментальных (символы) спектров флуоресценции полимерного оптического волокна, активированного родамином 6Ж (25 мг/кг), полученных при $T = 26$ °C (*1*) и 62 °C (*2*) с кривыми аппроксимации функциями (1) (*3*, *4*) и (2) (*5*, *6*)

Коэффициент I_0, характеризующий интенсивность, имеет второстепенное значение, поэтому в таблице не приводится. Практическую ценность может иметь относительное значение коэффициента I_0, например его изменение под действием температуры на краситель, что рассмотрено ниже.

Значения параметров аппроксимации функций, полученные из спектров флуоресценции растворов двух родаминовых красителей, испускаемой в обратном (О) и прямом (П) направлениях

Номер функции в тексте	Набор параметров	Значение параметра для раствора родамина, нм			
		6Ж		С	
		О	П	О	П
(1)	λ_0	542,2	567,3	567,3	594,4
	t_1	12,6	9,4	11,4	7,85
	t_2	50,4	51,9	46,0	55,2
(2)	λ_0	549,5	572,8	572,6	599,9
	t_1	23,6	17,6	17,3	17,1
	t_2	26,9	29,2	26,3	31,0
(3)	λ_1	530,9±0,9	598,8±0,4	557,3±0,3	632,2±0,5
	λ_2	548,00±0,66	568,60±0,06	571,9±0,1	595,07±0,06
	t_1	6,14±0,01	4,27±0,03	5,29±0,04	3,57±0,04
	t_2	25,32±0,08	19,6±0,2	23,7±0,2	19,5±0,2

Как следует из приведенных примеров, все указанные выше функции могут быть использованы для аппроксимации спектров флуоресценции родаминов. Аппроксимирующие функции (1) и (2) соответствуют различным физико-математическим моделям, в частности приводимым в работе [4]. Для аппроксимации спектров излучения, испускаемого в направлении, обратном направлению излучения накачки, наилучший результат из функций (1) и (2) дает функция (2), а для излучения, прошедшего через раствор красителя – функция (1).

Аппроксимирующая функция (3), как правило, обеспечивает наименьшую величину среднеквадратического отклонения как для спектров флуоресценции растворов красителя, так и излучения волоконных световодов, активированных этим красителем (родамином). Асимптотическое поведение функции (3) в коротковолновой части спектра, с учетом зеркальной симметрии спектров излучения и поглощения, соответствует правилу Урбаха [4, 5], а в длинноволновой – известным экспериментальным данным, например полученным в работе [6]. Но параметры аппроксимации фактически являются взаимозависимыми. Небольшое изменение формы аппроксимируемого спектра может привести к существенному изменению коэффициентов аппроксимации. Поэтому функцию (3) целесообразно использовать для прикладных расчетов в случае, если известны коэффициенты аппроксимации спектра излучения. Однако аппроксимация указанной функцией не позволяет исследовать и получать зависимости коэффициентов от величины какого-либо воздействия, например температуры.

Среднеквадратическое отклонение S использованных аппроксимаций (S_1, S_2, S_3 для функций (1), (2) и (3) соответственно) в диапазоне длин волн 500 – 800 нм было существенно меньше, чем при использовании аппроксимации функцией Гаусса (S_0). Уменьшение отклонения S достигает одного порядка. В частности, для спектра излучения флуоресценции родамина 6Ж в обратном направлении $S_1 / S_0 \approx 0{,}4$; $S_2 / S_0 \approx 0{,}2$; $S_3 / S_0 \approx 0{,}1$; для прошедшего излучения – $S_1 / S_0 \approx 0{,}3$; $S_2 / S_0 \approx 0{,}2$ $S_3 / S_0 \approx 0{,}2$. Среднеквадратическая ошибка использованных аппроксимаций по отношению к среднему значению спектральной плотности в указанном диапазоне не превышала 3 %.

Установлено, что форма спектра флуоресценции излучения, испускаемого в обратном направлении, практически не зависела от концентрации красителя. Спектр излучения флуоресценции, прошедшего измерительную кювету, имел смещение максимального значения и медианы спектральной плотности в длинноволновую область. Это позволяет заключить, что наблюдаемая при использовании флуориметров различных конструкций трансформация спектров излучения флуоресценции при изменении концентраций родамина в указанном диапазоне обусловлена не изменением спектра, а преимущественно самоабсорбцией излучения флуоресценции в коротковолновой части спектра при прохождении измерительной кюветы.

Эффект самоабсорбции излучения флуоресценции наиболее сильно проявляет себя в полимерных волоконных световодах, активированных органическими красителями, в частности родаминовыми. Изменение спектральной плотности излучения флуоресценции на выходе световода рассмотрено во многих работах, в частности в [6].

Нами были экспериментально измерены спектры излучения, выходящего из полимерного оптического волокна, изготовленного из полиметилметакрилата с добавлением родамина 6Ж в концентрации 25 мг/кг. Длина волокна составляла 1 м, в качестве источника накачки использовался светодиод с сине-зеленым свечением, излучение которого вводилось во входной торец волокна. Выходное излучение регистрировалось спектрометром. Измерения проводились при температурах волокна от 23 до 50 °С. Пример измеренных спектров для двух температур и их аппроксимации приведены на рис. 2. Как следует из представленных графиков, различия спектральных зависимостей в указанном диапазоне температур незначительны. Однако использование аппроксимаций позволяет описать трансформацию спектров выходящего излучения при изменении температуры. Измерения показали, что от температуры зависят только коэффициенты I_0 и λ_0. Какой-либо тенденции изменения коэффициентов t_1 и t_2 в пределах точности измерений не выявлено. Полученные зависимости коэффици-

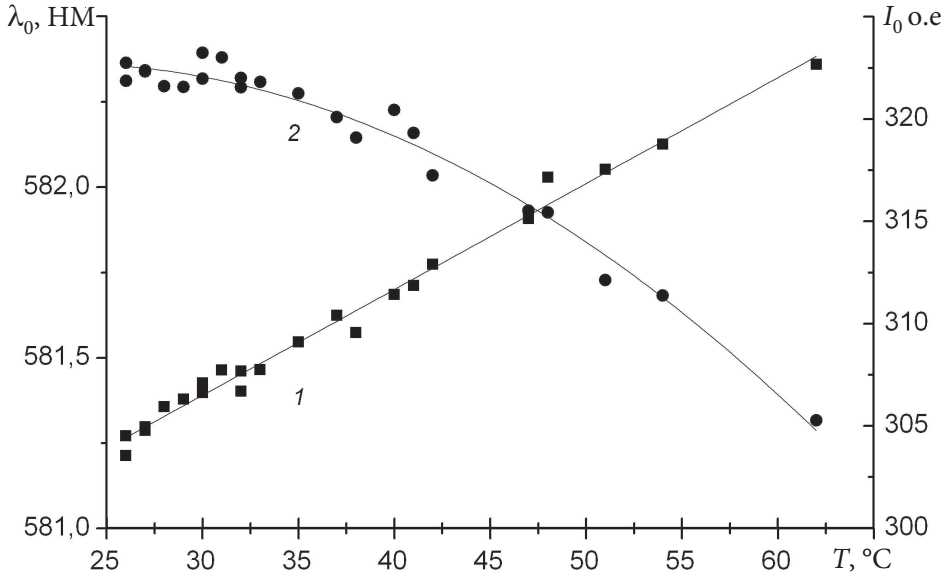


Рис. 3. Зависимость коэффициентов аппроксимации λ_0 (*1*) и I_0 (*2*) спектров выходящего излучения от температуры для полимерного оптического волокна, активированного родамином 6Ж (25 мг/кг)

ентов аппроксимации I_0 и λ_0 от температуры приведены на рис. 3. Несмотря на сравнительно малое изменение параметра λ_0 – приблизительно на 1 нм, т. е. соизмеримое со спектральным разрешением использованного спектрометра, аппроксимация спектров дает возможность построить калибровочную зависимость, связывающую λ_0 и температуру волокна.

Получение такой зависимости дает полезное практическое применение: позволяет использовать волокно, активированное родамином, в качестве датчика температуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Parvathy, R.** Luminescent dye Rhodamine 6G doped monolithic and transparent TEOS silica xerogels and spectral properties [Text] / R. Parvathy, R. Venkateswara // Science and Technology of Advanced Materials. – 2003. – No. 4. – P. 121–129.

2. **Tagaya, A.** High-power and high-gain organic dye-doped polymer optical fiber amplifers: novel techniques for preparation and spectral investigation [Text] / A. Tagaya, S. Teramoto, E. Nihei [et al.] // Applied Optics. – 1997. – Vol. 36. – No. 3. – P. 572–578.

3. **Лакович, Д.** Основы флуоресцентной спектроскопии [Текст] / Дж. Лакович. – Пер. с англ. — М.: Изд-во «Мир», 1986. – 496 с.

4. **Kinoshita, S.** Urbach tail of organic dyes in solution [Text] / S. Kinoshita, N. Nishi, A. Saitoh [et al.] // Journal of the Physical Society of Japan. – 1987. – Vol. 56. – No. 11. – P. 4162–4175.

5. **Urbach, F.** The long-wavelength edge of photographic sensitivity and of the electronic absorption of solids [Text] / F. Urbach // Phys. Rev. – 1953. – Vol. 92. No. 5 – P. 1324.

6. **Dirk, C.** Luminescence characterization of Rhodamine B doped plastic optical fibers using the Side Induced Fluorescence method [Text] / C. Dirk, A. Peralez, S. Kopecky [et al.] // Proc. SPIE. – 2000. – Vol. 4106. – P. 62–68.

УДК 625.855.3

А.Д. Юхнев, Д.Э. Синицына

РАЗРАБОТКА ТЕХНОЛОГИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ

Кровеносные сосуды – эластичные трубчатые образования в теле животных и человека, по которым силой ритмически сокращающегося сердца или пульсирующего сосуда осуществляется перемещение крови по организму: к органам и тканям по артериям, артериолам, артериальным капиллярам, и от них к сердцу – по венозным капиллярам, венулам и венам.

При разработке новых технологий хирургии кровеносных сосудов и обучении специалистов необходимо иметь наглядные пособия, позволяющие достаточно точно воспроизводить геометрические и физико-механические свойства артерий. Использование реального биоматериала для этой цели может быть неудобным, поскольку он непрозрачен и не позволяет проводить наблюдения за движением хирургических инструментов. Изготовление упругих имитаторов сосудов является важной составляющей при проведении экспериментов, связанных с изучением механики кровообращения [1–3]. В большинстве экспериментов используются имитаторы сосудов, изготовленные из силикона. Однако найти силиконовую трубку с толщиной стенки и модулем упругости естественного кровеносного сосуда достаточно сложно. Как правило, при моделировании имитаторов сосудов добиваются равенства коэффициентов податливости $k = \Delta d/\Delta p$ стенки модели и стенки естественного сосуда, где Δd – приращение диаметра, вызванное увеличением давления на величину Δp.

Классификация имитаторов сосудов

Силиконовая модель сосуда	Толщина стенки модели	Имитатор кровотока	Тканеэквивалентный материал	Преимущество имитатора кровотока
Бесстеночная	0	Тренажер для сосудистой ангиографии	Полиуретан Силикон Агар-агар	Простота изготовления
Толстостенная	> 1 мм	Тренажер для ультразвуковой доплеровской диагностики	Агар-агар	Точность воспроизведения гидродинамических параметров
Тонкостенная	< 1 мм	Исследовательский стенд	Агар-агар	Моделирование физиологии

Имитаторы кровотока содержат следующие основные элементы:

насосное устройство с регулятором амплитуды и частоты расхода;

модели сосудов, проложенные в контейнере, заполненном тканеэквивалентными материалами;

соединительные магистрали замкнутого гидравлического контура с движущейся кровеимитирующей жидкостью.

Разнообразие имитаторов кровотока, применяемых при обучении врачей, при метрологической аттестации медицинских приборов, при разработке и исследовании протезов элементов сердечно-сосудистой системы выдвигает особые требования к моделям кровеносных сосудов, применяемых в перечисленных конструкциях [4, 5]. В таблице приведены три модификации силиконовых моделей сосудов, которые используются в имитаторах кровотока различного назначения.

Цель настоящей работы – создание технологии изготовления трех модификаций моделей кровеносных сосудов для имитатора кровотока в сонной артерии. В связи с поставленной целью было необходимо выбрать технологические параметры моделей, измерить коэффициенты податливости полученных тонкостенных моделей и сонной артерии человека.

Отработка технологии изготовления сосудов

В качестве исходного материала для изготовления модели была выбрана смесь, состоящая из силиконового каучука Silastic T-4, отвердителя Silastic T-4, разбавителя DC-200 и катализатора Syl-Off® 4000 фирмы DowCorning. Разбавитель необходим для снижения вязкости смеси, а также для уменьшения твердости готового полимера. Время полного отверждения смеси составляет 24 часа. Добавление катализатора ускоряет процесс, уменьшая время отверждения до двух часов. Была проведена оптимизация соотношения компонентов силиконовой смеси; для чего варьировались концентрации составляющих. Из семи различных пробных смесей были изготовлены силиконовые модели сосудов.

Для изготовления моделей сосудов использовались две технологии: отливка (для толстостенных и бесстеночных моделей) и нанесение силиконовой смеси на поверхность формы (для тонкостенных моделей).

Для всех модификаций моделей сосудов перед нанесением приготовленного состава на поверхность или заполнением формы из силиконовой смеси, при помощи вакуумной камеры удалялись воздушные пузыри, образующиеся в процессе смешивания компонентов. Удаление воздушных пузырей – это важная технологическая операция, поскольку ультразвук не проходит через воздушные прослойки и при их наличии возникают трудности при анализе ультразвукового изображения. Схема технологической установки для дегазации силиконовой смеси приведена на рис. 1,*а*.

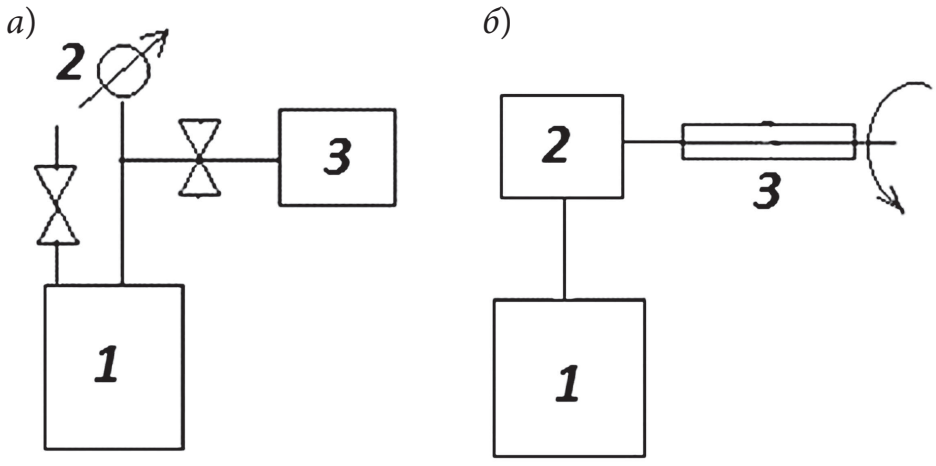


Рис. 1. Блок-схемы использованных технологических установок для дегазации силиконовой смеси (*а*): *1* – вакуумная камера, *2* – манометр, *3* – вакуумный насос; а также для сушки тонкостенных моделей (*б*): *1* – автотрансформатор, *2* – электродвигатель, *3* – модель сосуда

Для получения бесстеночных моделей дегазированной силиконовой смесью наполнялся контейнер размерами 90 × 50 × 14 мм с закрепленной в нем пластиковой трубкой диаметром 6 мм. После отверждения смеси модель извлекалась из контейнера, а трубка из модели.

При отливке толстостенной модели силиконовой смесью заполнялась форма, состоящая из двух вложенных друг в друга пластиковых трубок длиной 100 мм, внешними диаметрами 10 и 14 мм, толщиной стенок 2 мм.

При изготовлении тонкостенной модели сосуда составлялась силиконовая смесь, проводилась ее дегазация, затем смесь наносилась на пластиковую трубку, и полученный полуфабрикат сушился при его постоянном вращении (рис. 1,*б*). После высыхания и отверждения модель сосуда снималась с формы. Образцы изготовленных моделей представлены на рис. 2.

Исследование податливости сосудов

Сравнение податливости общей сонной артерии человека (здоровый волонтер) и тонкостенных моделей проводилось для оценки точности моделирования артерии.

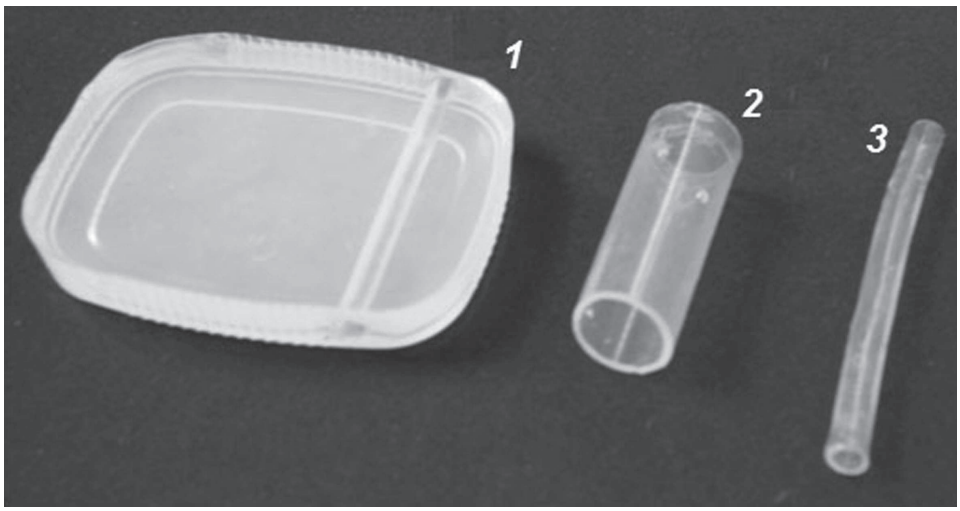


Рис. 2. Образцы изготовленных силиконовых моделей сосудов:
1 – бесстеночная, *2* – толстостенная, *3* – тонкостенная

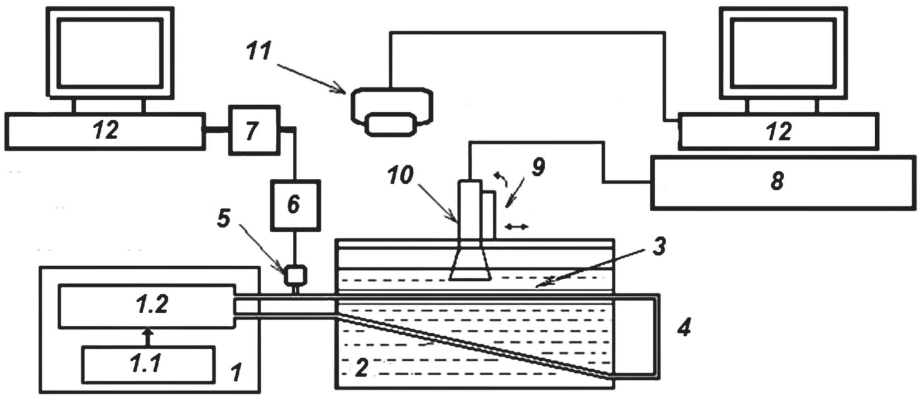


Рис. 3. Экспериментальная установка для исследования податливости моделей сосудов:
1 – насос «Пульсатор»: *1.1* – контроллер, *1.2* – насос; *2* – акустическая ванночка с водой; *3* – модель сосуда; *4* –соединительные магистрали; *5* – тензометрический датчик давления; *6* – усилитель; *7* – аналогово-цифровой преобразователь; *8* – ультразвуковой сканер LogicScan64; *9* – координатное устройство; *10* – ультразвуковой датчик; *11* – цифровая видеокамера; *12* – компьютеры

а) *б*)

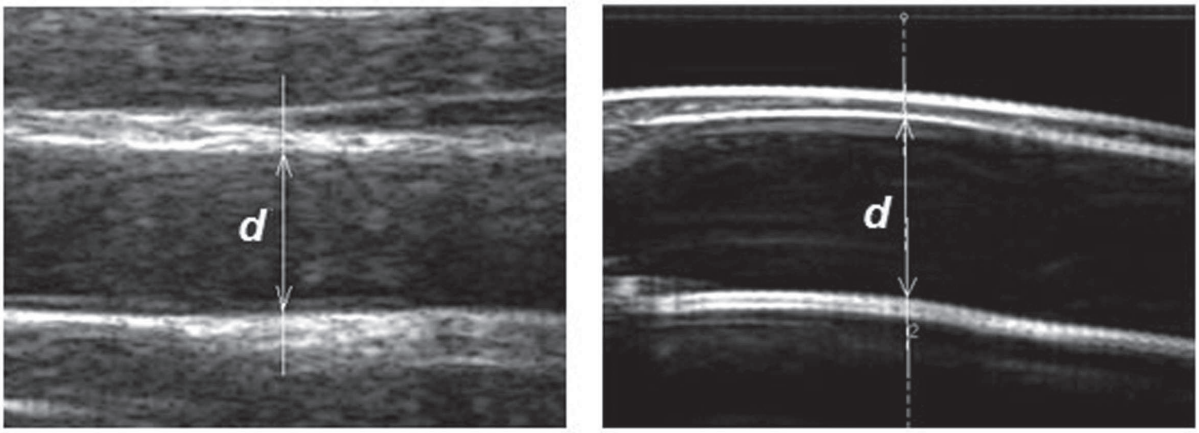


Рис. 4. Ультразвуковые изображения продольного сечения: *а* – общей сонной артерии человека, *б* –тонкостенной силиконовой модели

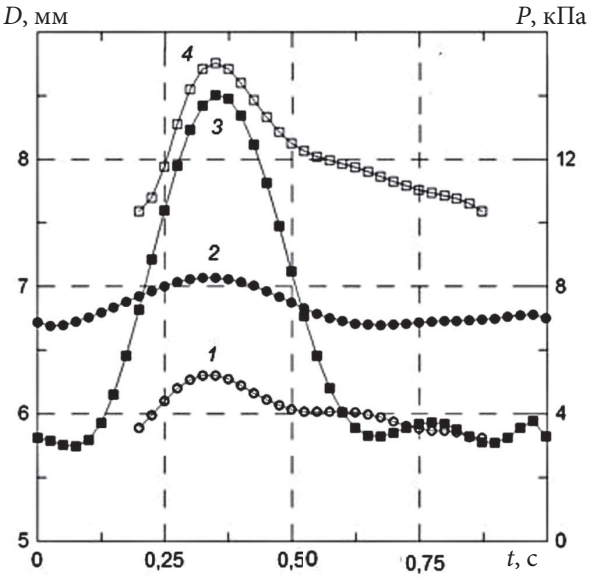


Рис. 5. Изменение диаметров общей сонной артерии (*1*) и модели сосуда (*2*), а также давления жидкости в модели (*3*) и крови в сонной артерии (*4*) за один цикл пульсации

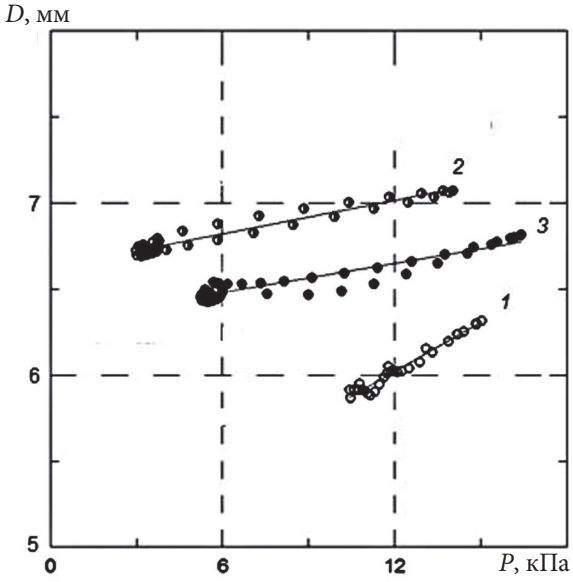


Рис. 6. Зависимости диаметров общей сонной артерии человека (*1*) и модели сосуда (*2*, *3*) от давления в пульсирующих потоках крови и модельной жидкости. Использованы ультразвуковой (*1*, *2*) и оптический (*3*) методы измерения диаметра. Полученные зависимости аппроксимируются следующими уравнениями:
$D = 0{,}0952P + 4{,}87$ (*1*); $D = 0{,}0325P + 6{,}62$ (*2*);
$D = 0{,}0282P + 6{,}31$ (*3*)

Определение коэффициента податливости силиконовой модели проводилось в условиях пульсирующего потока жидкости (рис. 3).

Измерение диаметра модели сосуда проводилось двумя способами: при помощи ультразвукового сканера LogicScan 64 (*8*) и видеокамеры Sony NEX-5ND (*11*). В программе Echo Wave II сканера записывалась кинопетля пульсаций стенок модели. После выделения нескольких циклов пульсаций модели сосуда на кинопетле, измерялся диаметр модели на каждом кадре при помощи программы Echo Wave II. Аналогично

производилось определение диаметра модели оптическим методом. Отличие состояло лишь в том, что покадровая обработка кинопетли осуществлялась в программе Adobe Photoshop. Давление измерялось при помощи тензометрического датчика (*5*), сигнал которого через усилитель и аналого-цифровой преобразователь (*7*) поступал на компьютер (*12*), регистрировался и обрабатывался в программе Power Graph.

Аналогично определялась при помощи ультразвукового сканера зависимость диаметра общей сонной артерии от времени. Ультразвуковой датчик располагался вдоль сосуда для получения изображения его продольного сечения (рис. 4).

Пульсовая кривая давления в общей сонной артерии взята из работы [3]. По полученным данным строились зависимости давления жидкости, а также диаметра сосуда человека и модели сосуда от времени (рис. 5). При этом совмещались по времени пиковые значения как давлений, так и диаметров.

По графику зависимости диаметра сосудов от приложенного внутрисосудистого давления (рис. 6) определялись коэффициенты податливости силиконовой модели и общей сонной артерии человека.

В результате исследований семи образцов моделей сосудов с толщиной стенки 0,2 – 0,8 мм из силиконовых смесей различных составов подобраны два технологических параметра: состав силиконовой смеси и толщина стенки модели, обеспечивающие максимальный коэффициент податливости. Изготовленная из силиконовой смеси (в объемном соотношении силиконового каучука, отвердителя, разбавителя и катализатора 100 : 10 : 30 : 2, соответственно) модель сосуда с внутренним диаметром 6 мм и толщиной стенок 0,3 мм имеет коэффициент податливости 0,030 ± 0,005 мм/кПа, а общая сонная артерия человека – 0,100 ± 0,005 мм/кПа. Современные исследования приводят диапазон значений податливости здоровой сонной артерии, равный 0,10 ± 0,03 мм/кПа [8]. Следовательно, для более точного моделирования сонной артерии с заданной податливостью необходимо дальнейшее развитие технологии изготовления моделей сосудов – увеличение доли разбавителя в смеси либо уменьшение толщины стенки модели.

Таким образом, разработаны два технологических метода изготовления – отливка и нанесение на поверхность силиконовой смеси – трех видов моделей кровеносных сосудов: бесстеночных, толстостенных и тонкостенных. В результате исследований тонкостенных моделей сосудов в условиях пульсирующего потока и сонной артерии в организме человека определены их коэффициенты податливости: 0,030 ± 0,005 и 0,100 ± 0,005 мм/кПа, соответственно.

Работа выполнена в рамках проекта УМНИК 10011R/16805 от 01.02.2012 Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sulaiman, A.** In vitro non-rigid life-size model of aortic arch aneurysm for endovascular prosthesis assessment [Текст] / A. Sulaiman, J.M. Serfaty // Eur. J. of Cardiothorac. Surg. – 2008. – Vol. 33. – P. 53–57.

2. **Саврасов, Г.В.** Модель артериальной системы человека [Текст] / Г.В. Саврасов, А.Ф. Батанов, С.Г. Гусаров // Медицинская техника. – 2011. – Т. 267. – № 3. – С. 1 – 6.

3. **Zhao, S.Z.** Blood flow and vessel mechanics in a physiologically realistic model of a human carotid arterial bifurcation [Текст] / S.Z. Zhao, X.Y. Xu, A.D. Hughes, [et al.] // J. Biomech. – 2000. – Vol. 33. – P. 975–984.

4. **Shau, Y.** Noninvasive assessment of the viscoelasticity of peripheral arteries [Текст] / Y. Shau, C. Wang, J. Shieh, T. Hsu // Ultrasound in Med. & Biol. – 1999. – Vol. 25. – P. 1377 – 1388.

5. **Yu, C.** Development of an in vitro tracking system with poly(vinyl alcohol) hydrogel for catheter motion [Текст] / C. Yu, H. Kosukegawa, K. Mamada, [et al.] // J. of Biomechanical Science and Engineering. – 2010. – Vol. 5. – P. 11 – 17.

6. **Ji, J.** Flow and deformation in multi-component arterial stenosis model [Текст] / J. Ji, S. Toubaru, S. Kobayashi, [et al.] // J. of Biomechanical Science and Engineering. – 2010. – Vol. 6. – P. 79 – 88.

7. **Kung, E.** In vitro of finite element analysis of blood flow in deformable models [Текст] / E. Kung, S.A. Les, C.A. Figuroa, [et al.] // Annals of Biomedical Engineering. – 2011. – Vol. 39 – P. 1947 – 1960.

8. **Ariff, B.B.** Carotid artery hemodynamics: Observing patient – specific changes with amlodipine and lisinopril by using MR imaging computation fluid dynamics [Текст] / B.B. Ariff, F.P. Glor, L.Crowe, [et al.] // Radiology. – 2010. – Vol. 257. – № 3. – P. 662 – 669.

УДК 681.784.8

О.Ф. Лукашова, Д.В. Мокрова, Г.А. Кафидова, Д.С. Перевозник

НЕИНВАЗИВНЫЙ СПЕКЛ-ДАТЧИК СКОРОСТИ КРОВОТОКА В МИКРОЦИРКУЛЯТОРНОМ РУСЛЕ

Применение лазеров и лазерных технологий при создании современной биомедицинской диагностической аппаратуры открыло новые, уникальные как с практической, так и научной точек зрения, возможности по изучению состояния организма человека. При этом наиболее перспективна аппаратура, позволяющая получить диагностическую информацию неинвазивно и максимально безвредно для обследуемого. Кроме того, введение в состав диагностической аппаратуры радиоканала для передачи информационных сигналов в центр мониторинга или лечащему врачу позволяет своевременно выявить такие формирующиеся состояния как инфаркт, инсульт, диабетическая кома.

В рамках этих тенденций развития современной диагностической биомедицинской аппаратуры активно расширяется ее рынок. По данным отчета аналитической фирмы Berg Insight, в 2010 г. объем глобального рынка дистанционного медицинского наблюдения за больными с хроническими заболеваниями превысил 10 млрд. дол. США и с каждым годом растет на 9 %.

Среди диагностических биомедицинских параметров, наиболее значимых для оценки состояния организма, одно из первых мест занимает уровень динамики крови в микроциркуляторном русле органов человека, в частности кожи. Несмотря на значительное число работ [1 – 3] по измерениям динамических параметров кровотока в сосудах и микроциркуляции крови в биотканях, актуальной остается задача создания мобильного прибора, позволяющего проводить измерения как в амбулаторных, так и в стационарных условиях. Работа сенсорной части такого прибора может быть основана на низкокогерентной интерферометрической доплеровской спектроскопии, спекл-интерферометрических методах и спекл-фотографических методах визуализации параметров микроциркуляции крови.

Параметры микроциркуляторного кровотока определяются динамикой крови в сети капилляров исследуемого участка кожи, что оказывается важным диагностическим показателем при ожоговом или раневом поражении тканей, в процессе заживления рубцов и при исследовании кожных новообразований. Кроме того ряд заболеваний приводит к изменению жесткости стенок сосудов и вязкости крови, например, жесткость стенок сосудов увеличивается при избытке глюкозы в организме. Помимо этого, можно использовать такой прибор для определения общей наполненности тканей кровью и скорости ее распространения для повышения точности неинвазивных датчиков диагностики состава крови.

В соответствии с вышеизложенным была определена цель данной работы: разработка и создание лабораторной модели неинвазивного спекл-датчика скорости крови в микроциркуляторном русле кожи человека, включающей телекоммуникационный канал передачи диагностического сигнала Bluetooth.

В данной работе для неинвазивной регистрации динамики микроциркуляции крови применяется методический подход, основанный на принципах динамики случайных когерентных оптических полей (спекл-полей), формирующихся при рассеянии зондирующего лазерного излучения биотканью (преимущественно эритроцитами крови из ее микроциркуляторного русла).

Известно [4 – 6], что интенсивность обратнорассеянного светового поля, регистрируемая фотоприемником (ФП) с достаточно малым размером приемной апертуры, представляет собой явно выраженный случайный сигнал. Одним из возможных методов определения средней скорости микроциркуляторного кровотока служит вычисление автокорреляционной функции (АКФ) такого сигнала и выявление связи времени корреляции с величиной скорости кровотока.

В работе [4] показано, что распределение амплитуды гауссова светового поля, освещающего рассеиватель на расстоянии z от перетяжки светового пучка, описывается соотношением

$$E_0(\xi) = \frac{\omega_0}{\omega}\exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{\omega^2}\right)\exp\left(i\frac{\pi|\xi|^2}{\lambda\rho}\right),$$

где ω_0 – ширина перетяжки пучка, λ – длина волны используемого света, ξ – векторная координата освещаемой точки на плоскости экрана. В этом уравнении ω и ρ – z-зависимые ширина и кривизна волнового фронта пучка, соответственно; они определяются как

$$\omega = \omega(z) = \omega_0(1 + z^2 / a^2)^{1/2};$$

$$\rho = \rho(z) = z(1 + z^2 / a^2)^{1/2},$$

где $a = \pi\omega_0^2 / \lambda$.

Нормированная временная АКФ флуктуации интенсивности спекл-поля

$$\Delta I(t) = I(t) - \langle I(t)\rangle,$$

где $I(t)$, $\langle I(t)\rangle$ – интенсивность спекл-поля и ее среднее значение, в некоторой точке дифракционного поля на расстоянии l от рассеивающего объекта имеет вид

$$R_{\Delta I}(\tau) = \exp(-\tau^2 / \tau_c^2).$$

Длина корреляции τ_c обычно определяется как расстояние от максимума АКФ $R(\tau)$ до точки, в которой значение функции уменьшается в e раз (рис. 1), и описывается соотношением

$$\tau_c = K / |V|,$$

в котором коэффициент пропорциональности K определяется параметрами оптической схемы как

$$K = \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{\sigma^2}{\Delta x^2}\right)^{-1/2}$$

($\sigma = l / \rho + 1$; $\Delta x = \lambda l / \pi\omega$);

V – скорость рассеивающего объекта.

Таким образом, вычисление автокорреляционной функции позволяет провести оценку средней скорости микроциркуляторного кровотока в области наблюдения.

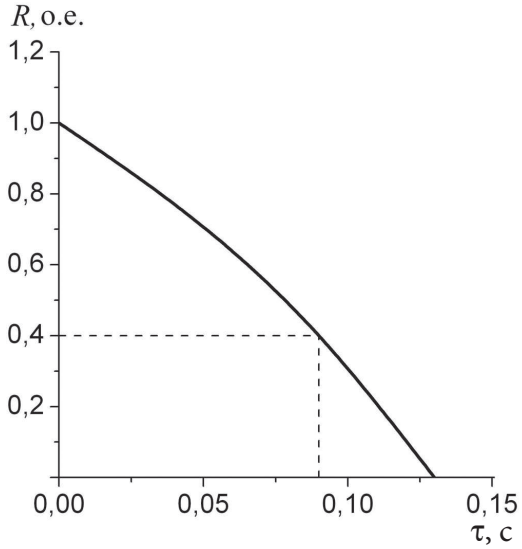


Рис. 1. Зависимость от времени нормированной временной автокорреляционной функции флуктуации интенсивности спекл-поля

Для достижения цели, поставленной в работе, был разработан и изготовлен специальный измерительный стенд (рис. 2).

В состав стенда входят сенсорная часть, представляющая собой фотоприемник *4* (фотодиод и усилитель) и лазерный полупроводниковый модуль *2*; электронный блок обработки информационного сигнала *5*, включающий радиоканал Bluetooth, а также персональный компьютер *6* с соответствующим программным обеспечением.

В процессе эксперимента исследуемая область (часть поверхности подушечки пальца руки) освещалась сфокусированным лазерным пучком. Интенсивность обратнорассеянного светового поля регистрировалась фотоприемником с входной апертурой 50 мкм. С фотоприемника информационный сигнал поступал на вход электронного блока предварительной обработки. В этом блоке сигнал оцифровывался аналого-цифровым преобразователем и транслировался по радиоканалу на персональный компьютер.

Обработка информационного сигнала, принятого по радиоканалу Bluetooth, осуществлялась с помощью специально разработанной программы в среде LabView и проходила в три этапа: восстановление вида информационного сигнала в аналоговой форме, программное вычисление АКФ, определение средней ско-

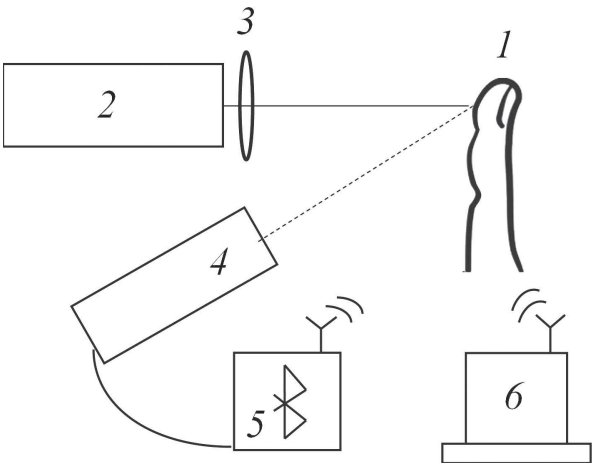


Рис. 2. Структурная схема измерительного стенда: *1* – объект исследования; *2* – лазер; *3* – линза; *4* – фотоприемник; *5* – электронный блок обработки, включающий радиоканал Bluetooth; *6* – персональный компьютер

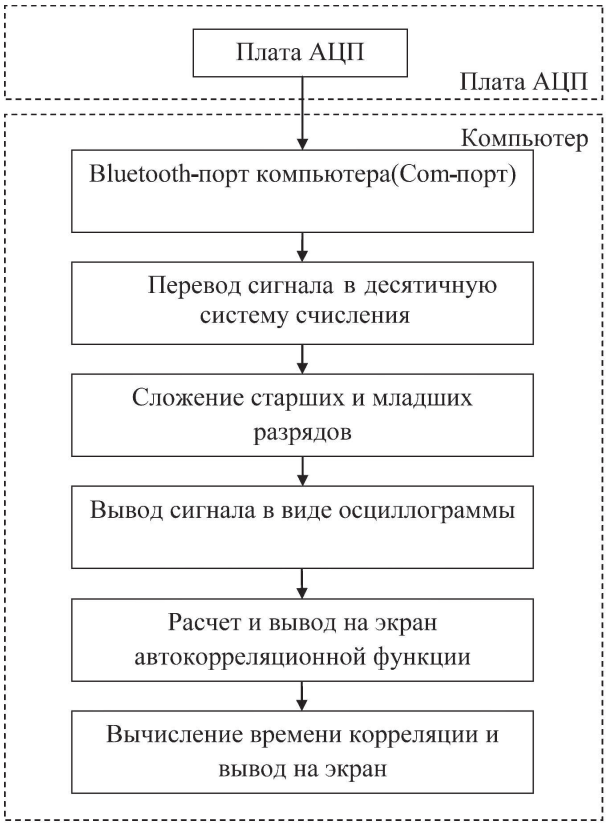


Рис. 3. Блок-схема программы

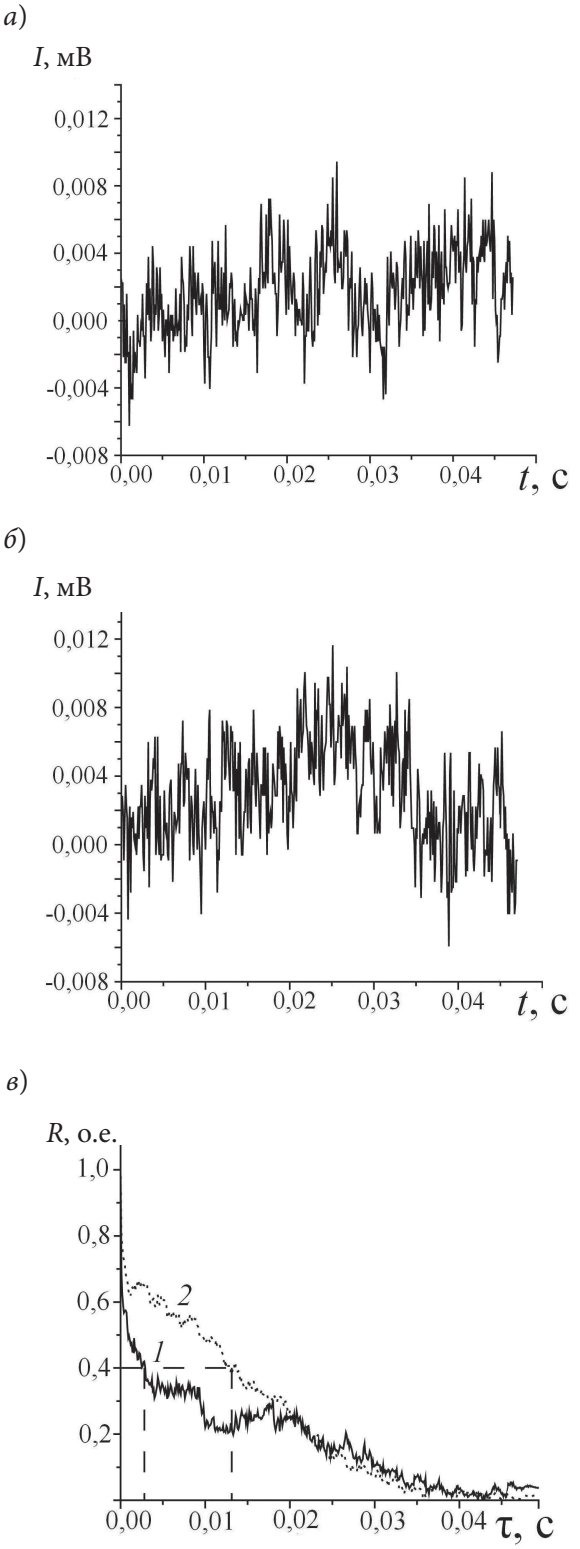


Рис. 4. Информационные сигналы от кожи волонтера, полученные до (*а*) и после (*б*) физической нагрузки, а также соответствующие АКФ (*в*): до (*1*) и после (*2*) физической нагрузки

рости кровотока в микроциркуляторном русле по времени корреляции. На рис. 3 приведена блок-схема программы.

Для определения измерительных возможностей разрабатываемого датчика был выполнен ряд натурных экспериментов на волонтерах. В частности, были зафиксированы сигналы до и после физической нагрузки (рис. 4).

Из приведенных зависимостей, соответствующих разным условиям регистрации сигналов, видно, что АКФ явно отражает изменение состояния обследуемого. В данном случае изменение времени корреляции обусловлено тем, что при физической нагрузке сосуды расширяются и скорость крови в них уменьшается, соответственно время корреляции увеличивается. Таким образом подтверждена работоспособность модели датчика скорости микроциркуляторного кровотока.

Итак, в ходе работы создана лабораторная модель неинвазивного спекл-датчика капиллярного кровотока, сопряженная с персональным компьютером по каналу Bluetooth, и программа обработки информационного сигнала, позволяющая рассчитывать скорость капиллярного кровотока в автоматическом режиме. Предложенная модель датчика позволяет вести непрерывный мониторинг параметров микроциркуляторного кровотока и осуществлять дистанционную передачу данных, что позволит в дальнейшем использовать датчик как в качестве самостоятельного прибора, так и в диагностическом комплексе для контроля за пациентами с хроническими заболеваниями.

Авторы выражают благодарность Заслуженному деятелю науки РФ, доктору технических наук, профессору С.Б. Макарову (зав. кафедрой радиоэлектронных средств защиты информации СПбГПУ) и кандидату технических наук, доценту С.В. Волвенко (сотрудник той же кафедры) за предоставление электронного модуля с каналом Bluetooth.

Работа поддержана Федеральной целевой программой «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» ГК №16.512.11.2115.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Eiju, T**. Microscopic laser Doppler velosimeter for blood velocity measurements [Text] / T. Eiju, M. Nagai, K. Matsuda, [et al.] // Optical Engineering. – 1993. – Vol. 32. – P. 15–20.

2. **Aizu, Y.** Coherent optical techniques for diagnostics of retinal blood flow [Text] / Y. Aizu, T. Asakura // Journal of Biomedical Optics. – 1999. – Vol. 4. — № 1. – P. 61–75.

3. **Galanzha, E.I.** Speckle and Doppler methods of blood and lymph flow monitoring [Text]: In: Handbook of optical biomedical diagnostics / E.I. Galanzha, G.E. Brill, Y. Aizu, [et al.] – Bellingham: SPIE Press, 2002. – P. 875–937.

4. **Asacura, T.** Dynamic laser speckles and their application to velocity measurements of diffuse object [Text] / T. Asacura, N. Takai // Applied Physics. – 1981. – Vol. 25. – P. 179–194.

5. **Мокрова, Д.В.** Бесконтактная диагностика физических параметров биологических объектов на основе оптических спекл-полей и дифрактометрии [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.21: защищена 09.12.10: утв. 08.04.2011 / Мокрова Дарья Всеволодовна. – СПб., 2010. – 150 с. Библиогр.: с. 53–71.

6. **Ульянов, С.С.** Что такое спеклы [Текст] / С.С. Ульянов // Соровский образовательный журнал. – 1999. – № 5. – С. 112 – 116.

УДК 577.322; 541.64:537.3

В.М. Капралова, Е.А. Назарова, Н.Е. Иванова, Е.Б. Шадрин

КОНФОРМАЦИОННЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ АЛЬБУМИНА КАК ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ ПАРАМЕТР

В последнее десятилетие показано, что при многих серьезных нейродегенеративных заболеваниях имеются изменения конформации белковых молекул и, как следствие, нарушение биологической функции определенных белков. Эти заболевания принято также называть кон-

формационными [1]. К ним относятся, например, хорея Хантингтона, болезни Альцгеймера и Паркинсона. Способность белков центральной нервной системы выполнять их специфические биологические функции утрачивается, в частности, при образовании вместо белковых глобул нерастворимых амилоидных фибрилл, склонных к агрегации [2]. На сегодняшний день подобные нейродегенеративные заболевания неизлечимы, однако признана необходимость их ранней диагностики. Поэтому представляется актуальным расширение круга физических методов, с помощью которых можно наблюдать конформационные изменения белковых молекул.

Одним из новых в медицинской диагностике является метод термоимпедансметрии спинномозговой жидкости, или ликвора, человека. Ликвор – сложная биологическая жидкость, содержащая различные белки, эритроциты, клеточные структуры, взвешенные в физиологическом растворе. По составу и свойствам ликвора возможна оценка состояния больных и прогнозирование исходов при различных заболеваниях центральной нервной системы (ишемический и геморрагический инсульты, менингит, опухоли и др.) и черепно-мозговых травмах. В ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН была разработана и изготовлена установка для измерения электрического импеданса биологических жидкостей в зависимости от температуры (рис. 1) [3]. С ее помощью были получены кривые термоимпеданса для проб ликвора большого числа пациентов, предоставленных клиникой Института нейрохирургии им. проф. А.Л. Поленова (Минсоцразвития России). Набранный объем данных позволяет выделить характерные особенности кривых температурного хода импеданса ликвора, присущие определенным, установленным другими диагностическими методами, заболеваниям. Опытный врач-невролог, таким образом, может уже по виду кривой судить о заболевании и, что немаловажно, оценивать состояние больного и определять тактику лечения и показания для хирургического вмешательства, а также прогнозировать исход заболевания. Такого рода диагностика уже проводится в Институте нейрохирургии им. А.Л. Поленова [4, 5]. Кроме того, выяснилось, что диагностические параметры метода термоимпедансметрии связаны с содержанием и состоянием белков в ликворе.

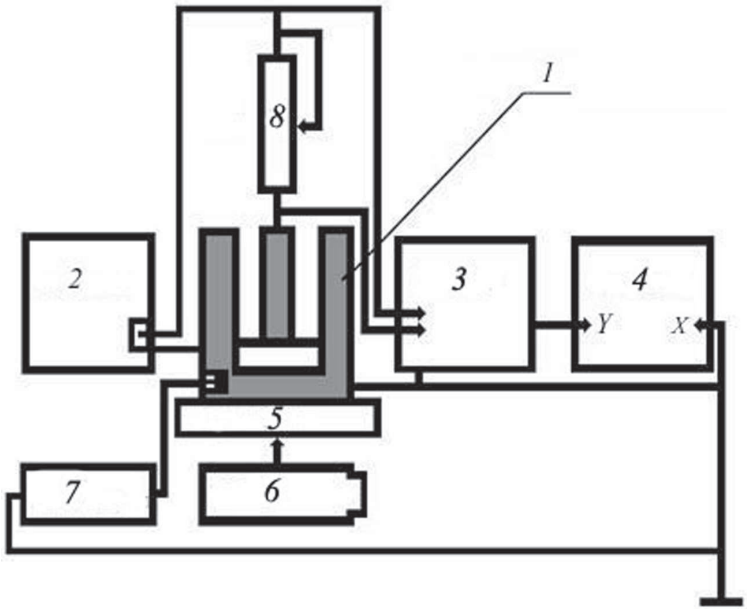


Рис. 1. Блок-схема установки для измерения электрического импеданса кюветы (*1*) с жидкостью:
2 – генератор переменного тока; *3* – фазометр; *4* – двухкоординатный самописец; *5* – нагреватель; *6* – блок питания нагревателя; *7* – измеритель температуры; *8* – эталонное сопротивление

Это позволяет расширить диагностические возможности метода и, возможно, внести вклад в изучение и диагностику конформационных заболеваний.

Напомним, что электрический импеданс представляет собой усредненную характеристику отклика образца на воздействие переменного электрического напряжения, причем для кюветы с жидкостью основной составляющей импеданса является емкостное сопротивление. Изменение емкости с температурой весьма мало, и именно поэтому применяется фазометрический метод, заключающийся в измерении разности фаз напряжения на кювете и внешнего напряжения, прилагаемого к измерительной ячейке.

Зависимость электрического импеданса спинномозговой жидкости от температуры (рис. 2) практически всегда имеет немонотонный характер, причем на большинстве кривых имеется так называемый клюв, или лямбдообразный минимум, свидетельствующий о фазовом переходе в структурных элементах ликвора, происходящем при температуре минимума кривой. Основными параметрами экспериментальных кривых являются температура фазового перехода $T_{ФП}$ и выраженность минимума. Под выраженностью участка кривой здесь понимается отношение интервала Δy разности фаз, соответствующее этому участку, к полному интервалу ΔH изменения разности фаз для всей кривой.

Ранее для выяснения природы наблюдаемого лямбдообразного минимума и соотнесения его с определенными структурными элементами ликвора проводилась интерпретация части экспериментальных кривых в терминах теории фазовых переходов [6], то есть определение критических индексов перехода и температуры равновесия фаз. Полученные значения критических индексов подтвердили, что в изучаемой системе действительно происходит фазовый переход. Для понимания роли определенных структурных элементов ликвора в фазовых переходах нами были определены коэффициенты корреляции между параметрами термоимпедансметрических кривых и биохимическими показателями ликвора, а также состоянием больных по специальным медицинским оценочным шкалам. В частности обнаружено, что наибольшие коэффициенты корреляции наблюдаются при недоброкачественных опухолях между параметром «выраженность» и содержанием белка в ликворе (0,77), а также между цитозом (содержанием клеточных структур) и температурой фазового перехода $T_{ФП}$ (0,39). Существование уверенных корреляций

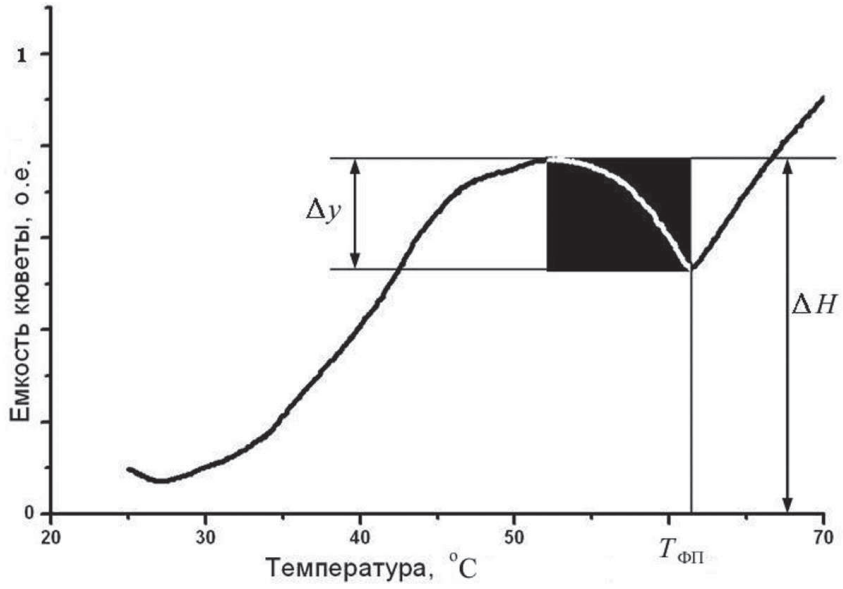


Рис. 2. Пример термоимпедансметрической кривой ликвора пациента с черепно-мозговой травмой средней степени тяжести. Показаны основные параметры экспериментальных кривых

между параметрами наблюдаемого на термоимпедансметрической кривой фазового перехода и содержанием белка в ликворе для всех исследованных заболеваний и черепно-мозговых травм позволило связать этот переход с фазовым переходом глобула – клубок в белках ликвора.

В белковых молекулах существует иерархия структур и энергий связей, стабилизирующих эти структуры. Соответственно, при увеличении температуры происходит последовательное разрушение связей, приводящее в конечном итоге к денатурации белка и затем к фазовому переходу глобула –клубок [7]. Белки в нативном состоянии имеют строго определенную, заданную их первичной структурой конформацию, только находясь в которой, белки выполняют свои биологические функции. Поэтому важна возможность наблюдения конформационного состояния белковых молекул. В этом отношении метод термоимпедансметрии представляется перспективным, поскольку несомненно имеет место влияние конформации белков и ее изменений на форму термоимпедансметрических кривых. Это влияние было подтверждено модельными экспериментами с глобулярными белками.

Так как белки в ликвор попадают в основном путем фильтрации из плазмы крови, то в ликворе предпочтительно накапливаются среднемолекулярные белки, находящиеся в плазме в относительно большом количестве, – это альбумин, преальбумин и трансферрин. Специфические для центральной нервной системы белки (основной белок миелина, кислый глиальный фибриллярный белок и *t*-белок) в норме составляют только 1–2 % от концентрации общего белка в ликворе. Поэтому в качестве модельных объектов для предварительного исследования конформационных превращений в белках были выбраны доступные глобулярные белки интерферон и церебролизин, аналогичные белкам ликвора. Форма и параметры термоимпедансметрических кривых интерферона и церебролизина, а также концентрационные зависимости параметров кривых подтвердили, что наблюдаемый фазовый переход происходит именно в белках ликвора.

В связи с этим задачей настоящей работы было проведение термоимпедансметрических экспериментов с альбумином – белком ликвора с целью наблюдения проявлений конформационных состояний белка на термоимпедансметрических кривых.

Объектом исследования был человеческий сывороточный альбумин, который является одним из основных белков в составе спинномозговой жидкости (в норме составляет около 70 % от общего содержания белков ликвора). Выбор альбумина в качестве модельного белка обусловлен также его важной ролью в плазме крови. Данный белок, во-первых, обеспечивает осмотическое давление крови, от которого в значительной степени зависит обмен воды и растворенных в ней веществ между кровью и тканевой жидкостью; во-вторых, регулирует вместе с другими белками плазмы водородный показатель pH крови благодаря наличию буферных свойств; в-третьих, влияет на вязкость крови; в-четвертых, служит переносчиком гормонов, липидов, минеральных веществ и лекарственных препаратов.

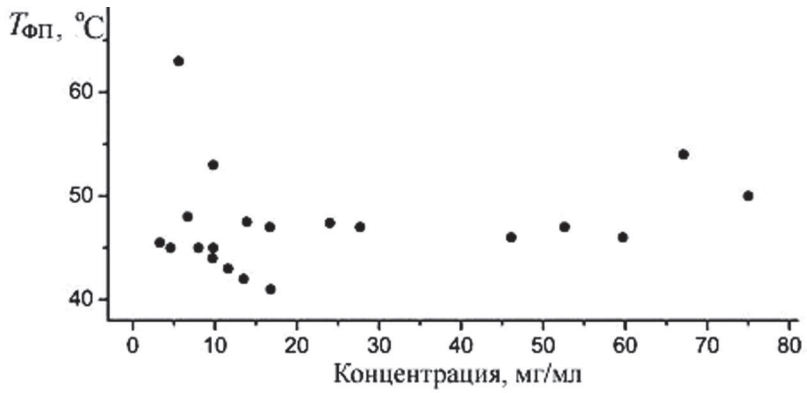


Рис. 3. Зависимость температуры фазового перехода в структурных элементах ликвора от концентрации раствора альбумина

Образцы для экспериментов получали последовательным разбавлением исходного препарата человеческого сывороточного альбумина дистиллированной водой. Препарат альбумина представлял собой 10 %-й раствор человеческого сывороточного альбумина с молекулярной массой 69 кДа в дистиллированной воде, в который были добавлены каприловокислый натрий (3 г/л) и хлористый натрий (100 ммоль/л). Получены концентрационные ряды термоимпедансметрических кривых.

С изменением концентрации растворов от большей к меньшей изменяется форма термоимпедансметрической кривой. При некотором значении концентрации характерный для фазового перехода участок на кривых практически пропадает. Были получены зависимости температуры фазового перехода (рис. 3) и его выраженности от концентрации раствора, которые обсуждались в рамках представлений о концентрационных состояниях полимерного, в том числе белкового, раствора. С учетом плохой воспроизводимости результатов (характерной для биологических систем) температура наблюдаемого фазового перехода заключена в промежутке 40–55 °С и практически не зависит от концентрации раствора. Это подтверждает, что с помощью термоимпедансметрического метода наблюдается именно фазовый переход отдельных глобул в клубки, а не процессы разрушения агрегатов альбуминовых глобул в растворе.

С целью поиска проявлений различных конформационных состояний альбумина на термоимпедансметрических кривых проводились эксперименты с денатурированным белком. В качестве денатурантов использовались 8М раствор мочевины и растворы ортофосфорной и лимонной кислот. На рис. 4, *а* приведены термоимпедансметрические кривые растворов альбумина при различных значениях pH раствора.

Наблюдаемые при изменении pH раствора изменения формы термоимпедансметрических кривых можно связать с изменениями конформации молекул альбумина. Известно [8], что в зависимости от pH молекула альбумина может находиться в одной из пяти изомерных форм, причем переходы между ними полностью обратимы. Форма молекулы альбумина в нейтральной среде (наиболее известная, «сердцеобразная») называется нормальной, или *N*-формой (рис. 4, *б*). При понижении pH до 4,3 (с ростом кислотности среды) альбумин переходит в *F*-конформацию (от англ. Faster migrating). При pH ниже 2,7 белок находится в развернутой *E*-конформации (от англ. Expanded), что и отражается на форме термоимпедансметрических

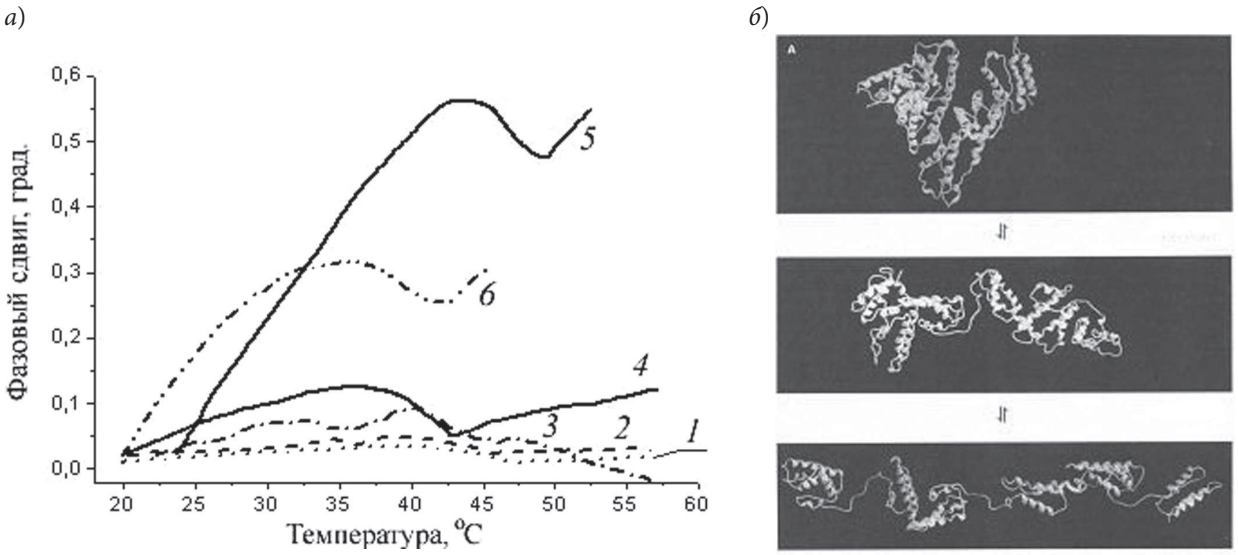


Рис. 4. Термоимпедансметрические кривые раствора альбумина при различных значениях pH (*а*) и конформации изомерных форм альбумина [8] (*б*), которые связаны со значениями pH; *а* – значения pH: 2,0 (*1*), 2,2 (*2*),2,3 (*3*), 2,5 (*4*), 6,7 (*5*), 8,6 (*6*); *б* – конформации молекулы альбумина(сверху вниз): *N*-форма, *F*-форма и *E*-форма

зависимостей (кривые *1 – 4* на рис. 4,*а*): происходит изменение выраженности минимума или полное исчезновение минимума на кривой.

Воздействие кислоты на альбумин в целом подобно термическому воздействию, но характеризуется значительно большей избирательностью по отношению к связям, стабилизирующим пространственную структуру белка. Естественно, что когда тепловому воздействию подвергается альбумин в одной из уже модифицированных форм (*F*- или *E*-форм), для термоинициированных процессов остается значительно меньше возможностей. Поэтому и на термоимпедансметрических кривых эти процессы проявляются в значительно меньшей степени.

При увеличении pH до 8,6 незначительно изменяется форма допереходного участка кривой (см. рис. 4, *а*), а выраженность минимума приблизительно такая же, как и для кривой, полученной для раствора с pH = 6,7. В интервале значений pH от 8 до 10 альбумин существует в так называемой *B*-форме (от англ. Basic). Эта изомерная форма близка к *N*-форме по геометрическим параметрам и компактности, но отличается характером междоменных связей. Поэтому форма термоимпедансметрической кривой для слабощелочного раствора альбумина подобна таковой для нейтрального раствора.

Известно, что раствор альбумина представляет собой сложную систему, содержащую как отдельные глобулы, так и их ассоциаты. Для таких систем при изменении их состояния большое значение имеет фактор времени. Многие биологические системы приходят в равновесное состояние в течение многих часов и даже суток, поэтому в практике биофизических исследований обычным является приготовление и перемешивание термостатированных растворов в течение, например, суток. В связи с этим было изучено влияние времени на процессы, проходящие в растворах альбумина с лимонной кислотой.

С интервалом времени в десять дней была проведена запись термоимпедансметрических кривых растворов альбумина с различным содержанием лимонной кислоты (pH 3,0 и 2,2). Концентрация альбумина в растворах была одинакова и равна 7 мг/мл. На рис. 5 видно, что как для раствора с pH = 3,0, так и для раствора с pH = 2,2 явно выраженный клювообразный участок и минимум в области 42 °C по прошествии 10 суток исчезли. Это может свидетельствовать о том, что с течением времени при воздействии денатурирующих факторов, в нашем случае лимонной кислоты, молекула альбумина полностью денатурирует и переходит из состояния глобулы в малоупорядоченное развернутое состояние, для которого фазовый переход уже не наблюдается.

Сведения о конформации и косвенно о концентрации белков, полученные методом термоимпедансметрии, могут быть весьма ценными для медицинской диагностики по свойствам

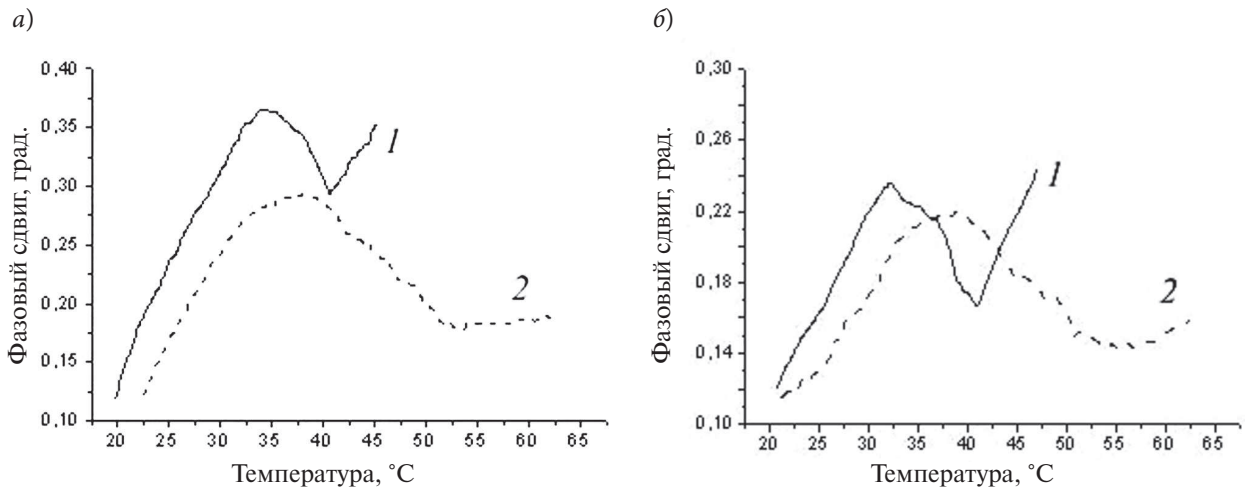


Рис. 5. Влияние времени выдерживания растворов альбумина на вид термоимпедансметрических кривых растворов с различным содержанием лимонной кислоты: pH = 3,0 (*а*) и 2,2 (*б*);
1, 2 – кривые, снятые сразу после приготовления растворов и через 10 дней, соответственно

биологических жидкостей, содержащих белки. Важно использовать эти сведения вместе с данными о биохимическом составе биологических жидкостей, а также с оценками состояния больных по специальным медицинским шкалам. Так например, при наблюдении термоимпедансметрической кривой без выраженного минимума можно предположить или крайне незначительное содержание белков в исследуемой жидкости, или что белки в ней имеются, но в денатурированном состоянии. При наличии хорошо выраженного минимума можно воздействовать на изучаемую жидкость денатурантами с различными pH, чтобы понять, в каком конформационном состоянии находятся белки этой жидкости. Возможно также использовать данные о кинетике денатурации. В сочетании с данными о содержании белка в биологической жидкости — крови или ликворе, полученными другими аналитическими методами, можно сделать важные выводы о состоянии белков в биологической жидкости и, возможно, о состоянии организма в целом. Для более точных заключений необходима статистика по большому количеству больных и здоровых людей, что само по себе представляет сложную исследовательскую задачу.

После исследования растворов альбумина с различными значениями концентрации и pH термоимпедансметрическим методом представляется целесообразным проверить, будут ли наблюдаться какие-либо закономерности при исследовании таких же растворов методом спектроскопии.

Спектр УФ поглощения альбумина характеризуется двумя полосами. Первая – интенсивная полоса в области 200 – 220 нм – обусловлена наличием большого числа амидных групп в составе пептидных связей (– CONH –). Вторая – менее интенсивная полоса в районе 280 нм – обусловлена наличием в структуре белка таких сильных хромофоров, как аминокислотные остатки триптофана и тирозина. Поскольку на полосе 280 нм поглощение этих хромофоров практически ничем не маскируется, она считается наиболее чувствительной к изменениям конформации альбумина [9].

Были сняты спектры пропускания растворов альбумина с различным содержанием белка: концентрация менялась от 33 до 0,03 мг/мл путем последовательного разбавления растворов (рис. 6). Вплоть до концентрации 8 мг/мл в УФ области спектров пропускание отсутствует и появляется только в области 300 нм. Особен-

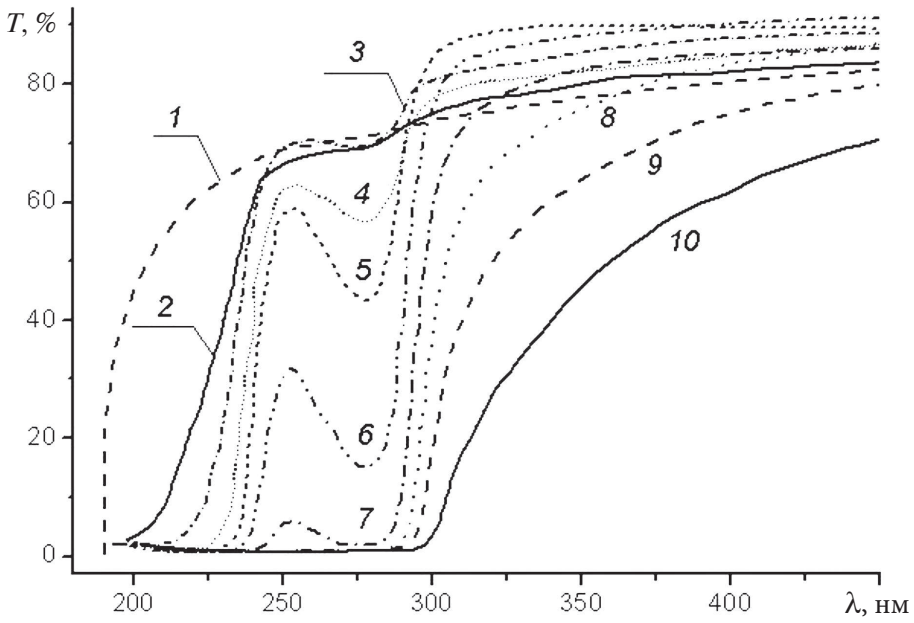


Рис. 6. Спектры пропускания воды (*1*) и водных растворов альбумина различной концентрации, мг/мл:
0,03 (*2*), 0,08 (*3*), 0,2 (*4*), 0,5 (*5*), 1,4 (*6*), 4,0 (*7*), 8,2 (*8*), 16,5 (*9*), 33,0 (*10*)

ности, связанные с поглощением аминокислотных остатков тирозина и триптофана в области 280 нм, проявляются, начиная с концентрации 4 мг/мл, и меняются с понижением концентрации – пик поглощения постепенно исчезает.

По данным спектров пропускания было показано, что оптическая плотность в максимуме поглощения при 280 нм имеет линейную зависимость от концентрации раствора. Это говорит о том, что в данных растворах альбумина при концентрации ниже 4,0 мг/мл выполняется закон Ламберта –Бугера – Бера, то есть образования каких-либо агрегатов молекул, способного повлиять на поглощение, в этой области концентраций не происходит. При более высоких концентрациях альбумина чувствительность использованного спектрофотометра СФ-56 до 2 ед. оптической плотности не позволяет наблюдать поглощение.

Представляет интерес изучение спектров пропускания растворов альбумина с различными pH, а также температурных зависимостей этих спектров с целью выявления процессов денатурации. Существует ряд исследований, демонстрирующих проявления процессов образования расплавленной глобулы и полной денатурации белковых молекул в спектрах пропускания, а также возможности изучения конформации альбумина различными спектроскопическими методами [9 – 11].

Кроме того, необходимо изучение теми же методами изменений конформации не только глобулярных белков, каким является альбумин, но и фибриллярных: кератина, миозина, фибрина, коллагена. Возможно, это позволит различать большее количество конформационных состояний белков и повысит ценность метода термоимпедансметрии для диагностики конформационных заболеваний. Такие исследования планируются в дальнейшем.

Итак, в работе получены данные, подтверждающие, что за наблюдаемый термоимпедансметрическим методом фазовый переход в ликворе ответственны белки, входящие в его состав. По виду термоимпедансметрической кривой, наличию на ней области фазового перехода и параметрам этого перехода можно косвенно судить о концентрации белка. Кроме того, по форме и параметрам кривой можно делать выводы о структуре и устойчивости белковых глобул, то есть об их конформации и ее изменении при повышении температуры. Показано, что с помощью метода термоимпедансметрии возможно наблюдение фазового перехода в отдельных глобулах альбумина, а также кинетики конформационных изменений при денатурации альбумина под действием кислоты. Спектроскопическим методом продемонстрировано, что при концентрации раствора альбумина менее 4,0 мг/мл не происходит агрегации его молекул.

Таким образом, показана возможность расширить область применения термоимпедансметрического метода диагностики и на болезни центральной нервной системы, вызываемые изменениями конформации белков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иллариошкин, С.Н.** Конформационные болезни мозга [Текст]/ С.Н. Иллариошкин. – М.: Янус-К, 2003. – 248 с.

2. **Сулацкая, А.И.** Особенности взаимодействия флуоресцентного красителя тиофлавина Т с амилоидными фибриллами [Текст]/ А.И. Сулацкая // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2011. – № 3 (129). – С. 123–127.

3. **Пат. 2205392 Российская Федерация, МПК[7] 7G 01 N 27/02, A 61 B 5/05.** Устройство для определения электрических параметров жидкой среды [Текст] / Ильинский А.В., Иванова Н.Е., Шадрин Е.Б., Юткина Н.Л.; заявитель и патентообладатель Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН. – № 2002103476/28(003348); заявл. 04.02.2002.

4. **Пат. 2257579 Российская Федерация, МПК[7] G 01 N 33/487, G 01 N 27/06.** Способ прогнозирования исхода ишемического повреждения головного мозга [Текст] / Юткина Н.Л., Иванова Н.Е., Панунцер В.С., Касумов Р.Г., Шадрин Е.Б., Шадрин А.Е.; заявитель и патентообладатель Российский научно-исследовательский нейрохирургический институт им. проф. А.Л. Поленова. – № 2003130396/15; заявл. 14.10.2003; опубл. 27.07.2005.

5. **Иванова, Н.Е.** Термоимпедансметрия спинномозговой жидкости человека как метод медицинской диагностики [Текст] / Н.Е. Иванова, В.М. Капралова, Е.Б. Шадрин [и др.] // Труды СПбГПУ. Научные исследования на РФФ. – СПб., 2006. – № 500. – С. 217 – 222.

6. **Шадрин, Е.Б.** Основы физики фазовых переходов [Текст]: Учеб. пос. / Е.Б. Шадрин. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. – 107 с.

7. **Гросберг, А.Ю.** Статистическая физика макро-

молекул [Текст] / А.Ю. Гросберг, А.Р. Хохлов. – М.: Наука, 1989. – 342 с.

8. **Peters, T.J.** All about Albumin: Biochemistry, genetics and medical applications [Text] / T.J. Peters. – San Diego, CA: Academic Press, 1996. – 432 p.

9. **Капралова, А.В.** Влияние терагерцового излучения различных диапазонов на конформацию молекул бычьего сывороточного альбумина [Текст] / А.В. Капралова, А.С. Погодин //Вестник НГУ. Серия: Физика. – 2010. – Т. 5.–Вып. 4. – С. 182 – 185.

10. **Григорян, К.Р.** Влияние диметилсульфоксида и диэтилсульфоксида на термическую денатурацию человеческого сывороточного альбумина [Текст] / К.Р. Григорян, Ш.А. Маркарян, М.Г. Азнаурян // Теоретическая и экспериментальная криобиология. Проблемы криобиологии. – 2009. – Т. 19. – № 1. – С. 3–9.

11. **Дмитриев, А.В.** Тепловая денатурация бычьего сывороточного альбумина в спектрах мандельштам-бриллюэновского рассеяния света. [Электронный ресурс] / А.В. Дмитриев, А.И. Федосеев, А.В. Сванидзе. – URL: http://physica.spb.ru/contents/2011thesises/biofizika/

УДК 537.226:544.163.2

А.Р. Хайруллин, Т.П. Степанова, Н.Н. Рожкова, С.В. Гладченко

ДИПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ФУЛЛЕРЕНА C_{60} В БЕНЗОЛЕ, ТОЛУОЛЕ И ОРТОКСИЛОЛЕ

Открытие в конце XX века четвертой аллотропной формы углерода, имеющей обобщенное название фуллерены, вызвало огромный интерес ученых к исследованию структурных, механических, электрических, магнитных, оптических свойств этого класса соединений всеми доступными современными методами [1–6].

Фуллерены можно рассматривать как многоатомные молекулы, состоящие из n атомов углерода, где $n \geq 20$. Наиболее распространенным является фуллерен C_{60}, который имеет форму усеченного икосаэдра. Его поверхность образуют шестиугольники и пятиугольники, соединенные одинарными (–C–C–) и двойными (–C=C–) связями. C_{60} способен образовывать конденсированные системы – фуллериты, которые представляют собой молекулярные кристаллы. Изучение такой молекулярной характеристики фуллерена C_{60}, как дипольный момент, является необходимым для понимания свойств и архитектуры строения фуллеритов в блоке, в пленках, в дисперсиях.

Целью настоящей работы было изучение статической диэлектрической поляризации растворов фуллерена C_{60} в условиях бесконечного разбавления и тенденции к ассоциации фуллерена в различных растворителях.

Экспериментальная часть

Образцы фуллерена C_{60} в виде порошка чистотой 99,95 % были получены от ЗАО ИЛИП (г. Санкт-Петербург) и охарактеризованы методами рентгеноскопии, масс-спектрометрии, ЭПР и ЯМР. Порошки фуллерена C_{60} сушили при комнатной температуре при давлении около 10^{-3} мм рт. ст. [7].

Измерить дипольный момент единичной молекулы C_{60} не представляется возможным, так как фуллерен образует кластеры даже в очень разбавленных растворах [8]. Дипольные моменты кластеров в разбавленных растворах бензола, толуола и ортоксилола определяли на основе измерения концентрационных зависимостей диэлектрической проницаемости и удельных объемов растворов с экстраполяцией на бесконечное разбавление при температуре 298 K. Диэлектрическую проницаемость растворов измеряли в стеклянной ячейке-бюксе с жесткой системой платиновых пластинчатых электродов на звуковом мосте «Tesla BM-484». Методика измерений дипольных моментов подробно описана в работе [9].

Удельные объемы растворов определяли пикнометрическим методом.

Дипольные моменты рассчитывали по формуле Дебая – Кумлера [10]:

$$\mu = 0,0128\left\{\left(P_{2\infty} - R_D\right)T\right\}^{1/2}; \qquad (1)$$

$$P_{2уд} = \frac{3\alpha}{\left(\varepsilon_0 + 2\right)^2} v_0 + (v_0 + \beta)\frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 2} M, \qquad (2)$$

где μ – дипольный момент; $P_{2уд}$, R_D, T, M – соответственно мольная ориентационная поляризация, молярная рефракция, температура, масса; ε_0, v_0 – диэлектрическая проницаемость и удельный объем при бесконечном разбавлении; параметры

$$\alpha = \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta w_2}\right)_{w_2=0}, \quad \beta = \left(\frac{\Delta v}{\Delta w_2}\right)_{w_2=0}$$

определяются из зависимостей диэлектрической проницаемости и удельного объема от весовой концентрации w_2 вещества в растворе.

Принимая во внимание, что поверхность C_{60} состоит из 20 шестичленных и 12 пятичленных колец, мольную рефракцию R_D рассчитывали как сумму рефракций связей (–C–C–) и (–C=C–) [11].

Результаты и их обсуждение

На рис. 1 представлены концентрационные зависимости диэлектрической проницаемости и удельного объема растворов C_{60} в бензоле, толуоле и ортоксилоле. Видно, что в представленных интервалах концентраций во всех растворителях зависимости $\varepsilon(w_2)$ и $v_{уд}(w_2)$ есть линейные функции, и при бесконечном разбавлении растворов значения ε, $v_{уд}$ экстраполируются соответственно в значения диэлектрической проницаемости ε_0 и удельного объема $v_{уд0}$ растворителей [12]. Это свидетельствует о том, что в растворах (в выбранных областях концентраций) находятся либо изолированные молекулы, либо изолированные ассоциаты с постоянной стехиометрией состава, что дает возможность произвести расчеты по формулам (1) и (2). При исследовании полярных низкомолекулярных соединений простого строения расчет по формулам (1) и (2) дает значение молекулярного дипольного момента μ, близкое к значению дипольного момента в газообразном состоянии μ_0. Дипольные моменты определены в условиях бесконечного разбавления, поэтому межмолекулярными взаимодействиями растворитель – фуллерен можно пренебречь [13].

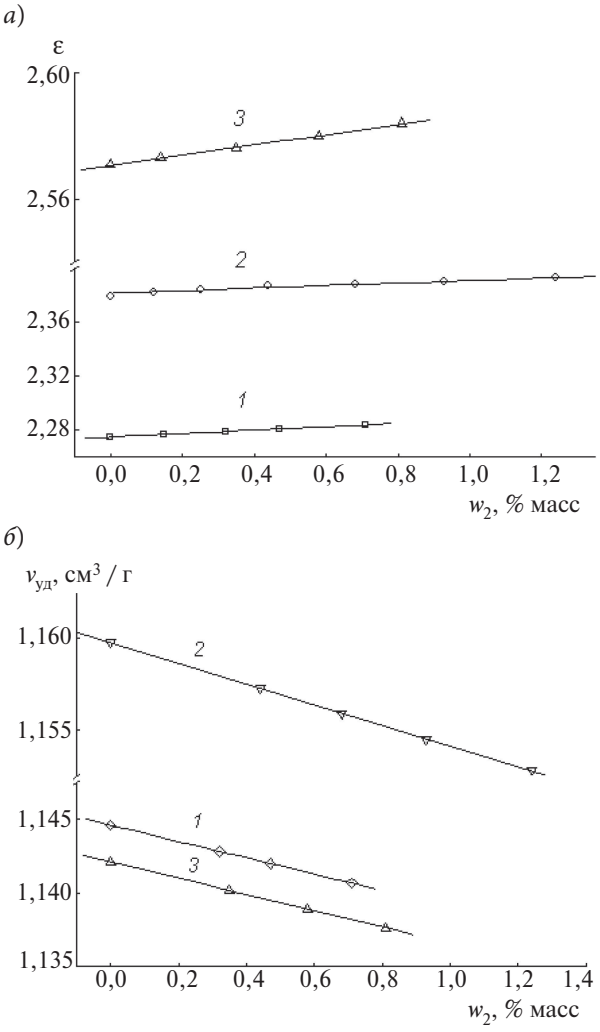


Рис. 1. Концентрационные зависимости диэлектрической проницаемости (*а*) и удельного объема (*б*) растворов фуллерена C_{60} в бензоле (*1*), толуоле (*2*) и ортоксилоле (*3*)

В таблице представлены полученные значения величин дипольных моментов $C_{60.}$ Видно, что наименьшим из них является значение величины дипольного момента в толуоле – около 1 Д. Полученное малое значение ожидаемо. Исходя из молекулярного строения C_{60}, для совершенной сферической поверхности при замкнутых одинарных и двойных связях мы можем предположить, что значение дипольного момента должно равняться нулю. Однако, в силу искаженности сферической поверхности икосаэдра, а также возможной разомкнутости связей пентагонов или гексагонов, электронное облако становится асимметричным и молекула C_{60} приобретает ненулевой дипольный момент. На некомпенсированные связи могут присоединиться полярные атомы или иные молекулярные группы, имеющие свои парциальные дипольные моменты, и суммарный дипольный момент C_{60} становится отличным от нуля.

В бензоле и ортоксилоле дипольный момент C_{60} в два раза больше и составляет 1,82 и 2,27 Д, соответственно. Бóльшие значения могут быть связаны с различной растворимостью фуллерена, определяемой полярностью и стерическим строением молекул растворителя, которые в свою очередь ответственны за локальный порядок в континууме растворителя. Толуол обладает меньшей плотностью по сравнению с бензолом и ортоксилолом. Бóльший свободный

Результаты определения дипольных моментов фуллерена C_{60} в различных растворителях при $T = 298$ К

Растворитель			Фуллерен C_{60} в растворе		
Наименование	ε_0	$v_{0ул}$, см^3/г	α	$-\beta$, см^3/г	μ, Д
Бензол	2,275	1,1446	1,264	0,553	1,82
Толуол	2,379	1,1597	0,924	0,568	1,09
Ортоксилол	2,571	1,1416	1,610	0,550	2,27

Примечание. Молекулярная масса $M = 720$, молярная рефракция $R_D = 230{,}4$

объем толуола допускает вхождение больших молекул C_{60} с меньшим возмущением локальной структуры растворителя. Действительно, наибольшая область линейности концентрационной зависимости диэлектрической проницаемости C_{60} наблюдается для растворов в толуоле. Различие значений дипольного момента C_{60} в бензоле и ортоксилоле обусловлено бóльшей полярностью молекул последнего, $\mu_{бензол} = 0$ и $\mu_{ортоксилол} = 0{,}62$ Д [12]. В бензоле и в ортоксилоле молекулы C_{60} могут быть частично ассоциированы. Если принять, что в растворе в толуоле фуллерен C_{60} находится в виде минимальных изолированных кластеров с дипольным моментом $\mu = 1{,}09$ Д, то в бензоле и ортоксилоле имеют место ассоциаты, состоящие примерно из двух и трех кластеров молекул, соответственно.

Таким образом, исследование статической диэлектрической поляризации растворов C_{60} в слабо полярных растворителях привело к следующим выводам:

рассмотренной в данной работе структуре молекулы фуллерена в растворе в толуоле соответствует дипольный момент, равный приблизительно 1 Д;

частицы C_{60} проявляют тенденцию к ассоциированию в растворах в бензоле и ортоксилоле даже при бесконечном разбавлении.

Вопрос о причинах появления ненулевого дипольного момента у фуллеренов будет предметом дальнейших теоретических и экспериментальных исследований электронной структуры молекул фуллеренов и влияния на эту структуру внешних ориентирующих полей, природы растворителей, влияния кислорода [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Соколов, В.И.** Фуллерены – новые аллотропные формы углерода: структура, электронное строение и химические свойства [Текст] / В.И. Соколов, И.В. Станкевич // Успехи химии. – 1993. – Т. 62. – Вып. 5. – С. 455 – 473.

2. **Елецкий, А.В.** Новые направления в исследованиях фуллеренов [Текст] / А.В. Елецкий // УФН. – 1994. – Т. 164. – Вып. 9. – С. 1007 – 1009.

3. **Елецкий, А.В.** Фуллерены и структуры углерода [Текст] / А.В. Елецкий, Б.М. Смирнов / / УФН. – 1995. – Т. 165. – Вып. 9. – С. 977 – 1009.

4. **Золотухин, И.В.** Фуллерит – новая форма углерода [Текст] / И.В. Золотухин // Соросовский образовательный журнал. – 1996. – № 2. – С. 51 – 56.

5. **Мастеров, В.Ф.** Физические свойства фуллеренов [Текст] / В.Ф. Мастеров // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 1. – С. 92 –96 .

6. **Jarkov, S.M.** Electron microscopy studies off FCC carbon particles [Text] / S.M. Jarkov, Ya.N. Titarenko, G.N. Churilov // Carbon. – 1998. – Vol. 36. – № 5. – P. 595 –597.

7. **Рожкова, Н.Н.** Наноуглерод шунгитов [Текст] / Н.Н. Рожкова. – Петрозаводск: Карельский научный центр РАН, 2011. – 100 с.

8. **Горелик, О.П.** Кластерная структура фуллеренсодержащей сажи и порошка фуллеренов C_{60} [Текст] / О.П. Горелик, Г.А. Дюжев, Д.В. Новиков [и др.] // ЖТФ. – 2000. – Т. 70. – Вып. 11. – С.118 – 125.

9. **Степанова, Т.П.** Дипольный момент и взаимная ориентация мезогенных фрагментов в линейном жидкокристаллическом полиэфире в растворе [Текст] / Т.П. Степанова, А.А. Меркурьева, В.В. Зуев [и др.] // Высокомолек.соед. А. – 1992. – Т. 34. – № 10. – С. 31 – 44.

10. **Halverstadt, J.** Solvent polarization error and its elimination in calculating dipole moments [Text] / J. Halverstadt, W. Kumler // Journal of American Chemical Society. – 1942. – Vol. 64. – № 12. – P. 2988 – 2992.

11. **Волькенштейн, М.В.** Строение и физические свойства молекул [Текст] / М.В. Волькенштейн. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 638 с.

12. **B ttcher, C.J.F.** Theory of electric polarization [Text]: 2nd ed. – Vol. 1 (Dielectric in static fields) / C.J.F. B ttcher. – Amsterdam: Elsevier, 1973. – 377 p.

13. **Вайсбергер, А.** Органические растворители [Текст] / А. Вайсбергер, Э. Проскауэр, Дж. Риддик [и др.] – М.: Изд-во ИЛ, 1958. – 519 с.

14. **Pevzner, B.** Role of molecular oxygen and other impurities in the electrical transport and dielectric properties of C60 films [Text] / B. Pevzner, A.F. Hebard, M.S. Dresselhaus // J. Phys. Rev. B. – 1997. – Vol. 55. – P. 16439 –16449.

ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.125.17; 539.126.17

А.Я. Бердников, Д.А. Иванищев, Д.О. Котов, В.Г. Рябов, Ю.Г. Рябов, В.М. Самсонов

ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРИЗНАКОВ ОБРАЗОВАНИЯ КВАРК-ГЛЮОННОЙ ПЛАЗМЫ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ ПРИ ЭНЕРГИИ 62,4 ГэВ

Взаимодействия тяжелых релятивистских ионов являются одним из методов получения сверхплотного ядерного вещества в лабораторных условиях. Кинетическая энергия налетающих частиц рассеивается в большом объеме ядерного вещества, вовлеченного в реакцию, и взаимодействующая система переходит из состояния нуклонов, содержащих связанные кварки и глюоны, в состояние свободных кварков и глюонов, которое называют кварк-глюонной плазмой (КГП) [1]. Одна из основных задач – это поиск признаков, которые были бы присущи только кварк-глюонной плазме, чтобы это новое состояние вещества можно было выделить из «обычной физики» релятивистских соударений.

Особое положение среди наблюдаемых признаков образования КГП занимают дилептоны – коррелированные пары разнозаряженных лептонов (электронов и мюонов). Лептоны не участвуют в сильных взаимодействиях. Длина их свободного пробега в ядерном веществе значительно превышает характерные размеры системы, формируемой в столкновениях тяжелых ядер и, как следствие, их кинематические характеристики не искажаются окружающей средой.

Лептонные пары, рожденные на стадии КГП, образуются в результате аннигиляции кварков и антикварков, поэтому они чувствительны к тепловому распределению кварков и антикварков в плазме [2]. Анализ выхода лептонных пар несет ценную информацию о признаках восстановления киральной симметрии и осуществляется через измерение модификаций масс, ширин, вероятностей рождения легких ρ-, ω-, и φ-мезонов (так называемая область дилептонов малых масс) [2]. Свойства КГП в столкновениях релятивистских тяжелых ядер также изучаются в области дилептонов средних и больших масс путем измерения выходов J/ψ- и Y-мезонов, подавление которых считается одним из признаков образования КГП [3].

Первые экспериментальные данные по рождению дилептонных пар были получены в конце 1980-х гг. на установке DLS (Dilepton Spectrometer, Беркли, США) [4]. Данные, представленные коллаборацией DLS, указывали на значительное превышение выхода дилептонов малых масс по сравнению с ожидаемым выходом пар от Далиц-распадов π^0- и η-мезонов. Эти результаты послужили мотивацией для изучения дилептонного спектра при более высоких энергиях взаимодействия ядер. В 2000 году результаты, полученные коллаборацией CERES (ЦЕРН, Швейцария), подтвердили наличие избытка выхода дилептонов малых масс во взаимодействиях тяжелых ядер [5]. В то же время дилептонный спектр, который был измерен спектрометром CERES в протон-ядерных столкновениях, согласуется с ожидаемым от адронных распадов. Данное наблюдение позволило сделать вывод о том, что наблюдаемый избыток представляет собой явление, присущее только ядро-ядерным столкновениям.

ФЕНИКС [6] является единственным экспериментом на коллайдере RHIC [7], который может проводить высокоточные измерения выходов дилептонных пар. В 2007 году избыточный выход дилептонных пар был обнаружен во взаимодействиях ядер золота при энергии 200 ГэВ [2]. Но в первоначальной конфигурации спектрометра ФЕНИКС возможности по измерению выходов лептонных пар были ограничены из-за значительного вклада фонового излучения от конверсий гамма-квантов и Далиц-распадов π^0-мезонов. Достаточно упомянуть, что отношение сигнала к фону в первом измерении диэлектронного спектра во взаимодействиях ядер золота при энергии 200 ГэВ составляло 1/200 в области дилептонов малых масс. С целью расширить возможности по измерению выходов дилептонных пар, в 2010 году в экспериментальную установку ФЕНИКС была интегрирована дополнительная детекторная подсистема нового поколения – HBD (Hadron Blind Detector) [8, 9], основной задачей которой является отсев электронов, возникших в результате конверсий фотонов и Далиц-распадов, основываясь на величине угла раскрытия пары лептонов.

В настоящей статье представлен диэлектронный спектр, полученный во взаимодействиях ядер золота при энергии 62,4 ГэВ в эксперименте ФЕНИКС на коллайдере RHIC. Для повышения точности и статистической значимости измерений в работе использовались данные, накопленные детекторной системой нового поколения HBD в течение физического цикла 2010 года.

Детектор HBD на установке ФЕНИКС

Установка ФЕНИКС детально описана в статье [6]. Для улучшения измерений, связанных с регистрацией электронов, в спектрометр ФЕНИКС был интегрирован новый детектор – HBD (Hadron Blind Detector) [8, 9], который предназначен для существенного уменьшения комбинаторного фона [10]. Этот детектор расположен вне области действия магнитного поля и регистрирует электроны/позитроны на своем внешнем диаметре. Тем самым появляется возможность отбрасывать электрон-позитронные пары, имеющие небольшой угол разлета, как наиболее вероятные кандидаты в примеси от конверсии и Далиц-распадов. Считается, что наличие данного детектора позволит улучшить в несколько раз соотношение сигнал/фон для диэлектронных измерений в столкновениях ядер золота.

HBD представляет собой детектор черенковского света, в котором в качестве радиатора и рабочего газа используется тетрафторид углерода. Детектор состоит из двух полуцилиндрических объемов, заполненных газом (рис. 1, *а*), каждый из которых охватывает сектор в 135 по азимутальному углу и 45 ед. по псевдобыстроте. В конструкции детектора не предусмотрено окон или зеркал, и черенковский свет создает изображение прямо на фотокатоде (вдоль траектории движения частицы). Последний представляет собой трехслойный газовый электронный умножитель GEM [9]. На его верхний слой методом напыления нанесен слой иодида цезия. Три слоя GEM-детекторов

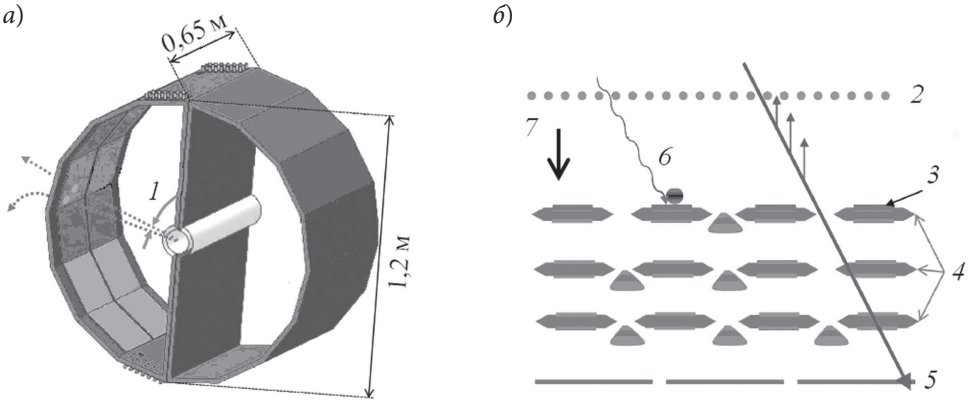


Рис. 1. Конструкция (*а*) и принцип работы (*б*) детектора HBD:
1 – угол раскрытия электрон-позитронной пары; *2* – сетка; *3* – слой CsI (350 нм); *4* – GEM; *5* – пады; *6* – фотоэлектрон; *7* – вектор напряженности электрического поля

(*4*) обеспечивают газовое усиление, а считывание сигналов производится с гексагональных падов (*5*) площадью 6,2 см^2. Детектор состоит из 20 однотипных модулей.

Адроны с импульсом, меньшим 10 ГэВ/*c*, не излучают черенковского света, проходя через активный объем детектора. Электроны ионизации, возникающие при прохождении адронов, дрейфуют в сторону, противоположную катоду. Для этого в активном объеме детектора создается соответствующее распределение электрического поля с помощью специальной сетки (*2*) (рис. 1, *б*). Поэтому детектор практически «не видит» адронов, что и получило отражение в его названии (*blind* – слепой).

Результаты

На рис. 2 представлен спектр инвариантной массы электрон-позитронных пар (за вычетом комбинаторного фона), измеренный с помощью данных детектора HBD. Форма указанного фона была оценена методом смешивания событий [10], а качество его воспроизведения определялось путем сравнения спектров инвариантной массы, измеренных для пар «++» и «– –» в реальных и смешанных событиях. Как можно видеть из рис. 2, в спектре инвариантной массы электрон-позитронных пар пока не удается выделить пики, соответствующие распаду ω-, ρ- и φ-мезонов. В области масс ~ 3,1 ГэВ/c^2 виден широкий пик, соответствующий распадам J/ψ-мезонов.

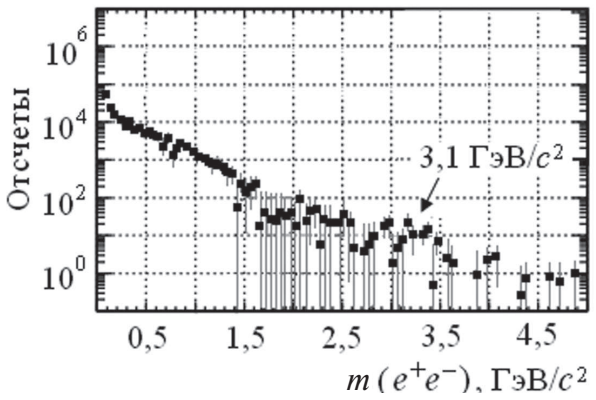


Рис. 2. Спектр инвариантной массы электрон-позитронных пар, измеренный с помощью данных детектора HBD эксперимента ФЕНИКС во взаимодействиях ядер золота при энергии 62,4 ГэВ. Вертикальные отрезки соответствуют статистическим ошибкам измерений

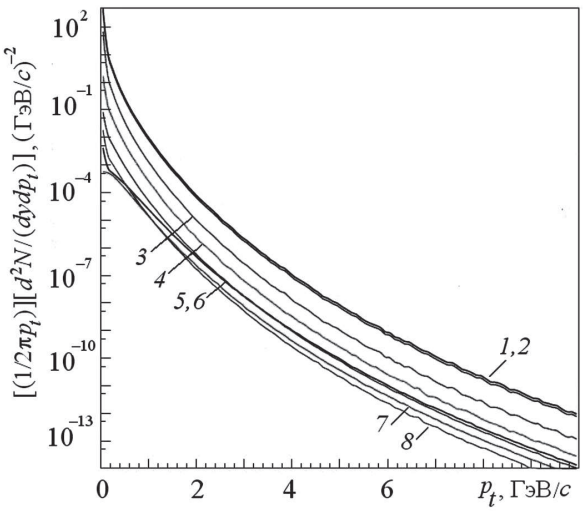


Рис. 3. Оцененные вклады в «коктейль» электрон-позитронных пар: сумма всех вкладов (*1*), вклад от электронов конверсии (*2*), лептонные распады мезонов π^0 (*3*), η (*4*), ω (*5*), η' (*6*), φ (*7*), ρ (*8*)

Для поиска различных сигналов, связанных с возникновением коллективных ядерных эффектов, необходимо из полученного спектра инвариантной массы электрон-позитронных пар вычесть вклады от известных источников. Теоретически рассчитанный спектр инвариантной массы диэлектронных пар от известных источников называется коктейлем.

К настоящему моменту была проведена оценка вкладов в коктейль от распада легких мезонов и конверсии фотонов (рис. 3). Для корректного построения коктейля необходимо также учесть вклады от некоторых других источников (таких например, как вклад от каонных распадов, от конверсии прямых фотонов или фотонов, родившихся в столкновениях ядер золота, и т. п.), которые находятся в процессе оценки.

В настоящей статье представлен дилептонный спектр, измеренный во взаимодействиях ядер золота при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 62,4 ГэВ в эксперименте ФЕНИКС с помощью детекторной системы нового поколения HBD.

Точность измерения континуума в области масс, меньших массы ω-, ρ- мезонов, по-видимому, достаточна для изучения эффекта избыточного выхода мягких пар в области малых масс. Однозначный ответ будет полу-

чен только после окончания расчета коктейля электрон-позитронных пар и его вычитания из измеренного спектра. Существенное улучшение точности измерений ожидается в результате имплементации дополнительного отбора электрон-позитронных пар с использованием данных детектора HBD.

Работа поддержана в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Adcox, K.** Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration [Text] / K. Adcox, V. Riabov, Y. Riabov, Y. Berdnikov [et al.] // Nucl. Phys. A. – 2005. – Vol. 757. – P. 184–283.

2. **Adare, A.** Detailed measurement of the e^+e^- pair continuum in $p+p$ and Au+Au collisions at 200 GeV and implications for direct photon production [Text] / A. Adare, V. Riabov, Y. Riabov, Y. Berdnikov // Phys. Rev. C. – 2010. – Vol. 81. – P. 034911–034967.

3. **Matsui, T.** J/Psi suppression by quark-gluon plasma formation [Text] /T. Matsui, H. Satz // Phys. Lett. B. – 1986. – Vol. 178. – P. 416–422.

4. **Porter, R.** Dielectron cross section measurements in nucleus nucleus reactions at 1.0–A–GeV [Text] / R. Porter, J. Caroll, P. Kirk [et al.] //Phys. Rev. Lett. – 1997. –Vol. 79. – P. 1229–1232.

5. **Agakichiev, G.** Systematic study of low-mass electron pair production in p-Be and p-Au collisions at 450 GeV [Text] / G. Agakichiev, M. Appenheimer // Eur. Phys. J. C.–1998.–Vol. 4. – P. 231–247.

6. **Adcox, K.** PHENIX detector overview [Text] / K. Adcox, V. Riabov, Y. Berdnikov [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A.–2003.–Vol. 499. – P. 469–479.

7. **Baym, G.** RHIC: From dreams to beams in two decades [Text] / G. Baym // Nucl. Phys. A. – 2002. – Vol. 698. – P. 23–32.

8. **Makek, M.** Measurements of low mass e^+e^- pairs in $p+p$ and Au+Au collisions with the HBD upgrade of the PHENIX detector [Text] / M. Makek // Nuclear Physics A. –2011. –Vol. 855. –P. 265–268.

9. **Kozlov, A.** Development of a triple GEM UV-photon detector operated in pure CF4 for the PHENIX experiment [Text] / A. Kozlov, I. Tserruya, I. Ravinovich, [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. A.– 2004.–Vol. 523. – P. 345–354.

10. **Kopylov, G.I.** Like particle correlations as a tool to study the multiple production mechanism [Text] / G.I. Kopylov // Phys. Lett. B.–1974.–Vol. 50. – P. 472–474.

УДК 539.128.2, 539.171.016

Ф.Ф. Павлов

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА ДЕЙТРОНА В ПЕРЕМЕННЫХ СВЕТОВОГО КОНУСА

Одним из наиболее важных вопросов современной физики элементарных частиц и атомного ядра является развитие методов релятивистского описания дейтрона как составной системы. Наиболее актуальным вопросом является изучение релятивистских явлений в электромагнитной структуре дейтрона и построение оператора электромагнитного тока релятивистского дейтрона, удовлетворяющего условию Лоренц-инвариантности и дискретным симметриям P и T. Для изучения данных явлений обычно проводятся эксперименты по упругому электрон-дейтронному рассеянию при больших переданных импульсах. Как известно, электромагнитные форм-факторы дейтрона (зарядовый, квадрупольный и магнитный) выражаются через матричные элементы электромагнитного тока дейтрона. Зная форм-

факторы дейтрона, можно оценить релятивистские поправки к магнитному и квадрупольному моментам дейтрона, зарядовому радиусу.

Целью данной работы является расчет матричных элементов плюсового компонента электромагнитного тока дейтрона в переменных светового конуса (судаковских переменных) и исследование поведения матричных элементов в зависимости от величины квадрата переданного импульса.

Для достижения результата используются развитые ранее методы релятивистской теории поля в переменных светового конуса. В данной работе волновая функция дейтрона будет аппроксимироваться только протон-нейтронным фоковским состоянием и дейтрон будет представляться как суперпозиция двухнуклонных фоковских состояний с инвариантной массой, зависящей от относительного импульса нуклонов.

Амплитуда однократного электрон-дейтронного рассеяния

Рассмотрим треугольную фейнмановскую диаграмму процесса однократного электрон-дейтронного рассеяния, в которой показана вершина поглощения дейтроном D виртуального фотона с импульсом Q (рис. 1).

Используя принципы написания дисперсионных интегралов и стандартные правила Фейнмана, вершинную часть амплитуды процесса, соответствующего рис. 1, в импульсном приближении можно представить в виде интеграла по 4-импульсу нуклона-спектатора [1 – 4]:

$$F_k = (-1)\int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4 i} \frac{\mathrm{Sp}\left\{i\left(\Gamma_\beta V_\beta^{(\rho)}\right)\times \right.}{(p_3^2 - m^2 + i\varepsilon)\times}$$

$$\frac{\times i\left(-\hat{p}_3 + m\right)\cdot i\left(\tilde{\Gamma}_\alpha^* \tilde{V}_\alpha^{(\rho')*}\right)\times}{\times (p_2^2 - m^2 + i\varepsilon)\times} \qquad (1)$$

$$\frac{\left. \times i(\hat{p}_2 + m)\cdot iO_k \cdot i(\hat{p}_1 + m)\right\}}{\times (p_1^2 - m^2 + i\varepsilon)},$$

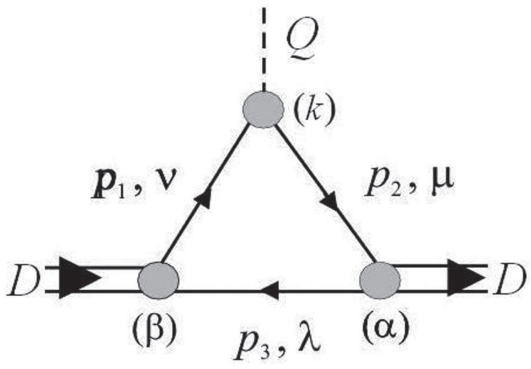


Рис. 1. Фейнмановская диаграмма для дейтрона

где p_1, p_2 – 4-векторы импульсов протонов; интегрирование ведется по 4-вектору импульса нейтрона p_3, где контур интегрирования замкнут вокруг полюса нейтронного пропагатора (массы всех нуклонов равны m); под импульсом со «шляпкой» подразумевается выражение $\hat{p} = p_\mu \gamma_\mu$ (γ_μ – 4-матрицы Дирака); Γ_β – полная вершинная функция распада дейтрона на конституенты в начальном состоянии, а $\tilde{\Gamma}_\alpha$ – полная вершинная функция дейтрона в конечном состоянии; $V_\beta^{(\rho)}$ и $\tilde{V}_\alpha^{(\rho')}$ – 4-векторы поляризаций дейтрона в начальном и конечном состояниях; $\rho = \pm 1,\ 0$ – спиральность дейтрона; по дважды повторяющимся тензорным индексам α и β всегда подразумевается суммирование. Вершина взаимодействия нуклонов с фотоном O_k имеет вид

$$O_k = F_1^S(Q^2)\gamma_k + \frac{F_2^S(Q^2)}{2m} i\sigma_{k\nu} Q_\nu, \qquad (2)$$

где Q_ν – 4-вектор импульса виртуального фотона; $F_1^S(Q^2)$, $F_2^S(Q^2)$ – изоскалярные электромагнитные форм-факторы нуклона Дирака и Паули, соответственно, причем $F_1^S(0) = 1$ и $F_2^S(0) = -0{,}12$, $\sigma_{k\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_k \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_k)$.

Двухчастичное состояние в переменных светового конуса

При высоких энергиях удобно использовать параметризацию для 4-импульсов в переменных светового конуса. Современная техника светового конуса, берущая начало в работе В.В. Судакова [5], подробно рассмотрена в работах [2 – 8]. Напомним, что в формализме светового конуса любой 4-вектор имеет компоненты

$$a_\mu = (a_+,\ a_-,\ \mathbf{a}_\perp), \qquad (3)$$

где

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 \pm a_3), \qquad (4)$$

а поперечный компонент $\mathbf{a}_\perp = (a_1,\ a_2)$ лежит в плоскости (x, y). Для упрощения формул часто будем опускать 4-тензорный индекс над 4-векторами. Скалярное произведение имеет вид

$$ab = a_+ b_- + a_- b_+ - \mathbf{a}_\perp \mathbf{b}_\perp . \qquad (5)$$

Для частицы на массовой поверхности квадрат 4-вектора импульса равен

$$p^2 = m^2 = 2p_+ p_- - \mathbf{p}_\perp^2 \qquad (6)$$

и минусовый компонент 4-вектора импульса равен

$$p_- = \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{2p_+} . \qquad (7)$$

В представлении светового конуса будут использоваться γ -матрицы Дирака:

$$\gamma_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0 \pm \gamma_3) . \qquad (8)$$

Рассмотрим двухчастичное состояние в переменных светового конуса с внутренними 4-импульсами p_1 и p_3 (см. рис. 1). Так как полный 4-импульс такого двухчастичного состояния равен

$$P = p_1 + p_3 ,$$

то удобно ввести $z = p_{1+} / P_+$ и $1 - z = p_{3+} / P_+$ – доли импульса системы, которые несут частицы 1 и 3.

Квадрат инвариантной массы такой системы следует выражению

$$M^2 = P^2 = (p_1 + p_3)^2 = \\ = \frac{m_1^2 + \mathbf{p}_{1\perp}^2}{z} + \frac{m_3^2 + \mathbf{p}_{3\perp}^2}{1-z} - (\mathbf{p}_{1\perp} + \mathbf{p}_{3\perp})^2 . \qquad (9)$$

Определим относительный поперечный импульс $\mathbf{k}$ для двух начальных нуклонов соотношениями

$$\mathbf{p}_{1\perp} = \mathbf{k} + z\mathbf{P}_\perp ; \qquad (10)$$

$$\mathbf{p}_{3\perp} = -\mathbf{k} + (1-z)\mathbf{P}_\perp . \qquad (11)$$

Из соотношений (9) – (11) при $m_1 = m_3 = m$ следует, что

$$M^2 = \frac{\mathbf{k}^2 + m^2}{z(1-z)} . \qquad (12)$$

В данной работе дейтрон будет рассматриваться как суперпозиция двухнуклонных фоковских состояний с инвариантной массой M, зависящей от относительного импульса конституэнтов.

4-вектор импульса двухнуклонных фоковских состояний с инвариантной массой M в переменных светового конуса имеет компоненты

$$P = (P_+, P_-, \mathbf{P}_\perp) = \left(P_+, \frac{M^2 + \mathbf{P}_\perp^2}{2P_+}, \mathbf{P}_\perp \right). \qquad (13)$$

Спиральные состояния для двухнуклонных фоковских состояний с инвариантной массой M в переменных светового конуса будут описываться продольным ($\rho = 0$) 4-вектором поляризации [4, 6, 7]:

$$V^{(\rho=0)} = \frac{1}{M}\left(P_+,\ \frac{-M^2 + \mathbf{P}_\perp^2}{2P_+},\ \mathbf{P}_\perp \right) \qquad (14)$$

и поперечным ($\rho = \pm 1$) 4-вектором поляризации в переменных светового конуса [4, 6, 7]:

$$V^{(\rho=\pm1)} = \left(0,\ \frac{\left(\mathbf{P}_\perp \cdot \mathbf{e}^{(\rho=\pm1)}\right)}{P_+},\ \mathbf{e}^{(\rho=\pm1)} \right), \qquad (15)$$

где поперечные циркулярные орты имеют привычный вид

$$\mathbf{e}^{(\rho=\pm1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2\right),$$

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – единичные орты вдоль осей x и y, соответственно.

Подчеркнем, что в формуле (14) $M \neq M_D$. В релятивизме вектор поляризации продольного состояния неизбежно зависит от инвариантной массы протон-нейтронной пары (12). Такой «бегущий» продольный вектор поляризации в ранних оценках релятивистских эффектов не использовался.

Система отсчета Брейта

При рассмотрении различных задач рассеяния удобно пользоваться системой отсчета с

нулевой передачей энергии или системой Брейта, в которой плюсовые компоненты 4-импульса не меняются до и после рассеяния, а поперечные импульсы равны по значению и противоположны по направлению. В такой системе поперечные импульсы протон-нейтронной пары в начальном и конечном состояниях выбираются в виде $\mathbf{P}_\perp = -\mathbf{Q}/2$ и $\tilde{\mathbf{P}}_\perp = \mathbf{Q}/2$ соответственно, и плюсовые компоненты не меняются: $P_+ = \tilde{P}_+$. Тогда плюсовый компонент переданного 4-импульса Q будет равен $Q_+ = \tilde{P}_+ - P_+ = 0$, а поперечные компоненты $\mathbf{Q} = \left(Q_x,\ Q_y\right)$ выберем в виде $Q_x = Q$, $Q_y = 0$, то есть направим $\mathbf{Q}$ вдоль оси x.

Тогда с учетом соотношений (10), (11) получим удобное представление для 4-векторов импульсов нуклонов в начальном состоянии p_1 и p_3 на массовой поверхности:

$$p_1 = \left(zP_+,\ \frac{m^2 + \left(\mathbf{k} - z\mathbf{Q}/2\right)^2}{2zP_+},\ \mathbf{k} - z\frac{\mathbf{Q}}{2} \right); \tag{16}$$

$$p_3 = \left(\left(1-z\right)P_+,\ \frac{m^2 + \left(-\mathbf{k} - \left(1-z\right)\mathbf{Q}/2\right)^2}{2\left(1-z\right)P_+},\ -\mathbf{k} - \left(1-z\right)\frac{\mathbf{Q}}{2} \right), \tag{17}$$

причем квадрат инвариантной массы начальной пары нуклонов с 4-векторами импульсов p_1 и p_3 на массовой поверхности имеет вид

$$M^2 = \left(p_1 + p_3\right)^2 = \frac{\mathbf{k}^2 + m^2}{z\left(1-z\right)}. \tag{18}$$

Для 4-векторов импульсов в конечном состоянии p_2 и p_3:

$$p_2 = \left(zP_+,\ \frac{m^2 + \left(\boldsymbol{\kappa} + z\mathbf{Q}/2\right)^2}{2zP_+},\ \boldsymbol{\kappa} + z\frac{\mathbf{Q}}{2} \right); \tag{19}$$

$$p_3 = \left(\left(1-z\right)P_+,\ \frac{m^2 + \left(-\boldsymbol{\kappa} + \left(1-z\right)\mathbf{Q}/2\right)^2}{2\left(1-z\right)P_+},\ -\boldsymbol{\kappa} + \left(1-z\right)\frac{\mathbf{Q}}{2} \right), \tag{20}$$

где относительный поперечный импульс $\boldsymbol{\kappa}$ для конечного состояния двух нуклонов равен

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} &= \mathbf{k} + \left(1-z\right)\mathbf{Q}; \\ \kappa_x &= k_x + \left(1-z\right)Q; \\ \kappa_y &= k_y, \end{aligned} \tag{21}$$

причем квадрат инвариантной массы конечной пары нуклонов с 4-импульсами p_2 и p_3 на массовой поверхности будет иметь вид

$$\tilde{M}^2 = \left(p_2 + p_3\right)^2 = \frac{\boldsymbol{\kappa}^2 + m^2}{z\left(1-z\right)}. \tag{22}$$

Таким образом, начальное состояние протон-нейтронной пары с инвариантной массой M в системе Брейта будет описываться 4-вектором импульса в переменных светового конуса:

$$P = \left(P_+,\ \frac{M^2 + Q^2/4}{2P_+},\ -\frac{Q}{2},\ 0 \right); \tag{23}$$

продольным ($\rho = 0$) 4-вектором поляризации начального состояния

$$V^{(\rho=0)} = \frac{1}{M}\left(P_+,\ \frac{-M^2 + Q^2/4}{2P_+},\ -\frac{Q}{2},\ 0 \right) \tag{24}$$

и поперечным ($\rho = \pm 1$) 4-вектором поляризации начального состояния

$$V^{(\rho=\pm1)} = \left(0,\ -\frac{\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}^{(\rho=\pm1)}\right)}{2P_+},\ \mathbf{e}^{(\rho=\pm1)} \right). \tag{25}$$

Аналогично конечное состояние протон-нейтронной пары будет описываться 4-вектором импульса и 4-векторами поляризации в переменных светового конуса:

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \left(P_+,\ \tilde{P}_-,\ \tilde{\mathbf{P}}_\perp \right) = \\ &= \left(P_+,\ \frac{\tilde{M}^2 + Q^2/4}{2P_+},\ \frac{Q}{2},\ 0 \right); \end{aligned} \tag{26}$$

$$\tilde{V}^{(\rho'=0)} = \frac{1}{\tilde{M}}\left(P_+,\ \frac{-\tilde{M}^2 + Q^2/4}{2P_+},\ \frac{Q}{2},\ 0 \right); \quad (27)$$

$$\tilde{V}^{(\rho'=\pm1)} = \left(0,\ \frac{\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}^{(\rho=\pm1)}\right)}{2P_+},\ \mathbf{e}^{(\rho=\pm1)} \right). \quad (28)$$

«Волна» над буквой обозначает конечное состояние.

Соотношение между вершинной и радиальной волновыми функциями дейтрона

Полная вершинная функция перехода дейтрона в протон-нейтронную пару в начальном состоянии имеет вид [2, 4, 9, 10]:

$$\Gamma_\beta = \Gamma_\beta^S G_S(M^2) + \Gamma_\beta^D G_D(M^2), \quad (29)$$

где вершинные функции начального состояния протон-нейтронной пары с инвариантной массой M для S- и D-волновых состояний следуют выражениям [2, 4, 9, 10]:

$$\Gamma_\beta^S = \gamma_\beta - \frac{(p_1 - p_3)_\beta}{M + 2m}; \quad (30)$$

$$\Gamma_\beta^D = \frac{M^2 - 4m^2}{4}\gamma_\beta + \frac{M + m}{2}(p_1 - p_3)_\beta; \quad (31)$$

$G_{S,D}(M^2)$ – скалярные вершинные функции для S- и D-волновых состояний дейтрона, которые связаны с радиальными волновыми функциями дейтрона $\Phi_{S,D}(M^2)$ соотношением

$$\Phi_{S,D}(M^2) = \frac{G_{S,D}(M^2)}{M^2 - M_D^2}, \quad (32)$$

где $M_D = 1875{,}6$ МэВ/c^2 – масса дейтрона.

Полная вершинная функция дейтрона в конечном состоянии имеет вид

$$\tilde{\Gamma}_\alpha = \tilde{\Gamma}_\alpha^S G_S(\tilde{M}^2) + \tilde{\Gamma}_\alpha^D G_D(\tilde{M}^2), \quad (33)$$

где вершинные функции конечного состояния протон-нейтронной пары с инвариантной массой $\tilde{M}$ для S- и D-волновых состояний следуют выражениям:

$$\tilde{\Gamma}_\alpha^S = \gamma_\alpha - \frac{(p_2 - p_3)_\alpha}{\tilde{M} + 2m}; \quad (34)$$

$$\tilde{\Gamma}_\alpha^D = \frac{\tilde{M}^2 - 4m^2}{4}\gamma_\alpha + \frac{\tilde{M} + m}{2}(p_2 - p_3)_\alpha. \quad (35)$$

Условие нормировки радиальных волновых функций двухнуклонных фоковских состояний для S- и D-волн по отдельности приведены в работах [2, 4]. В нерелятивистском случае используются волновые функции дейтрона $\Psi_S(p)$ и $\Psi_D(p)$. Соответствие между радиальными волновыми функциями $\Phi_{S,D}(M^2)$ и нерелятивистскими волновыми функциями $\Psi_{S,D}(p)$ будет иметь следующий вид [2, 4]:

$$\Phi_S(M^2) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2M}}\Psi_S(p); \quad (36)$$

$$\Phi_D(M^2) = \sqrt{\frac{\pi^2}{4M\mathbf{p}^4}}\Psi_D(p). \quad (37)$$

В качестве нерелятивистских волновых функций $\Psi_{S,D}$ можно использовать ряд современных реалистических волновых функций, например CD-боннскую (CD-Bonn) [11], полную боннскую (Full Bonn) [12] и парижскую (Paris) [13]. Для таких нерелятивистских волновых функций дейтрона обычно используется параметризация вида

$$\Psi(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_i \frac{C_i}{\mathbf{p}^2 + m_i^2}, \quad (38)$$

где $\mathbf{p}$ – относительный 3-импульс двух нуклонов в дейтроне; параметры C_i и m_i приводятся в работах [11 – 13].

На рис. 2 представлены зависимости CD-боннской, полной боннской и парижской волновых функций дейтрона от относительного импульса p.

Видно, что при большом относительном импульсе p протона и нейтрона в дейтроне волновые функции D-волновых состояний дейтрона сравнимы по величине с волновыми функциями S-волновых состояний; последние проходят через нуль при $p \approx 400 - 450$ МэВ (в единицах $c = 1$). Поэтому область релятивистских импульсов, где доминирует D-волновое состояние дейтрона, представляет особый интерес.

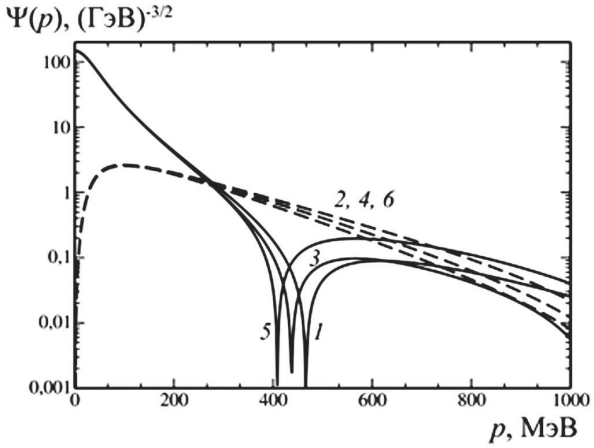


Рис. 2. Зависимость от величины относительного импульса p составляющих волновой функции дейтрона: S-(*1*), D-(*2*) волновых состояний CD-боннской волновой функции; S-(*3*), D-(*4*) волновых состояний полной боннской волновой функции; S-(*5*), D-(*6*) волновых состояний парижской волновой функции

Параметризация электромагнитных форм-факторов нуклона

Как известно, изоскалярные электромагнитные форм-факторы нуклона Дирака и Паули $F_1^S(Q^2)$ и $F_2^S(Q^2)$ связаны с электрическим и магнитным форм-факторами Сакса G_E и G_M следующим образом:

$$F_1 = \frac{1}{1+\eta}\left(G_E + \eta G_M\right); \qquad (39)$$

$$F_2 = \frac{1}{1+\eta}\left(G_M - G_E\right), \qquad (40)$$

где форм-факторы Сакса G_E и G_M равны сумме форм-факторов протона и нейтрона:

$$G_{E,M} = G_{E,M}^p + G_{E,M}^n. \qquad (41)$$

В данной работе для форм-факторов нейтрона будет использоваться следующая параметризация [14]:

$$G_E^n = -\mu_n \eta G_{dip} \frac{a}{1+b\eta}; \qquad (42)$$

$$G_M^n = \mu_n G_{dip}, \qquad (43)$$

где $\eta = Q^2/2m^2$; $a = 0{,}888$; $b = 3{,}21$; $\mu_n = -1{,}91$ – магнитный момент нейтрона (в ядерных магнетонах);

$$G_{dip} = \left(1 + \frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{-2}, \ \Lambda^2 = 0{,}71\ (\text{ГэВ}/c)^2.$$

Для форм-факторов протона будет использоваться параметризация

$$G_E^p = G_{dip}[1 - 0{,}13(Q^2 - 0{,}04)]; \qquad (44)$$

$$G_M^p = \mu_p G_{dip}, \qquad (45)$$

где $\mu_p = 2{,}79$ – магнитный момент протона (в ядерных магнетонах).

Матричные элементы плюсового компонента электромагнитного тока дейтрона

Как было показано в работах [15 – 19], использование плюсового компонента электромагнитного тока дейтрона J_+ в системе бесконечного импульса в специальной системе Брейта ($Q_+ = 0$) дает правильное пространственно-временное описание релятивистских эффектов (невозможность рождения пар из вакуума и подавление вкладов так называемых Z-диаграмм).

Вычисление шпура в амплитуде (1) подробно рассматривается в работах [2, 3]. Не повторяя все этапы расчета однопетлевого интеграла, матричный элемент плюсового компонента дейтронного тока $\langle \rho' | J_+ | \rho \rangle = F_+$ в переменных светового конуса можно свести к следующему виду:

$$\langle \rho' | J_+ | \rho \rangle = F_+ = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{dz d^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)} \times$$
$$\times \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\bar{v}(p_3,\lambda)\tilde{\Gamma}_\alpha^* \tilde{V}_\alpha^{(\rho')*} u(p_2,\mu)}{\tilde{M}^2 - M_D^2} \times \qquad (46)$$
$$\times \left[\bar{u}(p_2,\mu) O_+ u(p_1,\nu)\right] \times$$
$$\times \frac{\bar{u}(p_1,\nu)\Gamma_\beta V_\beta^{(\rho)} v(p_3,\lambda)}{M^2 - M_D^2},$$

где $\nu = \pm 1$, $\mu = \pm 1$ – удвоенные спиральности протонов; $\lambda = \pm 1$ – удвоенная спиральность нейтрона; напомним, что под дважды повторяющимся индексом подразумевается суммирование и «волна» над буквой обозначает конечное состояние; $u(p_1,\nu)$ – спинор начального

протона с импульсом p_1 и спиральностью $s = \nu/2$, $\nu = \pm 1$ (входящий фермион с точки зрения фейнмановской диаграммы) [2, 4, 7, 8]; $\bar{u}(p_2, \mu)$ – спинор конечного протона с импульсом p_2 и спиральностью $s = \mu/2$, $\mu = \pm 1$ (выходящий фермион с точки зрения фейнмановской диаграммы); $\mathbf{v}(p_3, \lambda)$ – спинор нейтрона (выходящий антифермион с точки зрения фейнмановской диаграммы) с импульсом $-p_3$ и спиральностью $-s = -\lambda/2$, $\lambda = \pm 1$ [2, 4, 7, 8].

Формула (46) допускает простую квантовомеханическую интерпретацию: дейтрон в спиновом состоянии, описываемый вектором поляризации $V_\beta^{(\rho)}$ со спиральностью ρ, представляется как система протон-нейтрон со спиральностями ν и λ; после рассеяния система протон-нейтрон проецируется на дейтрон в спиновом состоянии, описываемом вектором поляризации $V_\alpha^{(\rho')}$, со спиральностью ρ'; по всем промежуточным спиральностям ν, λ идет суммирование, и оно по спиральностям заменяет вычисление фейнмановских следов. Другими словами, мы рассматриваем переход составной системы с массой M в составную систему с массой $\tilde{M}$. Следует отметить, что спиноры в формализме светового конуса отличаются от привычных спиноров Дирака только спиновым вращением, которое есть известное преобразование Вигнера – Мелоша [4, 20].

Плюсовый компонент вершины (2) имеет вид

$$O_+ = F_1\gamma_+ + \frac{F_2}{2m} i\sigma_{+\nu} Q_\nu . \qquad (47)$$

Матричные элементы электрон-дейтронного рассеяния (46) в зависимости от спиральных состояний поляризаций дейтрона в начальном ($\rho = \pm 1, 0$) и конечном ($\rho' = \pm 1, 0$) состояниях (для *S*-, *D*- и *SD*- интерференционного волновых частей) после элементарного, хотя и довольно громоздкого вычисления, будут иметь весьма компактный аналитический вид, который будет приведен ниже.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{4}M^2 - m^2 ;\ \mathbf{s}^2 = \frac{1}{4}\tilde{M}^2 - m^2 ;$$

$$M_1 = M + 2m ;\ M_2 = \tilde{M} + 2m . \qquad (48)$$

$$\left\langle +1 \middle| J_+ \middle| +1 \right\rangle_S =$$

$$= \frac{P_+}{(2\pi)^3}\int \frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2 M_1 M_2}\Phi_S^*(\tilde{M}^2)\Phi_S(M^2)\times$$

$$\times\Big(F_1\Big\{M_1M_2[(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})+2m^2]+2mM_2\mathbf{k}^2+$$

$$+2mM_1\boldsymbol{\kappa}^2+4(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})^2+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})(1-2z)^2 M\tilde{M}\Big\}+ \qquad (49)$$

$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{2[(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})+m^2](1-2z)(\kappa_x M - k_x\tilde{M})-$$

$$-2(1-z)Qk_y^2(M_1+M_2)-$$

$$-2(1-z)^2QmM_1M_2+4(1-z)(1-2z)Qm^3\Big\}\Big);$$

$$\left\langle +1 \middle| J_+ \middle| +1 \right\rangle_D =$$

$$= \frac{P_+}{(2\pi)^3}\int \frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2}\Phi_D^*(\tilde{M}^2)\Phi_D(M^2)\times$$

$$\times\Big(F_1\Big\{2m^2\mathbf{p}^2\mathbf{s}^2 - m(M+m)\mathbf{s}^2\mathbf{k}^2 -$$

$$-m(\tilde{M}+m)\mathbf{p}^2\boldsymbol{\kappa}^2+$$

$$+(M+m)(\tilde{M}+m)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})^2+$$

$$+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})\Big\{\mathbf{s}^2\mathbf{p}^2+(1-2z)^2\Big[\mathbf{s}^2\mathbf{p}^2+$$

$$+(M+m)m\mathbf{s}^2+(\tilde{M}+m)m\mathbf{p}^2+$$

$$+m^2(M+m)(\tilde{M}+m)\Big]\Big\}\Big\}+ \qquad (50)$$

$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{-m\mathbf{p}^2\Big[2\mathbf{s}^2(1-z)+$$

$$+(\tilde{M}+m)m(1-2z)\Big]\kappa_x+$$

$$+m\mathbf{s}^2[2\mathbf{p}^2(1-z)+(M+m)m(1-2z)]k_x+$$

$$+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})(1-2z)\Big\{(M+m)[\mathbf{s}^2+(\tilde{M}+m)m]k_x-$$

$$-(\tilde{M}+m)[\mathbf{p}^2+(M+m)m]\kappa_x\Big\}+$$

$$+k_y^2(1-z)Q[\mathbf{s}^2(M+m)+\mathbf{p}^2(\tilde{M}+m)]\Big\}\Big);$$

$$\left\langle +1 \middle| J_+ \middle| +1 \right\rangle_{SD} =$$

$$= \frac{P_+}{(2\pi)^3}\int \frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2 M_2}\Phi_S^*(\tilde{M}^2)\Phi_D(M^2)\times$$

$$\times\Big(F_1\Big\{2m^2M_2\mathbf{p}^2 - mM_2(M+m)\mathbf{k}^2+$$

$$+2m\boldsymbol{\kappa}^2\mathbf{p}^2-2(M+m)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})^2+$$
$$+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})\Big\{\mathbf{p}^2M_2+$$
$$+(1-2z)^2\tilde{M}[\mathbf{p}^2+(M+m)m]\Big\}\Big\}+$$
$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{-2m\mathbf{p}^2[(1-z)\tilde{M}+m]\kappa_x+$$
$$+mM_2[2\mathbf{p}^2(1-z)+(M+m)m(1-2z)]k_x+$$
$$+(1-2z)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})\Big\{(M+m)\tilde{M}k_x+$$
$$+2[\mathbf{p}^2+m(M+m)]\kappa_x\Big\}+$$
$$+k_y^2(1-z)Q[(M+m)M_2-2\mathbf{p}^2]\Big\}\Big); \qquad (51)$$

$$\big\langle+1\big|J_+\big|+1\big\rangle_{DS}=$$
$$=\frac{P_+}{(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2M_1}\Phi_D^*(\tilde{M}^2)\Phi_S(M^2)\times$$
$$\times\Big(F_1\Big\{2m^2M_1\mathbf{s}^2-mM_1(\tilde{M}+m)\boldsymbol{\kappa}^2+$$
$$+2m\mathbf{k}^2\mathbf{s}^2-2(\tilde{M}+m)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})^2+$$
$$+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})\Big\{\mathbf{s}^2M_1+$$
$$+(1-2z)^2M[\mathbf{s}^2+(\tilde{M}+m)m]\Big\}\Big\}+$$
$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{2m\mathbf{s}^2[(1-z)M+m]k_x-$$
$$-mM_1[2\mathbf{s}^2(1-z)+(\tilde{M}+m)m(1-2z)]\kappa_x-$$
$$-(1-2z)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})\Big\{(\tilde{M}+m)M\kappa_x+$$
$$+2[\mathbf{s}^2+m(\tilde{M}+m)]k_x\Big\}+$$
$$+k_y^2(1-z)Q[(\tilde{M}+m)M_1-2\mathbf{s}^2]\Big\}\Big); \qquad (52)$$

$$\big\langle+1\big|J_+\big|0\big\rangle_S=$$
$$=\frac{\sqrt{2}P_+}{(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2M_1M_2}\Phi_S^*(\tilde{M}^2)\Phi_S(M^2)\times$$
$$\times\Big(F_1\Big\{(1-2z)M\Big[-mM_2(1-z)Q+$$
$$+2\kappa_x(m^2+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})-z(1-z)M\tilde{M})\Big]\Big\}+$$
$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{M\Big[-(2z(1-z)M+m)\times$$
$$\times(mM_2+2\kappa_x^2)-k_x\kappa_x(1-2z)^2\tilde{M}+$$
$$+k_y\kappa_y(1-2z)M_2\Big]\Big\}\Big); \qquad (53)$$

$$\big\langle+1\big|J_+\big|0\big\rangle_D=$$
$$=\frac{\sqrt{2}P_+}{8(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2}\Phi_D^*(\tilde{M}^2)\Phi_D(M^2)\times$$
$$\times\Big(F_1(1-2z)\Big\{-4m\Big[M(M+m)\mathbf{s}^2k_x-$$
$$-\mathbf{p}^2\tilde{M}(\tilde{M}+4m)\kappa_x\Big]-$$
$$-(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})\Big[(M+4m)\tilde{M}(\tilde{M}+4m)k_x-$$
$$-4M(M+m)(\tilde{M}+m)\kappa_x\Big]-$$
$$-k_y^2(1-z)Q(M+4m)\tilde{M}(\tilde{M}+4m)\Big\}+$$
$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{4[4m\mathbf{p}^2-(M+4m)\mathbf{k}^2]\times$$
$$\times[m\mathbf{s}^2-(\tilde{M}+m)\boldsymbol{\kappa}^2]+$$
$$+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})(1-2z)^2M(M+m)\tilde{M}(\tilde{M}+4m)-$$
$$-8k_y^2M(1-z)\Big[2z(\tilde{M}+m)\mathbf{p}^2+$$
$$+(1-2z)(M+m)\mathbf{s}^2\Big]\Big\}\Big); \qquad (54)$$

$$\big\langle+1\big|J_+\big|0\big\rangle_{SD}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}P_+}{2(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2M_2}\Phi_S^*(\tilde{M}^2)\Phi_D(M^2)\times$$
$$\times\Big(F_1(1-2z)\Big\{-m[M(M+m)M_2k_x-$$
$$-4\mathbf{p}^2\tilde{M}\kappa_x]-$$
$$-(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})[(M+4m)\tilde{M}k_x+2M(M+m)\kappa_x]-$$

$$-k_y^2(1-z)Q(M+4m)\tilde{M}\Big\}+$$

$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{[4m\mathbf{p}^2-(M+4m)\mathbf{k}^2][mM_2+2\boldsymbol{\kappa}^2]+$$

$$+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})(1-2z)^2M(M+m)\tilde{M}+$$

$$+2k_y^2(1-z)M\big[zM(M+4m)-$$

$$-(M+m)[(1-2z)\tilde{M}+2m]\big]\Big\}\Big); \qquad (55)$$

$$\big\langle+1\big|J_+\big|0\big\rangle_{DS}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}P_+}{4(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2M_1}\Phi_D^*(\tilde{M}^2)\Phi_S(M^2)\times$$

$$\times\Big(F_1(1-2z)\big\{-m[\tilde{M}(\tilde{M}+4m)M_1\kappa_x-$$

$$-4\mathbf{s}^2Mk_x]-$$

$$-2(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})[(\tilde{M}+4m)\tilde{M}k_x+2M(\tilde{M}+m)\kappa_x]-$$

$$-2k_y^2(1-z)Q(\tilde{M}+4m)\tilde{M}\Big\}+$$

$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{4[-m\mathbf{s}^2+(\tilde{M}+m)\boldsymbol{\kappa}^2][mM_1+2\mathbf{k}^2]-$$

$$-(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})(1-2z)^2\tilde{M}(\tilde{M}+4m)M-$$

$$-8k_y^2(1-z)M[zM_1(\tilde{M}+m)-(1-2z)\mathbf{s}^2]\Big\}\Big); \qquad (56)$$

$$\big\langle+1\big|J_+\big|-1\big\rangle_S=$$

$$=\frac{2P_+}{(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2M_1M_2}\Phi_S^*(\tilde{M}^2)\Phi_S(M^2)\times$$

$$\times\Big(F_1\big\{[(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})-2k_y^2][2z(1-z)M\tilde{M}-2m^2]-$$

$$-2\boldsymbol{\kappa}^2\mathbf{k}^2+4(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})k_y^2+$$

$$+(1-z)Q\big[k_x(mM_2-2k_y^2)-$$

$$-\kappa_x(mM_1-2k_y^2)\big]\big\}+$$

$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{m\big[k_x(zM+m)M_2-$$

$$-\kappa_x(z\tilde{M}+m)M_1\big]+$$

$$+(1-2z)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})(k_x\tilde{M}-\kappa_xM)+$$

$$+2(1-z)k_y^2(k_x+\kappa_x)(M-\tilde{M})+$$

$$+(1-z)Qk_y^2(1-2z)(M+\tilde{M})\Big\}\Big); \qquad (57)$$

$$\big\langle+1\big|J_+\big|-1\big\rangle_D=$$

$$=\frac{P_+}{8(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2}\Phi_D^*(\tilde{M}^2)\Phi_D(M^2)\times$$

$$\times\Big(2F_1\big\{[(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})-2k_y^2]\times$$

$$\times\big[z(1-z)\tilde{M}M(\tilde{M}+4m)(M+4m)-$$

$$-4m^2(M+m)(\tilde{M}+m)\big]-$$

$$-(1-z)Q\big\{k_x(M+m)[4(\tilde{M}+m)k_y^2+4m\mathbf{s}^2]-$$

$$-\kappa_x(\tilde{M}+m)[4(M+m)k_y^2+4m\mathbf{p}^2]\big\}-$$

$$-4(M+m)(\tilde{M}+m)[\mathbf{k}^2\boldsymbol{\kappa}^2-2k_y^2(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})]\big\}+$$

$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{m\big(4\mathbf{s}^2[4\mathbf{p}^2z-2(M+m)m(1-2z)]k_x-$$

$$-4\mathbf{p}^2[4\mathbf{s}^2z-2(\tilde{M}+m)m(1-2z)]\kappa_x\big)-$$

$$-2(1-2z)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})\big[(M+m)\tilde{M}(\tilde{M}+4m)k_x-$$

$$-M(M+4m)(\tilde{M}+m)\kappa_x\big]-$$

$$-4(1-z)k_y^2(k_x+\kappa_x)(M-\tilde{M})\times$$

$$\times[M\tilde{M}+m(M+\tilde{M})+4m^2]-$$

$$-2(1-z)(1-2z)Qk_y^2\big[(M+m)\tilde{M}(\tilde{M}+4m)+$$

$$+(\tilde{M}+m)M(M+4m)\big]\Big\}\Big); \qquad (58)$$

$$\big\langle+1\big|J_+\big|-1\big\rangle_{SD}=$$

$$=\frac{P_+}{2(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2M_2}\Phi_S^*(\tilde{M}^2)\Phi_D(M^2)\times$$

$$\times\Big(2F_1\big\{(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})\big[z(1-z)M\tilde{M}(M+4m)+$$

$$+2(M+m)(m^2-2k_y^2)\big]+2(M+m)\mathbf{k}^2\boldsymbol{\kappa}^2-$$

$$-2k_y^2\Big[z(1-z)M\tilde{M}(M+4m)+$$
$$+2m^2(M+m)\Big]-$$
$$-(1-z)Q\Big\{(M+m)(mM_2-2k_y^2)k_x+$$
$$+2[m\mathbf{p}^2+k_y^2(M+m)]\kappa_x\Big\}\Big\}+$$
$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{2m\Big\{M_2[2\mathbf{p}^2z-(M+m)m(1-2z)]k_x-$$
$$-2\mathbf{p}^2(z\tilde{M}+m)\kappa_x\Big\}-$$
$$-(1-2z)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})\Big[2(M+m)\tilde{M}k_x+$$
$$+M(M+4m)\kappa_x\Big]+$$
$$+4(1-z)k_y^2(k_x+\kappa_x)[2\mathbf{p}^2+M_2(M+m)]+$$
$$+2(1-z)(1-2z)Qk_y^2\times$$
$$\times\Big[2\mathbf{p}^2-(M+m)(\tilde{M}-2m)\Big]\Big\}\Big\}; \qquad (59)$$

$$\big\langle+1\big|J_+\big|-1\big\rangle_{DS}=$$
$$=\frac{P_+}{2(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)^2M_1}\Phi_D^*(\tilde{M}^2)\Phi_S(M^2)\times$$
$$\times\Big(2F_1\Big\{(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})\Big[z(1-z)M\tilde{M}(\tilde{M}+4m)+$$
$$+2(\tilde{M}+m)(m^2-2k_y^2)\Big]+2(\tilde{M}+m)\mathbf{k}^2\boldsymbol{\kappa}^2-$$
$$-2k_y^2\Big[z(1-z)M\tilde{M}(\tilde{M}+4m)+$$
$$+2m^2(\tilde{M}+m)\Big]+$$
$$+(1-z)Q\Big\{(\tilde{M}+m)(mM_1-2k_y^2)\kappa_x+$$
$$+2\Big[m\mathbf{s}^2+k_y^2(\tilde{M}+m)\Big]k_x\Big\}\Big\}+$$
$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{2m\Big\{2\mathbf{s}^2(zM+m)k_x-$$
$$-M_1\Big[2\mathbf{s}^2z-(\tilde{M}+m)m(1-2z)\Big]\kappa_x\Big\}+$$
$$+(1-2z)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})\Big[2(\tilde{M}+m)M\kappa_x+$$
$$+\tilde{M}(\tilde{M}+4m)k_x\Big]-$$
$$-4(1-z)k_y^2(k_x+\kappa_x)\Big[2\mathbf{s}^2+M_1(\tilde{M}+m)\Big]+$$
$$+2(1-z)(1-2z)Qk_y^2\times$$
$$\times\Big[2\mathbf{s}^2-(\tilde{M}+m)(M-2m)\Big]\Big\}\Big\}; \qquad (60)$$

$$\big\langle0\big|J_+\big|0\big\rangle_S=$$
$$=\frac{2P_+}{(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}\tilde{M}M}{z^2(1-z)^2M_1M_2}\Phi_S^*(\tilde{M}^2)\Phi_S(M^2)\times$$
$$\times\Big(F_1\Big\{(1-2z)^2(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})+(2\tilde{M}z(1-z)+m)\times$$
$$\times(2Mz(1-z)+m)\Big\}+$$
$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{(1-2z)\Big[2z(1-z)(k_x\tilde{M}-\kappa_xM)-$$
$$-(1-z)mQ\Big]\Big\}\Big); \qquad (61)$$

$$\big\langle0\big|J_+\big|0\big\rangle_D=$$
$$=\frac{P_+}{2(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}\tilde{M}M}{z^2(1-z)^2}\Phi_D^*(\tilde{M}^2)\Phi_D(M^2)\times$$
$$\times\Big(F_1\Big\{(1-2z)^2(M+m)(\tilde{M}+m)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})+$$
$$+\big[-M(M+4m)z(1-z)+m(M+m)\big]\times$$
$$\times\Big[-\tilde{M}(\tilde{M}+4m)z(1-z)+m(\tilde{M}+m)\Big]\Big\}+$$
$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{(1-2z)\Big\{(M+m)\times$$
$$\times\Big[-\tilde{M}(\tilde{M}+4m)z(1-z)+m(\tilde{M}+m)\Big]k_x-$$
$$-(\tilde{M}+m)\big[-M(M+4m)z(1-z)+$$
$$+m(M+m)\big]\kappa_x\Big\}\Big\}\Big); \qquad (62)$$

$$\big\langle0\big|J_+\big|0\big\rangle_{SD}=$$
$$=\frac{P_+}{(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}\tilde{M}M}{z^2(1-z)^2M_2}\Phi_S^*(\tilde{M}^2)\Phi_D(M^2)\times$$
$$\times\Big(F_1\Big\{-(1-2z)^2(M+m)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})-$$

$$-\Big[2\tilde{M}z(1-z)+m\Big]\times$$
$$\times\Big[-M(M+4m)z(1-z)+m(M+m)\Big]\Big\}+$$
$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{(1-2z)\Big\{-(M+m)\times$$
$$\times\Big[2\tilde{M}z(1-z)+m\Big]k_x+$$
$$+\Big[-M(M+4m)z(1-z)+m(M+m)\Big]\kappa_x\Big\}\Big\}\Big);(63)$$

$$\langle 0|J_+|0\rangle_{DS}=$$
$$=\frac{P_+}{(2\pi)^3}\int\frac{dzd^2\mathbf{k}\tilde{M}M}{z^2(1-z)^2M_1}\Phi_D^*(\tilde{M}^2)\Phi_S(M^2)\times$$
$$\times\Big(F_1\Big\{-(1-2z)^2(\tilde{M}+m)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})-$$
$$-\Big[2Mz(1-z)+m\Big]\times$$
$$\times\Big[-\tilde{M}(\tilde{M}+4m)z(1-z)+m(\tilde{M}+m)\Big]\Big\}+$$
$$+\frac{F_2Q}{2m}\Big\{(1-2z)\Big\{(\tilde{M}+m)\Big[2Mz(1-z)+m\Big]\kappa_x-$$
$$-\Big[-\tilde{M}(\tilde{M}+4m)z(1-z)+m(\tilde{M}+m)\Big]k_x\Big\}\Big\}\Big).\quad(64)$$

Кроме того,

$$\langle+1|J_+|+1\rangle=\langle-1|J_+|-1\rangle=$$
$$=\langle+1|J_+|+1\rangle_S+\langle+1|J_+|+1\rangle_D+$$
$$+\langle+1|J_+|+1\rangle_{SD}+\langle+1|J_+|+1\rangle_{DS};\quad(65)$$

$$\langle 0|J_+|+1\rangle=-\langle 0|J_+|-1\rangle=$$
$$=-\langle+1|J_+|0\rangle=\langle-1|J_+|0\rangle=$$
$$=\langle 0|J_+|+1\rangle_S+\langle 0|J_+|+1\rangle_D+$$
$$+\langle 0|J_+|+1\rangle_{SD}+\langle 0|J_+|+1\rangle_{DS};\quad(66)$$

$$\langle+1|J_+|-1\rangle=\langle-1|J_+|+1\rangle=$$
$$=\langle+1|J_+|-1\rangle_S+\langle+1|J_+|-1\rangle_D+$$
$$+\langle+1|J_+|-1\rangle_{SD}+\langle+1|J_+|-1\rangle_{DS};\quad(67)$$

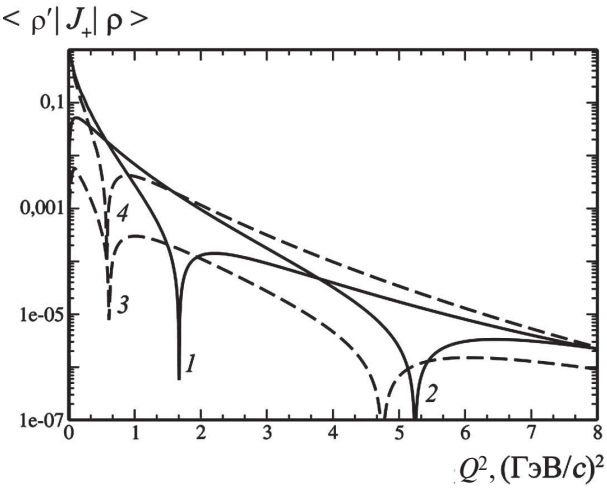


Рис. 3. Зависимости матричных элементов $\langle\rho'|J_+|\rho\rangle$ для спиральных состояний поляризаций дейтрона в начальном ($\rho = \pm1, 0$) и конечном ($\rho' = \pm1, 0$) состояниях: $\langle+1|J_+|+1\rangle$ (*1*), $\langle+1|J_+|-1\rangle$ (*2*), $\langle+1|J_+|0\rangle$ (*3*), $\langle 0|J_+|0\rangle$ (*4*) от величины квадрата переданного импульса Q^2

$$\langle 0|J_+|0\rangle=\langle 0|J_+|0\rangle_S+\langle 0|J_+|0\rangle_D+$$
$$+\langle 0|J_+|0\rangle_{SD}+\langle 0|J_+|0\rangle_{DS}.\quad(68)$$

На рис. 3 представлены зависимости матричных элементов $\langle\rho'|J_+|\rho\rangle$ от величины квадрата переданного импульса Q^2, с использованием CD-боннской волновой функции дейтрона.

Видно, что при больших значениях квадрата переданного импульса Q^2 матричный элемент $\langle 0|J_+|0\rangle$ преобладает над всеми остальными, при увеличении Q^2 проявляет медленное снижение и становится сравнимым с другими матричными элементами; правда, такие большие значения Q^2 находятся, по-видимому, вне области применения двухнуклонного приближения. Характерно знакопеременное поведение матричных элементов, что связано с обращением в нуль волновых функций, причем нули сдвинуты в сторону больших Q^2.

Итак, в данной работе в аналитическом виде приведены результаты вычислений матричных элементов плюсового компонента дейтронного тока в переменных светового конуса, показано

поведение этих матричных элементов в зависимости от величины квадрата переданного импульса. Матричные элементы электромагнитного тока дейтрона необходимы в первую очередь для вычисления электромагнитных форм-факторов дейтрона (а они выражаются как раз через матричные элементы) и дальнейшей оценки релятивистских поправок к магнитному и квадрупольному моментам дейтрона.

В заключение автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Н.Н. Николаеву, сотруднику Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН и Института ядерной физики г. Юлиха, Германия, за многочисленные обсуждения различных вопросов теоретической физики; профессорам Йозефу Шпету и Ульфу Мейснеру – за возможность работы в аспирантуре в Институте ядерной физики Исследовательского центра г. Юлиха, Германия; С.И. Манаенкову, сотруднику Петербургского института ядерной физики им. Б.П. Константинова РАН – за критические замечания, независимый расчет и проверку матричных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алхазов, Г.Д.** Дифракционное взаимодействие адронов с ядрами при высоких энергиях [Текст] / Г.Д. Алхазов, В.В. Анисович, П.Э. Волковицкий. – Л.: Наука, 1991. – 223 с.

2. **Ivanov, I.P.** Diffractive production of *S* and *D* wave vector mesons in deep inelastic scattering [Электронный ресурс] / I.P. Ivanov // arXiv: hep-ph/9909394.

3. **Павлов, Ф.Ф.** Оценка релятивистской поправки к средней спиральности протона в дейтроне [Текст] / Ф.Ф. Павлов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.– 2011.– № 3 (129).– С. 143–152.

4. **Павлов, Ф.Ф.** Расчет спин-зависимой структурной функции дейтрона в переменных светового конуса [Текст] / Ф.Ф. Павлов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.– 2012.– № 1 (141).– С. 118–128.

5. **Судаков, В.В.** Вершинные части для сверхвысоких энергий в квантовой электродинамике [Текст] / В.В. Судаков // Журнал экспериментальной и теоретической физики.– 1956.–Т. 30.–С. 87–89.

6. **Choi, H.-M.** Electromagnetic structure of the ρ meson in the light-front quark model [Text] / Ho-Meoyng Choi, Chueng-Ryong Ji // Phys. Rev. D.– 2004.– Vol. 70.– P. 053015-1 – 053015-14.

7. **Brodsky, S.J.** Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone original research article [Text] / S.J. Brodsky, P. Hans-Christian, S.S. Pinsky // Phys. Rep.– 1998.– Vol. 301.– P. 229–486.

8. **Lepage, G.P.** Exclusive processes in perturbative quantum chromodynamics [Text] / G.P. Lepage, S.J. Brodsky // Phys. Rev. D.– 1980.– Vol. 22.– P. 2157–2198.

9. **Anisovich, V.V.** The Bethe-Salpeter equation and the dispersion relation technique [Text] / V.V. Anisovich, D.I. Melikhov, B.Ch. Metsch [et al.] // Nuclear Physics A.– 1993.– Vol. 563.– Iss. 4.– P. 549–583.

10. **Jaus, W.** Semileptonic decays of *B* and *D* mesons in the light-front formalism [Text] / W. Jaus // Phys. Rev. D.– 1990.– Vol. 41.– P. 3394–3404.

11. **Machleidt, R.** High-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential [Text] / R. Machleidt // Phys. Rev. C.– 2001.– Vol. 63.– P. 024001-1–024001-32.

12. **Machleidt, R.** The Bonn meson-exchange model for the nucleon-nucleon interaction [Text] / R. Machleidt, K. Holinde, Ch. Elster // Phys. Rep.– 1987.– Vol. 149.– P. 1–89.

13. **Lacombe, M.** Parametrization of the deuteron wave function of the Paris N-N potential [Text] / M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau [et al.] // Physics Letters B.– 1981.–Vol. 101.– Iss. 3.–P. 139–140.

14. **Madey, R.** Measurements of G_E^n / G_M^n from the ^{2}H(**e**, *e*′**n**)^{1}H reaction to Q^2=1.45 (GeV/*c*)^2 [Text] / R. Madey, A.Yu. Semenov, S. Taylor [et al.] // Phys. Rev. Lett.– 2003.–Vol. 91.– P. 122002-1–122002-5.

15. **Grach, I.L.** Electromagnetic form-factor of deuteron in relativistic dynamics. Two nucleon and six quark components [Text] / I.L. Grach, L.A. Kondratyuk // Sov. J. Nucl. Phys.– 1984.– Vol. 39.– P. 198–205.

16. **Kondratyuk, L.A.** Relativistic correction to the deuteron magnetic moment and angular condition [Text] / L.A. Kondratyuk, M.I. Strikman // Nuclear Physics A.– 1984.–Vol. 426.– P. 575–598.

17. **Кондратюк, Л.А.** Релятивизм нуклонов и многокварковые кластеры [Текст] / Л.А. Кондратюк, М.Ж. Шматиков // Матер. XVIII Зимней школы ЛИЯФ. Физика атомного ядра.– 1983.–Т. 18.–Ч. 3.– С. 107–171.

18. **Bakker, B.L.G.** Frame dependence of spin-one angular conditions in light front dynamics [Text] / B.L.G. Bakker, Chueng-Ryong Ji // Phys. Rev. D.– 2002.– Vol. 65.– P. 073002-1–073002-13.

19. **Frankfurt, L.L.** Deuteron form factors in the light-cone quantum mechanics «good» component approach [Text] / L.L. Frankfurt, T. Frederico, M. Strikman // Phys. Rev. C.– 1993.– Vol. 48.– P. 2182–2189.

20. **Melosh, H.J.** Quarks: currents and constituents [Text] / H.J. Melosh // Phys. Rev. D.– 1974.– Vol. 9.– P. 1095–1112.

УДК 539.128.2, 539.171.016

Ф.Ф. Павлов, Я.А. Бердников

УГЛОВОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА ДЕЙТРОНА

Для правильного пространственно-временного описания релятивистских эффектов в дейтроне в настоящее время используются известные методы динамики на световом фронте, в которых показывается, что при вычислении матричных элементов электрон-дейтронного рассеяния нужно использовать плюсовый компонент электромагнитного тока дейтрона J_+ в системе бесконечного импульса. В такой системе вклад данного компонента пропорционален импульсу дейтрона P_D, а переданный импульс является поперечным с точностью $1/P_D$. При этом вклады так называемых трансформационных диаграмм (Z-диаграмм; диаграмм, обратных по времени), при которых возникают виртуальные пары, будут сильно подавлены. Вычисление матричных элементов основывается на пространственно-временной картине рассеяния фотонов на ядрах при высоких энергиях, предложенной В.Н. Грибовым [1], на так называемом релятивистском импульсном приближении, в котором амплитуды рассеяния входят на массовой поверхности. В данном подходе вершинная часть амплитуды однократного электрон-дейтронного рассеяния выражается в двухнуклонном приближении через амплитуду перехода дейтрона в протон-нейтронную пару и амплитуду взаимодействия этой пары с виртуальным фотоном. При этом в системе бесконечного импульса дейтрона процессы рассеяния идут упорядоченно во времени: быстрый дейтрон сначала распадается на свободные быстрые протон и нейтрон, которые в силу соотношения неопределенности будут существовать большое время, за которое виртуальный фотон успеет провзаимодействовать со свободным нуклоном. С другой стороны, вклад процесса, когда фотон сначала переходит в нуклон-антинуклонную пару, а потом антинуклон взаимодействует с дейтроном, исчезает в системе бесконечного импульса, так как неопределенность энергии ΔE рождения виртуальной пары возрастает с импульсом P_D, а время образования $\Delta t \approx \hbar / \Delta E$ стремится к нулю.

Целью данной работы является исследование поведения углового условия Грача – Кондратюка в зависимости от величины квадрата переданного импульса с использованием матричных элементов плюсового компонента электромагнитного тока дейтрона. Для достижения результата используются развитые ранее методы релятивистской теории поля в переменных светового конуса. Техника светового конуса обычно используется в физике высоких энергий для выделения ведущего вклада в разложении амплитуды рассеяния по обратным степеням энергии. В данной работе волновая функция дейтрона аппроксимируется только протон-нейтронным фоковским состоянием, и дейтрон представляется как суперпозиция двухнуклонных фоковских состояний с инвариантной массой, зависящей от относительного импульса нуклонов. Кроме того, вектор поляризации продольного состояния протон-нейтронного фоковского состояния неизбежно зависит от инвариантной массы протон-нейтронной пары, так как условие поперечности векторов поляризации дейтрона надо накладывать на уровне фоковских компонент, и значит они должны зависеть от инвариантной массы фоковской компоненты.

Электромагнитные форм-факторы дейтрона

Рассмотрим треугольную фейнмановскую диаграмму процесса однократного электрон-дейтронного рассеяния (см. рис. 1 на с. 100).

Дейтрон как частица со спином $S = 1$ с позиций построения диаграммы Фейнмана есть массивный векторный мезон. Однако, в отличие от привычных диаграмм в квантовой электродинамике (КЭД) или теории слабого взаимодействия, когда в электрослабой вершине рождается фермион и поглощается антифермион (или рождается антифермион и поглоща-

ется фермион), в дейтрон-протон-нейтронной вершине поглощение дейтрона сопровождается рождением двух фермионов: протона и нейтрона.

Тогда при использовании принципов написания дисперсионных интегралов и стандартных правил Фейнмана матричный элемент плюсового компонента дейтронного тока $\langle \rho' | J_+ | \rho \rangle$ в переменных светового конуса можно представить в следующем виде [2]:

$$\langle \rho' | J_+ | \rho \rangle = (-1) \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4 i} \frac{\mathrm{Sp}\left\{ i\left(\Gamma_\beta V_\beta^{(\rho)}\right) \times \right.}{(p_3^2 - m^2 + i\varepsilon) \times}$$

$$\frac{\times i\left(-\hat{p}_3 + m\right) \cdot i\left(\tilde{\Gamma}_\alpha^* \tilde{V}_\alpha^{(\rho')*}\right) \times}{\times (p_2^2 - m^2 + i\varepsilon) \times}$$

$$\frac{\left. \times i(\hat{p}_2 + m) \cdot iO_+ \cdot i(\hat{p}_1 + m) \right\}}{\times (p_1^2 - m^2 + i\varepsilon)} =$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{dz d^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)} \times$$

$$\times \sum_{\lambda,\nu,\mu} \tilde{\Phi}_{\lambda\mu} \left[\bar{u}(p_2, \mu) O_+ u(p_1, \nu) \right] \Phi_{\nu\lambda}, \qquad (1)$$

где полная волновая функция двухнуклонных фоковских состояний в начальном состоянии следует выражению

$$\Phi_{\nu\lambda} = \frac{\bar{u}(p_1, \nu) \Gamma_\beta V_\beta^{(\rho)} v(p_3, \lambda)}{\left(M^2 - M_D^2\right)}, \qquad (2)$$

а в конечном состоянии –

$$\tilde{\Phi}_{\lambda\mu} = \frac{\bar{v}\left(p_3, \lambda\right) \tilde{\Gamma}_\alpha^* \tilde{V}_\alpha^{(\rho')*} u\left(p_2, \mu\right)}{\left(\tilde{M}^2 - M_D^2\right)}; \qquad (3)$$

(здесь использованы обозначения, идентичные обозначениям статьи на с. 99 – 110 настоящего выпуска); $M_D = 1875{,}6$ МэВ/c^2 – масса дейтрона.

Полная вершинная функция перехода дейтрона в протон-нейтронную пару в начальном состоянии имеет следующий вид[2 – 4]:

$$\Gamma_\beta = \left(\gamma_\beta - \frac{\left(p_1 - p_3\right)_\beta}{M + 2m} \right) G_S(M^2) +$$

$$+ \left(\frac{M^2 - 4m^2}{4} \gamma_\beta + \frac{M + m}{2} \left(p_1 - p_3\right)_\beta \right) G_D(M^2); \quad (4)$$

полная вершинная функция в конечном состоянии –

$$\tilde{\Gamma}_\alpha = \left(\gamma_\alpha - \frac{\left(p_2 - p_3\right)_\alpha}{\tilde{M} + 2m} \right) G_S(\tilde{M}^2) +$$

$$+ \left(\frac{\tilde{M}^2 - 4m^2}{4} \gamma_\alpha + \frac{\tilde{M} + m}{2} \left(p_2 - p_3\right)_\alpha \right) G_D(\tilde{M}^2), \quad (5)$$

где $G_{S,D}(M^2)$, $G_{S,D}(\tilde{M}^2)$ – скалярные волновые функции дейтрона для *S*- и *D*-волнового состояния в начальном и конечном состояниях, соответственно; M^2 – квадрат инвариантной массы протон-нейтронной пары с импульсами p_1 и p_3 на массовой поверхности в начальном состоянии; $\tilde{M}^2$ – квадрат инвариантной массы протон-нейтронной пары с импульсами p_2 и p_3 на массовой поверхности в конечном состоянии [2];

$$M^2 = \left(p_1 + p_3\right)^2 = \frac{\mathbf{k}^2 + m^2}{z\left(1-z\right)}; \qquad (6)$$

$$\tilde{M}^2 = \left(p_2 + p_3\right)^2 = \frac{\boldsymbol{\kappa}^2 + m^2}{z\left(1-z\right)}, \qquad (7)$$

при этом относительный поперечный импульс $\boldsymbol{\kappa}$ (каппа) для конечного состояния двух нуклонов выражается как [2]

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k} + \left(1 - z\right)\mathbf{Q}. \qquad (8)$$

Плюсовый компонент вершины взаимодействия нуклона с фотоном имеет вид

$$O_+ = F_1 \gamma_+ + \frac{F_2}{2m} i\sigma_{+\nu} Q_\nu. \qquad (9)$$

Используя формулу

$$\left[\bar{u}(p_2)\sigma_{k\nu} u(p_1)\right] Q_\nu = -2mi\left[\bar{u}(p_2)\gamma_k u(p_1)\right] +$$

$$+ \left[\bar{u}(p_2) u(p_1)\right] i(p_{1k} + p_{2k}), \qquad (10)$$

при условии, что $p_1^2 = m^2$ и $p_2^2 = m^2$, плюсовый компонент вершины мы можем представить в виде

$$O_+ = (F_1 + F_2)\gamma_+ - \frac{F_2}{2m}(p_{1+} + p_{2+}). \qquad (11)$$

В работе [2] представлены зависимости матричных элементов $\langle \rho' | J_+ | \rho \rangle$ для спиральных состояний поляризаций дейтрона в начальном ($\rho = \pm 1, 0$) и конечном ($\rho' = \pm 1, 0$) состояниях как $\langle +1 | J_+ | +1 \rangle$, $\langle +1 | J_+ | -1 \rangle$, $\langle +1 | J_+ | 0 \rangle$, $\langle 0 | J_+ | 0 \rangle$ от величины квадрата переданного импульса Q^2, с использованием CD-боннской волновой функции дейтрона.

Как известно, ковариантное разложение матричного элемента дейтронного тока $\langle \rho' | J_k | \rho \rangle$ имеет вид [5 – 10]:

$$\langle \rho' | J_k | \rho \rangle = \left\{ (P + \tilde{P})_k \left(F_1(Q^2) g_{\alpha\beta} + \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{2M_D^2} F_2(Q^2) Q_\alpha Q_\beta \Big) +$$

$$\left. + G_1(Q^2)\left(Q_\beta g_{\alpha k} - Q_\alpha g_{\beta k}\right) \right\} V_\alpha^{(\rho')*} V_\beta^{(\rho)}, \qquad (12)$$

где Q – 4-вектор переданного импульса. Напомним, что в системе Брейта компоненты 4-вектора переданного импульса Q равны $Q_+ = 0$, $Q_x = Q$, $Q_y = 0$ [2].

Здесь сразу же следует обратить внимание на то, что в таком разложении 4-векторы поляризации дейтрона $V_\beta^{(\rho)}$ и $V_\alpha^{(\rho')*}$ являются внешними и, следовательно, выносятся из-под интеграла в выражении (1).

Напомним, что в нашем формализме дейтрон рассматривается как суперпозиция двухнуклонных фоковских состояний с инвариантной массой, зависящей от относительного импульса протон-нейтронной пары. Соответственно, условие поперечности векторов поляризации надо накладывать на уровне фоковских компонент, и они будут зависеть от инвариантной массы фоковской компоненты. Тем не менее, рассмотрим разложение (12) и оценим угловое условие, с учетом вычисленных в работе [2] матричных элементов.

Как нетрудно заметить, ковариантные форм-факторы дейтрона $F_1(Q^2)$, $F_2(Q^2)$ и $G_1(Q^2)$ связаны с матричными элементами плюсового компонента дейтронного тока соотношениями:

$$\langle +1 | J_+ | +1 \rangle = 2P_+ \left(-F_1(Q^2) + \eta_D F_2(Q^2) \right); \qquad (13)$$

$$\langle 1 | J_+ | 0 \rangle = -2P_+ \sqrt{2\eta_D} \left(F_1(Q^2) - \right.$$

$$\left. - \eta_D F_2(Q^2) + \frac{1}{2} G_1(Q^2) \right); \qquad (14)$$

$$\langle 1 | J_+ | -1 \rangle = -2P_+ \eta_D F_2(Q^2);$$

$$\langle 0 | J_+ | 0 \rangle = 2P_+ \left(-(1 - 2\eta_D) F_1(Q^2) - \right.$$

$$\left. - 2\eta_D^2 F_2(Q^2) + 2\eta_D G_1(Q^2) \right), \qquad (15)$$

где $\eta_D = \dfrac{Q^2}{4M_D^2}$.

Физические форм-факторы дейтрона (зарядовый F_{ch}, квадрупольный F_q и магнитный F_m) связаны с ковариантными форм-факторами дейтрона F_1, F_2 и G_1 с помощью линейных комбинаций [5 – 9]:

$$F_{ch} = -\left(1 + \frac{2}{3}\eta_D\right) F_1 +$$

$$+ \frac{2\eta_D}{3}(1 + \eta_D) F_2 - \frac{2\eta_D}{3} G_1; \qquad (16)$$

$$F_q = -F_1 + (1 + \eta_D) F_2 - G_1; \qquad (17)$$

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_D}} G_1. \qquad (18)$$

В частности, полное сечение рассеяния на неполяризованном дейтроне имеет вид:

$$\sigma_{unpol} = \frac{1}{3}\left[2\left|\langle +1 | J_+ | +1 \rangle\right|^2 + 2\left|\langle +1 | J_+ | -1 \rangle\right|^2 + \right.$$

$$\left. + 4\left|\langle +1 | J_+ | 0 \rangle\right|^2 + \left|\langle 0 | J_+ | 0 \rangle\right|^2 \right]. \qquad (19)$$

Следует отметить, что разложение (12) определено для фиксированной массы дейтрона M_D, в то время как в данном формализме используются инвариантные массы протон-нейтронной пары (6) и (7) для продольных 4-векторов поляризаций [2]. Поэтому матричный элемент плюсового компонента дейтронного тока (1)

такому условию не удовлетворяет и угловое условие требует более усовершенствованного выражения. Подробнее вопрос о применимости разложения (12) рассмотрен в Приложении.

Угловое условие

Данное условие характеризует запрет переходов $\langle \rho' | J_+ | \rho \rangle$ с изменением спиральности дейтрона на 2 в спиральном базисе в брейтовской системе, и матричные элементы должны обнуляться при $\rho' - \rho = \pm 2$ [6 – 8].

Матричный элемент плюсового компонента дейтронного тока (1) определяет четыре независимых функции от Q^2: $\langle +1 | J_+ | +1 \rangle$, $\langle +1 | J_+ | -1 \rangle$, $\langle +1 | J_+ | 0 \rangle$ и $\langle 0 | J_+ | 0 \rangle$, в то время как матричный элемент должен выражаться через три форм-фактора дейтрона: зарядовый, магнитный и квадрупольный. Это означает, что должно существовать дополнительное уравнение. Данное уравнение, называемое угловым условием Грача – Кондратюка, имеет стандартный, традиционно приводимый в литературе вид [5 – 11]:

$$\Delta(Q^2) = (1 + 2\eta_D)\langle +1 | J_+ | +1 \rangle + \\ + \langle +1 | J_+ | -1 \rangle - \sqrt{8\eta_D}\langle +1 | J_+ | 0 \rangle - \\ - \langle 0 | J_+ | 0 \rangle = 0 . \qquad (20)$$

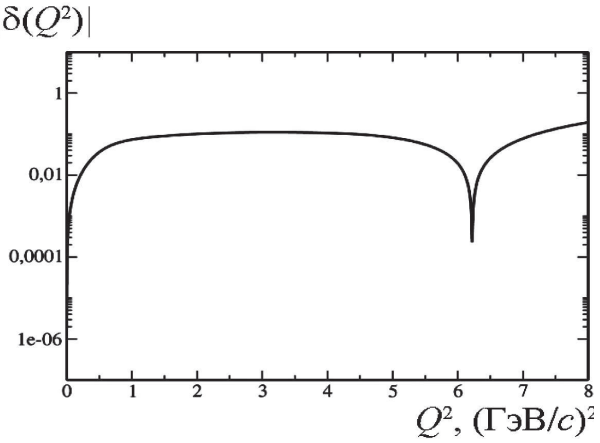
Нормируем выражение (20) следующим образом:

$$\delta(Q^2) = \frac{\Delta(Q^2)}{\sqrt{N}}, \qquad (21)$$

где

$$N = \left[(1 + 2\eta_D)\langle +1 | J_+ | +1 \rangle \right]^2 + \\ + \left[\langle +1 | J_+ | -1 \rangle \right]^2 + 8\eta_D \left[\langle +1 | J_+ | 0 \rangle \right]^2 + \\ + \left[\langle 0 | J_+ | 0 \rangle \right]^2 . \qquad (22)$$

На рисунке приведен график зависимости величины $\delta(Q^2)$ по модулю от квадрата переданного импульса Q^2, на котором хорошо видно нарушение углового условия. Также видно, что значение величины $|\delta(Q^2)|$ минимально и



Зависимость величины $|\delta(Q^2)|$ от квадрата переданного импульса Q^2

близко к нулю. Нарушение углового условия связано со многими факторами, и они подробно рассматриваются в литературе [5 – 11]. Например, оно связано с выбором спиральностей дейтрона ρ и ρ', так как вклады виртуальных пар могут быть разными для продольных и поперечных поляризаций дейтрона. Так, в системе бесконечного импульса 4-вектор поляризации $V^{(\rho=0)}$ пропорционален P_+ при $P \to \infty$, поэтому вклады виртуальных пар могут не скомпенсироваться ввиду расходящегося поведения 4-векторов поляризации $V^{(\rho=0)}$ и $\tilde{V}^{(\rho'=0)}$. Поэтому в некоторых работах было предложено отказаться от использования матричного элемента $\langle 0 | J_+ | 0 \rangle$ [8, 11].

Спиральные состояния для протон-нейтронной пары в переменных светового конуса

Для нахождения решения углового условия рассмотрим систему Брейта, в которой $P_z = 0$. Тогда 4-импульс двухнуклонных фоковских состояний в пространстве-времени Минковского с одной временной и тремя пространственными компонентами будет выражаться как

$$P = (P_0,\ P_1,\ P_2, P_3) = (P_0,\ P_x,\ 0,\ 0), \qquad (23)$$

или в формализме светового конуса с плюсовой, минусовой и поперечными компонентами –

$$P = (P_+,\ P_-,\ P_1,\ P_2) = \left(P_+,\ \frac{M_\perp^2}{2P_+},\ P_x,\ 0 \right), \qquad (24)$$

где в данном выражении квадрат поперечной массы

$$M_\perp^2 = M^2 + P_x^2 . \qquad (25)$$

Выберем 4-векторы поляризации двухнуклонных фоковских состояний в пространстве-времени Минковского с одной временной и тремя пространственными компонентами в виде

$$V'^{(y)} = (0,\ 0,\ 1,\ 0); \qquad (26)$$

$$V'^{(z)} = (0,\ 0,\ 0,\ 1); \qquad (27)$$

$$V'^{(x)} = \frac{1}{M}(P_x,\ M_\perp,\ 0,\ 0), \qquad (28)$$

или в формализме светового конуса –

$$V'^{(y)} = (0,\ 0,\ 0,\ 1); \qquad (29)$$

$$V'^{(z)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\right); \qquad (30)$$

$$V'^{(x)} = \frac{1}{M}\left(\frac{P_x}{\sqrt{2}},\ \frac{P_x}{\sqrt{2}},\ M_\perp,\ 0\right). \qquad (31)$$

Аналогично для конечного состояния в формализме светового конуса

$$\tilde{V}'^{(y)} = (0,\ 0,0,\ 1); \qquad (32)$$

$$\tilde{V}'^{(z)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\right); \qquad (33)$$

$$\tilde{V}'^{(x)} = \frac{1}{\tilde{M}}\left(\frac{\tilde{P}_x}{\sqrt{2}},\ \frac{\tilde{P}_x}{\sqrt{2}},\ \tilde{M}_\perp,\ 0\right), \qquad (34)$$

где

$$\tilde{M}_\perp^2 = \tilde{M}^2 + \tilde{P}_x^2 . \qquad (35)$$

Перейдем в систему, где $P_z \neq 0$. Осуществим Лоренц-преобразование по оси z с γ-фактором $\sqrt{2}P_+ / M_\perp$. Тогда

$$P = \left(P_+,\ \frac{M_\perp^2}{2P_+},\ \mathbf{P}_\perp\right); \qquad (36)$$

$$V''^{(x)} = \frac{1}{M}\left(P_x\frac{P_+}{M_\perp},\ P_x\frac{M_\perp}{2P_+},\ M_\perp,\ 0\right); \qquad (37)$$

$$V''^{(y)} = (0,\ 0,\ 0,\ 1); \qquad (38)$$

$$V''^{(z)} = \left(\frac{P_+}{M_\perp},\ -\frac{M_\perp}{2P_+},\ 0,\ 0\right). \qquad (39)$$

После преобразования Лоренца вдоль оси z $V''^{(x)}$ и $V''^{(z)}$ приобретают временные компоненты и отличные от нуля плюсовые компоненты. Удобно для поперечного состояния выбрать базис, в котором $V''^{(x)}$ не имеет плюсового компонента (калибровка светового конуса). Для этого осуществим линейные преобразования над $V''^{(x)}$ и $V''^{(z)}$ в виде

$$V^{(x)} = V''^{(x)}\cos\alpha + V''^{(z)}\sin\alpha;$$

$$V^{(z)} = -V''^{(x)}\sin\alpha + V''^{(z)}\cos\alpha, \qquad (40)$$

где $\cos\alpha = M / M_\perp$, $\sin\alpha = -P_x / M_\perp$.

Тогда 4-векторы поляризации для двухнуклонных фоковских состояний будут иметь вид

$$V^{(x)} = \left(0,\ \frac{P_x}{P_+},\ 1,\ 0\right); \qquad (41)$$

$$V^{(z)} = \frac{1}{M}\left(P_+,\ \frac{-M^2 + \mathbf{P}_\perp^2}{2P_+},\ \mathbf{P}_\perp\right). \qquad (42)$$

При переходе к спиральному представлению

$$V^{(\rho=\pm1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm V^{(x)} + iV^{(y)}\right) \qquad (43)$$

4-векторы поляризации для двухнуклонных фоковских состояний будут иметь следующий вид:

$$V^{(\rho=\pm1)} = \left(0,\ \frac{\left(\mathbf{P}_\perp\cdot\mathbf{e}^{(\rho=\pm1)}\right)}{P_+},\ \mathbf{e}^{(\rho=\pm1)}\right); \qquad (44)$$

$$V^{(\rho=0)} = V^{(z)} = \frac{1}{M}\left(P_+,\ \frac{-M^2 + \mathbf{P}_\perp^2}{2P_+},\ \mathbf{P}_\perp\right). \qquad (45)$$

Таким образом, мы получили 4-векторы поляризации в калибровке светового конуса [5, 12], которые использовались при вычислении матричного элемента (1).

Теперь угловое условие можно переписать в несколько ином виде. Если использовать в матричном элементе (1) 4-векторы поляризации двухнуклонных фоковских состояний $V'^{(y)}$

и $V'^{(z)}$ в начальном состоянии (29), (30) и $\tilde{V}'^{(y)}$ и $V'^{(z)}$ в конечном (32), (33), то угловое условие должно иметь следующий вид:

$$\langle z|J_+|z\rangle = \langle y|J_+|y\rangle . \qquad (46)$$

Данное выражение для углового условия обсуждалось в работе [10], но в ней использовался «внешний» вектор продольной поляризации, определенный для фиксированной массы дейтрона M_D. Данное угловое условие можно выразить через матричные элементы, приведенные в работе [2] с помощью преобразований (37) – (40), причем нужно всюду использовать инвариантные массы протон-нейтронной пары в начальном (6) и конечном (7) состояниях.

Итак, в данной работе исследовано поведение углового условия Грача – Кондратюка. Матричные элементы электромагнитного тока дейтрона необходимы в первую очередь для вычисления электромагнитных формфакторов дейтрона, которые выражаются через матричные элементы, и для дальнейшей оценки релятивистских поправок к магнитному и квадрупольному моментам дейтрона. Построено последовательное релятивистское описание дейтрона, в частности показан рецепт релятивизации волновой функции дейтрона, обсуждается построение спиновых волновых функций – векторов поляризации протон-нейтронной пары в переменных светового конуса. Волновая функция дейтрона аппроксимируется только протон-нейтронным фоковским состоянием. Не исключена вероятность, что на очень малых межнуклонных расстояниях вместо двух нуклонов придется рассматривать шестикварковое состояние, хотя однозначных экспериментальных указаний на такой шестикварковый кластер нет. Поэтому также представляется возможным описание дейтрона с учетом кварковых степеней свободы, чему посвящено обширное количество публикаций. Тем не менее, следует исчерпать возможности двухнуклонного приближения, особенно с релятивистским рассмотрением области больших относительных импульсов в дейтроне.

Приложение

Вычисление шпура матричного элемента плюсового компонента дейтронного тока

В работе [2] вычисление фейнмановского шпура (1) осуществлялось с помощью очень удобного метода суммирования по спиральностям. Теперь непосредственно вычислим шпур в выражении (1). Вынесем 4-векторы поляризации начального и конечного дейтрона $V_\beta^{(\rho)}$ и $\tilde{V}_\alpha^{(\rho')*}$ из-под шпура (1) и рассмотрим выражение

$$\mathrm{Sp}\Big\{\Gamma_\beta\left(-\hat{p}_3+m\right)\tilde{\Gamma}^*_\alpha(\hat{p}_2+m)\times$$

$$\times\left(\left(F_1+F_2\right)\gamma_+ - \frac{F_2}{2m}\left(p_{1+}+p_{2+}\right)\right)(\hat{p}_1+m)\Big\} . \qquad (47)$$

Представим выражение (4) для Γ_β в виде

$$\Gamma_\beta = \Gamma_1\gamma_\beta + \Gamma_2\frac{\left(p_1-p_3\right)_\beta}{2} , \qquad (48)$$

где введем обозначения

$$\Gamma_1 = G_S(M^2) + \frac{M^2-4m^2}{4}G_D(M^2) ; \qquad (49)$$

$$\Gamma_2 = -\frac{2}{M+2m}G_S(M^2) + (M+m)G_D(M^2) . \qquad (50)$$

Аналогично, выражение (5) для $\tilde{\Gamma}_\alpha$ представим в виде

$$\tilde{\Gamma}_\alpha = \Gamma_3\gamma_\alpha + \Gamma_4\frac{\left(p_2-p_3\right)_\alpha}{2} , \qquad (51)$$

где

$$\Gamma_3 = G_S(\tilde{M}^2) + \frac{\tilde{M}^2-4m^2}{4}G_D(\tilde{M}^2) ; \qquad (52)$$

$$\Gamma_4 = -\frac{2}{\tilde{M}+2m}G_S(\tilde{M}^2) + (\tilde{M}+m)G_D(\tilde{M}^2) . \qquad (53)$$

Тогда вычисление шпура даст следующий результат:

$$P_+\Gamma_1\Gamma_3\Big\{g_{\alpha\beta}\Big[2zF_1(\tilde{M}^2+M^2+Q^2) -$$

$$-2Q^2(F_1+F_2)\Big] + Q_\alpha Q_\beta\left[-4(F_1+F_2)+4zF_1\right]\Big\} +$$

$$+2(F_1+F_2)\Big[\tilde{M}^2 Q_\alpha g_{\beta+} - M^2 Q_\beta g_{\alpha+}\Big]\Gamma_1\Gamma_3 +$$

$$+p_{3\alpha}p_{3\beta}P_+\Big\{16zF_1\Gamma_1\Gamma_3 + \frac{2}{m}z\Big[8m^2F_1 +$$

$$+F_2(\tilde{M}^2 - M^2 - Q^2)\Big]\Gamma_1\Gamma_4 +$$

$$+\frac{2}{m}z\Big[8m^2F_1 + F_2(M^2 - \tilde{M}^2 - Q^2)\Big]\Gamma_2\Gamma_3 +$$

$$+\Big[16m^2zF_1 + 2(1-2z)Q^2(F_1+F_2) -$$

$$-2zF_1(M^2 + \tilde{M}^2 - Q^2)\Big]\Gamma_2\Gamma_4\Big\} +$$

$$+P_+p_{3\alpha}Q_\beta\Big\{-4(F_1+F_2)\Gamma_1\Gamma_3 -$$

$$-\frac{2}{m}\Big[2m^2(F_1+F_2) - zM^2F_2\Big]\Gamma_1\Gamma_4\Big\} +$$

$$+P_+p_{3\beta}Q_\alpha\Big\{4(F_1+F_2)\Gamma_1\Gamma_3 +$$

$$+\frac{2}{m}\Big[2m^2(F_1+F_2) - z\tilde{M}^2F_2\Big]\Gamma_2\Gamma_3\Big\} +$$

$$+g_{\beta+}p_{3\alpha}\Big\{-2(F_1+F_2)(M^2 - \tilde{M}^2 - Q^2)\Gamma_3\Gamma_1 -$$

$$-2m(F_1+F_2)(M^2 - \tilde{M}^2 - Q^2)\Gamma_4\Gamma_1\Big\} +$$

$$+g_{\alpha+}p_{3\beta}\Big\{-2(F_1+F_2)(\tilde{M}^2 - M^2 - Q^2)\Gamma_1\Gamma_3 -$$

$$-2m(F_1+F_2)(\tilde{M}^2 - M^2 - Q^2)\Gamma_2\Gamma_3\Big\}. \quad (54)$$

Далее можно разложить 4-вектор Q_3 по 4-векторам $(P+\tilde{P})$, Q и поперечному вектору $A_\perp$: $p_3 = a(P+\tilde{P}) + bQ + A_\perp$. В силу того, что $PV^{(\rho)} = 0$, можно отбросить слагаемые, содержащие P.

В случае $M = \tilde{M}$ интегрирование по $A_\perp$ давало бы нуль и вклады, содержащие $A_\perp$, можно было отбросить, что позволяло бы свести выражение (54) к разложению (12). Возникающие выражения типа $A_{\perp\alpha}A_{\perp\beta}$ отличны от нуля и разлагаются по тензорным произведениям 4-векторов $(P+\tilde{P})$, Q и метрическому тензору $g_{\alpha\beta}$.

С помощью дальнейших громоздких вычислений, которые выходят за рамки данной работы, можно получить полное разложение шпура в амплитуде (1) по внешним структурам.

Отметим ряд особенностей полученного выражения (54). Видно, что его нельзя свести к виду (12), поскольку в нашем формализме мы рассматриваем переход составной системы с массой M (6) в составную систему с массой $\tilde{M}$ (7), которые различны ($M \neq \tilde{M}$) и не совпадают с массой дейтрона M_D. Например, вместо разностей вида $Q_\alpha g_{\beta+} - Q_\beta g_{\alpha+}$ в разложении (12) возникают сомножители вида $\tilde{M}^2 Q_\alpha g_{\beta+} - M^2 Q_\beta g_{\alpha+}$ в выражении (54).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gribov, V.N.** Space-time description of the hadron interaction at high energies [Электронный ресурс] / V.N. Gribov // arXiv:hep-ph/0006158v1.

2. **Павлов, Ф.Ф.** Вычисление матричных элементов электромагнитного тока дейтрона в переменных светового конуса [Текст] / Ф.Ф. Павлов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.– 2012.– № 3. – С. 99–110.

3. **Павлов, Ф.Ф.** Расчет спин-зависимой структурной функции дейтрона в переменных светового конуса [Текст] / Ф.Ф. Павлов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.– 2012.– № 1 (141).– С. 118–128.

4. **Ivanov, I.P.** Diffractive production of S and D wave vector mesons in deep inelastic scattering [Электронный ресурс] / I.P. Ivanov // arXiv: hep-ph/9909394.

5. **Choi, H.-M.** Electromagnetic structure of the ρ meson in the light-front quark model [Text] / Ho-Meoyng Choi, Chueng-Ryong Ji // Phys. Rev. D.– 2004.– Vol. 70.– P. 053015-1 – 053015-14.

6. **Grach, I.L.** Electromagnetic form-factor of deuteron in relativistic dynamics. Two nucleon and six quark components [Text] / I.L. Grach, L.A. Kondratyuk // Sov. J. Nucl. Phys.– 1984.– Vol. 39.– P. 198 – 205.

7. **Kondratyuk, L.A.** Relativistic correction to the deuteron magnetic moment and angular condition [Text] / L.A. Kondratyuk, M.I. Strikman // Nuclear Physics A.– 1984.–Vol. 426.– P. 575–598.

8. **Кондратюк, Л.А.** Релятивизм нуклонов и многокварковые кластеры [Текст] / Л.А. Кондратюк, М.Ж. Шматиков // Матер. XVIII Зимней школы ЛИЯФ. Физика атомного ядра.– 1983.–Т. 18.–Часть. 3.–С. 107–171.

9. **Bakker, B.L.G.** Frame dependence of spin-one angular conditions in light front dynamics [Text] / B.L.G. Bakker, Chueng-Ryong Ji // Phys. Rev. D.– 2002.– Vol. 65.– P. 073002-1–073002-13.

10. **Frankfurt, L.L.** Deuteron form factors in the light-cone quantum mechanics «good» component approach [Text] / L.L. Frankfurt, T. Frederico, M. Strikman // Phys. Rev. C.– 1993.– Vol. 48.– P. 2182–2189.

11. **Choi, H.-M.** Light-front quark-model analysis of the rho-meson electromagnetic form factors [Text] / Ho-Meoyng Choi, Chueng-Ryong Ji // Few-Body Systems.– 2005.– Vol. 36.– P. 61 – 67.

12. **Brodsky, S.J.** Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone original research article [Text] / S.J. Brodsky, P. Hans-Christian, S.S. Pinsky // Phys. Rep.– 1998.– Vol. 301.– P. 229–486.

УДК 539.125.17; 539.126.17

Я.А. Бердников, А.Е. Иванов, В.Т. Ким, Д.П. Суетин

ЯДЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ В АДРОН-ЯДЕРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Исследование столкновений частиц высоких энергий с ядрами позволяет получить информацию об особенностях механизма взаимодействия партонов с ядерной материей. К таким особенностям можно отнести процессы многократного перерассеяния партонов и их энергетические потери в ядерной среде.

Анализируя особенности взаимодействия партонов в ядре, можно выделить так называемые мягкие и жесткие процессы, которые различают по величине переданного импульса. Для мягких процессов переданный импульс меньше 1 ГэВ/*c*, для жестких – 1 ГэВ/*c*.

При высокоэнергетических столкновениях адронов с ядрами в общем случае механизм взаимодействия может быть представлен как совокупность мягких перерассеяний партонов налетающего адрона в ядерной материи. После мягких процессов происходит жесткое столкновение налетающего партона с партоном ядра мишени с образованием вторичных частиц, среди которых могут быть адроны, лептоны и гамма-кванты.

Эти вторичные частицы, в свою очередь, могут участвовать в процессах, как правило, мягкого перерассеяния в ядре ввиду относительно малой вероятности повторного жесткого взаимодействия.

Мягкие перерассеяния вторичных лептонов и гамма-квантов, ввиду малого сечения взаимодействия, не могут оказывать заметного влияния на механизм взаимодействия адронов с ядрами, в то время как учет мягких перерассеяний вторичных адронов абсолютно необходим для понимания особенностей адрон-ядерных взаимодействий.

При высокоэнергетических столкновениях лептонов с ядрами механизм взаимодействия может быть несколько проще по сравнению с адрон-ядерным, поскольку в данном случае в силу малого сечения лептон-нуклонного взаимодействия лептоны приходят к жесткому столкновению, не участвуя в процессах многократного перерассеяния. В то же время как вторичные адроны, рожденные в лептон-нуклонном взаимодействии, они могут перерассеиваться в мягких процессах и, следовательно, заметно влиять на механизм реакции в целом.

Таким образом, информацию о роли процессов мягкого перерассеяния партонов и их энергетических потерь в ядерной материи удобно получать из исследования трех независимых процессов взаимодействия:

лептон-ядерного с рождением адронов (мягкое перерассеяние партонов и их энергетические потери после жесткого столкновения);

адрон-ядерного с рождением лептонов (мягкое перерассеяние партонов и их энергетические потери до жесткого столкновения);

адрон-ядерного с рождением адронов (мягкое перерассеяние партонов и их энергетические потери до и после жесткого столкновения).

Данная работа посвящена исследованию роли многократного мягкого перерассеяния партонов и их энергетических потерь в ядерной среде до рождения лептонной пары (процесс Дрелла – Яна) в жестком взаимодействии в протон-ядерных столкновениях [1].

Физическую картину процесса Дрелла – Яна можно представить следующим образом [3]: каждый составляющий кварк налетающего адрона (валон) испытывает несколько мягких перерассеяний на нуклонах ядра мишени, приобретая дополнительный поперечный импульс, и теряет энергию в цветовом поле ядра. Лептонная пара рождается при жестком взаимодействии валона с кварком нуклона мишени, после чего валон может рассматриваться как точечный партон с малым сечением взаимодействия.

При моделировании процесса Дрелла – Яна предлагается учесть многократные мягкие перерассеяния валона на нуклонах ядра мишени, а также дополнительные энергетические потери за счет образования нескольких цветовых струн вследствие многократных взаимодействий в ядерной среде.

Цель работы – учесть эти взаимодействия для случая адрон-ядерных соударений в рамках усовершенствования программного пакета HARDPING [3], разработанного коллективом сотрудников СПбГПУ и ПИЯФ (Петербургского института ядерной физики им. Б.П. Константинова в г. Гатчина Ленинградской области).

Вероятность кварку испытать *n* мягких перерассеяний внутри ядра

Указанную вероятность можно записать в следующем виде [4]:

$$P_n = \frac{1}{(n-1)!}\times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^2b \left(\sigma T_-(\mathbf{b},z)\right)^{n-1} \rho(\mathbf{b},z) e^{-\sigma T_-(\mathbf{b},z)}, \quad (1)$$

где $\mathbf{b}$ – прицельный параметр; σ – сечение неупругого кварк-нуклонного взаимодействия;

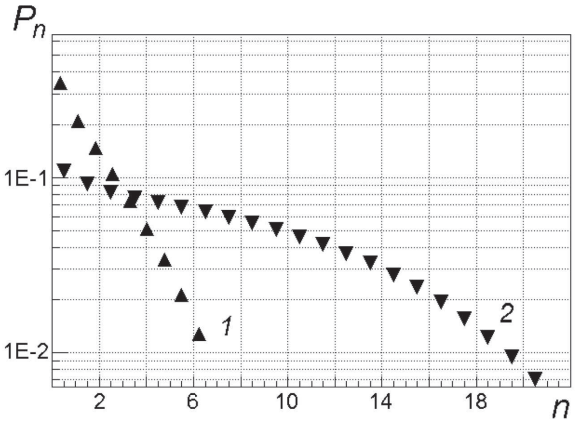


Рис. 1. Вероятность кварку испытать *n* мягких перерассеяний внутри ядер ^{184}W (*1*) и ^{9}Be (*2*). Сечение неупругого кварк-нуклонного взаимодействия принималось равным $\sigma = (1/3)\sigma_{NN} \approx 10$ мб ($\sigma_{NN} \approx 30$ мб – сечение неупругого нуклон-нуклонного рассеяния)

$\rho(\mathbf{r})$ – ядерная плотность; $T_-(\mathbf{b},z)$ – оптическая ядерная плотность, определяемая выражением

$$T_-(\mathbf{b},z) = A\int_{-\infty}^{z} \rho(\mathbf{b},z')dz'. \quad (2)$$

При этом ядерная плотность $\rho(\mathbf{r})$ нормирована на единицу:

$$\int \rho(\mathbf{r}) d^3r = 1. \quad (3)$$

В данной работе для плотности ядра использовалась параметризация Вудса – Саксона. На рис. 1 представлены вероятности многократных мягких перерассеяний кварка внутри ядра для различных ядер.

Поперечный импульс кварка после многократных перерассеяний

Распределение по поперечным импульсам для кварка, испытавшего *n* мягких перерассеяний, может быть записано в виде свертки соответствующих распределений для однократного процесса $qN \to q'X$ [5]:

$$G_q^n(k_T) = \int \prod_{i=1}^{n} d^2p_{iT} f_q(p_{iT}) \delta^2\left(k_T - \sum_{i=1}^{n} p_{iT}\right), \quad (4)$$

где $f_q(p_T)$ – нормированное на единицу дифференциальное сечение кварк-нуклонного взаимодействия;

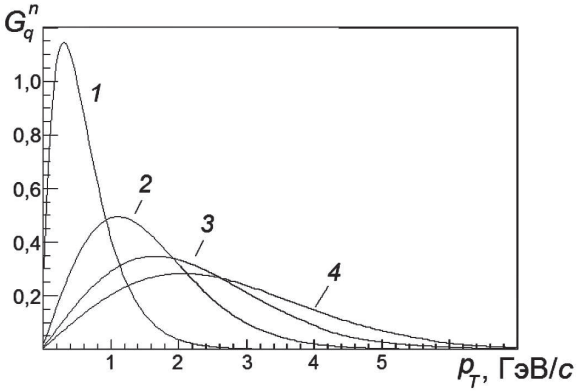


Рис. 2. Функция распределения по абсолютным значениям поперечного импульса для кварка после n мягких перерассеяний; значения n: 1 (*1*), 5 (*2*), 10 (*3*), 15 (*4*)

$$f_q(p_T) = \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d^2 p_T}. \qquad (5)$$

Импульсный спектр (5) кварков в процессе $qN \to q'X$, ввиду его мягкости [4], примем таким же, как и в реакции $NN \to NX$:

$$f_q(p_T) = \frac{B^2}{2\pi} e^{-Bp_T}, \qquad (6)$$

где постоянный множитель обусловлен нормировкой

$$\int f_q(p_T) f_q(p_T) = 1. \qquad (7)$$

Выражение (4) вычислено аналитически при использовании спектра (6); результат можно представить в виде

$$G_q^m(k_T) = \frac{B^2}{2\pi\Gamma\left[(3m+1)/2+1\right]} \times \left(\frac{Bk_T}{2}\right)^{(3m+1)/2} K_{(3m+1)/2}(Bk_T), \qquad (8)$$

где $m = n-1$, $K_m(y)$ – функция Макдональда порядка m, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, $B = 2/\langle k_q \rangle$ ($\langle k_q \rangle$ – средний импульс кварка в нуклоне).

Спектр $G_q^n\langle k_T \rangle$ для $\langle k_T \rangle = 0{,}25$ ГэВ/c и различных n графически представлен на рис. 2. Хорошо видно, что за счет многократных перерассеяний среднее значение поперечного импульса кварка растет, спектр становится более жестким и более размытым.

Энергетические потери

Первое же неупругое взаимодействие частиц пучка на поверхности ядра мишени, идущее через цветовой обмен со связанным в ядре нуклоном, приводит к образованию цветных струн, натянутых между партонами пучка и мишени. Благодаря натяжению струны ведущий кварк пучка теряет свою энергию с постоянной скоростью на единицу пути $dE/dz = -k_s$ [6–8], которая инвариантна относительно продольных лоренцевых сдвигов. Коэффициент натяжения струны k_s связан с параметром наклона реджевских мезонных траекторий a'_R выражением

$$k_s = 1/(2\pi a'_R R) \approx 1 \text{ ГэВ/фм}. \qquad (9)$$

Данное значение дает нам ожидаемый масштаб коэффициента энергетических потерь, который не зависит от времени. Сами энергетические потери растут линейно с ростом пройденного кварком расстояния L: $\Delta E = k_s L$. Энергия, потерянная налетающим кварком, идет на ускорение кварков мишени и на образование новых адронов.

В простейшем варианте струнной модели, в которой к заданному кварку может быть прикреплена только одна струна, многократные взаимодействия налетающего кварка в ядерной среде не будут оказывать никакого влияния на его энергетические потери [9]. В самом деле, вне зависимости от того, что происходило с кварком до завершения процесса адронизации, он остается в состоянии цветового триплета и замедляется с постоянным коэффициентом энергетических потерь k_s за счет натяжения прикрепленной к нему струны.

Такая модель является сильно упрощенной, на самом деле многократные взаимодействия в ядерной среде приводят к дополнительным энергетическим потерям. В более сложной дуальной партонной модели (или в кварк-глюонной струнной модели [10]) предполагается, что каждое из многократных взаимодействий в ядерной среде приводит к образованию нескольких новых струн. Вероятности для образования нескольких струн описываются правилами Абрамовского – Грибова – Канчели.

Кварк, проходящий в ядре расстояние z от первого неупругого взаимодействия до точки

жесткого взаимодействия, теряет на единицу длины энергию

$$k_s \frac{dE}{dz} = k_s \left[1 + \left\langle n(z) \right\rangle \right], \qquad (10)$$

где $\left\langle n(z) \right\rangle = \sigma^{qN} \rho_A z$ – среднее число столкновений, которые кварк испытывает на пути z. Значение ядерной плотности можно принимать равным $\rho_A \approx 0{,}16$ фм$^{-3}$, поскольку путь между первым неупругим взаимодействием и точкой рождения мюонной пары проходит внутри ядра. Значение кварк-нуклонного сечения σ^{qN} зависит от выбора модели. Так, в аддитивной кварковой модели $\sigma^{qN} = \sigma_{in}^{NN} \approx 10$ мб.

Следовательно, энергетические потери кварка на пройденном пути L можно записать как

$$\Delta E = k_s \left(L + \frac{1}{2} \sigma^{qN} \rho_A L^2 \right). \qquad (11)$$

Реальная зависимость энергетических потерь от пройденного пути нелинейная. Для тяжелых ядер поправки, связанные с нелинейностью энергетических потерь, составляют порядка десяти процентов [11].

Средний пробег кварка в ядре

Ранее предполагалось, что кварк проходит в ядре путь от поверхности до точки рождения лептонной пары, откуда следует, что средний пробег кварка в ядре составляет $\left\langle L \right\rangle \approx (3/4) R_A$. Эта оценка должна быть уменьшена, как минимум, на величину среднего свободного пробега протона в ядре, которая составляет около 2 фм. Уже одно это соображение уменьшает значение $\left\langle L \right\rangle$ в два и более раз, так что среднее расстояние между точками рождения лептонной пары z_2 и первого неупругого взаимодействия z_1 в реальности короче, чем максимально возможное расстояние до границы ядра. Кроме того, существует ненулевая вероятность того, что налетающий адрон не испытает ни одного столкновения вплоть до жесткого взаимодействия в точке z_2, в котором будет рождена лептонная пара. Таким образом, для того, чтобы найти величину среднего пробега кварка в ядре, необходимо усреднить расстояние $(z_2 - z_1)$, как это сделано в работе [6]:

$$\left\langle L \right\rangle = (1 - W_0) \frac{\sigma_{in}^{hN}}{A} \int d^2 b \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz_2 \rho_A (\mathbf{b}, z_2) \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz_2 \rho_A (\mathbf{b}, z_1)(z_2 - z_1) \exp\left[-\sigma_{in}^{hN} \int\limits_{-\infty}^{z_1} dz \rho_A (\mathbf{b}, z_1) \right]. \qquad (12)$$

Экспоненциальный множитель здесь накладывает условие, согласно которому до точки z_1 не произошло ни одного неупругого взаимодействия. Вероятность того, что налетающий адрон не испытал ни одного неупругого взаимодействия до точки рождения лептонной пары W_0, выражается как

$$W_0 = \frac{1}{A \sigma_{in}^{hN}} \int d^2 b \left[1 - e^{-\sigma_{in}^{hN} T(b)} \right] = \frac{\sigma_{in}^{hN}}{A \sigma_{in}^{hN}}. \qquad (13)$$

Результаты и их обсуждение

Распределение по поперечным импульсам для кварка, испытавшего n мягких перерассеяний, может быть записано в виде свертки соответствующих распределений для однократного процесса. Результат можно представить в виде (8).

Единственным варьируемым параметром при учете перерассеяний является средний импульс кварка в нуклоне $\left\langle k_T \right\rangle$. На рис. 3 представлено отношение дифференциальных сечений рождения лептонных пар на ядрах вольфрама к ядрам бериллия по поперечному импульсу пар. Из рисунка видно, что мягкие перерассеяния сильно влияют на спектры образующихся мезонов, особенно при больших значениях поперечного импульса. При значениях среднего импульса кварка в нуклоне $\left\langle k_T \right\rangle > 1{,}5$ ГэВ/c выход мюонных пар с большим поперечным импульсом сильно подавлен. При меньших $\left\langle k_T \right\rangle$ происходит значительное увеличение выхода частиц с большим поперечным импульсом.

В работе использовалась модель энергетических потерь с двумя свободными параметрами: коэффициентом потерь энергии на единицу длины dE/dz и длиной свободного пробега кварка в ядре λ_s. Пробег кварка в каждом конкретном случае разыгрывается согласно экспоненциальному распределению (12). При этом кварк теряет энергию (11). Из рис. 4

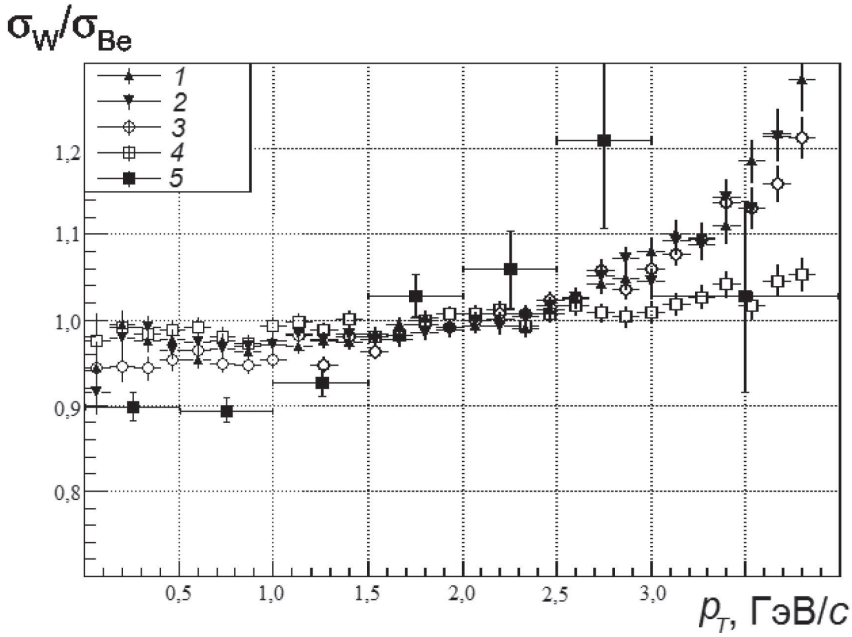


Рис. 3. Сравнение результатов моделирования (*1* – *4*) с экспериментальными данными (*5*) для отношения дифференциальных сечений рождения пар Дрелла – Яна в столкновениях протонов с ядрами W и Be при энергии 800 ГэВ в зависимости от поперечного импульса для сечения неупругого кварк-нуклонного взаимодействия $\sigma = 10$ мб при различных значениях среднего импульса кварка в нуклоне $\langle k_T \rangle$: 0,25 (*1*); 0,5 (*2*); 1,0 (*3*); 2,0 (*4*)

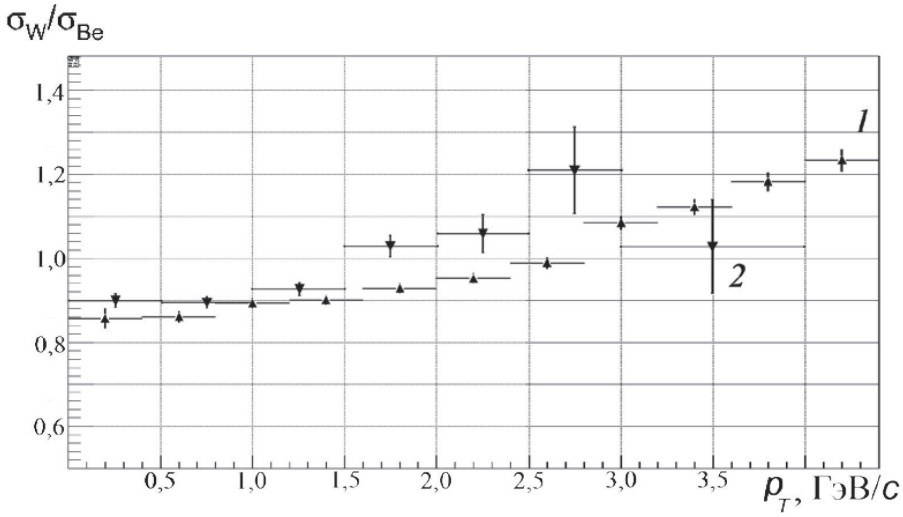


Рис. 4. Сравнение результатов моделирования (*1*) с экспериментальными данными (*2*) для отношения дифференциальных сечений рождения пар Дрелла – Яна в столкновениях протонов с ядрами W и Be при энергии 800 ГэВ в зависимости от поперечного импульса (учтены энергетические потери налетающего кварка)

видно, что учет этих потерь существенно улучшает согласие с экспериментом.

Полученные в работе результаты сравнивались с данными экспериментов E772 и E866, проведенных в FNAL (национальная ускорительная лаборатория им. Энрико Ферми в США), в которых исследовалась зависимость выхода лептонных пар от массового номера

ядра мишени. Использовались данные из работ [12, 13] E772 и [14] E866.

Полученные результаты показывают хорошее согласие модели HARDPING с экспериментальными данными коллабораций E772 и E866. Сравнение с экспериментальными данными позволило зафиксировать некоторые параметры модели, например кварк-нуклонное сечение взаимодействия ($\sigma = 5-10$ мбн) и натяжение струны ($k_s = 1,0-4,0$ ГэВ/фм).

Таким образом, в результате данной работы создана модель Монте-Карло HARDPING 2.0 для адрон-ядерных столкновений, в которую включены эффекты, связанные с многократными мягкими перерассеяниями до жесткого процесса, а также дополнительные энергетические потери за счет образования нескольких цветовых струн вследствие многократных взаимодействий в ядерной среде. Разработанный генератор HARDPING 2.0 позволяет моделировать адрон-ядерные столкновения. Это позволило зафиксировать параметры модели и перейти к созданию следующей версии генератора HARDPING, которая позволит моделировать ядро-ядерные соударения.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. и президентским грантом РФ NS-3383.2010.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Drell, S.D.** Massive lepton pair production in hadron-hadron collisions at high-energies [Текст] / S.D. Drell, T.-M. Yan // Phys. Rev. Lett. –1970. – Vol. 25. – P. 316–320.

2. **Voloshin, S.A.** Role of hard and soft quark nucleon collisions in the *A*-dependence of production of high p_T hardrons in interactions with nuclei [Текст] / S.A. Voloshin, Y.P. Nikitin // JEPT Lett. – 1982. – Vol. 36. – P. 201–204.

3. **Berdnikov, Ya.A.** MC generator HARDPING 2.0: hadron production in lepton-nuclei interactions at high energies [Текст] / Ya.A. Berdnikov, A.E. Ivanov, V.T. Kim, V.A. Murzin // Nucl. Phys. B. – 2011. – Vol. 219. – P. 308–311.

4. **Efremov, A.V.** Hard hadron-nucleus processes and multi-quark configurations in nuclei [Текст] / A.V. Efremov, V.T. Kim, G.I. Lykasov // Sov. J. Nucl. Phys. – 1986. – Vol. 44. – P. 151–159.

5. **Lykasov, G.I.** Large transverse momentum meson production in the proton nuclei interaction in the quark model [Текст] / G.I. Lykasov, B.K. Sherkhonov // Yadernaya Fizika – 1983. – Vol. 38. – P. 704–711.

6. **Kopeliovich, B.Z.** Nuclear screening in J/psi and lepton pair production [Текст] / B.Z. Kopeliovich, F. Nidermayer // JINR. – 1984. – Vol. E2. – P. 834–842.

7. **Kopeliovich, B.Z.** Color dynamics in large $p(T)$ hadron production on nuclei [Текст] / B.Z. Kopeliovich, F. Nidermayer // Sov. J. Nucl. Phys. – 1985.– Vol. 42. – P. 504–511.

8. **Kim, V.T.** Shadowing and antishadowing in the production of high $p(T)$ hardrons off nuclei [Текст] / V.T. Kim, B.Z. Kopeliovich // JINR. – 1989. – Vol. E2. – P. 727–729.

9. **Kopeliovich, B.Z.** Are high-energy quarks absorbed in nuclear matter? [Текст] / B.Z. Kopeliovich //Phys. Lett. – 1990. – Vol. B243. – P. 141– 143.

10. **Kaidalov, A.B.** On the possible connection between hard and soft processes [Текст] / A.B. Kaidalov // Sov. J. Nucl. Phys. – 1981. – Vol. 33. – P. 733–742.

11. **Johnson, M.B.** Energy loss versus shadowing in the Drell-Yan reaction on nuclei [Текст] / M.B. Johnson, B.Z. Kopeliovich, I.K. Potashnikova [et al.] // Phys. Rev. – 2002. – Vol. C65. – P. 025203–025212.

12. **McGaughey, P.L**. Cross-sections for the production of high mass muon pairs from 800-GeV proton bombardment of H-2 [Текст] / P.L. McGaughey, C.S. Mishra, J.C. Peng [et al.] // Phys. Rev. – 1994. – Vol. D50. – P. 3038–3045.

13. **Alde, D.M.** Nuclear dependence of dimuon production at 800-GeV. FNAL-772 experiment [Текст] / D.M. Alde, H.W. Baer, T.A. Carey, [et al.] // Phys. Rev. Lett.– 1990. –Vol. 64. – P. 2479–2482.

14. **Vasilev, M.A**. Parton energy loss limits and shadowing in Drell-Yan dimuon production [Текст] / M.A. Vasilev, L.U. Zhu, S. Rusty, [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 83. – P. 2304–2307.

УДК 517.929

В.Э. Вишневский, О.А. Пустовалова, О.А. Иванова, М.В. Стрекопытова

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСНОГО РЕЖИМА СТАЦИОНАРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

В данной статье рассматривается система дифференциальных уравнений с целью ее исследования на устойчивость по отношению к компонентам вектора. Приведены несколько теорем об устойчивости равновесного режима системы дифференциальных уравнений. Методика исследования основывается на детальном изучении систем непрерывно дифференцируемых функций, а также на сопоставлении положительно и отрицательно определенных функций.

Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\dot{X} = \Theta(X), \qquad (1)$$

где $X = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазового состояния системы, $\Theta(X)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть для системы (1) множество M, являющееся пересечением k поверхностей:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(x_1, ..., x_n) = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &\Phi_k(x_1, ..., x_n) = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

является интегральным многообразием, т. е. из $X_0 \in M$ следует, что $X(t, X_0) \in M$ при $t \geq 0$, где $X(t, X_0)$ – решение (1), удовлетворяющее условию $X = X_0$ при $t = 0$. Будем называть множество (2) равновесным режимом системы (1) [1].

Теорема 1. *Если существует функция $V(Y, X)$, удовлетворяющая условиям:*

1. *$V(Y, X)$ – положительно определенная по отношению к компонентам вектора Y равномерно по X;*

2. *Функция $V(Y, X) \underset{Y \to 0}{\to} 0$ равномерно по отношению к $X_0 \in E_n$;*

3. *Функция $W(Y, X)$ является отрицательно определенной по отношению к компонентам вектора Y равномерно по отношению к компонентам вектора X,*

то тогда равновесный режим (2) системы (1) асимптотически устойчив [2].

Доказательство. Покажем, что

$$\| Y(t, Y_0, X_0) \| \underset{X_0 \in E_n}{\to} 0 \text{ при } t \to \infty,$$

т. е. по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $T(\varepsilon)$:

$$\| V(t, Y_0, X_0) \| < \varepsilon \quad \forall t \geq T(\varepsilon), \quad \forall X_0 \in E_n.$$

Действительно, по заданному ε можно найти δ $(\delta < \varepsilon)$, удовлетворяющее определению устойчивости. При этом возможны два случая:

1. Существует T такое, что $\| Y(T, Y_0, X_0) \| < \delta$ при $\| Y_0 \| < \delta$, $X_0 \in E_n$; следовательно, $\| Y(t, Y_0, X_0) \| < \varepsilon \quad \forall t \geq T, \quad \forall X_0 \in E_n$;

2. Не существует такого T, т. е. $\forall t > 0$ всегда будет $\| Y(t, Y_0, X_0) \| \geq \delta$.

Во втором случае, в силу условия 3, имеем, что функция W является положительно определенной относительно компонент вектора Y равномерно относительно компонент вектора X, т. е. $-W \geq \alpha > 0$ [3]. Следовательно, всегда

$$\frac{dV}{dt} \leq -\alpha.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем:

$$V(Y(t, Y_0, X_0), X(t, Y_0, X_0)) \leq -\alpha t + V(Y_0, X_0).$$

Правая часть этого неравенства с ростом t стремится к $-\infty$, а функция V удовлетворяет неравенству

$$V(Y(t,Y_0,X_0),X(t,Y_0,X_0)) \ge \beta > 0;$$
$$\| Y(t,Y_0,X_0) \| \ge \delta > 0.$$

Таким образом, возможен лишь случай 1, а тогда в силу теоремы 1 равновесный режим (2) системы (1) асимптотически устойчив [1].

Теорема доказана.

Пусть векторы $b_j = \nabla\Phi_j / \| \Phi_j \|$ $(j = 1, ..., k)$ определены и линейно независимы в каждой точке M. Построим в каждой точке $m \in M$ ортогональное дополнение к подпространству, натянутому на векторы $b_1, b_2, ..., b_k$ и выберем в нем произвольный ортонормальный базис $b_{k+1}, ..., b_n$. Пусть векторы $b_1, b_2, ..., b_n$ непрерывно дифференцируемы по компонентам вектора X в каждой точке M. Пусть $\rho(X, M)$ – расстояние от точки X до множества M; $S(M,\delta)$ – множество точек X таких, что $\rho(X, M) < \delta$. Введем в рассмотрение P_m – нормальную к M k-мерную плоскость, определяемую уравнениями

$$(X - m, b_s|_{X=m}) = 0, \quad S = k+1, ..., n; \qquad (3)$$

P_m проходит через точку $m \in M$ [2].

Рассмотрим систему n уравнений (2), (3). Применим теорему о неявной функции. Рассмотрим функциональный определитель этой системы относительно компонент вектора m. Если якобиан системы $n-k$ уравнений (3) относительно компонент вектора $m = (m_1, ..., m_{n-k})^*$ отличен от нуля на M, то в некоторой окрестности M существует функция $m = m(X)$, непрерывно дифференцируемая по компонентам вектора X.

Введем новую систему координат $y_1, ..., y_n$ с центром в точке $m \in M$ и ортами $b_1, ..., b_n$. Матрицу перехода обозначим B. Получим следующие соотношения:

$$X = m(X) + BY;$$

$$Y = B^{-1}(X - m(X)) = \Phi(X). \qquad (4)$$

Отметим, что $y_{k+1} \equiv ... \equiv y_n \equiv 0$. Это следует из (3), (4). Составим систему дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют переменные $y_1, ..., y_k$. Из (4), (1) имеем систему

$$\dot{Y} = B^{-1}\left(-\dot{B}Y + \Theta(Y) - \frac{D_m}{DX}\Theta(X) \right), \qquad (5)$$

где $\frac{D_m}{DX} = \frac{D(m_1, ..., m_n)}{D(x_1, ..., x_n)} = \left\{ \frac{\partial m_i}{\partial x_j} \right\}, \quad i, j = 1, ..., n..$

Замечание. Из соотношения (4) мы имеем $Y = B^{-1}(X - m(X)) = \Phi(X)$. В некоторых случаях можно выразить X через Y в формулах (5). Это будет возможно, например, когда функции от X в правой части (5) являются функциями от $\Phi(X)$. Тогда мы получим систему

$$\dot{Y} = G(Y), \qquad (6)$$

где

$$G(Y) = B^{-1}(X(Y))(-\dot{B}Y + \Theta(X(Y)) -$$
$$- \frac{D_m}{DX}(Y)\Theta(X(Y)).$$

Теорема 2. *Для того чтобы равновесный режим (2) системы (1) был устойчив (асимптотически устойчив), необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение системы (6) было устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво по Ляпунову) [3].*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть равновесный режим устойчив (асимптотически устойчив). Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $X_0 \in S(M,\delta)$ выполнено $X(t, X_0) \in S(M, \varepsilon/\sqrt{n})$ для всех $t \ge 0$ $(\rho(X(t, X_0), M) \underset{t\to\infty}{\to} 0)$. Из соотношений (4) следует, что

$$X_0 - m_0 = B_0 Y_0, \quad \| Y_0 \| \le \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Интегральная кривая системы (6) определяется формулой

$$Y(t, Y_0) = B^{-1}(X(t, X_0) - m(X(t, X_0))).$$

Следовательно, при $\| Y_0 \| < \delta\sqrt{n}$ выполняется неравенство

$$\| Y(t, Y_0) \| < \varepsilon \quad (\| Y(t, Y_0) \| \underset{t\to\infty}{\to} 0).$$

Достаточность. Пусть нулевое решение устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво по Ляпунову). Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\| Y_0 \| < \delta$ будем иметь

$\| Y(t,Y_0)\| < \varepsilon\sqrt{n}$ для $t \ge 0$ ($\| Y(t,Y_0)\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$). Тогда, выбрав X_0 так, чтобы Y_0 в равенстве $Y_0 = B^{-1}(X_0 - m_0)$ удовлетворяло неравенству $\| Y_0 \| < \delta$, будем иметь из формулы

$$X(t,X_0) - m(X(t,X_0)) = BY(t,Y_0),$$

что $\rho(X(t,X_0),M) < \varepsilon$ при

$$t \ge 0\ ((\rho(X(t,X_0),M) \underset{t\to\infty}{\to} 0)\ [1].$$

Теорема доказана.

Прогнозирование состояния системы

В качестве примера на применение полученных результатов рассмотрим движение заряженной частицы массой m в постоянном магнитном поле с магнитной индукцией $\mathbf{b}$. Уравнения движения в безразмерной форме имеют вид [2]

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{Y}, \quad m\dot{\mathbf{Y}} = q\mathbf{Y}\times\mathbf{b}, \tag{7}$$

где $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)^*$ – вектор положения частицы (x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты; звездочка – знак транспонирования), т. е. $\mathbf{X}$ – вектор-столбец; $\dot{\mathbf{X}}$ – вектор скорости.

Требуется определить фазовое состояние частицы для любого момента времени, если известно ее начальное состояние при $t = 0$. По определению фазовым состоянием является 6-мерный вектор с компонентами $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$.

Система (7) может быть переписана в следующей форме:

$$\dot{X} = Y, \quad Y = BY, \tag{8}$$

где

$$B = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть задано начальное состояние X_0, Y_0. Тогда, интегрируя вторую группу уравнений (8), получаем формулу

$$Y = \exp(Bt)Y_0. \tag{9}$$

Подставляя выражение(9) в первую группу уравнений (8) и интегрируя в пределах от 0 до t, находим, что

$$X = X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(B\tau)Y_0 d\tau. \tag{10}$$

Изучим поведение фазового состояния (9), (10) при неограниченном изменении времени [2, 3].

Умножая второе уравнение (7) скалярно на $\mathbf{b}$, получаем

$$\mathbf{b}\cdot\dot{\mathbf{Y}} = \frac{q}{m}\mathbf{b}(\mathbf{Y}\times\mathbf{b}).$$

Следовательно, $(b,Y) = \text{const}$, т.е. проекция вектора скорости на направление вектора $\mathbf{b}$ постоянна.

Умножая то же уравнение на вектор скорости $\mathbf{Y}$, получаем:

$$\mathbf{Y}\dot{\mathbf{Y}} = \frac{q}{m}\mathbf{Y}(\mathbf{Y}\times\mathbf{B}).$$

Следовательно, $Y^2 = \text{const.}$, или $Y^2 - Y_0^2$, т. е. квадрат модуля вектора скорости постоянен. Сделаем замену в системе: переменные y_1, y_2, y_3 заменим на x, y, z, причем ось z направим по вектору $\mathbf{b}$, а оси x, y – перпендикулярно к нему таким образом, чтобы система была правой. Вычислим матрицу перехода. Орты новой системы

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{b}}{\| b\|}.$$

В качестве $\mathbf{e}_2$ возьмем любой орт, перпендикулярный $\mathbf{e}_3$, например такой:

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y = \frac{\tilde{\mathbf{b}}}{\| \tilde{b}\|}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = (-b_2, b_1, 0).$$

Тогда $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$. В результате этой замены величина $\mathbf{Y}$ будет иметь вид

$$\mathbf{Y} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Подставив это выражение в дифференциальное уравнение (7), найдем:

$$\dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2 + \dot{z}\mathbf{e}_3 = \frac{q}{m}[x(\mathbf{e}_1\times\mathbf{b}) + y(\mathbf{e}_2\times\mathbf{b})],$$

откуда

$$\dot{x} = \frac{q}{m}\| b\|, \quad \dot{y} = -\frac{q}{m}\| b\|, \quad \dot{z} = 0.$$

Интегрируя последнюю систему уравнений, получаем:

$$x = x_0\cos\omega t + y_0\sin\omega t;$$
$$y = -x_0\sin\omega t + y_0\cos\omega t;$$
$$z = z_0,$$

где $x_0 = (e_1, Y_0)$; $y_0 = (e_2, Y_0)$; $z_0 = (e_3, Y_0)$; $\omega = (q/m)\| B \|$.

Обозначим S матрицу перехода (столбцами ее являются орты e_1, e_2, e_3), а $\eta(t)$ – следующую матрицу:

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Y = S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S\eta(t)S^*(Y_0),$$

откуда

$$\exp Bt = S\eta(t)S^*.$$

Интегрируя уравнение (10), находим:

$$X = X_0 + \sin\omega t\frac{(e_1e_1^* + e_2e_2^*)Y_0}{\omega} +$$
$$+(1-\cos\omega t)\frac{(-e_1e_2^* + e_2e_1^*)Y_0}{\omega} + e_3e_3Y_0t.$$

Перенесем в левую часть члены, не содержащие синусов и косинусов, и запишем выражение для квадрата модуля обеих частей. Выполняется соотношение

$$\left(X - X_0 - e_3e_3^*Y_0t - \frac{(-e_1e_2^* + e_2e_1^*)Y_0}{\omega}\right)^2 = \frac{(e_1Y_0)^2 + (e_2Y_0)^2}{\omega^2}. \quad (11)$$

Начальная скорость Y_0 может быть разложена на две составляющие: продольную – параллельную вектору **b** и поперечную – перпендикулярную вектору **b**, так первая будет равна $(e_3, Y_0)e_3$, а вторая – $(e_1, Y_0)e_1 + (e_2, Y_0)e_2$. Отсюда следует, что величина $(e_1, Y_0)^2 + (e_2, Y_0)^2$ есть квадрат поперечной составляющей. Таким образом, как видно из соотношения (11), заряженная частица остается на цилиндрической поверхности, радиус сечения которой равен отношению величины поперечной составляющей начальной скорости к циклической частоте – это так называемый ларморовский радиус. На цилиндрической поверхности частица совершает равномерное вращательное движение в плоскости, которая равномерно перемещается параллельно самой себе со скоростью, равной величине продольной составляющей начальной скорости, оставаясь перпендикулярной оси цилиндра. При этом параметрическое задание оси цилиндра дается формулой

$$X = X_0 + e_3e_3^*Y_0t + \frac{(-e_1e_2^* + e_2e_1^*)Y_0}{\omega}.$$

Если же поперечная составляющая начальной скорости отсутствует, то частица совершает движение по прямой:

$$X = X_0 + e_3e_3^*Y_0t,$$

и так как $\mathbf{e}_3 = \mathbf{b}/\| b \|$, то будет выполнено равенство

$$X = X_0 + bt\sum_{i=1}^{3}\frac{b_iy_i^0}{b^2}.$$

Движение при отсутствии поперечной составляющей начальной скорости можно назвать равновесным, или установившимся движением.

В теории дифференциальных уравнений такие движения называют уходящими. Они гомеоморфны множеству параллельных прямых [3]. С точки зрения общей теории динамических систем класс таких решений как бы неинтересен. Однако, как показывает разобранный пример, многие задачи динамики заряженных частиц состоят в исследовании такого рода движений с точки зрения качественного анализа поведения изображающей точки в фазовом пространстве системы.

В настоящей статье доказано, что предлагаемые методы, полученные модификацией существующих, в пределах их локальной точности, их не ухудшают. Поэтому можно гарантировать точность, устойчивость, сходимость модифицированных методов, по крайней мере такие же, что и у исходных. Однако предлагаемые методы являются консервативными в том смысле, что они сохраняют существующие равенства, а при решении реальных задач – те физические законы, которым подчиняется исследуемый объект. При уточнении требований к правым частям интегрируемых систем дифференциальных уравнений здесь можно получить

большое число теорем о сходимости устойчивости и точности модифицированных методов. Эти параметры модифицированных методов были установлены в результате широкого вычислительного эксперимента, проведенного в ходе разработки новой электрофизической аппаратуры для задач ускорения и фокусировки пучков заряженных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зубов, Н.В.** Автоматизация проектирования устойчивости и надежности колебательных систем [Текст] / Н.В. Зубов, А.Ф. Зубова. – СПб.: Мобильность-плюс, 2010. – 355 с.

2. **Зубов, А.В.** Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления [Текст] / А.В. Зубов, Н.В. Зубов, Н.И. Зубов. – СПб.: Мобильность-плюс, 2010. – 319 с.

3. **Стрекопытова, М.В.** Исследование равновесных движений [Текст] / М.В. Стрекопытова. – СПб.: СПбГУ, 2007. – 95 с.

УДК 517.97

В.П. Первадчук, Д.Б. Шумкова, Д.Н. Дектярев

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ И ПОЛУЧЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДВУМЕРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Теория оптимального управления распределенными системами, в том числе и системами, описывающими процессы тепломассопереноса, представляет интерес, связанный со спецификой краевых задач, описывающих эти физические явления. В связи с этим важными и актуальными являются вопросы разрешимости задач оптимального управления, а также получение систем оптимальности в своих сильных формах.

Основными целями исследования явились построение обобщенного решения, получение условий разрешимости и системы оптимальности для распределенных систем с компромиссным управлением. Доказана разрешимость и получена оптимизационная система для задачи оптимального управления, описываемой двумерным уравнением теплопроводности с граничным управлением. Изучена задача, линейная относительно функции управления, с распределенным наблюдением и компромиссным управлением, а также интегральным видом целевого функционала.

Рассмотрим задачу оптимального управления системой, описываемой эволюционным уравнением теплопроводности [1]:

$$kC_p\frac{\partial T(t,r,z)}{\partial t}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T(t,r,z)}{\partial r}\right)+ +\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T(t,r,z)}{\partial z}\right), \quad (1)$$

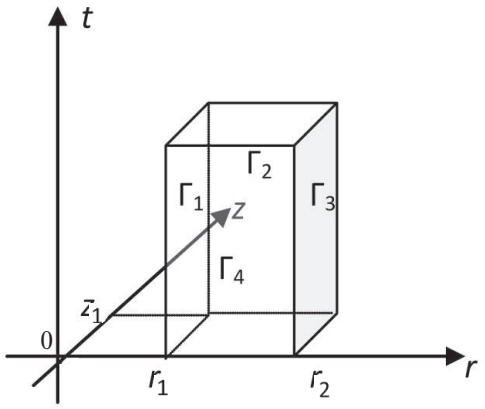
где $T(t,r,z)$ – температура; t – время; k, C_p, λ – плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность материала соответственно, r, z – пространственные переменные. Время $t\in[0;\tau]$, переменные $r\in[r_1;r_2]$, $z\in[0;z_1]$.

Введем обозначения (см. рисунок):

$$[0;\tau]\times[r_1;r_2]\times[0;z_1]\overset{об}{=}\Omega_t;$$

$$\partial\Omega_t\overset{об}{=}\Gamma_t=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4;\ \partial\Omega\overset{об}{=}\partial\Omega_t\big|_{t=0\vee\tau}.$$

Уравнение (1) дополним начальным и граничными условиями вида



Пространственно-временная область решения

$$-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_1} = \sigma\cdot\left(T^4 - T_0^4(t,z)\right) + \alpha_1\cdot\left(T - T_0(t,z)\right); \quad (2)$$

$$T\big|_{z=z_1} = T_2(t,r); \quad (3)$$

$$\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_2} = u(t,z); \quad (4)$$

$$T\big|_{z=0} = T_4(t,r); \quad (5)$$

$$T\big|_{t=0} = T_0(r,z). \quad (6)$$

Функция оптимального управления $u(t, z)$, имеющая смысл мощности теплового источника (граница Γ_3), должна быть найдена как функция, доставляющая минимум функционалу интегрального вида при условии малости параметра α (цены управления):

$$I\left(T(t,r,z),u(t,z)\right) = \int\limits_{\Omega_t}\left[T(t,r,z) - T_d(t,r,z)\right]^2 \times rdrdzdt + \alpha\cdot\left\|u(t,z)\right\|^2 \to \inf, \quad (7)$$

где $T_d(t,r,z)$ – функция, определенная до решения задачи.

В качестве пространства управлений рассмотрим пространство

$$U = L_2\left((0;\tau)\times(0;z_1)\right),$$

а в качестве пространства решений – пространство

$$\Theta = L_2\left((0;\tau);H^1\left((r_1;r_2)\times(0;z_1)\right)\right).$$

Задача управления (1)–(7) является задачей с граничным управлением и распределенным наблюдением, целевой функционал которой явно зависит от функции управления (компромиссное управление).

Нетрудно заметить, что состояние распределенной системы (1)–(6), функция $T(t, r, z)$, линейно зависит от функции управления $u(t, z)$. Таким образом, определен линейный оператор $\Lambda u(t,z) = T(t,r,z)$, который ставит в соответствие каждой функции управления $u(t, z)\in U$ единственное значение функции $T(t, r, z)\in\Theta$. Таким образом, целевая функция (7) принимает следующий вид:

$$I\left(T(t,r,z),u(t,z)\right) = \int\limits_{\Omega_t}\left[\Lambda u(t,z) - T_d(t,r,z)\right]^2 \times rdrdzdt + \alpha\cdot\int\limits_{\Gamma_3} u(t,z)^2\cdot rd\Gamma_3 \to \inf. \quad (8)$$

Дадим определение обобщенного решения задачи (1)–(6) [2, 3].

Определение. *Обобщенным решением задачи (1)–(5) называется функция* $\varphi(t,r,z)\in\Theta$, *удовлетворяющая следующему интегральному соотношению:*

$$\int\limits_{\Omega} T\cdot kC_p\cdot\varphi\Big|_0^{\tau} d\Omega - \int\limits_{\Omega_t} T\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(kC_p\cdot\varphi\right)d\Omega_t =$$

$$= \int\limits_{\Omega_t} T\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varphi}{r}\right)\right)d\Omega_t - \int\limits_{\Gamma_t} Tr\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varphi}{r}\right)d\Gamma_t +$$

$$+\int\limits_{\Gamma_t}\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\cdot\varphi d\Gamma_t + \int\limits_{\Omega_t} T\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\Omega_t -$$

$$-\int\limits_{\Gamma_t}\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot Td\Gamma_t + \int\limits_{\Gamma_t}\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\cdot\varphi d\Gamma_t.$$

Докажем, что задача минимизации (1)–(6), (8) имеет решение. Для этого проверим условия следующей теоремы.

Теорема 1 [5]. *Пусть U – рефлексивное банахово пространство, U_d – непустое замкнутое выпуклое подмножество U. Функционал $I(u): U_d \to R$ удовлетворяет условиям:*

1) *$I(u)$ – выпуклый;*

2) *$I(u)$ – полунепрерывный снизу на множестве U_d;*

3) *$I(u)$ – коэрцитивный.*

Тогда существует элемент $u_0 \in U_d$, *такой, что* $I(u_0) = \inf\limits_{u \in U_d} I(u)$.

Доказательство. Приведем функционал (8) к виду, удобному для проверки условий теоремы 1:

$$I\left(T(t,r,z),u(t,z)\right) = \int\limits_{\Omega_t} \left[\Lambda u(t,z)\right]^2 rdrdzdt - 2\int\limits_{\Omega_t} \left[\Lambda u(t,z)\cdot T_d\right] rdrdzdt + \int\limits_{\Omega_t} \left[T_d\right]^2 rdrdzdt + \alpha \int\limits_{\Gamma_3} u(t,z)^2 \cdot rdrdzdt,$$

где $\int\limits_{\Omega_t} \left[\Lambda u(t,z)\right]^2 rdrdzdt + \alpha \int\limits_{\Gamma_3} u(t,z)^2 \cdot rdrdzdt$ – квадратичная функция по $u(t,z)$, $\int\limits_{\Omega_t} \left[\Lambda u(t,z)\cdot T_d\right]\cdot rdrdzdt$ линейная форма по $u(t,r,z)$; $\int\limits_{\Omega_t} \left[T_d\right]^2 rdrdzdt$ – не зависит от функции управления $u(t,z)$, т. е. является по отношению к управлению постоянной величиной.

Функционал (8) непрерывен на U, а значит, полунепрерывен снизу на множестве U, выпуклый в силу линейности оператора Λ [3, 4], а наличие второго слагаемого обеспечивает его коэрцитивность. Согласно теореме 1, существует единственный элемент u_0, минимизирующий $I(u)$: $I(u_0) = \inf\limits_{u \in U} I(u)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим далее вопросы, связанные с получением системы оптимальности для задачи (1)–(6), (8).

Согласно критерию оптимальности [5], имеем:

$$\delta I(u_0) = 2\int\limits_{\Omega_t} \left[T(t,r,z) - T_d\right]\cdot \dot{T}(t,r,z)\times \times rdrdzdt + 2\alpha \int\limits_{\Omega_t} u_0 \cdot \delta u \cdot rd\Gamma_t = 0, \quad (9)$$

где δI – первая вариация функционала (8); δu – вариация управления; $\dot{T}(t,r,z)$ – производная функции состояния системы $T(t,r,z)$ по управлению $u(t,z)$, вычисленная на минимизирующем элементе u_0.

Проварьируем исходную задачу, т. е. запишем дифференциальную задачу (1)–(6) для функции $\dot{T}(t,r,z)$:

$$kC_p \frac{\partial \dot{T}(t,r,z)}{\partial t} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda \frac{\partial \dot{T}(t,r,z)}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \dot{T}(t,r,z)}{\partial z}\right); \quad (10)$$

$$-\lambda \frac{\partial \dot{T}}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = 4\sigma T^3 \cdot \dot{T} + \alpha_1 \cdot \dot{T},\ \dot{T}\bigg|_{z=z_1} = 0;\ \lambda \frac{\partial \dot{T}}{\partial r}\bigg|_{r=r_2} = \delta u(t,z);\quad \dot{T}\bigg|_{z=0} = 0,\ \dot{T}\bigg|_{t=0} = 0.$$

Умножим правую и левую части уравнения задачи (10) на произвольную функцию $p(t,r,z) \in \Theta$ и проинтегрируем по области Ω_t:

$$\int\limits_{\Omega_t}\left(kC_p \frac{\partial \dot{T}}{\partial t}\right)\cdot pd\Omega_t = \int\limits_{\Omega_t}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial \dot{T}}{\partial r}\right)\cdot pd\Omega_t + \int\limits_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial \dot{T}}{\partial z}\right)\cdot pd\Omega_t.$$

Воспользуемся формулой Грина в левой части один раз, а в правой – два раза, тогда получим:

$$\int\limits_{\Omega} \dot{T}\cdot kC_p \cdot p\Big|_0^{\tau} d\Omega - \int\limits_{\Omega_t} \dot{T}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(kC_p\cdot p\right)d\Omega_t = -\int\limits_{\Omega_t}\left(r\lambda\frac{\partial \dot{T}}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)d\Omega_t + \int\limits_{\Gamma_t}\lambda\frac{\partial \dot{T}}{\partial r}\cdot pd\Gamma_t - \int\limits_{\Omega_t}\lambda\cdot\frac{\partial \dot{T}}{\partial z}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}d\Omega_t + \int\limits_{\Gamma_t}\lambda\frac{\partial \dot{T}}{\partial z}\cdot pd\Gamma_t;$$

$$\int\limits_{\Omega} \dot{T}\cdot kC_p \cdot p\Big|_0^{\tau} d\Omega - \int\limits_{\Omega_t} \dot{T}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(kC_p\cdot p\right)d\Omega_t = \int\limits_{\Omega_t}\dot{T}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)\right)d\Omega_t - \int\limits_{\Gamma_t}\dot{T}r\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)d\Gamma_t + \int\limits_{\Gamma_t}\lambda\frac{\partial \dot{T}}{\partial r}\cdot pd\Gamma_t + \int\limits_{\Omega_t}\dot{T}\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)d\Omega_t - \int\limits_{\Gamma_t}\lambda\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\dot{T}d\Gamma_t + \int\limits_{\Gamma_t}\lambda\frac{\partial \dot{T}}{\partial z}\cdot pd\Gamma_t. \quad (11)$$

Потребуем, чтобы произвольная до сих пор функция $p(t, r, z)$ удовлетворяла дифференциальной задаче, обратной по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(kC_p\cdot p\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)=$$
$$(T-T_d)r;$$
$$p(\tau,r,z)=0;$$
$$\left(-\lambda r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)-\left(4\sigma T^3+\alpha_1\right)\cdot p-\lambda\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}(\lambda p)\right)\Big|_{\Gamma_1}=0;$$
$$\left(\lambda r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)+\lambda\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda p)\right)\Big|_{\Gamma_3}=0;\ p\big|_{\Gamma_2,\Gamma_4}=0. \qquad (12)$$

В силу справедливости соотношений (12), а также начального и граничных условий из (10), интегральноее соотношение (11) может быть существенно упрощено, однако отдельного рассмотрения здесь требуют интегралы по границе, так как на разных ее частях заданы условия разных видов. Далее распишем отдельно интегралы по границе из интегрального тождества (11) для каждой части границы области решения задачи $\Omega_{t'}$. Для части границы Γ_1 имеем:

$$-\int_{\Gamma_1}\dot{T}\lambda r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)d\Gamma_t+\int_{\Gamma_1}\lambda\cdot\frac{\dot{T}\cdot\left(4\sigma T^3+\alpha_1\right)}{-\lambda}\cdot p d\Gamma_t-$$
$$-\int_{\Gamma_1}\lambda\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\dot{T}d\Gamma_t+\int_{\Gamma_1}\lambda\frac{\partial\dot{T}}{\partial z}\cdot p d\Gamma_t=$$
$$=\int_{\Gamma_1}\dot{T}\left(-\lambda r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)-\left(4\sigma T^3+\alpha_1\right)\cdot p-\lambda\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}(\lambda p)\right)-$$
$$-\int_{\Gamma_1}\dot{T}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\lambda p)d\Gamma_t+\int_0^{\tau}\left(\dot{T}\lambda p\big|_{z=z_1,r=r_1}^{z=0,r=r_1}\right)dt.$$

На части границы Γ_3:

$$-\int_{\Gamma_3}\dot{T}\lambda r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)d\Gamma_t+\int_{\Gamma_3}\lambda\cdot\frac{(u-u_0)}{\lambda}\cdot p d\Gamma_t-$$
$$-\int_{\Gamma_3}\lambda\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\dot{T}d\Gamma_t+\int_{\Gamma_3}\lambda\frac{\partial\dot{T}}{\partial z}\cdot p d\Gamma_t=\int_{\Gamma_3}\delta u\cdot p d\Gamma_t+$$
$$+\int_{\Gamma_3}\dot{T}\left(-\lambda r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)-\lambda\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}(\lambda p)\right)d\Gamma_t+$$
$$+\int_0^{\tau}\left(\dot{T}\lambda p\big|_{z=z_1,r=r_2}^{z=0,r=r_2}\right)dt.$$

На частях границы Γ_2 и Γ_4:

$$-\int_{\Gamma_2\cup\Gamma_4}\dot{T}\lambda r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)d\Gamma_t+\int_{\Gamma_2\cup\Gamma_4}\lambda\cdot\frac{\partial\dot{T}}{\partial r}\cdot p d\Gamma_t-$$
$$-\int_{\Gamma_2\cup\Gamma_4}\lambda\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\dot{T}d\Gamma_t+\int_{\Gamma_2\cup\Gamma_4}\lambda\frac{\partial\dot{T}}{\partial z}\cdot p d\Gamma_t.$$

С учетом условия из уравнений (10), (12), равенство (11) перепишется в виде

$$\int_{\Omega_t}\dot{T}(t,r,z)\cdot\left(T(t,r,z)-T_d(t,r,z)\right)\cdot r d\Omega_t+$$
$$+\int_{\Gamma_3}\delta u\cdot p(t,z)d\Gamma_t=0. \qquad (13)$$

Заметим, что первое слагаемое левой части равенства (13) совпадает с интегралом первого слагаемого левой части соотношения (9). С учетом этого совпадения равенство (9) может быть переписано в виде

$$\int_{\Gamma_3}\delta u\cdot\left(-p(t,z)+\alpha\cdot u_0(t,z)\cdot r\right)d\Gamma_t=0.$$

Поскольку вариация $\delta u\neq 0$,

$$\left(-p(t,z)+\alpha\cdot u_0(t,z)\cdot r\right)\big|_{\Gamma_3}\equiv 0.$$

Отсюда следует функциональная зависимость для определения значения функции оптимального управления $u_0(t,z)$ через значение сопряженной функции $p(t, r, z)$:

$$u_0(t,z)=\frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{p(t,z)}{r}\right)\Big|_{\Gamma_3} \qquad (14)$$

Таким образом, получена система оптимальности в своей сильной форме, т. е. в форме системы краевых задач для исходной функции $T(t,r,z)$ и сопряженной функции $p(t,r,z)$ следующего вида:

$$\begin{cases} kC_p\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\dfrac{\partial T}{\partial z}\right), \\ T\big|_{t=0}=T_0(r,z),\ -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial r}\Big|_{\Gamma_1}= \\ =\sigma\cdot\left(T^4(t,z)-T_0^4(t,z)\right)+ \\ +\alpha_1\cdot\left(T(t,z)-T_0(t,z)\right), \\ T\big|_{\Gamma_2}=T_2(t,r),\ \lambda\dfrac{\partial T}{\partial r}\Big|_{\Gamma_3}=\dfrac{p(t,z)}{\alpha\cdot r_2},\ T\big|_{\Gamma_4}= \\ =T_4(t,r); \end{cases} \qquad (15)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(kC_p \cdot p\right)+\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{p}{r}\right)\right)+ \\ +\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\cdot\dfrac{\partial p}{\partial z}\right)=\left(T-T_d\right)\cdot r, \\ T\big|_{t=\tau}=0, \\ \left(-\lambda r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{p}{r}\right)-\left(4\sigma T^3+\alpha_1\right)\times\right. \\ \left.\times p-\lambda\dfrac{\partial p}{\partial z}-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\lambda p\right)\right)\Big|_{\Gamma_1}=0, \\ p\big|_{\Gamma_2}=0,\left(\lambda r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{p}{r}\right)+\lambda\dfrac{\partial p}{\partial z}+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\lambda p\right)\right)\Big|_{\Gamma_3}= \\ =0,\ p\big|_{\Gamma_4}=0. \end{cases} \tag{15}$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема

Теорема 2. *Пара* $(T(t,r,z),u(t,z))$ *образует решение задачи оптимального управления (1)-(6) тогда и только тогда, когда существует функция* $p\left(r,z,t\right)\in\Theta$, *такая что функции* $T(t,r,z)$, $p\left(t,r,z\right)$ *являются решением системы дифференциальных уравнений (15), при этом функция оптимального управления* $u=u_0(t,z)$ *имеет явное выражение вида (14).*

Заметим, что система (15) имеет ряд особенностей, связанных в первую очередь с тем, что задача для сопряженной функции $p\left(t,r,z\right)$ является обратной по времени. Также отметим сильную нелинейность в граничных условиях системы (15).

В заключение отметим, что в работе применена методика, позволяющая изучать вопросы разрешимости и получения явного решения в некоторых классах краевых вариационных задач. При этом значимым моментом является постановка задачи моделирования некоторого физического процесса как задачи оптимального управления системой с распределенными параметрами, функция управления в которую входит линейно, а целевой функционал обладает свойством коэрцитивности. В работе дано теоретическое обоснование разрешимости и получения системы оптимальности. Предложенные в работе модели могут применяться при решении конкретных задач, возникающих в математических моделях реальных процессов и требуют дальнейшей численной реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс, Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [Текст] / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 412 с.

2. **Первадчук, В.П.** Оптимальное управление подвижным тепловым источником [Текст] / В.П. Первадчук, Д.Б. Шумкова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 37–44.

3. **Фурсиков, А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения [Текст] / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 350 с.

4. **Шумкова, Д.Б.** Оптимальное управление в задачах с неизвестными границами и подвижными источниками [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: защ. 21 декабря 2006 г.: утв. 12.10.2007 / Шумкова Дарья Борисовна. – Пермь, 2006. – 111 с. –Библиогр.: с. 108–110.

5. **Экланд, И.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы [Текст] / И. Экланд, Р. Темам. – М.: Мир, 1979. – 325 с.

УДК 621.314.571:51.080(045)

А.И. Федотов, С.К. Лисин

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ МИНИМИЗАЦИИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА СВОЙСТВ ОБЪЕКТОВ

В современных микро-, нано-, а также инфонаправлениях исследований теория минимизации представляет собой наиболее эффективную систему методов определения и оптимизации параметров и свойств в сфере прикладных задач и задач анализа опытов. В теории приближенных вычислений и минимизации проявлялся дефицит функционирующих моделей для исследования систем уравнений, в которых число неизвестных меньше числа уравнений. В соответствии с этим установление математических моделей универсальных и повторяемых опытов [1, 2] имеет определяющее значение. Современные методы теории минимизации, вероятностей и математической статистики характеризуются общностью с методами ранга регрессионного анализа, приближения, линеаризации. При аналитической форме восстановления опытов возникает необходимость применения формализации описания процедур измерений, что позволяет упростить и сократить форму записи экспериментальной информации.

Исследование и описание свойств ряда технических объектов с помощью их приближенных моделей имеет место при оценке результатов наблюдений, например, методом наименьших квадратов, позволяющим минимизировать сумму квадратов отклонений и сумму квадратов приращений искомых параметров. Метод наименьших квадратов позволяет не только определять отклонения расчетной функции, характеризуемые точками, наименее удаленными от эмпирической траектории, но и вероятные ошибки неизвестных параметров. В рамках конкретных метрологических задач экспериментальные зависимости строятся с целью установления связи между независимыми переменными и неизвестными параметрами функций воспроизведения шкал, профилей, отображения результатов, отклонений опытов [3] и др.

При проведении повторяемых опытов часто возникает необходимость построения системы уравнений, содержащей сравнительно небольшое число неизвестных величин по сравнению с общим числом уравнений. В подобных случаях для применения метода наименьших квадратов исходная система уравнений приводится к нормальному виду: в эти исходные уравнения последовательно вводятся мультипликативные коэффициенты первой, второй и т. д. неизвестных величин; видоизмененные уравнения суммируются в пределах одноименной по соответствующей неизвестной величине группе уравнений.

Система, содержащая число уравнений, равное числу неизвестных исходной системы, называется нормальной. Нормальная система уравнений с помощью метода наименьших квадратов позволяет минимизировать отклонения внутри нее самой, а затем путем итераций определять ошибки неизвестных параметров, т. е. обеспечивать наиболее полное снижение их приращений.

При решении линейной задачи исследуемый массив экспериментальных данных представляют в виде системы многочленов. Матричная комбинация системы линейных уравнений записывается в виде

$$\mathbf{Y} = A\mathbf{X}. \qquad (1)$$

В рассматриваемом случае A – матрица коэффициентов системы m линейных уравнений:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix};$$

$\mathbf{X}$ – вектор неизвестных переменных n-линейной системы; $\mathbf{Y}$ – вектор модели решений m-системы.

В этом случае система уравнений относительно неизвестных исследуемого объекта, процесса или опыта имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n; \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n; \qquad (2) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

.....;

$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n. \qquad (2)$$

Матричные преобразования (2) становятся необходимыми при оценке свойств измеряемых объектов [3, 4] метрологических задач, связанных с параметрическим анализом опытов. При этом общей задачей регрессионного анализа является определение связи между неизвестными величинами контролируемых переменных, определяемыми по результатам прямых измерений. Приведенные системы уравнений устанавливаются относительно линеаризованных неизвестных величин или относительно неизвестных величин в первой степени.

Однако в практике измерений и контроля чаще всего неизвестные величины или входят в трансцендентные выражения, или имеют степени высших порядков. Применение метода наименьших квадратов приводит к необходимости численного решения подобных систем уравнений. По типу рассматриваемых задач можно выделить два варианта применения нелинейного метода наименьших квадратов: нелинейная аппроксимация (преобразование исследуемой функции в более простую) и оценивание нелинейных параметров. При этом второй вариант чаще всего используется в прикладных задачах теории измерений.

Исследуем, например, типовую задачу восстановления функциональной зависимости, теоретическая модель которой имеет вид

$$y = f(x; u).$$

Исследуемая функция $f(x; u)$ является нелинейной зависимостью от значений u_i вектора $u = (u_1, u_2, ..., u_m)_t$, которые подлежат определению. Будем полагать, что с учетом контролируемых переменных $x = x_i$, $i = 1, 2, ..., n$ производится отдельное измерение y_i, обусловленное его случайной погрешностью s_i:

$$y_i = f(x_i; u) + s_i.$$

Матричная комбинация системы нелинейных уравнений будет иметь вид

$$A(\mathbf{u}) = \mathbf{Y} - \mathbf{s}. \qquad (3)$$

Представим элементы матрицы исходного векторного пространства t для пространства наблюдений n зависимостями:

$$A(\mathbf{u}) = (f(x_1,\mathbf{u}), f(x_2,\mathbf{u}), ..., f(x_n,\mathbf{u}))_t;$$

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, ..., y_m)_t; \mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_m)_t.$$

К нелинейной задаче восстановления (3) сводятся также многомерные регрессионные задачи, теоретические модели которых имеют вид

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_k, \mathbf{u}),$$

где $x_1, x_2, ..., x_k$ – регрессоры (независимые переменные), а функция f нелинейно зависит от компонент искомого вектора $\mathbf{u}$.

Пусть компоненты s_i вектора погрешностей $\mathbf{s}$ имеют одинаковую дисперсию σ^2 и не имеют статистической связи. Определим оценку искомого вектора $\mathbf{u}$ нелинейной регрессионной модели (3) с помощью одного из типовых метрических равенств:

$$\hat{u} = \arg\min \|A(\mathbf{u}) - \mathbf{Y}\|^2. \qquad (4)$$

Иначе говоря, оценка $\hat{u}$ характеризуется квадратичной нормой невязки вида (4) и может быть представлена функционалом $G(u)$:

$$G(u) = \sum_{i=1}^{n} (A_i(u) - y_i)^2,$$

где $A_i(u)$ – компонента вектор-функции $A(\mathbf{u})$.

Процедуру вычисления оценок (4) можно выполнить, используя общие методы минимизации функционалов, например классический метод Ньютона или градиентные методы нахождения локального максимума (минимума) функций. Однако для решения указанной задачи анализа наблюдений, учитывая разновидность минимизируемого функционала $G(u)$, можно использовать специальные итерационно-вычислительные алгоритмы, более эффективные по точности, чем основанные на общих методах решения экспериментальных задач.

К числу специальных вычислительных методов относится итерационный метод Ньютона – Гаусса. Процедура нахождения решений указанным методом включает замену нелинейной задачи метода наименьших квадратов линейной задачей. Предположим, что по условию опыта мы имеем n уравнений, связывающих результат измерения y_i, контролируемую переменную x_i и неизвестные параметры модели $a_1, a_2, ..., a_m$:

$$Y_i = f(a_1, a_2, ..., a_m; x_i), \; i = 1, 2, ..., n.$$

Неизвестные параметры $a_1, a_2, ..., a_m$ находятся из условия минимума квадратичного функционала G:

$$G = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(a_1, a_2, ..., a_m; x_i))^2 . \qquad (5)$$

В качестве начальных приближений оцениваемых параметров выберем значения $a_1^0, a_2^0, ..., a_m^0$ и разложим нелинейную функцию $f(a_1, a_2, ..., a_m; x_i)$ в ряд Тейлора в окрестности выбранной точки a^0, ограничив разложение линейными членами. При этом исходный функционал G будет представлен функционалом G_1:

$$G_1 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(a_1^0, a_2^0, ..., a_m^0; x_i) - \\ - \frac{\partial f}{\partial a_1}\Big|_0 \Delta a_1 - \frac{\partial f}{\partial a_2}\Big|_0 \Delta a_2 - ... - \frac{\partial f}{\partial a_m}\Big|_0 \Delta a_m)^2. \qquad (6)$$

В точках локальных минимумов частные производные (6) должны обращаться в нуль. Приравняв значения производных нулю, получим систему линейных уравнений относительно приращений искомых параметров Δa_1, Δa_2, ..., Δa_m в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial f}{\partial a_1}\Delta a_1 \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial f}{\partial a_m}\Delta a_m = \\ = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(a_1^0, a_2^0, ..., a_m^0; x_i)\frac{\partial f}{\partial a_1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial a_m}\frac{\partial f}{\partial a_1}\Delta a_1 \cdots \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial a_m}\frac{\partial f}{\partial a_m}\Delta a_m = \\ = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(a_1^0, a_2^0, ..., a_m^0; x_i)\frac{\partial f}{\partial a_m}. \end{cases} \qquad (7)$$

Решая нормальную систему уравнений (7) методом обратной матрицы, определим приращения параметров $\Delta a_1, \Delta a_2, ..., \Delta a_m$. Процесс нахождения решений системы определяется выбором начальных приближений параметров $a_1^0, a_2^0, ..., a_m^0$ по алгоритму

$$a_1^{k+1} = a_1^k + \Delta a_1^k, \quad ..., \quad a_m^{k+1} = a_m^k + \Delta a_m^k .$$

Итерационный процесс нахождения решений будет сходящимся, если функционалы G и G_1 эквивалентны относительно их общего минимума, а разложение функции $f(a_1, a_2, ..., a_m; x_i)$ в ряд Тейлора будет выполнено в линейном приближении.

Однако решение может оказаться расходящимся, и приращения параметров будут слишком большими. В этом случае целесообразно использовать итерационный процесс, например процесс Левенберга – Марквардта. В соответствии с указанным методом вводится эквивалентный функционал, характеризующий наличие поправок к функционалу G_1 вида

$$q_1 \Delta a_1^2 + q_2 \Delta a_2^2 + ..., \qquad (8)$$

где q_1, q_2 – безразмерные коэффициенты приближения.

Использование функционала вида (8) позволяет минимизировать сумму квадратов отклонений и их приращений относительно искомых коэффициентов исходной системы уравнений.

Таким образом, с точки зрения регрессионного анализа становятся актуальными не только задачи восстановления функций или систем уравнений, устанавливающих связь между контролируемыми переменными и результатами наблюдений, но и задачи установления аналитических зависимостей, использование которых в моделях приближенных вычислений обеспечивает адекватное отражение свойств и параметров исследуемых объектов с помощью результатов наблюдений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Линник, Ю.В.** Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений [Текст] / Ю.В. Линник. – Л.: Физматгиз, 1962. – 352 с.

2. **Шишкин, И.Ф.** Теоретическая метрология. Ч. 1. Общая теория измерений: учеб-метод. комплекс [Текст]: Учеб. пособие / И.Ф. Шишкин; 3-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008. – 189 с.

3. **Лисин, С.К.** Использование теории переноса ошибок при оценке параметров нелинейных систем [Текст] / С.К. Лисин, А.И. Федотов. – Научно-технические ведомости СПбГПУ. Наука и образование. –2009. – № 3 (84). – С. 184 – 187.

4. **Лисин, С.К.** Теория и средства измерений [Текст] / С.К. Лисин, А.И. Федотов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 260 с.

УДК 004.032.26+519.63:517.951

А.Н. Васильев, Д.А. Тархов

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ КЛАССИЧЕСКИХ И НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Системы с распределенными параметрами, как правило, описываются краевыми или начально-краевыми задачами для уравнений в частных производных. На практике помимо дифференциальных уравнений и соотношений, описывающих с помощью формул необходимую информацию о системе (или часть такой информации): свойство симметрии, законы сохранения, уравнения состояния, граничные условия и условия стыка и т. п., – возможно также задание дополнительной неформализуемой информации: например, в виде известных приближенно экспериментальных данных. Предлагаемый нами унифицированный подход [1, 5, 17, 19 – 22] позволяет объединить в нейросетевой модели разнородную информацию о системе. Его можно эффективно применять для решения задач, данных в неклассической постановке, обратных задач, для построения регуляризаций решений некорректных задач. К таким задачам, в частности, относятся задачи построения параметризованных моделей. Подобная постановка возникает в случае, когда требуется исследовать поведение решения в зависимости от некоторого параметра, идентифицировать значение параметра по данным измерений или когда определяющие моделируемую систему характеристики известны не точно, а заданы значениями, распределенными в некоторых интервалах, – интервальными параметрами.

Важность подобных задач привела к возникновению нескольких принципиально разных подходов к их постановке и решению. Во-первых, во многих работах параметры предполагаются случайными и, соответственно, решение является случайной функцией, а это приводит к задачам определения ее характеристик – математического ожидания и прочих. Во-вторых, параметры могут рассматриваться как интервально заданные величины, и в соответствующем виде ищутся решения.

Мы рассматриваем классическую постановку, т. е. параметры включаются в число аргументов искомой функции, которая является приближенным решением задачи. Таким образом, находится продолжение функции по параметрам. Обычно в такой постановке решение ищут в виде разложения по малому параметру. Наш подход представляется более непосредственным.

Сущность нейросетевого подхода к построению приближенных параметрических моделей

При рассмотрении подобных задач мы применяем развиваемый нами нейросетевой подход к построению устойчивых приближенных моделей сложных систем (см., например, работы [1 – 6, 14 – 21] и другие публикации), модифицировав его соответствующим образом. Он успешно был использован и при моделировании системы с сосредоточенными параметрами в случае их неточного задания: описание процесса тепломассопереноса в гранулах пористого катализатора [7].

Поясним суть этого подхода на простейшей (вообще говоря, нелинейной) краевой задаче:

$$A(u) = g,\ \ u = u(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} \in \Omega \subset R^p,\ \ B(u)\Big|_{\Gamma} = f, \quad (1)$$

где $A(u)$ – некоторый дифференциальный оператор, т. е. алгебраическое выражение, содержащее обыкновенные или частные производные от неизвестной функции u; $B(u)$ – оператор, позволяющий задать граничные условия; Γ – граница области Ω.

Модификация задачи состоит в том, что в ее постановку входят параметры $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k)$, меняющиеся на некоторых интервалах $r_i \in (r_i^-; r_i^+), i = 1, \ldots, k$; меняется и представление для приближенного решения задачи:

$$A(u, \mathbf{r}) = g(\mathbf{r}),\ \ u = u(\mathbf{x}, \mathbf{r}),$$
$$\mathbf{x} \in \Omega(\mathbf{r}) \subset R^p,\ \ B(u, \mathbf{r})\Big|_{\Gamma(\mathbf{r})} = f(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Ищем приближенное решение задачи (2) в виде выхода искусственной нейронной сети заданной архитектуры:

$$u(\mathbf{x},\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} c_i v_i(\mathbf{x},\mathbf{r},\mathbf{a}_i), \qquad (3)$$

веса которой – линейно входящие параметры c_i и нелинейно входящие параметры $\mathbf{a}_i$ – определяются в процессе поэтапного обучения сети на основе минимизации функционала ошибки вида

$$J(u) = \sum_{j=1}^{M} \left| A(u(\mathbf{x}_j,\mathbf{r}_j)) - g(\mathbf{x}_j,\mathbf{r}_j) \right|^2 + \\ + \delta \sum_{j=1}^{M'} \left| B(u(\mathbf{x}'_j,\mathbf{r}'_j)) - f(\mathbf{x}'_j,\mathbf{r}'_j) \right|^2. \qquad (4)$$

Здесь $\{\mathbf{x}_j,\mathbf{r}_j\}_{j=1}^{M}$ – периодически перегенерируемые пробные точки в области $\Omega(\mathbf{r}_j)\times\prod_{i=1}^{k}\left(r_i^-;r_i^+\right)$; $\{\mathbf{x}'_j,\mathbf{r}'_j\}_{j=1}^{M'}$ – пробные точки на ее границе $\Gamma(\mathbf{r}'_j)$; δ –положительный штрафной параметр.

Нейронная сеть (3), задающая приближенное решение задачи в этом случае, может включать однотипные нейроэлементы $v_i = v$, порожденные одной и той же активационной функцией (например, гауссианы), но может иметь и более сложную гетерогенную структуру (см. далее примеры).

Построение нейросетевой модели температурного поля в случае интервально заданного коэффициента температуропроводности

Построение по начально-краевым данным. В этом разделе рассмотрена классическая постановка начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в предположении, что коэффициент температуропроводности известен приближенно: его значения r лежат в некотором интервале. Подчеркнем, что искомое приближенное решение зависит от этого параметра как от входной переменной, за границами данного интервала задача не рассматривается и решение не строится.

Постановка задачи имеет вид

$$u_t = r u_{xx}, \ \ (x;t)\in(0;1)\times(0;T), \ \ r\in(r^-;r^+);$$

$$u(x,0,r) = \varphi(x), \ \ x\in(0;1),$$

$$u(0,t,r) = u(1,t,r) = 0, \ \ t\in[0;T]. \qquad (5)$$

Будем искать приближенное решение задачи в виде выхода нейронной сети:

$$u(x,t,r) = \sum_{i=1}^{N} c_i \exp\Big[-a_i(x-x_i)^2 - \\ - b_i(x-x_i)(t-t_i) - d_i(t-t_i)^2\Big]\times \\ \times th(p_i(r-r_i)), \ \ r\in(r^-;r^+).$$

Обучение сети осуществляется через минимизацию функционала ошибки:

$$J(u) \overset{def}{=} J(\mathbf{w}) = J_1(\mathbf{w}) + \delta_b J_b(\mathbf{w}) + \delta_C J_C(\mathbf{w}),$$

где $\mathbf{w} = (w_1,\ldots,w_N)$ – вектор весов сети;

$$J_1(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{N_1}\left\{u_t(\xi_j,\tau_j,\eta_j) - r_j u_{xx}(\xi_j,\tau_j,\eta_j)\right\}^2$$

– слагаемое, отвечающее уравнению;

$$J_b(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{N_b}\left\{u^2(0,\tau_j,\eta_j) + u^2(1,\tau_j,\eta_j)\right\}$$

– слагаемое, отвечающее граничным условиям;

$$J_C(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{N_C}\left\{u(x_j,0,r_j) - \varphi(x_j)\right\}^2$$

– слагаемое, отвечающее начальным условиям (одинаковым для образцов с разными значениями r); $\delta_b,\delta_C > 0$ – «штрафные» множители.

Здесь в слагаемых $J_1(\mathbf{w})$ и $J_b(\mathbf{w})$ используются периодически перегенерируемые пробные точки:

$\left\{\left(\xi_j,\tau_j,\eta_j\right)\right\}_{j=1}^{N_1}$ – в области

$$\Omega = (0;1)\times(0;T)\times(r^-;r^+);$$

$\left\{\left(0,\tau_j,\eta_j\right),\left(1,\tau_j,\eta_j\right)\right\}_{j=1}^{N_b}$ – на частях границы.

Для подбора структуры используется вариант метода растущих сетей с отбраковкой

добавляемых элементов [5, 19 – 21]. Основная идея состоит в том, что нейроны добавляются последовательно, поэтому на каждом шаге производится минимизация функционала, зависящего от меньшего числа переменных, а нейроны, добавленные ранее, остаются при этом «замороженными». В процессе данного исследования была реализована растущая сеть с добавлением нейронов по одному с обучением всей сети после очередного добавления. После каждого добавления нейрона и его обучения вычисляется ошибка на тестовой выборке сети с добавленным нейроном и без него. Если добавление нейрона не приводит к уменьшению ошибки, то он удаляется из сети.

Приведем некоторые результаты вычислений. Выбранные значения параметров для рассмотренных примеров применения нейросетевого подхода сведены для удобства в табл. 1. Для каждого примера указано число нейронов, а также максимальные, минимальные и средние значения параметра r. В подписях к рисункам указаны номера примеров из табл. 1.

Таблица 1

Выбранные значения исходных данных для рассмотренных примеров применения нейросетевого подхода в классической постановке

Номер примера	Число нейронов	Значение параметра			Амплитуда зашумления начальных данных
		r^-	r^+	r^a	
1	153	0,50	2,00	1,25	0
2					0,01
3	158				0,1
4					1,0
5		– 0,5	0,5	0,0	0,1

Примечания. Для всех случаев число попыток добавить нейрон составляло 200. Начальные данные выражены функцией $\varphi(x) = \sin(\pi x)$.

Пример 1. При наборе исходных значений базовых переменных, представленных в табл. 1, рассматриваются начальные данные без зашумления; другими словами, амплитуда зашумления равна нулю. На рис. 1 представлено восстановление начальных условий φ и ошибка $\Delta\varphi$ восстановления начальных условий в зависимости от значений параметра r.

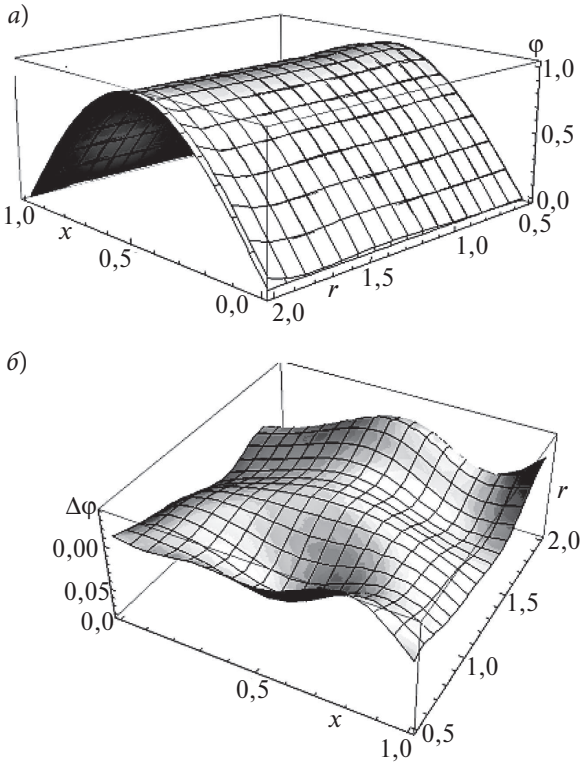


Рис. 1. Пример 1 (см. табл. 1). Восстановление начальных условий (*а*) и ошибка восстановления (*б*) в зависимости от значений параметра r

Пример 2. Если амплитуда зашумления начальных данных $\varphi(x) = \sin(\pi x)$ равна 0,01, то вид решения, по сравнению с решением примера 1, меняется мало. Ввиду ограниченного объема статьи приводим лишь некоторые иллюстрации. Интересными являются графики восстановления начальных данных при среднем и крайних значениях параметра (рис. 2). Здесь и далее точками показаны зашумленные начальные данные, использовавшиеся при обучении сети. Восстановление практически идеальное при $r^a = 1,25$. Качество восстановления на границе ($r^- = 0,5$, $r^+ = 2,0$) заметно ухудшается.

Пример 3. По сравнению с примером 2 немного увеличилось число нейронов; амплитуда зашумления начальных данных $\varphi(x) = \sin(\pi x)$ увеличена в десять раз – равна 0,1. Поскольку вид решения меняется незначительно, приведем только результаты вычислений, аналогичных представленным на рис. 2 (рис. 3).

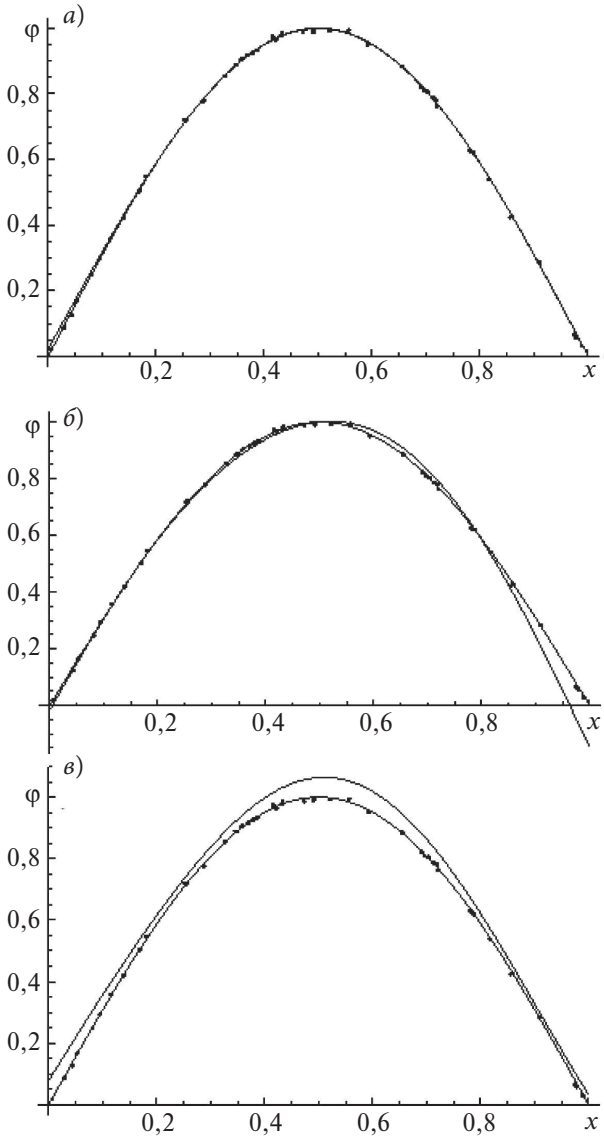


Рис. 2. Пример 2. Восстановление начальных условий при среднем (*а*), минимальном (*б*) и максимальном (*в*) значениях параметра *r*

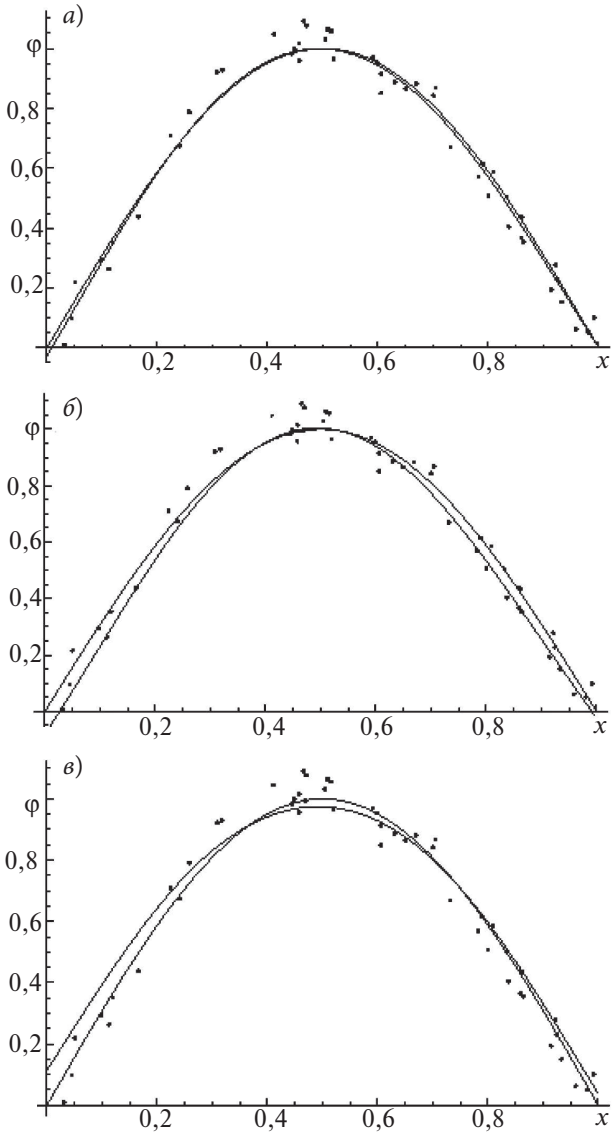


Рис. 3. Пример 3. Восстановление начальных условий при среднем (*а*), минимальном (*б*) и максимальном (*в*) значениях параметра *r*

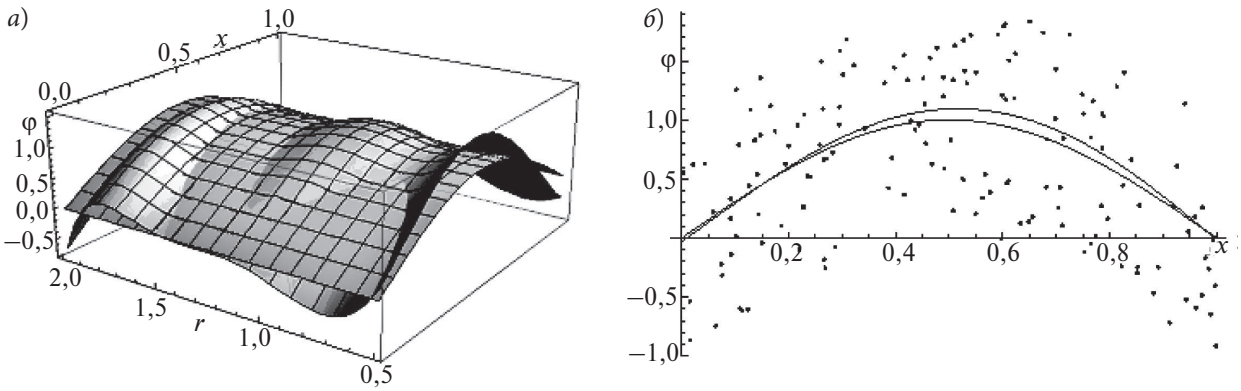


Рис. 4. Пример 4. Восстановление начальных условий в зависимости от параметра (*а*) и 2D-изображение восстановления при среднем значении параметра *r* (*б*)

Для нейросетевого подхода характерно, что ошибка восстановления существенно меньше ошибки в исходных данных.

Пример 4. Если амплитуда зашумления начальных данных $\varphi(x) = \sin(\pi x)$ равна 1,0 (вновь увеличена на порядок), то характерные особенности решения все еще не теряются (рис. 4).

Пример 5. Немного хуже получаются результаты для $r \in (-0,5; 0,5)$, т. е. когда коэффициент температуропроводности меняет знак. Приведем результаты для случая, когда ампли-

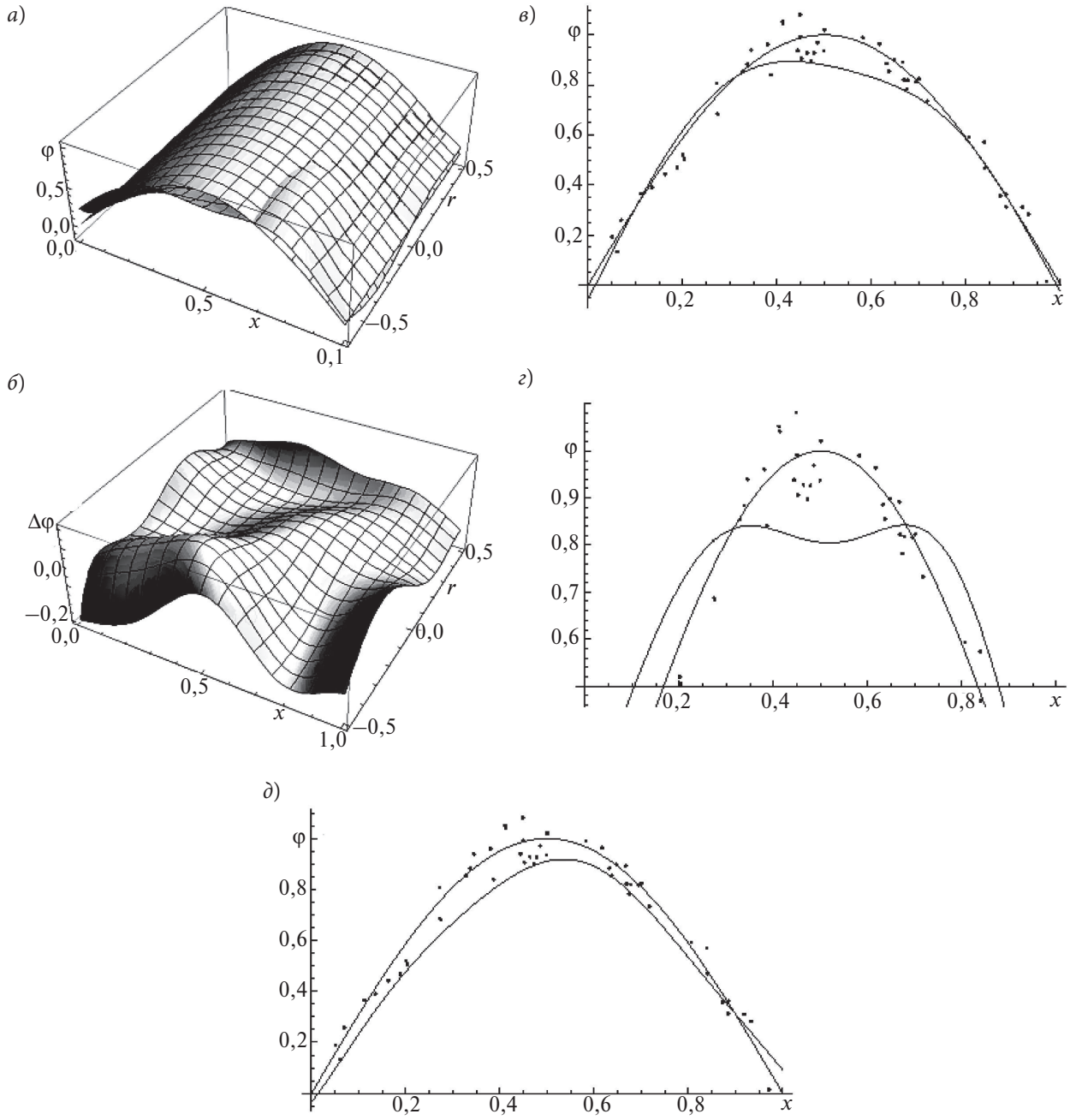


Рис. 5. Пример 5 (см. табл. 1). Восстановление начальных условий (*а*), ошибка восстановления (*б*) в зависимости от значений параметра *r,* а также восстановление начальных условий при среднем (*в*), минимальном (*г*) и максимальном (*д*) значениях параметра *r*

туда зашумления начальных данных $\varphi(x) = \sin(\pi x)$ равна 0,1 (рис. 5).

Результаты нейрокомпьютинга показали, что и в случае зашумленных данных Коши возможно продолжение решения по параметру r в достаточно широкий интервал изменения, причем увеличение амплитуды шума от значения 0,01 до значения 0,1 по существу не влияет на полученное нейросетевое решение. Дальнейшее увеличение амплитуды шума увеличивает погрешность восстановления, однако не меняет качественный характер решения.

Построение по экспериментальным данным. В данном разделе рассмотрена модификация решавшейся ранее задачи [19–22] восстановления температурного поля по экспериментальным данным при условии, когда остывающие образцы имеют разный коэффициент температуропроводности. При этом начальное распределение температуры одинаково. Такая постановка задачи является неклассической.

Формальная постановка задачи выглядит следующим образом:

$$u_t = r u_{xx}, \quad (x;t) \in (0;1)\times(0;T), \quad r \in (r^-; r^+);$$
$$u(0,t,r) = u(1,t,r) = 0, \quad t \in [0;T]; \qquad (6)$$
$$u(x_i, t_i, r_i) = f_i, i = 1, \ldots, N_d .$$

Будем искать решение задачи в виде

$$u(x,t,r) = \sum_{i=1}^{N} c_i \exp\Big[-a_i(x-x_i)^2 - \\ - b_i(x-x_i)(t-t_i) - d_i(t-t_i)^2\Big]\times \qquad (7)$$
$$\times th(p_i(r-r_i)), \quad r \in (r^-; r^+).$$

Подбор весов осуществлялся через минимизацию функционала ошибки, который в данной задаче имел вид:

$$J(u) \overset{def}{=} J(\mathbf{w}) = J_1(\mathbf{w}) + \delta_b J_b(\mathbf{w}) + \delta_d J_d(\mathbf{w}),$$

где $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_N)$ – вектор весов сети;

$$J_1(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{N_1} \left\{u_t(\xi_j, \tau_j, \eta_j) - r_j u_{xx}(\xi_j, \tau_j, \eta_j)\right\}^2$$

– слагаемое, отвечающее дифференциальному уравнению;

$$J_b(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{N_b} \left\{u^2(0, \tau_j, \eta_j) + u^2(1, \tau_j, \eta_j)\right\}$$

– слагаемое, отвечающее граничным условиям;

$$J_d(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{N_d} \left\{u(x_j, t_j, r_j) - f_j\right\}^2$$

– слагаемое, отвечающее «экспериментально полученным» значениям; $\delta_b, \delta_d > 0$ – «штрафные» множители.

Здесь в слагаемых $J_1(\mathbf{w})$ и $J_b(\mathbf{w})$ используются периодически перегенерируемые пробные точки:

$$\left\{\left(\xi_j, \tau_j, \eta_j\right)\right\}_{j=1}^{N_1} \text{ – в области}$$
$$\Omega = (0;1)\times(0;T)\times(r^-; r^+);$$

$$\left\{\left(0, \tau_j, \eta_j\right), \left(1, \tau_j, \eta_j\right)\right\}_{j=1}^{N_b} \text{ – на частях границы.}$$

Помимо применявшихся ранее методов подбора весов сети [1, 5, 19, 20] тестировались различные способы сочетания нейросетевого и классического подходов (представлены ниже).

1. Использование вместо гауссианов функций сплайнового вида с компактным носителем и постоянными параметрами (характерных для метода конечных элементов); при этом минимизацией функционала подбираются только линейно входящие коэффициенты (см. c_i в выражении (7)).

2. В отличие от предыдущего способа, методами нелинейной оптимизации подбираются все параметры сплайнов.

3. Подбираются не только параметры сплайнов, но и их количество с использованием одного из эволюционных алгоритмов, приведенных в книге [1].

4. После применения одного из трех предыдущих методов сплайновые функции приближаются нейросетевыми вида (7) с последующим пересчетом коэффициентов c_i.

5. В отличие от предыдущего способа, нейронная сеть дообучается, т. е. методами нелинейной оптимизации подбираются все веса сети.

6. Уточняется и структура сети, а не только ее веса.

7. В вариантах 3 – 5 сплайновые и нейросетевые функции меняются местами, т. е. сначала обучается нейронная сеть, затем гауссианы аппроксимируются сплайнами, параметры которых уточняются при необходимости.

8. Обучается нейронная сеть с помощью выбранного эволюционного алгоритма, а затем коэффициенты c_i подбираются с помощью решения соответствующей линейной системы, как это происходит для данных задач, когда применяется один из классических методов сеток или конечных элементов.

При решении данной задачи наилучшие результаты показал последний подход. В качестве эволюционного алгоритма, как и ранее, применялся метод добавления и дообучения одного нейрона с последующей проверкой целесообразности сохранения добавленного нейрона.

Приведем некоторые результаты вычислений для неклассической постановки. Как и ранее, значения параметров для рассмотренных примеров применения нейросетевого подхода удобно свести в табл. 2. Для каждого примера указано число нейронов, а также максимальные, минимальные и средние значения параметра r. В подписях к рисункам указаны номера примеров из табл. 2.

П р и м е р 6. При наборе исходных значений базовых переменных, представленных в табл. 2, рассматриваются экспериментальные данные со слабым зашумлением: максимальная ошибка в их задании равна 0,01. На рис. 6 представлено восстановление начальных условий φ и ошибка Δφ восстановления начальных условий в зависимости от значений параметра r.

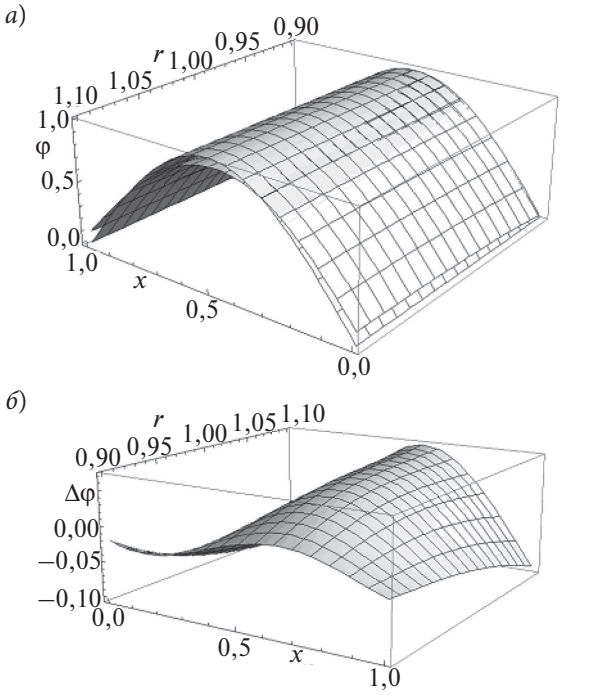


Рис. 6. Пример 6. Восстановление начальных условий (*а*) и ошибка восстановления начальных условий (*б*) в зависимости от параметра r

Ошибка в определении решения при других значениях времени также невелика.

П р и м е р 7. Увеличение интервала изменения параметра не влияет существенным образом на ошибки восстановления. Приведем результат для $r^- = 0{,}5$, $r^+ = 1{,}5$: число нейронов уменьшилось до 159, остальные параметры – прежние, по сравнению с использованными в примере 6 (рис. 7). Ошибка в определении решения при других значениях времени $t \in (0;T)$, здесь $T = 1$, также невелика.

Таблица 2

Выбранные значения исходных данных для рассмотренных примеров применения нейросетевого подхода в неклассической постановке

Номер примера	Число нейронов	Значение параметра			Амплитуда зашумления экспериментальных данных
		r^-	r^+	r^a	
6	172	0,9	1,1	1,0	0,01
7	159	0,5	1,5	1,0	0,01
8	159	0,5	1,5	1,0	0,1

П р и м е ч а н и я. Для всех случаев число попыток добавить нейрон составляло 200. Начальные данные во всех примерах предполагаются одинаковыми, они неизвестны и подлежат определению. Набор данных эксперимента состоит из $N_d = 150$ «измерений».

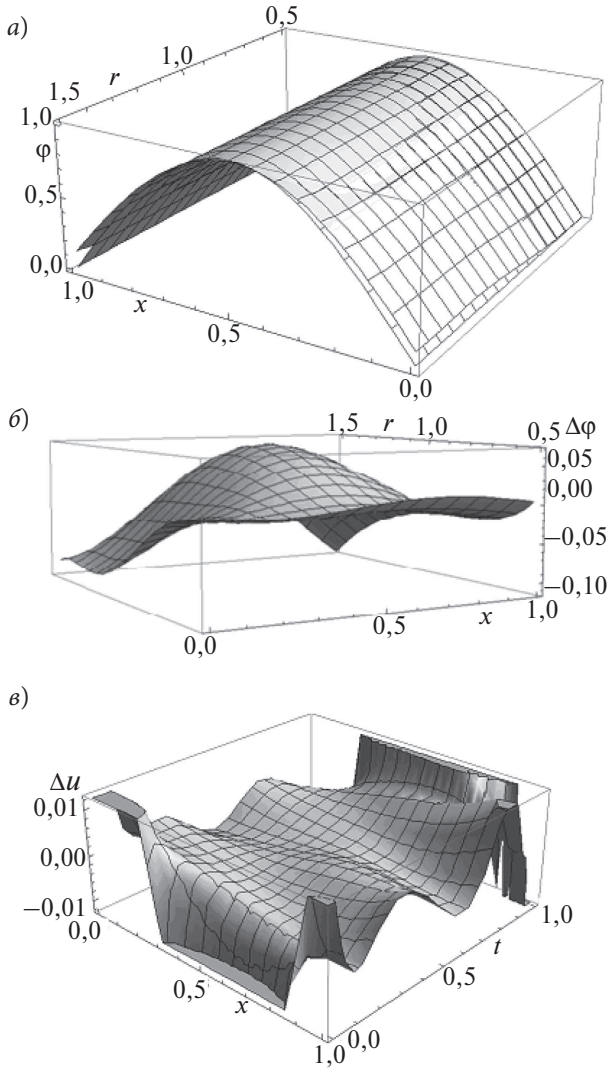


Рис. 7. Пример 7. Восстановление начальных условий (а) и ошибка восстановления начальных условий (б) в зависимости от параметра r, а также ошибка восстановления решения (в) при среднем значении параметра $r^a = 1$ для разных значений времени

Пример 8. Рассмотрим случай, когда при том же интервале изменения параметров ошибка в задании экспериментальных данных имеет равномерное распределение с амплитудой 0,1. Результаты нейрокомпьютинга приведены на рис. 8.

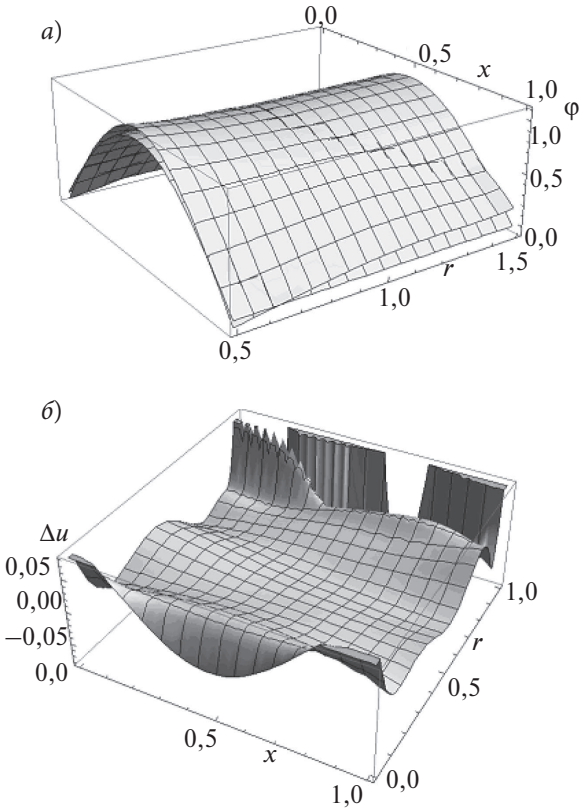


Рис. 8. Пример 8. Восстановление начальных условий (*а*) в зависимости от параметра r, а также ошибка восстановления решения (*б*) при среднем значении параметра $r^a = 1$ для разных значений времени

Итак, предлагаемый подход представляет собой определенную процедуру применения разработанного авторами унифицированного метода построения приближенных параметрических решений задач с уточняемой постановкой, которая может и отличаться от классической (в частности, быть некорректной). Он не приводит к «кризису размерности», позволяет рассматривать случаи неточно заданных коэффициентов, задачи со сложной геометрией; при этом соответствующие алгоритмы допускают естественное распараллеливание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев, А.Н.** Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения [Текст] / А.Н. Васильев, Д.А. Тархов. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2009. – 528 с.

2. **Васильев, А.Н.** Нейросетевое моделирование в математической физике [Текст] / А.Н. Васильев // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2009. – № 5. – С. 25–38.

3. **Васильев, А.Н.** Нейросетевая методология построения приближенных математических моделей распределенных систем [Текст] / А.Н. Васильев,

Д.А. Тархов // Труды научно-методического семинара кафедры высшей математики. Вып. 1. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – С. 115–170.

4. **Васильев, А.Н.** Построение приближенных математических моделей распределенных систем на основе нейросетевой методологии [Текст]/ А.Н. Васильев// Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2007. – № 9. – С. 103–116.

5. **Васильев, А.Н.** Унифицированный процесс моделирования физико-технических объектов с распределенными параметрами [Текст] / А.Н. Васильев, В.П. Осипов, Д.А. Тархов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2010. – № 3(104). – С. 39–52.

6. **Тархов, Д.А.** Нейронные сети: модели и алгоритмы. Кн. 18. [Текст] / Д.А. Тархов. – М.: Радиотехника, 2005. – 256 с.

7. **Васильев, А.Н.** Нейросетевое решение задачи о пористом катализаторе [Текст] / А.Н. Васильев, Д.А. Тархов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2008. – № 6 (67). – С. 110–113.

8. **Hlavacek, V.** Modelling of chemical reactors. Part X [Текст] / V. Hlavacek, M. Marek, M. Kubicek // Chem. Eng. Sci. – 1968. – Vol. 23. – P. 1083–1097.

9. **Kubicek, M.** Solution of nonlinear boundary value problems. Part VIII [Текст] / M. Kubicek, V. Hlavacek// Chem. Eng. Sci. – 1974. – Vol. 29. – P. 1695–1699.

10. **Дмитриев, С.С.** Перенос тепла и массы в пористом катализаторе [Текст] / С.С. Дмитриев, Е.Б. Кузнецов // Матер. VI Междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях – NPNJ-2006, СПб. – М.: Вузовская книга, 2006. – С. 159–160.

11. **Lahae, M.E.** Solution of systems of transcendental equations [Текст] / M.E. Lahae // Acad. R. Belg. Bull.Cl. Sci. 5. – 1948. – P. 805– 822.

12. **Кузнецов, Е.Б.** Наилучшая параметризация при построении кривой итерационным методом [Текст] / Е.Б. Кузнецов // Докл. РАН. – 2004. – Т. 396, № 6. – С. 746–748.

13. **На, Ц.** Вычислительные методы решения прикладных граничных задач [Текст] / Ц. На. – М.: Мир, 1982. – 296 с.

14. **Васильев, А.Н.** Нейросетевые подходы к решению краевых задач в многомерных составных областях [Текст] / А.Н. Васильев, Д.А. Тархов // Известия ТРТУ. – 2004. – № 9. – С. 80 – 89.

15. **Васильев, А.Н.** Применение искусственных нейронных сетей к моделированию многокомпонентных систем со свободной границей [Текст] / А.Н. Васильев, Д.А. Тархов// Известия ТРТУ. – 2004. – № 9. – С. 89–100.

16. **Васильев, А.Н.** Расчет теплообмена в системе «сосуды–ткани» на основе нейронных сетей [Текст] / А.Н. Васильев, Д.А. Тархов // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2006. – № 7. – С. 48–53.

17. **Васильев, А.Н.** Сравнительный анализ традиционного и нейросетевого подходов к построению приближенной модели калибратора переменного давления [Текст] / А.Н. Васильев // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2007. – № 9. – С. 14–23.

18. **Васильев, А.Н.** Эволюционные алгоритмы решения краевых задач в областях, допускающих декомпозицию (NPNJ-2006) [Текст] / А.Н. Васильев, Д.А. Тархов // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19, № 12. – С. 52– 62.

19. **Васильев, А.Н.** Нейросетевые подходы к регуляризации решения задачи продолжения температурных полей по данным точечных измерений [Текст] / А.Н. Васильев, Д.А. Тархов // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2010. – № 7. – С. 13–19.

20. **Васильев, А.Н.** Нейросетевой подход к решению некорректных задач теплопереноса [Текст] / А.Н. Васильев, Ф.В. Порубаев, Д.А. Тархов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2011. – № 1(115). – С. 133–142.

21. **Васильев, А.Н.** Построение приближенных нейросетевых моделей по разнородным данным [Текст] / А.Н. Васильев, Д.А. Тархов // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19, № 12. – С. 43–51.

22. **Самарский, А.А.** Численные методы решения обратных задач математической физики [Текст] / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

УДК 621.822.171-251

Нгуен Ван Тханг, Д.Г. Арсеньев, А.К. Беляев

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ШИПА В ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЯ И ЕГО АВТОКОЛЕБАНИЯ С УЧЕТОМ ГИДРОДИНАМИКИ СМАЗКИ И ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Наиболее серьезной и частой причиной, вызывающей неустойчивость ротора и появление самовозбуждения, является действие смазочного слоя в подшипниках скольжения. В этом случае амплитуды колебаний превышают допустимые.

Данная статья является продолжением исследований, опубликованных в работах [1, 2]. Динамике роторов в подшипниках скольжения посвящена обширная литература, но все авторы используют обычное уравнение для течения масла в зазоре (т. е. уравнение Рейнольдса) без центробежных сил. В этих публикациях рассматривается движение ротора либо с учетом только гидродинамических сил [3, 4] либо гидродинамических сил и сил трения [5].

Целью настоящей работы является исследование устойчивости положения равновесия шипа в подшипнике, заполненном маслом, с учетом центробежных сил и гидродинамики смазки, а также автоколебания около положения равновесия в случае как жесткого, так и гибкого вала.

Силы реакции от смазочного слоя, действующие на шип в подшипнике скольжения

В общем случае объектом исследования является упорный подшипник скольжения, который состоит из трех частей (рис. 1, *а*). В данной статье исследуется случай, изображенный на рис. 1, *б*. Несжимаемое масло находится в зазоре между цилиндром *2* и вращающимся плавающим валом *1* (ротором). Цилиндр вращается с угловой скоростью ω_2, причем его ось вращения фиксирована в пространстве (как и втулка в общем случае); угловая скорость ротора равна ω_1.

В работе [1] получено выражение для ширины зазора (толщина смазочного слоя) (рис. 1, *б*):

$$AB = h_1(\theta_1, t) = h_{01} - e_1(t)\cos\theta_1;$$

$$\overline{h}_1 = \frac{h_1}{h_{01}} = 1 - \varepsilon_1 \cos\theta_1, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_1 = e_1 / h_{01}$; $h_{01} = R_2 - R_1$ – номинальный зазор; $e_1 = e_1(t)$ – эксцентриситет центра плавающего ротора.

В работе [1] также введена величина $\gamma_1 = \gamma_1(t)$ – угол, описывающий положение линии между центрами плавающего ротора и вращающейся втулки. Пусть в момент времени $t = t_0$ центр ротора O_1 занимает положение, соответствующее эксцентриситету $e_{01} = e_1(t_0)$ и углу $\gamma_{01} = \gamma_1(t_0)$, тогда

$$\theta_1 = \theta_1(t_0, \varphi) = \varphi - \gamma_1(t_0) = \varphi - \gamma_{01};$$

$$h_1(\theta_1, t_0) = h_{01} - e_{01}\cos\theta_1,$$

а выражение для силы на единицу длины, действующей на ротор, имеет вид

$$q_{01} = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\left(p_{01} - p_{01}^*\right)dz = \\ = \frac{\mu L^2(\omega_1 + \omega_2)}{2{h_{01}}^2}\overline{q}_{01} = \chi\overline{q}_{01}, \qquad (2)$$

где

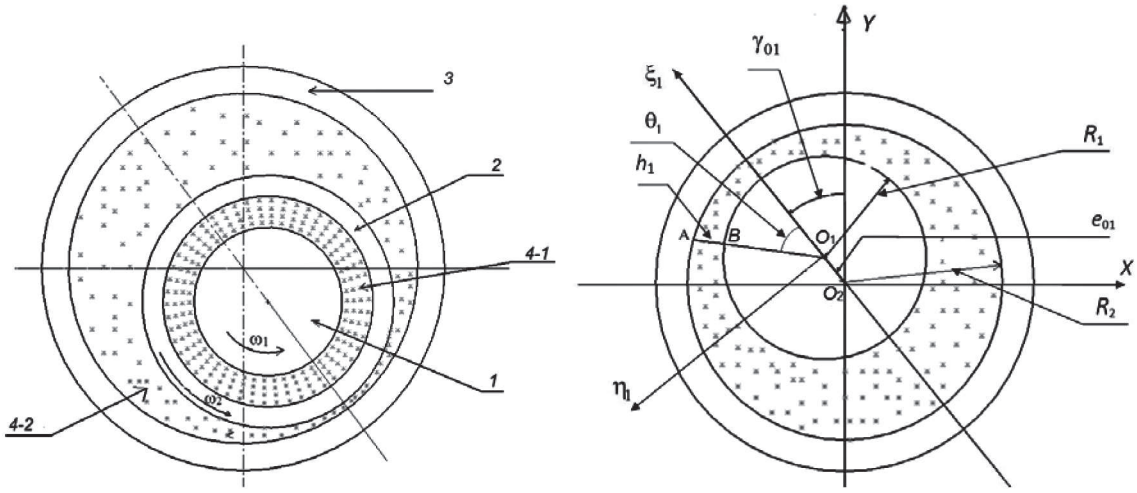


Рис. 1. Схематическое представление упорных подшипников скольжения: *а* – общий случай с тремя цилиндрами, *б* – обозначения в системе втулка – ротор (см. текст);
1 – плавающий ротор; *2* – плавающая втулка (кольцо); *3* – фиксированный цилиндр (корпус подшипника); *4* – несжимаемое масло (*4-1* – внутреннее поле, *4-2* – внешнее поле); ω_1, ω_2 – угловые скорости вращения элементов *1* и *2*

$$\bar{q}_{01} = \left[\left(\frac{2\dot{\gamma}_1}{\omega_1+\omega_2}-1\right)\varepsilon_1\sin\theta_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{2\dot{\varepsilon}_1}{\omega_1+\omega_2}\cos\theta_1\right]\left(1-\varepsilon_1\cos\theta_1\right)^{-3}; \quad (3)$$

$$\chi = \frac{\mu L^2(\omega_1+\omega_2)}{2{h_{01}}^2}; \quad (4)$$

$p_{01} = p_{01}(r,\varphi,z,t)$ – функция глобального давления в зазоре *4-1*; $p^*_{01} = p^*_{01}(r,\varphi,t)$ – функция давления на концах подшипника; μ, L – соответственно динамическая вязкость смазки и длина подшипника.

В локальной системе координат $(O_1\xi_1, O_1\eta_1)$, где направление $O_1\xi_1$ соответствует $\theta_1 = 0,$, проекции силы F_1^P , действующей на ротор со стороны смазочного слоя, имеют следующий вид:

$$F^P_{1\xi} = -\chi L R_1 \int_0^{2\pi} \bar{q}_{01}\cos\theta_1 d\theta_1 =$$
$$= -\chi L R_1 B\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta_1 d\theta_1}{\bar{h}_1^3};$$
$$F^P_{1\eta} = -\chi L R_1 \int_0^{2\pi} \bar{q}_{01}\sin\theta_1 d\theta_1 = \quad (5)$$
$$= -\chi L R_1 A\varepsilon_1\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta_1 d\theta_1}{\bar{h}_1^3},$$

где $A = \left(\frac{2\dot{\gamma}_1}{\omega_1+\omega_2}-1\right)\varepsilon_1;\ B = \frac{2\dot{\varepsilon}_1}{\omega_1+\omega_2}.$ (6)

Введя обозначение $J_n = \int_0^{\pi}\frac{d\theta_1}{\bar{h}_1^n}$, мы можем вычислить проекции силы F_1^P в формуле (5) через J_n:

$$F^P_{1\xi} = -\chi L R_1 B\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta_1 d\theta_1}{\bar{h}_1^3} =$$
$$= -\frac{2\chi L R_1 B}{\varepsilon_1^2}\left[J_1 - 2J_2 + J_3\right];$$
$$F^P_{1\eta} = -\chi L R_1 A\varepsilon_1\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta_1 d\theta_1}{\bar{h}_1^3} = \quad (7)$$
$$= -\frac{2\chi L R_1 A}{\varepsilon_1}\left[-J_1 + 2J_2 + \left(\varepsilon_1^2-1\right)J_3\right].$$

Нетрудно получить следующие выражения для $J_1 - J_3$ (см. работы [6, 7]):

$$J_1 = \frac{\pi}{\left(1-\varepsilon_1^2\right)^{1/2}};\ J_2 = \frac{\pi}{\left(1-\varepsilon_1^2\right)^{3/2}};$$
$$J_3 = \frac{\pi}{\left(1-\varepsilon_1^2\right)^{5/2}}\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_1^2\right). \quad (8)$$

Подставив значения интегралов из формулы (8) и значения *A, B* из формулы (6) в выражения (7), получаем формулы для проекции силы F_1^P:

$$F_{1\xi}^P = -\chi L R_1 B\pi \frac{1+2\varepsilon_1^2}{\left(1-\varepsilon_1^2\right)^{5/2}} = -kT_1(\varepsilon_1)\frac{2\dot{\varepsilon}_1}{\omega_1+\omega_2};$$
$$F_{1\eta}^P = -\chi L R_1 A\pi \frac{\varepsilon_1}{\left(1-\varepsilon_1^2\right)^{3/2}} = -kT_2(\varepsilon_1)\left(\frac{2\dot{\gamma}_1}{\omega_1+\omega_2}-1\right); \quad (9)$$

где

$$T_1(\varepsilon_1)=\frac{1+2\varepsilon_1^2}{\left(1-\varepsilon_1^2\right)^{5/2}},\ T_2(\varepsilon_1)=\frac{\varepsilon_1}{\left(1-\varepsilon_1^2\right)^{3/2}},$$

$$k=\chi\pi L R_1=\frac{\mu\pi L^3 R_1(\omega_1+\omega_2)}{2h_{01}{}^2}. \quad (10)$$

Очевидно, что $T_i(\varepsilon_1)\geq 0$ и $T_i(\varepsilon_1)\to\infty$ при $\varepsilon_1\to 1 (i=1,2)$ (рис. 2). Из формулы (9) следует, что сила F_1^P, действующая на ротор со стороны смазочного слоя, может достигать большего значения. Кривые *1* и *2* не совсем совпадают ввиду того, что в анализе у Тондла [8] давление считалось одинаковым вдоль оси *Oz*, т. е. не учитывалось течение вдоль подшипника.

Пусть ротор (O_1, R_1) нагружен постоянной силой $\mathbf{Q}^P = m_1\mathbf{g}$. Обозначим координаты равновесного положения в подшипнике $(\varepsilon_1^*, \gamma_1^*)$, тогда $\dot{\varepsilon}_1^*=0$, $\dot{\gamma}_1^*=0$. Из уравнений (9) следует, что

$$^*F_{1\xi}^P = F_{1\xi}^P(\varepsilon_1^*,\gamma_1^*)=0;$$
$$^*F_{1\eta}^P = F_{1\eta}^P(\varepsilon_1^*,\gamma_1^*)=kT_2(\varepsilon_1^*).$$

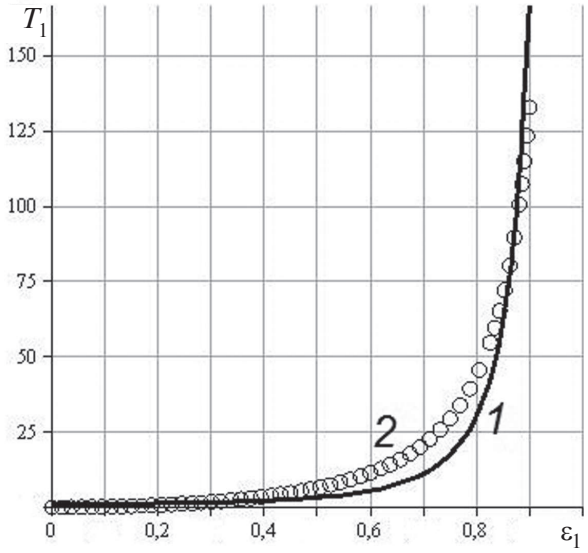
Из условия равновесия сил нетрудно получить, что

$$\gamma_1^*=3\pi/2;\ Q^P=m_1 g=kT_2(\varepsilon_1^*), \quad (11)$$

где $\varepsilon_1^*\in[0,1]$.

Формула (11) показывает, что в положении равновесия центр ротора O_1 всегда находится на горизонтальной линии, которая проходит через центр втулки O_2, и эксцентриситет ε_1^* пропорционален массе ротора.

а)



б)

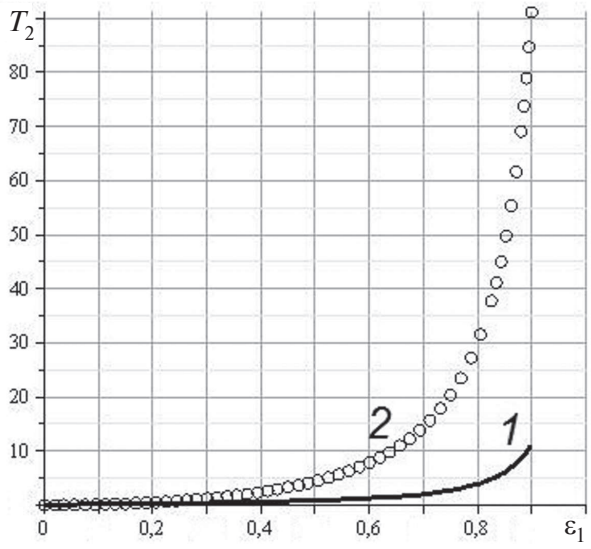


Рис. 2. Сравнение полученных по формуле (10) расчетных результатов (кривые *1*) с данными Тондла [8] (кривые *2*), рассчитаными при $L/R_1\approx 1$ (короткий подшипник) без учета течения вдоль подшипника: *а* – $T_1(\varepsilon_1)$, *б* – $T_2(\varepsilon_1)$

Исследование устойчивости положения равновесия шипа

Ротор с массой $2m_1$ вращается в двух одинаковых подшипниках скольжения. Система

симметрична, поэтому для простоты рассмотрим только движение шипа с массой m_1, вращающегося в подшипнике скольжения с втулкой (см. рис. 1,*а*). Пока не будем учитывать влияния внешнего поля смазки *4-2* и рассмотрим систему втулка-ротор. Ее система отсчета закреплена в центре втулки, несжимаемое масло *4-1* находится в зазоре между втулкой (O_2, R_2) (ее ось вращения фиксирована в пространстве) и вращающимся плавающим ротором (O_1, R_1) (см. рис. 1,*б*). Втулка вращается с угловой скоростью ω_2, которая была получена в работе [2], а ротор – с угловой скоростью ω_1.

Пусть точка G – центр тяжести массы шипа или приведенной массы (рис. 3), причем расстояние этого центра от центра шипа $O_1G = \varepsilon$ (для жесткого вала $\varepsilon = 0$); эксцентриситет центра шипа относительно втулки $O_2O_1 = e_1$; (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ – соответственно координаты центра шипа и его центра тяжести. Вал вращается вокруг собственной оси со скоростью ω_1, откуда координаты центра тяжести G можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \varepsilon\cos\omega_1 t; \\ \bar{y} &= y + \varepsilon\sin\omega_1 t. \end{aligned} \tag{12}$$

Уравнения движения центра тяжести шипа имеют следующий вид:

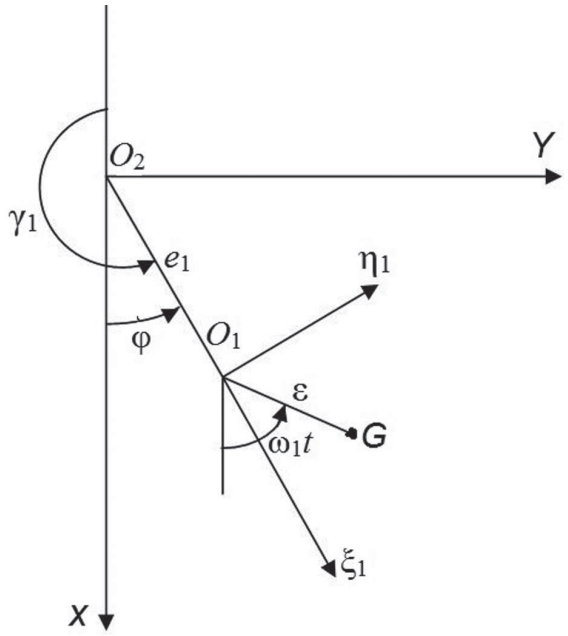


Рис. 3. Схематическое представление движения шипа в системе втулка-ротор

$$\begin{aligned} m\ddot{\bar{x}} &= mg + F_{1\xi}^{p}\cos\varphi - F_{1\eta}^{p}\sin\varphi; \\ m\ddot{\bar{y}} &= F_{1\xi}^{p}\sin\varphi + F_{1\eta}^{p}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{13}$$

Замечая, что $\varphi = \gamma_1 - \pi$ и подставляя выражения (12) в формулу (13), получим:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g + \frac{1}{m}\left(F_{1\eta}^{P}\sin\gamma_1 - F_{1\xi}^{P}\cos\gamma_1\right) + \varepsilon\omega_1^2\cos\omega_1 t; \\ \ddot{y} &= -\frac{1}{m}\left(F_{1\xi}^{P}\sin\gamma_1 + F_{1\eta}^{P}\cos\gamma_1\right) + \varepsilon\omega_1^2\sin\omega_1 t. \end{aligned} \tag{14}$$

Выразим теперь x и y через полярные координаты e_1, φ: $x = e_1\cos\varphi$; $y = e_1\sin\varphi$.

После дифференцирования и подстановки в уравнения (14) приходим к уравнениям движения в полярных координатах:

$$\begin{aligned} &\ddot{e}_1 - \dot{\gamma}_1^2 e_1 = -g\cos\gamma_1 + \frac{1}{m}F_{1\xi}^{p} - \\ &-\varepsilon\omega_1^2\left(\cos\omega_1 t\cos\gamma_1 + \sin\omega_1 t\sin\gamma_1\right); \\ &\ddot{\gamma}_1 e_1 - 2\dot{e}_1\dot{\gamma}_1 = g\sin\gamma_1 + \frac{1}{m}F_{1\eta}^{p} + \\ &+\varepsilon\omega_1^2\left(\cos\omega_1 t\sin\gamma_1 - \sin\omega_1 t\cos\gamma_1\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Разделив уравнение (15) на радиальный зазор h_{01} и подставив вместо величин $F_{1\xi}^{P}$, $F_{1\eta}^{P}$ их выражения (9), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\ddot{\varepsilon}_1 - \dot{\gamma}_1^2\varepsilon_1 = -\frac{g}{h_{01}}\cos\gamma_1 - \\ &-\frac{1}{m_1 h_{01}}kT_1(\varepsilon_1)\frac{2\dot{\varepsilon}_1}{\omega_1 + \omega_2} - \\ &-\bar{\varepsilon}\omega_1^2\left(\cos\omega_1 t\cos\gamma_1 + \sin\omega_1 t\sin\gamma_1\right); \\ &\ddot{\gamma}_1\varepsilon_1 - 2\dot{\varepsilon}_1\dot{\gamma}_1 = \frac{g}{h_{01}}\sin\gamma_1 - \\ &-\frac{1}{m_1 h_{01}}kT_2(\varepsilon_1)\left(\frac{2\dot{\gamma}_1}{\omega_1 + \omega_2} - 1\right) + \\ &+\bar{\varepsilon}\omega_1^2\left(\cos\omega_1 t\sin\gamma_1 - \sin\omega_1 t\cos\gamma_1\right), \end{aligned} \tag{16}$$

где $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/h_{01}$.

Прежде чем получить уравнения возмущенного движения, надо найти условие равновесия. Уравнения (16) являются нелинейными дифференциальными уравнениями. С помощью метода Пуанкаре мы можем линеаризовать эту систему. Здесь, однако, имеет место более слож-

ный случай, поэтому придется воспользоваться методами, дающими только приближенное решение. Прежде всего, определим положение равновесия шипа и исследуем собственную частоту колебания шипа около этого положения, а также его устойчивость. Рассмотрим два случая определения положения равновесия шипа. Первый случай – это когда ротор является жестким валом, т. е. $\bar{\varepsilon} = 0$; тогда, подставив условие равновесия $\dot{\varepsilon}_1^* = 0,\ \dot{\gamma}_1^* = 0$ в уравнения (16), нетрудно получить результат, который полностью совпадает с условием (11). Второй случай – ротор является гибким валом, т. е. $\bar{\varepsilon} > 0$; если подставить условие равновесия $\dot{\varepsilon}_1^* = 0,\ \dot{\gamma}_1^* = 0$ в уравнения (16), то не удается определить положение равновесия шипа из-за того, что количество неизвестных (три) больше, чем количество уравнений (два). Имея в виду периодическую силу инерции, действующую на шип и обусловленную эксцентриситетом его центра тяжести, можно заключить, что установившееся вынужденное движение происходит с периодом возмущающей силы $T = 2\pi/\omega_1$.

Определим положение равновесия шипа следующими уравнениями:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_1 dt = \varepsilon_1^*;\ \frac{1}{T}\int_0^T \gamma_1 dt = \gamma_1^*. \qquad (17)$$

Вводя подстановку

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_1^* + \varepsilon_{11}(t);\ \gamma_1(t) = \gamma_1^* + \gamma_{11}(t), \qquad (18)$$

где $\varepsilon_{11}, \gamma_{11}$ – координаты движения около данного положения равновесия, получим из уравнения (17):

$$\begin{gathered}\frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_{11}(t)dt = 0;\ \frac{1}{T}\int_0^T \gamma_{11}(t)dt = 0;\\ \frac{1}{T}\int_0^T \dot{\varepsilon}_{11}(t)dt = 0;\ \frac{1}{T}\int_0^T \dot{\gamma}_{11}(t)dt = 0.\end{gathered} \qquad (19)$$

Если ограничиться малыми колебаниями, то можно пренебречь всеми членами, начиная со второго порядка и выше, т. е. $\dot{\varepsilon}_{11}^2, \dot{\gamma}_{11}^2, \gamma_{11}^2, \gamma_{11}\varepsilon_{11}, \varepsilon_{11}\dot{\varepsilon}_{11}$ и т. д. Допустим, что эксцентриситет центра тяжести $\bar{\varepsilon}$ также мал, так что можно пренебречь членами высших порядков, начиная с $\bar{\varepsilon}\gamma_{11}$.

Разложим функции $T_i\ (i = 1, 2)$ в ряд:

$$\begin{gathered}T_i\left(\varepsilon_1^* + \varepsilon_{11}\right) = T_i\left(\varepsilon_1^*\right) + \varepsilon_{11}\frac{\partial T_i\left(\varepsilon_1^*\right)}{\partial \varepsilon_1^*} + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon_{11}^2\frac{\partial^2 T_i\left(\varepsilon_1^*\right)}{\partial \varepsilon_1^{*2}} + \ldots\ (i = 1, 2).\end{gathered} \qquad (20)$$

Подставляя уравнения (18) и (20) в уравнения (16) и пренебрегая членами более высоких порядков, получим:

$$\begin{gathered}\ddot{\varepsilon}_{11} = -\frac{g}{h_{01}}\cos\left(\gamma_1^* + \gamma_{11}\right) - \\ -\frac{1}{m_1 h_{01}}k\frac{2\dot{\varepsilon}_{11}}{\omega_1 + \omega_2}\left[T_1\left(\varepsilon_1^*\right) + \varepsilon_{11}\frac{\partial T_1\left(\varepsilon_1^*\right)}{\partial \varepsilon_1^*}\right] - \\ -\bar{\varepsilon}\omega_1^2\cos\left(\omega_1 t - \gamma_1\right); \\ \ddot{\gamma}_{11}\varepsilon_1^* = \frac{g}{h_{01}}\sin\left(\gamma_1^* + \gamma_{11}\right) - \\ -\frac{1}{m_1 h_{01}}k\left(\frac{2\dot{\gamma}_{11}}{\omega_1 + \omega_2} - 1\right)\left[T_2\left(\varepsilon_1^*\right) + \varepsilon_{11}\frac{\partial T_2\left(\varepsilon_1^*\right)}{\partial \varepsilon_1^*}\right] - \\ -\bar{\varepsilon}\omega_1^2\sin\left(\omega_1 t - \gamma_1\right).\end{gathered} \qquad (21)$$

Помня принятое допущение о малости величины γ_{11}, можем сделать следующие упрощения:

$$\begin{gathered}\cos\left(\omega_1 t - \gamma_1\right) = \cos\left(\omega_1 t - \gamma_1^* - \gamma_{11}\right) \approx \\ \approx \cos\left(\omega_1 t - \gamma_1^*\right) + \gamma_{11}\sin\left(\omega_1 t - \gamma_1^*\right); \\ \sin\left(\omega_1 t - \gamma_1\right) = \sin\left(\omega_1 t - \gamma_1^* - \gamma_{11}\right) \approx \\ \approx \sin\left(\omega_1 t - \gamma_1^*\right) - \gamma_{11}\cos\left(\omega_1 t - \gamma_1^*\right); \\ \cos\left(\gamma_1^* + \gamma_{11}\right) = \cos\gamma_1^* - \gamma_{11}\sin\gamma_1^*; \\ \sin\left(\gamma_1^* + \gamma_{11}\right) = \sin\gamma_1^* + \gamma_{11}\cos\gamma_1^*.\end{gathered}$$

При этом получаем преобразованные уравнения движения:

$$\begin{gathered}\ddot{\varepsilon}_{11} = -\frac{1}{m_1 h_{01}}k\frac{2\dot{\varepsilon}_{11}}{\omega_1 + \omega_2}\left[T_1\left(\varepsilon_1^*\right) + \varepsilon_{11}\frac{\partial T_1\left(\varepsilon_1^*\right)}{\partial \varepsilon_1^*}\right] - \\ -\frac{g}{h_{01}}\left(\cos\gamma_1^* - \gamma_{11}\sin\gamma_1^*\right) - \bar{\varepsilon}\omega_1^2\cos\left(\omega_1 t - \gamma_1^*\right);\end{gathered} \qquad (22)$$

$$\ddot{\gamma}_{11}\varepsilon_1^* = -\frac{1}{m_1 h_{01}} k\left(\frac{2\dot{\gamma}_{11}}{\omega_1+\omega_2}-1\right)\times$$
$$\times\left[T_2\left(\varepsilon_1^*\right)+\varepsilon_{11}\frac{\partial T_2\left(\varepsilon_1^*\right)}{\partial\varepsilon_1^*}\right]+ \qquad (22)$$
$$+\frac{g}{h_{01}}\left(\sin\gamma_1^*+\gamma_{11}\cos\gamma_1^*\right)-\bar{\varepsilon}\omega_1^2\sin\left(\omega_1 t-\gamma_1^*\right).$$

Интегрируя эти уравнения от 0 до T и используя выражения (19), имеем:

$$\cos\gamma_1^* = 0;$$
$$\frac{g}{h_{01}}\sin\gamma_1^* = -\frac{1}{m_1 h_{01}} k T_2\left(\varepsilon_1^*\right). \qquad (23)$$

Видно, что условие формул (23) полностью совпадает с условием (11), то есть при малых эксцентриситетах $\bar{\varepsilon}$ условий равновесия для гибких и жестких валов совпадают.

Преобразуя уравнения (22) с помощью (23), получаем следующую систему уравнений возмущенного движения:

$$\ddot{\varepsilon}_{11} = -\frac{k}{m_1 h_{01}}\frac{2T_1\left(\varepsilon_1^*\right)}{\omega_1+\omega_2}\dot{\varepsilon}_{11}-\frac{g}{h_{01}}\gamma_{11}-$$
$$-\bar{\varepsilon}\omega_1^2\cos\left(\omega_1 t-\frac{3\pi}{2}\right);$$
$$\ddot{\gamma}_{11}\varepsilon_1^* = -\frac{k}{m_1 h_{01}}\frac{2T_2\left(\varepsilon_1^*\right)}{\omega_1+\omega_2}\dot{\gamma}_{11}+ \qquad (24)$$
$$+\frac{k}{m_1 h_{01}}T_2'\left(\varepsilon_1^*\right)\varepsilon_{11}-\bar{\varepsilon}\omega_1^2\sin\left(\omega_1 t-\frac{3\pi}{2}\right).$$

Известно [9], что устойчивость линейной системы (в данном случае (24)) определяется устойчивостью ее однородной системы ($\bar{\varepsilon}=0$):

$$\ddot{\varepsilon}_{11} = -\frac{k}{m_1 h_{01}}\frac{2T_1\left(\varepsilon_1^*\right)}{\omega_1+\omega_2}\dot{\varepsilon}_{11}-\frac{g}{h_{01}}\gamma_{11};$$
$$\ddot{\gamma}_{11}\varepsilon_1^* = -\frac{k}{m_1 h_{01}}\frac{2T_2\left(\varepsilon_1^*\right)}{\omega_1+\omega_2}\dot{\gamma}_{11}+\frac{k}{m_1 h_{01}}T_2'\left(\varepsilon_1^*\right)\varepsilon_{11}. \qquad (25)$$

Ищем решение в виде

$$\varepsilon_{11} = C\exp(\lambda t);\quad \gamma_{11} = D\exp(\lambda t);$$

при этом характеристическое уравнение принимает вид

$$\varepsilon_1^*\lambda^4+\frac{2k}{m_1 h_{01}\left(\omega_1+\omega_2\right)}\left[\varepsilon_1^* T_1\left(\varepsilon_1^*\right)+T_2\left(\varepsilon_1^*\right)\right]\lambda^3+$$
$$+\left[\frac{2k}{m_1 h_{01}\left(\omega_1+\omega_2\right)}\right]^2 T_1\left(\varepsilon_1^*\right)T_2\left(\varepsilon_1^*\right)\lambda^2+ \qquad (26)$$
$$+\frac{kg}{m_1 h_{01}^2}T_2'\left(\varepsilon_1^*\right)=0.$$

Пусть

$$a_0=\varepsilon_1^*;\ a_1=\frac{2k}{m_1 h_{01}\left(\omega_1+\omega_2\right)}\left[\varepsilon_1^* T_1\left(\varepsilon_1^*\right)+T_2\left(\varepsilon_1^*\right)\right];$$
$$a_2=\left[\frac{2k}{m_1 h_{01}\left(\omega_1+\omega_2\right)}\right]^2 T_1\left(\varepsilon_1^*\right)T_2\left(\varepsilon_1^*\right);$$
$$a_3=0;\ a_4=\frac{kg}{m_1 h_{01}^2}T_2'\left(\varepsilon_1^*\right);$$

тогда уравнение (26) приводится к следующему виду:

$$a_0\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0. \qquad (27)$$

Согласно критерию Рауса–Гурвица [9] для системы второго порядка, система (25) будет асимптотически устойчива, если все коэффициенты уравнения (27) положительны, равно как и все миноры:

$$\Delta_1=a_1>0;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ a_0 & a_2\end{vmatrix}=a_1a_2-a_0a_3>0;$$
$$\Delta_3=a_3\Delta_2-a_1^2a_4>0;\ \Delta_4=a_4\Delta_3>0.$$

Поскольку $a_3=0$, то $\Delta_3=-a_1^2a_4<0;\ \Delta_4=a_4\Delta_3<0$. Поэтому система (25) неустойчива, следовательно положение равновесия для движения шипа в подшипнике скольжения (16) неустойчиво в первом приближении.

Известно, что уравнения первого приближения во многих случаях дают верный ответ на вопрос об устойчивости движения, но очень часто заключение, которое можно получить из этих приближенных уравнений, не имеет ничего общего с решением исходных уравнений. Некоторые авторы пытались исследовать нелинейные дифференциальные уравнения дви-

жения [10], т. е. в этих уравнениях учитывается совокупность членов, зависящих от отклонений $\varepsilon_{11}, \gamma_{11}$ в степени выше первой. Общие методы исследования устойчивости движения Ляпунова сильны прежде всего своей универсальностью. Для того, чтобы рассмотреть влияние структуры сил на устойчивость движения шипа, запишем правую часть уравнения (25) в матричной форме:

$$\mathbf{Q} = -C_1\mathbf{q} - B_1\dot{\mathbf{q}}, \qquad (28)$$

где введены вектор обобщенной силы $\mathbf{Q} = \left(Q_\xi, Q_\eta\right)^T$ и вектор обобщенной координаты $\mathbf{q} = \left(\varepsilon_{11}, \gamma_{11}\right)^T$; C_1, B_1 – квадратные матрицы порядка 2×2 с постоянными элементами:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & m_1 g \\ -kT_2'\left(\varepsilon_1^*\right) & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2kT_1\left(\varepsilon_1^*\right)}{\omega_1+\omega_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{2kT_2\left(\varepsilon_1^*\right)}{\omega_1+\omega_2} \end{pmatrix}.$$

Видно, что B_1 – симметричная матрица. Разобьем матрицу C_1 на симметричную (C) и кососимметричную (P) матрицы; таким образом получаем:

$$C = C^T = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_1^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(m_1 g - kT_2'\left(\varepsilon_1^*\right)\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(m_1 g - kT_2'\left(\varepsilon_1^*\right)\right) & 0 \end{pmatrix};$$

$$P = -P^T = \frac{1}{2}\left(C_1 - C_1^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(m_1 g + kT_2'\left(\varepsilon_1^*\right)\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(m_1 g + kT_2'\left(\varepsilon_1^*\right)\right) & 0 \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Теперь вектор силы $\mathbf{Q} = \mathbf{K}+\mathbf{R}+\mathbf{D}$, где сила $\mathbf{K} = -C\mathbf{q}$ с симметричной матрицей C является потенциальной или консервативной, сила $\mathbf{R} = -P\mathbf{q}$ с кососимметричной матрицей P является неконсервативной и сила $\mathbf{D} = -B_1\dot{\mathbf{q}}$ с симметричной матрицей B_1 является диссипативной. Нетрудно заметить, что из формулы (29) неконсервативная сила $\mathbf{R} \neq 0$, откуда по теореме об устойчивости движения следует, что положение равновесия движения шипа в подшипнике скольжения, находящегося под действием произвольных неконсервативных сил и линейных диссипативных сил, всегда неустойчиво независимо от членов высшего порядка [9, с. 196].

Приближенный анализ автоколебаний ротора

В работе [2] и в предыдущих параграфах были выведены основные зависимости для гидродинамических сил реакции от смазочного слоя на шип, вращающийся в подшипнике скольжения, с учетом гидродинамики смазки и центробежных сил и определено статическое положение равновесия. Кроме того, было установлено, что положение равновесия движения шипа в подшипнике скольжения неустойчиво для случая второй гипотезы – Зоммерфельда [2, 6]. Для случая первой гипотезы [2] условие устойчивости приближенно удовлетворяется при $\varepsilon_1^* > 0{,}7$ [6, 8, 11, 12]. Для данного значения $\varepsilon_1^* \in [0, 1]$ существует только одно положение равновесия $\left(\varepsilon_1^*, \gamma_1^*\right)$ из условия (23).

Остановимся подробнее на соотношениях (28), определяющих обе составляющие силы, действующей на шип:

$$\begin{aligned} Q_\xi &= -\frac{2kT_1\left(\varepsilon_1^*\right)}{\omega_1+\omega_2}\dot{\varepsilon}_{11} - m_1 g\gamma_{11}; \\ Q_\eta &= -\frac{2kT_2\left(\varepsilon_1^*\right)}{\omega_1+\omega_2}\dot{\gamma}_{11} + kT_2'\left(\varepsilon_1^*\right)\varepsilon_{11}. \end{aligned} \qquad (30)$$

В предыдущих параграфах было показано, что $k > 0$ и $T_i > 0$, $T_i' > 0$ $(i = 1, 2)$. Когда шип находится в положении равновесия $\left(\varepsilon_1^*, \gamma_1^*\right)$, причем $\gamma_1^* = 3\pi/2$ и $\varepsilon_1^* \in [0, 1]$, то первые слагаемые уравнения (30) равны нулю, т. е.

$$\frac{2kT_1\left(\varepsilon_1^*\right)}{\omega_1+\omega_2}\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{2kT_2\left(\varepsilon_1^*\right)}{\omega_1+\omega_2}\dot{\gamma}_{11} = 0.$$

Положим, что шипу сообщен импульс, заставляющий его совершать движение с некото-

рой скоростью $\varepsilon_1^*\dot{\gamma}_1 = V$, в результате $\gamma_{11} > 0,\ \dot{\gamma}_{11} > 0 \Rightarrow Q_\xi < 0,\ Q_\eta < 0$. Через некоторое время центр шипа достигает положения *1* (рис. 4), где импульс силы Q_η компенсирует первоначальный импульс шипа, здесь $\varepsilon_{11} < 0,\ \dot{\varepsilon}_{11} < 0$, в результате первое слагаемое Q_ξ положительно и возрастает, тогда как величина Q_η еще отрицательна, откуда через некоторое время центр шипа вернется и достигнет положения *2* и т. д. Другими словами, центр шипа проходит точки *3, 4* и описывает кривую *K*.

Допустим далее, что установившееся движение вокруг неустойчивого равновесия может быть приближенно представлено в виде замкнутой кривой. Если $(\varepsilon_1^e, \gamma_1^e)$ – координаты движения вдоль этой кривой, то для действительного движения можно записать:

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_1^e + \delta\varepsilon_{11}(t);\ \ \gamma_1(t) = \gamma_1^e + \delta\gamma_{11}(t), \quad (31)$$

где δ – постоянная, малая по величине.

Обратимся снова к уравнениям (16) в виде

$$m_1 h_{01}\left(\ddot{\varepsilon}_1 - \dot{\gamma}_1\varepsilon_1\right) = -m_1 g\cos\gamma_1 - \\ -kT_1(\varepsilon_1)\frac{2\dot{\varepsilon}_1}{\omega_1+\omega_2} - \varepsilon\omega_1^2 m_1\cos(\omega_1 t - \gamma_1); \quad (32)$$

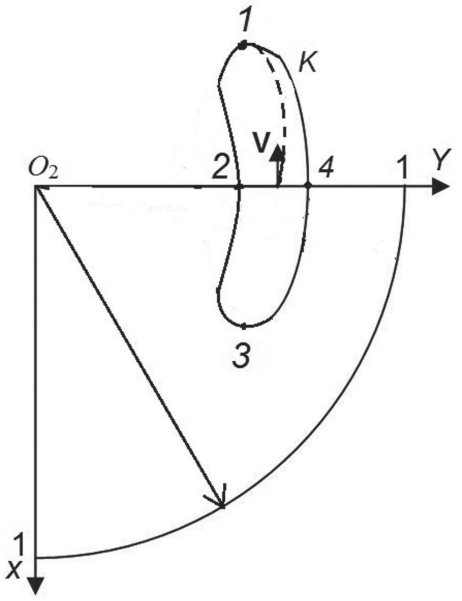


Рис. 4. Схематическое представление автоколебаний шипа: *K* – траектория, которую описывает центр шипа через позиции *1 – 4*, **V** – начальная скорость шипа

$$m_1 h_{01}\left(\ddot{\gamma}_1\varepsilon_1 + 2\dot{\varepsilon}_1\dot{\gamma}_1\right) = m_1 g\sin\gamma_1 - \\ -kT_2(\varepsilon_1)\left(\frac{2\dot{\gamma}_1}{\omega_1+\omega_2} - 1\right) - \varepsilon\omega_1^2 m_1\sin(\omega_1 t - \gamma_1).$$

Полагая эксцентриситет центра тяжести равным нулю, т. е. $\varepsilon = 0$, мы можем представить уравнения (32) в виде

$$f_1\left(\ddot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_1, \varepsilon_1, \dot{\gamma}_1, \gamma_1\right) = 0;\ f_2\left(\dot{\varepsilon}, \varepsilon, \ddot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_1, \gamma_1\right) = 0. \quad (34)$$

Члены этих уравнений имеют размерность силы.

Умножив первое уравнение на $de_1 = h_{01}d\varepsilon_1 = h_{01}\dfrac{d\varepsilon_1}{dt}dt$, а второе уравнение на $e_1 d\gamma_1 = h_{01}\varepsilon_1 d\gamma_1 = h_{01}\varepsilon_1\dfrac{d\gamma_1}{dt}dt$, получим элементарную работу, необходимую для перемещения центра шипа вдоль линии центров на de_1, а по нормали к ней – на $e_1 d\gamma_1$. Подставляя вместо $\varepsilon_1(t),\ \gamma_1(t)$ соответствующие члены из (31) и преобразуя, имеем:

$$f_{10}\left(\ddot{\varepsilon}_1^e, \dot{\varepsilon}_1^e, \varepsilon_1^e, \dot{\gamma}_1^e, \gamma_1^e\right)\dot{\varepsilon}_1^e dt = \\ = \delta\psi_1\left(\ddot{\varepsilon}_1^e, \dot{\varepsilon}_1^e, \varepsilon_1^e, \ddot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_1, \varepsilon_1, \dot{\gamma}_1^e, \gamma_1^e, \dot{\gamma}_1, \gamma_1, \delta\right)dt;$$

$$f_{20}\left(\dot{\varepsilon}_1^e, \varepsilon_1^e, \ddot{\gamma}_1^e, \dot{\gamma}_1^e, \gamma_1^e\right)\varepsilon_1^e\dot{\gamma}_1^e dt = \\ = \delta\psi_2\left(\dot{\varepsilon}_1^e, \varepsilon_1^e, \dot{\varepsilon}_1, \varepsilon_1, \ddot{\gamma}_1^e, \dot{\gamma}_1^e, \gamma_1^e, \ddot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_1, \gamma_1, \delta\right)dt.$$

Функции f_{10}, f_{20} получаются из функций f_1, f_2 при $\delta = 0$ с помощью соотношения (31). Разложив функции f_1, f_2 в ряд по δ, отнесем к Ψ_1, Ψ_2 все члены, содержащие δ. Пусть период обращения по кривой *K* будет $T_K = 2\pi/\Omega_1$. Определим координаты $(\varepsilon_1^e, \gamma_1^e)$ так, чтобы работа, совершенная силами за период *T*, была равна нулю, т. е.

$$\frac{1}{T_K}\int_0^{T_K} f_{10}\left(\ddot{\varepsilon}_1^e, \dot{\varepsilon}_1^e, \varepsilon_1^e, \dot{\gamma}_1^e, \gamma_1^e\right)\dot{\varepsilon}_1^e dt = 0; \\ \frac{1}{T_K}\int_0^{T_K} f_{20}\left(\dot{\varepsilon}_1^e, \varepsilon_1^e, \ddot{\gamma}_1^e, \dot{\gamma}_1^e, \gamma_1^e\right)\varepsilon_1^e\dot{\gamma}_1^e dt = 0. \quad (35)$$

Аппроксимируем движение по замкнутой кривой движением по эллипсу. Безразмерные координаты этого эллипса будут иметь вид

$$a = b\cos\Omega_1 t;\ \varepsilon_1^*\beta = c\sin\Omega_1 t,$$

где Ω_1 – угловая скорость; b, c – соответственно смещение и угловое смещение относительно среднего положения, определяемого координатами $\left(\varepsilon_1^*, \gamma_1^*\right)$.

Поскольку имеется три неизвестных постоянных (b, c и Ω_1) и только два уравнения, то из условий (35) найдем отношение b/c и величину Ω_1.

Таким образом, координаты $(\varepsilon_1^e, \gamma_1^e)$ задаются соотношениями:

$$\varepsilon_1^e = \varepsilon_1^* + b\cos\Omega_1 t;\ \gamma_1^e = \gamma_1^* + \beta = \gamma_1^* + \frac{c}{\varepsilon_1^*}\sin\Omega_1 t. \quad (36)$$

Сделаем еще одно допущение, а именно, положим, что $b < \varepsilon_1^*$. Разложим теперь функции $T_i\left(\varepsilon_1^e\right)$ $(i = 1, 2)$ в ряд:

$$\begin{aligned} T_i\left(\varepsilon_1^e\right) &= T_i\left(\varepsilon_1^* + b\cos\Omega t\right) = \\ &= T_i\left(\varepsilon_1^*\right) + b\cos\Omega t T_i'\left(\varepsilon_1^*\right) + \\ &+ \frac{1}{2}b^2\cos^2\Omega t T_i''\left(\varepsilon_1^*\right) + \ldots \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляем соответствующие выражения (36) и (37) в уравнения (35); после интегрирования, проведенного при допущении выполнения всех условий, получим:

$$\frac{k}{\omega_1+\omega_2}\left[b^2\Omega_1^2 T_1\left(\varepsilon_1\right) + \frac{1}{8}b^4\Omega_1^2 T_1''\left(\varepsilon_1^*\right)\right] + \frac{mgb\Omega_1 c\sin\gamma_1^*}{2\varepsilon_1^*}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{c^2}{\left(\varepsilon_1^*\right)^2}\right) = 0;$$

$$\frac{2k}{\omega_1+\omega_2}\left[\frac{1}{2}\frac{c^2}{\varepsilon_1^*}\Omega_1^2 T_2\left(\varepsilon_1\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{c}{\varepsilon_1^*}\right)^2 b^2\Omega_1^2 T_2'\left(\varepsilon_1^*\right) + \frac{3}{16}\frac{c^2}{\varepsilon_1^*}b^2\Omega_1^2 T_2''\left(\varepsilon_1^*\right)\right] -$$

$$-k\left[\frac{1}{2}\frac{c}{\varepsilon_1^*}b\Omega_1 T_2\left(\varepsilon_1^*\right) + \frac{1}{2}cb\Omega_1 T_2'\left(\varepsilon_1^*\right) + \frac{3}{16}\frac{c}{\varepsilon_1^*}b^3\Omega_1 T_2''\left(\varepsilon_1^*\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}mg\frac{bc}{\varepsilon_1^*}\sin\gamma_1^*\Omega_1\left(1 - \frac{1}{8}\left(\frac{c}{\varepsilon_1^*}\right)^2\right) = 0.$$

Полагая, что движение происходит около положения равновесия, т. е. выполняется условие (23), переходим после преобразований к следующим уравнениям:

$$2\varepsilon_1^*\Omega_1\left[T_1\left(\varepsilon_1^*\right) + \frac{1}{8}b^2 T_1''\left(\varepsilon_1^*\right)\right] = \left(\omega_1+\omega_2\right)\frac{c}{b}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{c^2}{\varepsilon_1^{*2}}\right)T_2\left(\varepsilon_1^*\right);$$

$$\left(\omega_1+\omega_2\right)\left[\frac{1}{8}\frac{c^2}{\varepsilon_1^{*2}}T_2\left(\varepsilon_1^*\right) + \varepsilon_1^* T_2'\left(\varepsilon_1^*\right) + \frac{3}{8}b^2 T_2''\left(\varepsilon_1^*\right)\right] = 2\Omega_1\frac{c}{b}\left[T_2\left(\varepsilon_1^*\right) + \frac{3}{4}\frac{b^2}{\varepsilon_1^*}T_2'\left(\varepsilon_1^*\right) + \frac{3}{8}b^2 T_2''\left(\varepsilon_1^*\right)\right].$$

Пренебрегая членами с b^2 и c^2, получим:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_1^*\Omega_1 T_1\left(\varepsilon_1^*\right) &\approx \left(\omega_1+\omega_2\right)\frac{c}{b}T_2\left(\varepsilon_1^*\right); \\ \left(\omega_1+\omega_2\right)\varepsilon_1^* T_2'\left(\varepsilon_1^*\right) &\approx 2\Omega_1\frac{c}{b}T_2\left(\varepsilon_1^*\right). \end{aligned} \quad (38)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{2\Omega_1}{\omega_1+\omega_2} &\approx \sqrt{\frac{T_2'\left(\varepsilon_1^*\right)}{T_1\left(\varepsilon_1^*\right)}} = 1; \\ \frac{c}{b} &\approx \frac{\varepsilon_1^*}{T_2\left(\varepsilon_1^*\right)}\sqrt{T_1\left(\varepsilon_1^*\right)T_2'\left(\varepsilon_1^*\right)} = \varepsilon_1^*\frac{T_1\left(\varepsilon_1^*\right)}{T_2\left(\varepsilon_1^*\right)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Соответствующий график приведен на рис. 5.

Итак, отношения $2\Omega_1/(\omega_1+\omega_2)$, c/b найдены при допущении, что $b < \varepsilon_1^*$, т. е. что траектории, описываемые центром шипа, не охватывают центра втулки.

Аналогично исследуем случай при $b > \varepsilon_1^*$, когда траектории, описываемые центром шипа, охватывают центр втулки. Движение по данной кривой приближенно описывается уравнениями, аналогичными уравнениям (36):

$$\varepsilon_1^e = b + \varepsilon_1^*\cos\Omega_1 t;\ \gamma_1^e = \gamma_1^* + \Omega_1 t. \quad (40)$$

В результете аналогичного преобразования получим:

$$\frac{2\Omega}{\omega_1+\omega_2} = \frac{T_2\left(\varepsilon_1^*\right)}{\varepsilon_1^* T_1\left(b\right)};\ \left(1 - \frac{2\Omega}{\omega_1+\omega_2}\right)\left\{2bT_2\left(b\right) + \varepsilon_1^{*2}\left[T_2'\left(b\right) + \frac{1}{2}bT_2''\left(b\right)\right]\right\} = \varepsilon_1^* T_2\left(\varepsilon_1^*\right). \quad (41)$$

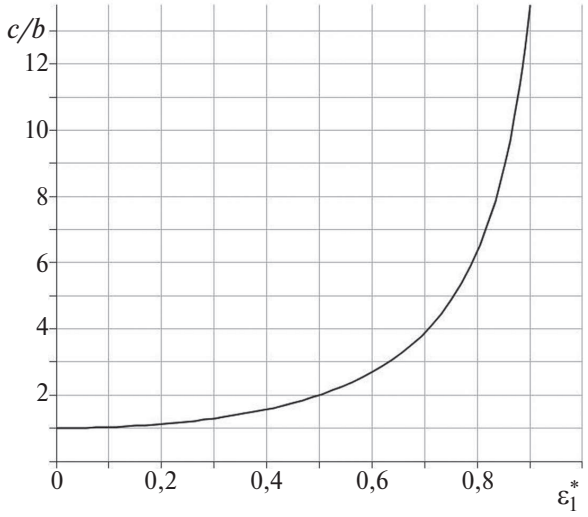


Рис. 5. График зависимости отношения c/b от ε_1^* для гипотезы Зоммерфельда и при условии $b < \varepsilon_1^*$

Систему уравнений (41) можно решить только численно. Подставим первое уравнение (41) во второе, выбрав ряд значений ε_1^* от 0 до 0,5 с равным шагом 0,1; тогда получим дискретные значения b, а потом подставим эти значения b в первое уравнение, чтобы получить $2\Omega_1/(\omega_1+\omega_2)$. Результатом являются три графика, приведенные на рис. 6.

Из анализа данных рис. 5 и 6 можно сделать следующие выводы:

1. Из графика функции $b-\varepsilon_1^*$ (рис. 6, *а*) видно, что метод, рассмотренный выше, справедлив до значения $\varepsilon_1^* = 0{,}3$. Для $\varepsilon_1^* > 0{,}3$ следует применять первый из методов, изложенных в данном разделе, при $b < \varepsilon_1^*$.

2. Из графика зависимости отношения c/b от ε_1^* (см. рис. 5) видно, что при $\varepsilon_1^* \le 0{,}3$ замкнутая кривая, по которой движется центр шипа, есть окружность, радиус которой b получен из графика рис. 6, *б* на интервале $0 < \varepsilon_1^* \le 0{,}3$ и с угловой скоростью Ω_1, чуть меньшей, чем $(\omega_1+\omega_2)/2$ (рис. 6, *в*).

3. При $\varepsilon_1^* > 0{,}3$, $c/b > 1{,}5$ (см. рис. 5) центр шипа движется по эллипсу с угловой скоростью $\Omega_1 = (\omega_1+\omega_2)/2$, определяемой формулой (39).

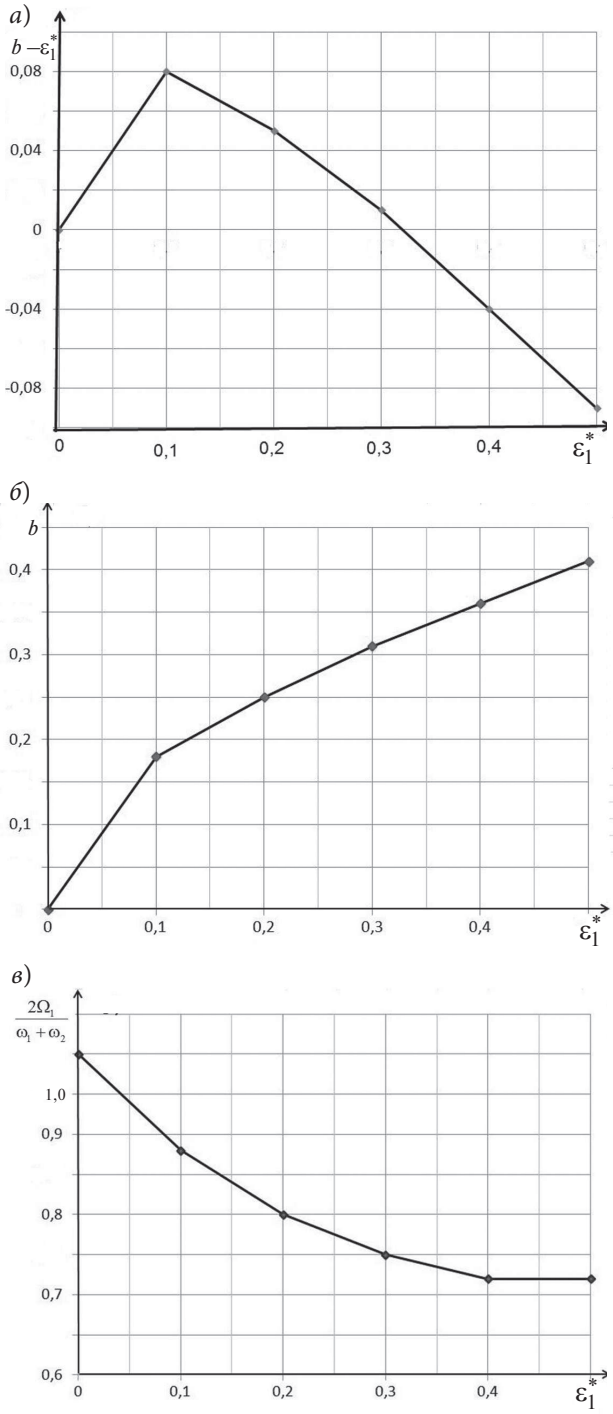


Рис. 6. Зависимости основных функций автоколебаний центра шипа от значения относительного эксцентриситета ε_1^* (при условии $b > \varepsilon_1^*$): *а* – величины $(b-\varepsilon_1^*)$, *б* – амплитуды, *в* – частоты

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости положения равновесия шипа в подшипнике, заполненным маслом, с учетом центробежных сил, а также автоколебаниям около положения равновесия как для жесткого так и для гибкого вала. Интегрированием функции давления по поверхности зазора были получены явные выражения для сил реакции

со стороны смазочного слоя как на ротор, так и на втулку подшипника. Определено условие равновесия для движения шипа в положениях равновесия в подвижных осях. Согласно результатам проведенного исследования, положения равновесия шипа в подшипнике скольжения оказались неустойчивыми, причем траектория автоколебания в одном случае есть окружность, а в другом – эллипс. Угловая скорость автоколебания шипа равна или чуть меньше половины суммы угловых скоростей ротора и втулки (см. [2]). Исследование устойчивости движения втулки с учетом влияния внутреннего и внешнего полей смазки может быть проведено по аналогии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нгуен Ван Тханг.** Силы и моменты, действующие на ротор в упорном подшипнике скольжения, с учетом гидродинамики смазки и центробежных сил [Текст] / Нгуен Ван Тханг // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2011. – № 1(116). – С. 116–122.

2. **Нгуен Ван Тханг.** Определение скорости вращения втулки в упорном подшипнике скольжения с учетом гидродинамики смазки и центробежных сил [Текст] / Нгуен Ван Тханг, Д.Г. Арсеньев, А.К. Беляев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2012.– № 2(146). – С. 156–163.

3. **Dubois, G.B.** Analytical derivation and experimental evaluation of short-bearing approximation for full journal bearing [Text] / G.B. Dubois, F.W. Ocvirk // Cornell Univ. Report. –1953.– No. 1157. – P. 119–127.

4. **Пешти, Ю.В.** Проектирование подшипников скольжения с газовой смазкой [Текст] / Ю.В. Пешти. – М.: МВТУ им. Баумана, 1973. – 171 с.

5. **Максимов, С.П.** Автоколебания роторов, вызванные масляным слоем подшипников скольжения [Текст] / С.П. Максимов // Труды ЦКТИ. Котлотурбостроение. – 1964. – № 44. – С. 87–96.

6. **Коровчинский, М.В.** Теоретические основы работы подшипников скольжения [Текст] / М.В. Коровчинский. – М.: Машгиз, 1959. – 405 с.

7. **Belyaev, A.K**. Forces and moments acting on the rapidly rotating floating bearing [Text] / A.K. Belyaev, Nguyen Van Thang // 36th International Summer School – Conference APM' 2008. Repino, Saint Petersburg, Russia. – P. 104–111.

8. **Тондл, А.** Динамика роторов турбогенераторов [Текст] / А. Тондл. – Л.: Энергия, 1971. – 390 с.

9. **Меркин, Д.Р.** Введение в теорию устойчивости движения [Текст] / Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

10. **Boyaci, A.** Analytical bifurcation analysis of a rotor supported by floating ring bearings [Текст] / A. Boyaci, H. Hetzler, W. Seemann // Nonlinear Dynamics. Berlin: Springer, 2009. – Vol. 57. – P. 497–507.

11. **Hatakenaka, K**. A theoretical analysis of floating bush journal bearing with axial oil film ruptures being considered [Text] / K. Hatakenaka, M. Tanaka, K. Suzuki // Journal of Tribology. – 2002.– Vol. 124(3). – P. 494–505.

12. **Гургвиц, А.Г.** Устойчивость движения валов в подшипниках жидкостного трения [Текст] / А.Г. Гургвиц, Г.А. Завьялов. – М.: Машиностроение, 1964. – 145 с.

УДК 539.3

В.М. Жгутов

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Оболочки как элементы разного рода конструкций широко применяются в различных областях техники и строительства.

Тонкостенные элементы современных конструкций в виде оболочек предназначены для работы под воздействием механических нагрузок (как статических, так и динамических) и нередко температурного поля, обуславливающего появление чисто температурных деформаций.

Для придания в нужных местах большей жесткости профиль тонких оболочек может иметь плавные утолщения. С целью повышения

жесткости тонкостенная часть оболочки может быть подкреплена дискретно расположенными ребрами. В обоих случаях существенно повышается несущая способность конструкции при незначительном увеличении ее массы.

Таким образом, всю конструкцию следует рассматривать как конструкцию переменной толщины. В зависимости от характера изменения толщины будем различать оболочки гладко-переменной и, соответственно, ступенчато-переменной толщины (ребристые оболочки).

Известно, что тонкие оболочки могут допускать прогибы, соизмеримые с их толщиной (даже под воздействием нагрузок, далеких от критических значений).

Расчеты на прочность, устойчивость и колебания оболочечных конструкций играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. Тем не менее, поведение тонкостенных конструкций переменной толщины, при котором проявляются геометрическая нелинейность, поперечные сдвиги, нелинейная упругость (пластичность, или, точнее, упругопластичность), переменность профиля и возникают чисто температурные деформации, исследовано недостаточно. Причинами такого состояния дел являются сложность совместного учета упомянутых факторов и необходимость решения громоздких нелинейных краевых задач.

Физические основы теплопроводности и термоупругости изложены в энциклопедическом курсе Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [1]. Прикладные аспекты теории упругости и пластичности обстоятельно освещены в трудах Н.И. Безухова [2] и Н.Н. Малинина [3]. Вопросам расчетов различного рода конструкций на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур посвящена монография Н.И. Безухова и др. [4]. Анализ современного состояния теории оболочек, формулировка основополагающих принципов и построение модели термоупругих оболочек постоянной толщины приводится в весьма содержательной работе П.А. Жилина [5]. Разработке математических моделей термоупругости оболочек переменной толщины для задач статики посвящены публикации В.В. Карпова и др. [6, 7]. Однако в статье [7] не учитываются поперечные сдвиги (используется модель Кирхгофа – Лява) и геометрическая нелинейность, а также не рассматриваются ребристые оболочки. В монографии [6] в задачах термоупругости (приведенных исключительно для ребристых оболочек) используется модель Кирхгофа-Лява при учете геометрической нелинейности. В работе В.М. Жгутова [8] построена математическая модель термоупругости оболочек (как гладко-, так и ступенчато-переменной толщины) для задач статики и динамики при учете поперечных сдвигов (модель типа Тимошенко – Рейсснера) и геометрической нелинейности. Тем не менее, в работе [8] не учитывается возможность проявления нелинейной упругости (пластичности) материала при достаточно больших нагрузках.

Математическому моделированию деформирования ребристых оболочек и оболочек гладко-переменной толщины при учете различных свойств материала (нелинейная упругость, ползучесть) посвящены работы В.М. Жгутова [9 – 11] и другие, а также Р.А. Абдикаримова и В.М. Жгутова [12, 13]. Но в указанных работах не учитывается возможное влияние температурного поля на напряженно-деформированное состояние и устойчивость исследуемых оболочек.

Проектирование и последующее создание легких, но вместе с тем прочных и надежных, конструкций требует дальнейшего совершенствования механических моделей деформируемых тел, а также разработки новых интегральных методов их расчета.

В связи с этим разработка более совершенной математической модели термопластичности оболочек является актуальной и важной задачей.

В настоящей статье предложены математические модели термопластичности оболочек переменной толщины (для задач статики и динамики), основанные на модели типа Тимошенко – Рейсснера (учитывающей поперечные сдвиги).

В случае ребристых оболочек учитывается также дискретность расположения ребер, их ширина, сдвиговая и крутильная жесткости.

Постановка задачи

Рассматриваем оболочки общего вида с краем (пологие на прямоугольном плане и оболочки вращения, в частности цилиндрические,

конические, сферические, торообразные, а также многие другие).

Некоторую внутреннюю поверхность оболочки принимаем за отсчетную поверхность: $x_3 = 0$. Координатные линии x_1 и x_2 криволинейной ортогональной системы координат ($-a/2 \le x_1 \le a/2$ и $-b/2 \le x_2 \le b/2$) направляем по линиям кривизны (по параллелям и меридианам в случае поверхности вращения), а ось x_3 – по внутренней нормали отсчетной поверхности так, чтобы система координат x_1, x_2, x_3 была правой. Полагаем, что определенная таким образом сеть координатных линий на отсчетной поверхности оболочки обеспечивает гладкость и регулярность ее параметризации.

Дифференциалы длин дуг координатных линий x_1, x_2 и оси x_3 определяем по формулам

$$dl_1 = H_1 dx_1,\ dl_2 = H_2 dx_2,\ dl_3 = H_3 dx_3 = dx_3,$$

где $H_1 = H_1(x_1, x_2)$, $H_2 = H_2(x_1, x_2)$, $H_3 \equiv 1$ – метрические коэффициенты Лямэ.

При этом H_1 и H_2 зависят от вида оболочки. Например, $H_1 \equiv H_2 \equiv 1$ для пологих оболочек и пластин; $H_1 = \text{const}$ и $H_2 = H_2(x_1)$ в случае оболочек вращения.

Переменную толщину оболочки $\tilde{h} = \tilde{h}(x_1, x_2) \in C^k$ задаем ограничивающими ее (в направлениях нормалей к отсчетной поверхности) гладкими (или ступенчато-гладкими) поверхностями $z_{\text{в}} = z_{\text{в}}(x_1, x_2)$ и $z_{\text{н}} = z_{\text{н}}(x_2, x_2)$ так, что $\tilde{h} = z_{\text{н}} - z_{\text{в}}$ и $z_{\text{в}} \le x_3 \le z_{\text{н}}$. Следует отметить, что принадлежность функции $f(x_1, x_2)$ классу гладкости C^k означает, что функция имеет непрерывные частные производные до порядка $k \ge 1$ включительно; запись $f(x_1, x_2) \in C^0$ требует только непрерывности по совокупности аргументов. Полагаем, что векторы (ковекторы) градиентов $\overrightarrow{\nabla z_{\text{в}}}$ и $\overrightarrow{\nabla z_{\text{н}}}$ отличны от нуля и коллинеарны, т. е.

$$\left(\operatorname{rang} \begin{bmatrix} \partial z_{\text{в}} / \partial x_1 & \partial z_{\text{в}} / \partial x_2 \\ \partial z_{\text{н}} / \partial x_1 & \partial z_{\text{н}} / \partial x_2 \end{bmatrix} = 1 \right)$$

любой точке поверхности $x_3 = 0$.

Пусть $K_1 = K_1(x_1, x_2)$ и $K_2 = K_2(x_1, x_2)$ – главные кривизны отсчетной поверхности $x_3 = 0$ оболочки в направлениях x_1 и x_2 соответственно. Для любой точки отсчетной поверхности оболочки (как правило, не являющейся точкой уплощения), хотя бы одно из значений K_1 и K_2 отлично от нуля: $(K_1, K_2) \ne (0, 0)$. В случае точки уплощения (редком в теории оболочек) $(K_1, K_2) = (0, 0)$. Отметим, в частности, что для пластин $K_1 \equiv K_2 \equiv 0$; $0 \ne K_1 \equiv K_2 \equiv \text{const}$ для сферических и $K_1 \equiv 0 \ne K_2 \equiv \text{const}$ для цилиндрических оболочек вращения.

По определению, главные радиусы кривизны отсчетной поверхности оболочки следуют выражениям

$$R_1 = R_1(x_1, x_2) = 1/K_1,\ R_2 = R_1(x_1, x_2) = 1/K_2.$$

Случаям $K_1 = 0 \vee K_2 = 0$ отвечают «бесконечно большие» значения $R_1 = \infty \vee R_2 = \infty$. Здесь $\vee$ – оператор дизъюнкции предложений (логическое «или»).

Оболочки считаем тонкими, так что для любой точки отсчетной поверхности выполняется условие:

$$\delta \equiv \max\left\{ \frac{\tilde{h}}{R}; \frac{\tilde{h}}{l} \right\} < 1/20,$$

где $R = \min(R_1, R_2)$ – наименьший из главных радиусов кривизны отсчетной поверхности данной оболочки в рассматриваемой точке; $l = \min(l_1, l_2)$ – наименьшая из длин l_1 и l_2 координатных линий x_1 и x_2, проведенных в данной точке, при этом

$$l_1 = \int_{-a/2}^{a/2} H_1 \cdot dx_1;\ l_2 = \int_{-b/2}^{b/2} H_2 \cdot dx_2.$$

Как известно, область возможного применения теории тонких оболочек весьма велика. При рассмотрении тонких оболочек пренебрегают всеми величинами, имеющими порядок малости $\tilde{h}/R$ (и выше).

Для пластин имеем $\delta = \tilde{h}/l$ (в силу очевидного равенства $\tilde{h}/R = 0$), где l – наименьший из размеров $l_1 = a$ и $l_2 = b$ пластины в плане.

В случае ребристой оболочки за отсчетную поверхность $x_3 = 0$ принимаем срединную поверхность обшивки толщиной h. Ребра задаем с помощью ступенчато-гладкой функции $H = H(x_1, x_2) \in C^0$, характеризующей распределение ребер по оболочке (как правило, с внутренней стороны обшивки вдоль координатных

линий), их ширину и высоту [14, 15]. Таким образом, толщина ребристой оболочки равна $\tilde{h} = h + H$, причем $z_{\text{в}} = -h/2$ и $z_{\text{н}} = h/2 + H$.

Считаем, что оболочка находится в стационарном температурном поле $T = T(x_1, x_2, x_3)$ $[K]$ и под действием механической нагрузки (статической или динамической) при определенном закреплении ее края (контура).

Будем совместно учитывать геометрическую нелинейность, влияние температуры, нелинейную упругость (упругопластичность), поперечные сдвиги. В случае ребристых оболочек учитываем также дискретное расположение ребер, их ширину, сдвиговую и крутильную жесткости.

Математическая модель термопластичности рассматриваемых оболочек

Как известно, математическая модель деформирования оболочки состоит из геометрических соотношений, физических соотношений и функционала полной энергии ее деформации (из условия минимума которого следуют уравнения равновесия или движения).

Геометрические соотношения. Эти соотношения, т. е. зависимости деформаций от перемещений, в отсчетной поверхности $x_3 = 0$ с учетом геометрической нелинейности и влияния температуры имеют вид

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} - \tilde{\varepsilon}_0\,;\ \tilde{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22} - \tilde{\varepsilon}_0\,;$$

$$\tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \tilde{\gamma}_{21}\,, \qquad (1)$$

где ε_{11}, ε_{22} и $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ – деформации растяжения или сжатия вдоль линий x_1, x_2 и сдвига в касательной плоскости (dx_1, dx_2) есть составляющие геометрических соотношений (1), обусловленные исключительно механической нагрузкой; $\tilde{\varepsilon}_0$ – чисто температурные деформации («температурные» составляющие).

Здесь

$$\varepsilon_{11} = \frac{Du_1}{\partial l_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{Du_3}{\partial l_1}\right)^2;\quad \varepsilon_{22} = \frac{Du_2}{\partial l_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{Du_3}{\partial l_2}\right)^2;$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{Du_2}{\partial l_1} + \frac{Du_1}{\partial l_2} + \frac{Du_3}{\partial l_1}\cdot\frac{Du_3}{\partial l_2}\,, \qquad (2)$$

где $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ и $u_3 = u_3(x_1, x_2)$ – компоненты вектора перемещений точек отсчетной поверхности вдоль координатных линий x_1, x_2 и оси x_3 соответственно; $\frac{D}{\partial l_\alpha}$, $1 \le \alpha \le 3$ – операторы ковариантного дифференцирования по направлениям l_α произвольных полей, в частности скалярного поля $a = a(x_1, x_2, x_3)$, векторного поля $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$, $1 \le i \le 3$, поля тензора второго ранга $a_{ik} = a_{ik}(x_1, x_2, x_3)$, $1 \le i, k \le 3$ и т. д.

Операторы ковариантного (абсолютного) дифференцирования $\frac{D}{\partial l_\alpha}$ действуют по правилам [16, 17]:

$$a \ \mapsto \frac{Da}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{H_\alpha}\cdot\frac{\partial a}{\partial x_\alpha}\,,$$

$$a_i \mapsto \frac{Da_i}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{H_\alpha}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial x_\alpha} - \sum_{k=1}^{3} a_k \Gamma_{ik\alpha}$$

и, соответственно,

$$a_{ik} \mapsto \frac{Da_{ik}}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\cdot\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_\alpha} - \sum_{l=1}^{3}(a_{lk}\Gamma_{il\alpha} + a_{il}\Gamma_{kl\alpha})\,,$$

где $\Gamma_{ik\alpha} = \Gamma_{ik\alpha}(x_1, x_2, x_3)$ – символы Кристоффеля (1-го рода), $1 \le i, k, \alpha \le 3$.

Как известно, данные символы симметричны по крайним индексам при $k \ne i, k \ne \alpha$ ($\Gamma_{ik\alpha} = \Gamma_{\alpha ki}$) и антисимметричны по первым двум индексам ($\Gamma_{ik\alpha} = -\Gamma_{ki\alpha}$), а потому величины $\Gamma_{ik\alpha}$ с разными значениями индексов равны нулю ($\Gamma_{ik\alpha} = 0$ при $i \ne k, i \ne \alpha, k \ne \alpha$). Это значит, что в ортогональной криволинейной системе координат из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$ ненулевыми могут быть не более 12: $\Gamma_{ikk} = -\Gamma_{kik}$.

При этом

$$\Gamma_{ikk} = -\Gamma_{kik} = \frac{1}{H_i H_k}\cdot\frac{\partial H_k}{\partial x_i} = \frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial \ln H_k}{\partial x_i}\,,$$

а те 12 из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$, которые в ортогональной криволинейной системе координат могут быть отличными от нуля, имеют вид

$$\Gamma_{122} = -\Gamma_{212} = \frac{1}{H_1 H_2}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial x_1};\ \Gamma_{133} = -\Gamma_{313} = 0\,;$$

$$\Gamma_{211} = -\Gamma_{121} = \frac{1}{H_1 H_2}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial x_2};\ \Gamma_{233} = -\Gamma_{323} = 0\,;$$

$$\Gamma_{311} = -\Gamma_{131} = \frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial x_3} = -K_1\,;$$

$$\Gamma_{322} = -\Gamma_{232} = \frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial x_2} = -K_2 .$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \dfrac{Du_1}{\partial l_1} = \dfrac{1}{H_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}\cdot u_2 - K_1\cdot u_3; \\ \dfrac{Du_1}{\partial l_2} = \dfrac{1}{H_2}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}\cdot u_2; \\ \dfrac{Du_2}{\partial l_1} = \dfrac{1}{H_1}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}\cdot u_1; \\ \dfrac{Du_2}{\partial l_2} = \dfrac{1}{H_2}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}\cdot u_1 - K_2\cdot u_3; \\ \dfrac{Du_3}{\partial l_1} = \dfrac{1}{H_1}\cdot\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + K_1\cdot u_1; \\ \dfrac{Du_3}{\partial l_2} = \dfrac{1}{H_2}\cdot\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + K_2\cdot u_2. \end{cases} \qquad (3)$$

Введем обозначения

$$\Theta_1 = \Theta_1(x_1,x_2) \equiv \frac{Du_3}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + K_1u_1 ;$$

$$\Theta_2 = \Theta_2(x_1,x_2) \equiv \frac{Du_3}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + K_2u_2 . \qquad (4)$$

Тогда с учетом выражений (3) и (4) составляющие от механической нагрузки (2) геометрических соотношений (1) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{H_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}\cdot u_2 - K_1u_3 + \dfrac{1}{2}\Theta_1^2; \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{H_2}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}\cdot u_1 - K_2u_3 + \dfrac{1}{2}\Theta_2^2; \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \dfrac{1}{H_1}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}\cdot u_1 + \\ + \dfrac{1}{H_2}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}\cdot u_2 + \Theta_1\cdot\Theta_2. \end{cases} \qquad (5)$$

В ряде случаев можно полагать, что в процессе деформирования

$$\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_1} >> K_1u_1 ; \quad \frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2} >> K_2u_2,$$

а значит

$$\Theta_1 \approx \frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_1} ; \quad \Theta_2 \approx \frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2} .$$

Для пластин $K_1 \equiv K_2 \equiv 0$ и $H_1 \equiv H_2 \equiv 1$ (как было отмечено выше), а потому операторы ковариантного дифференцирования $\dfrac{D}{\partial l_\alpha}$, $1 \le \alpha \le 3$, совпадают с операторами обычного дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$ и составляющие (2), (5) от механической нагрузки геометрических соотношений (1) максимально упрощаются:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 ; \ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2 ;$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2} . \qquad (6)$$

В соотношениях (2), (5) и (6) квадратичные члены характеризуют геометрическую нелинейность, которую следует учитывать в случаях, когда поперечные перемещения u_3 (прогибы) соизмеримы с толщиной оболочки $\tilde{h}$.

Деформации поперечных (также как и продольных) сдвигов не зависят от температуры [1, 8] и могут быть определены по формулам

$$\gamma_{13} = cf(x_3)\Phi_1 ; \ \ \gamma_{23} = cf(x_3)\Phi_2 .$$

Здесь $f(x_3)$ – функция, характеризующая распределение напряжений τ_{13} и τ_{23} в главных нормальных сечениях (dx_1, dx_3) и (dx_2, dx_3) оболочки, такая, что

$$f(z_в) = f(z_н) = 0 , \ \frac{1}{\tilde{h}}\int_{z_в}^{z_н} f(x_3)dx_3 = 1 ,$$

$$\frac{1}{\tilde{h}}\int_{z_в}^{z_н} f^2(x_3)dx_3 = 1/c$$

(c – константа); $\Phi_1 = \Psi_1 + \dfrac{Du_3}{\partial l_1}$; $\Phi_2 = \Psi_2 + \dfrac{Du_3}{\partial l_2}$ – полные углы сдвигов, где $\Psi_1 = \mathrm{tg}\psi_1$ и $\Psi_2 = \mathrm{tg}\psi_2$; причем $\psi_1 = \psi_1(x_1,x_2)$, $\psi_2 = \psi_2(x_1,x_2)$ – углы поворота отрезка нормали к отсчетной поверхности в соответствующих главных нормальных сечениях оболочки [8].

В качестве $f(x_3)$ используем квадратичную зависимость [8]:

$$f(x_3) = -\frac{6}{\tilde{h}^2}\left(x_3 - z_н\right)\left(x_3 - z_в\right) = f_0 + f_1x_3 + f_2x_3^2,$$

где $f_0 = -\frac{6z_н z_в}{\tilde{h}^2}$; $f_1 = \frac{6(z_н + z_в)}{\tilde{h}^2}$; $f_2 = -\frac{6}{\tilde{h}^2}$,

и тогда $c = 5/6$.

Перемещения в слоях $x_3 = \text{const}$ вычисляем по формулам [8]:

$$u_1^{(x3)} = u_1 + x_3 \cdot \Phi_1, \quad u_2^{(x3)} = u_2 + x_3 \cdot \Phi_2,$$

$$u_3^{(x3)} = u_3. \qquad (7)$$

Отсюда для деформаций в слоях $x_3 = \text{const}$ получаем выражения

$$\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} = \tilde{\varepsilon}_{11} + x_3 \cdot \mathrm{X}_1 = \varepsilon_{11}^{(x3)} - \tilde{\varepsilon};$$

$$\tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} = \tilde{\varepsilon}_{22} + x_3 \cdot \mathrm{X}_2 = \varepsilon_{22}^{(x3)} - \tilde{\varepsilon};$$

$$\gamma_{12}^{(x3)} = \gamma_{12} + x_3 \cdot 2\mathrm{X}_{12}, \qquad (8)$$

где $\tilde{\varepsilon} = \alpha T$, $\varepsilon_{11}^{(x3)} = \varepsilon_{11} + x_3 \cdot \mathrm{X}_1$; $\varepsilon_{22}^{(x3)} = \varepsilon_{22} + x_3 \cdot \mathrm{X}_2$.

Здесь α – коэффициент линейного теплового расширения материала $\left[K^{-1}\right]$; T – температура оболочки в данной точке;

$$\mathrm{X}_1 \equiv \frac{D\Phi_1}{\partial l_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\Phi_2;$$

$$\mathrm{X}_2 \equiv \frac{D\Phi_2}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\Phi_1;$$

$$2\mathrm{X}_{12} \equiv \frac{D\Phi_2}{\partial l_1} + \frac{D\Phi_1}{\partial l_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\Phi_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\Phi_2\right).$$

Считаем, что температурное поле $T(x_1, x_2, x_3)$ (определяемое из решения уравнения теплопроводности) задано и соответствует установившемуся тепловому режиму. Вдоль оси x_3 оно может быть представлено с помощью квадратичного закона распределения [8]:

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + T_1(x_1, x_2) \cdot x_3 + T_2(x_1, x_2) \cdot x_3^2 = \sum_{i=1}^{3} T_{i-1\cdot} \cdot x_3^{\,i-1} \qquad (9)$$

или линейной зависимости, применимой для тонких оболочек:

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + T_1(x_1, x_2) \cdot x_3 = \sum_{i=1}^{2} T_{i-1\cdot} \cdot x_3^{\,i-1},$$

где $T_0 = T_0(x_1, x_2)$, $T_1 = T_1(x_1, x_2)$; $T_2 = T_2(x_1, x_2)$ – известные функции.

В ряде случаев можно предполагать (равномерное температурное поле):

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2).$$

Известно, что для многих материалов при достаточно высоких или низких температурах модуль упругости E и коэффициент α заметно изменяются. В этом случае для вычисления их значений могут быть использованы аппроксимации [8]:

$$E = E(T) = E_0 + E_1 T + E_2 T^2 = \sum_{i=1}^{3} E_{i-1} T^{i-1}; \qquad (10)$$

$$\alpha = \alpha(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{j-1} T^{j-1}, \qquad (11)$$

где E_0, α_0 – некоторые «начальные» значения E и α; E_1, E_2, α_1 – экспериментальные параметры.

Как правило, E_0 и α_0 (и, соответственно, коэффициенты E_1, E_2 и α_1) отвечают значению $T = 20$ °C.

В большинстве случаев коэффициент Пуассона μ материала не зависит от изменений температуры в достаточно обширной температурной области.

С учетом представления (9) аппроксимации (10) и (11) могут быть записаны для каждой точки $P = P(x_1, x_2, x_3)$ оболочки в виде [8]

$$E = E(P) = E(x_1, x_2, x_3) = \tilde{E}_0 + \tilde{E}_1 \cdot x_3 + \tilde{E}_2 \cdot x_3^{\,2} + \tilde{E}_3 \cdot x_3^{\,3} + \tilde{E}_4 \cdot x_3^{\,4} = \sum_{i=1}^{5} \tilde{E}_{i-1} \cdot x_3^{\,i-1}; \qquad (12)$$

$$\alpha = \alpha(P) = \alpha(x_1, x_2, x_3) = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \cdot x_3 + \tilde{\alpha}_2 \cdot x_3^{\,2} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{\alpha}_{i-1} \cdot x_3^{\,i-1}. \qquad (13)$$

Здесь $\tilde{E}_0$, $\tilde{E}_1 - \tilde{E}_4$ и $\tilde{\alpha}_0$, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ – суть функции точки $P_0 = P_0(x_1, x_2)$ отсчетной поверхности $x_3 = 0$ оболочки, подробные выражения для которых приведены в основном тексте работы [8].

Для чисто температурных деформаций $\tilde{\varepsilon} = \alpha T$ с учетом выражений (12) и (13) будем иметь:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(P) = \alpha(P)T(P) = \tilde{\varepsilon}_0 + \tilde{\varepsilon}_1 \cdot x_3 + \tilde{\varepsilon}_2 \cdot x_3^{\,2} + \tilde{\varepsilon}_3 \cdot x_3^{\,3} + \tilde{\varepsilon}_4 \cdot x_3^{\,4} = \sum_{i=0}^{5} \tilde{\varepsilon}_{i-1} \cdot x_3^{\,i-1}, \quad (14)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_k = \tilde{\varepsilon}_k(P_0) = \tilde{\varepsilon}_k(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{k} \tilde{\alpha}_i T_{k-i}, \quad 0 \le k \le 4, \quad (15)$$

суть коэффициенты при z^k (функции точки $P_0 = P_0(x_1, x_2)$) в представлении (14) (считаем, что $\tilde{\alpha}_i = 0$ при $i > 2$ и $T_{k-i} = 0$ при $k - i > 2$).

В развернутом виде выражения (15) для функций $\tilde{\varepsilon}_k$ в соотношении (14) приведены в приложении 1 работы [8].

Физические соотношения. Известно, что для многих материалов оболочек экспериментальные зависимости «напряжение σ – деформация ε», получаемые при простейших видах напряженного состояния, даже при обычной температуре имеют ярко выраженный нелинейный характер, а модуль упругости является переменной величиной. В соответствии с этим для данного материала на основании опытной кривой «$\sigma - \varepsilon$» находится аппроксимирующая ее кривая $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, которая при сложном напряженном состоянии заменяется (на основании первого положения теории пластичности) зависимостью $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, где σ_i – интенсивность напряжений; ε_i – интенсивность деформаций, определяемая с помощью выражения [2, 7]:

$$\varepsilon_i = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left\{\left(\varepsilon_{11}^{(x3)}\right)^2 + \varepsilon_{11}^{(x3)} \cdot \varepsilon_{22}^{(x3)} + \left(\varepsilon_{22}^{(x3)}\right)^2 + \frac{1}{4}\left[\left(\gamma_{12}^{(x3)}\right)^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2\right]\right\}^{1/2}. \quad (16)$$

В качестве переменного модуля упругости применяется величина («секущий модуль»)

$$E_s = \sigma_i / \varepsilon_i = E(1 - \omega(\varepsilon_i)),$$

где $E = E_0$; $\omega(\varepsilon_i) = \omega$ – функция Ильюшина.

В данном случае предполагается простое нагружение, при котором внешние силы возрастают пропорционально некоторому параметру (например, времени) или постоянны; тогда главные оси напряженного состояния сохраняют свои направления в процессе деформирования в каждой точке.

Опыт показывает, что с ростом температуры нелинейно-упругие (пластические) свойства материалов еще более усиливаются.

Для вычисления интенсивности деформаций $\tilde{\varepsilon}_i$, сопровождаемых воздействием температурного поля, используем формулу (16), которая с учетом соотношений (8) обретает вид

$$\tilde{\varepsilon}_i = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left\{\left(\tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)}\right)^2 + \tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} \cdot \tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \left(\tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)}\right)^2 + \frac{1}{4}\left[\left(\gamma_{12}^{(x3)}\right)^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2\right]\right\}^{1/2}. \quad (17)$$

Можно показать, что величина $\tilde{\varepsilon}_i$ не зависит от изменения температуры T и имеет место равенство

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i \quad (18)$$

при любых значениях T и α. Необходимо отметить, что налогичный результат приведен в работе Н.И. Безухова и др. [14].

Как правило, функция Ильюшина ω зависит не только от интенсивности деформаций $\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i$, но и от температуры $T = T(P)$ в данной точке P оболочки: $\omega = \omega(\varepsilon_i, T)$ или $\omega = \omega(\varepsilon_i, P)$. Зачастую зависимости $\omega = \omega(\varepsilon_i, P)$ достаточно сложно устроены.

Например, в работе Э.И. Старовойтова и др. [15] для алюминиевого сплава Д16Т принимается

$$\omega(\varepsilon_i, T) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon_i < \varepsilon_{\text{н}}; \\ a\left(1 - \dfrac{\varepsilon_{\text{н}}}{\varepsilon_i + \varepsilon_{\text{н}} - \varepsilon_m(T)}\right), & \text{если } \varepsilon_i \ge \varepsilon_{\text{н}}. \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon_{\text{н}}$ – деформационный предел текучести при некоторой температуре $T_{\text{н}}$ (ему отвечает предел текучести $\sigma_{\text{н}}$); a – экспериментальная константа; $\varepsilon_m(T) = \dfrac{\sigma_m(T)}{E(T)}$ – деформационный предел текучести при температуре T, где

$$\sigma_m(T) = \sigma_{\text{н}} \exp k\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{н}}}\right)$$

(k – экспериментальная константа).

Очевидно, что в задачах термопластичности «секущий» модуль упругости следует принять в виде

$$E_s = E(1-\omega(\varepsilon_i, P)),$$

где $E = E(P)$.

В соответствии с деформационной теорией пластичности физические соотношения в случае нелинейно-упругого (пластичного) изотропного материала оболочки, находящейся в температурном поле, могут быть представлены в следующем виде (в предположении, что отсутствует разгрузка).

Напряжения растяжения (или сжатия) в направлениях x_1 *и* x_2:

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\sigma}^E_{11} - \tilde{\sigma}^P_{11} = \left(\sigma^{ME}_{11} - \sigma^{MP}_{11}\right) - \left(\sigma^{TE} - \sigma^{TP}\right); \quad (19)$$

$$\tilde{\sigma}_{22} = \tilde{\sigma}^E_{22} - \tilde{\sigma}^P_{22} = \left(\sigma^{ME}_{22} - \sigma^{MP}_{22}\right) - \left(\sigma^{TE} - \sigma^{TP}\right). \quad (20)$$

Здесь

$\tilde{\sigma}^E_{11}$, $\tilde{\sigma}^E_{22}$ – (линейно) термоупругие составляющие напряжений растяжения или сжатия [8];

$$\tilde{\sigma}^E_{11} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}^{(x3)}_{11} + \mu\tilde{\varepsilon}^{(x3)}_{22}\right] =$$

$$= \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2) - \right. \quad (21)$$

$$\left. -(1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma^{ME}_{11} - \sigma^{TE};$$

$$\tilde{\sigma}^E_{22} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}^{(x3)}_{22} + \mu\tilde{\varepsilon}^{(x3)}_{11}\right] =$$

$$= \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1) - \right. \quad (22)$$

$$\left. -(1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma^{ME}_{22} - \sigma^{TE},$$

где

$$\sigma^{ME}_{11} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2)\right],$$

$$\sigma^{ME}_{22} = \frac{E(P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1)\right]$$

– составляющие термоупругих напряжений растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке (с той разницей, что входящий в их выражения модуль упругости $E = E(P)$ является зависящей от температуры в точке P величиной);

$$\sigma^{TE} = \frac{(1+\mu)\tilde{\sigma}(P)}{1-\mu^2}$$

– составляющая термоупругих напряжений растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями (величину $\tilde{\sigma}(P) = E(P)\cdot\tilde{\varepsilon}(P)$ вычисляем по формуле (25), приведенной ниже);

$\tilde{\sigma}^P_{11}$, $\tilde{\sigma}^P_{22}$ – нелинейно термоупругие (термопластические) составляющие напряжений растяжения

$$\tilde{\sigma}^P_{11} = \frac{E(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}^{(x3)}_{11} + \mu\tilde{\varepsilon}^{(x3)}_{22}\right] =$$

$$= \frac{E(P)\cdot\omega(\varepsilon_i, P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + \right. \quad (23)$$

$$\left. + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2) - (1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma^{MP}_{11} - \sigma^{TP},$$

$$\tilde{\sigma}^P_{22} = \frac{E(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{1-\mu^2}\left[\tilde{\varepsilon}^{(x3)}_{22} + \mu\tilde{\varepsilon}^{(x3)}_{11}\right] =$$

$$= \frac{E(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1) - \right. \quad (24)$$

$$\left. -(1+\mu)\tilde{\varepsilon}(P)\right] = \sigma^{MP}_{22} - \sigma^{TP},$$

где

$$\sigma^{MP}_{11} = \frac{E(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + x_3(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2)\right],$$

$$\sigma^{MP}_{22} = \frac{E(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} + x_3(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1)\right]$$

– составляющие термопластических напряжений растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке (с той разницей, что входящие в их выражения модуль упругости $E = E(P)$ и функция Ильюшина $\omega = \omega(\varepsilon_i, P)$ являются зависящими от температуры в точке P величинами);

$$\sigma^{TP} = \frac{(1+\mu)\tilde{\sigma}(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{1-\mu^2}$$

– составляющая термопластических напряжений растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями.

В формулах (21) – (24)

$$\tilde{\sigma}(P) = E(P)\cdot\tilde{\varepsilon}(P) =$$

$$= \tilde{\sigma}_0 + \tilde{\sigma}_1 x_3 + \tilde{\sigma}_2 {x_3}^2 + \tilde{\sigma}_3 {x_3}^3 + \tilde{\sigma}_4 {x_3}^4 +$$

$$+\tilde{\sigma}_5 {x_3}^5 + \tilde{\sigma}_6 {x_3}^6 + \tilde{\sigma}_7 {x_3}^7 + \tilde{\sigma}_8 {x_3}^8 = \sum_{i=1}^{9}\tilde{\sigma}_{i-1} x_3^{i-1}, \quad (25)$$

где

$$\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_k(P_0) = \tilde{\sigma}_k(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{k} \tilde{E}_i \cdot \tilde{\varepsilon}_{k-i},$$
$$0 \le k \le 8; \qquad (26)$$

(считаем, что $\tilde{E}_i = 0$ при $i > 4$, $\tilde{\varepsilon}_{k-i} = 0$ при $k - i > 4$) [8].

В развернутом виде выражения (26) для коэффициентов $\tilde{\sigma}_k$ в соотношении (25) представлены в приложении 2 работы [8].

Напряжения сдвигов в плоскостях (dx_1, dx_2) *и* (dx_1, dx_3), (dx_2, dx_3).

Они имеют тот же вид, что и при чисто механической нагрузке:

$$\tilde{\tau}_{12} = \tilde{\tau}_{12}^E - \tilde{\tau}_{12}^P; \quad \tilde{\tau}_{13} = \tilde{\tau}_{13}^E - \tilde{\tau}_{13}^P;$$
$$\tilde{\tau}_{23} = \tilde{\tau}_{23}^E - \tilde{\tau}_{23}^P. \qquad (27)$$

Здесь

$\tilde{\tau}_{12}^E$ и $\tilde{\tau}_{13}^E$, $\tilde{\tau}_{23}^E$ – термоупругие составляющие напряжений сдвига [8]:

$$\tilde{\tau}_{12}^E = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\gamma_{12}^{(x3)} = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\left(\gamma_{12} + x_3 \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right); \qquad (28)$$

$$\tilde{\tau}_{13}^E = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\gamma_{13} =$$
$$= \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\left[c f(x_3)\Phi_1\right] = \frac{c\Phi_1\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}; \qquad (29)$$

$$\tilde{\tau}_{23}^E = \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\gamma_{23} =$$
$$= \frac{E(P)}{2(1+\mu)}\left[c f(x_3)\Phi_2\right] = \frac{c\Phi_2\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}; \qquad (30)$$

$\tilde{\tau}_{12}^P$ и $\tilde{\tau}_{13}^P$, $\tilde{\tau}_{23}^P$ – термопластические составляющие напряжений сдвига:

$$\tilde{\tau}_{12}^P = \frac{E(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{2(1+\mu)}\gamma_{12}^{(x3)} =$$
$$= \frac{E(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{2(1+\mu)}\left(\gamma_{12} + x_3 \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right); \qquad (31)$$

$$\tilde{\tau}_{13}^E = \frac{E(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{2(1+\mu)}\gamma_{13} =$$
$$= \frac{E(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{2(1+\mu)}\left[c f(x_3)\Phi_1\right] =$$
$$= \frac{c\Phi_1\omega(\varepsilon_i, P)\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}; \qquad (32)$$

$$\tilde{\tau}_{23}^E = \frac{E(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{2(1+\mu)}\gamma_{23} =$$
$$= \frac{E(P)\omega(\varepsilon_i, P)}{2(1+\mu)}\left[c f(x_3)\Phi_2\right] =$$
$$= \frac{c\Phi_2\omega(\varepsilon_i, P)\tilde{\tau}(P)}{2(1+\mu)}. \qquad (33)$$

В формулах (32) и (33)

$$\tilde{\tau}(P) = E(P) \cdot f(x_3) =$$
$$\tilde{\tau}_0 + \tilde{\tau}_1 x_3 + \tilde{\tau}_2 {x_3}^2 + \tilde{\tau}_3 {x_3}^3 +$$
$$+\tilde{\tau}_4 {x_3}^4 + \tilde{\tau}_5 {x_3}^5 + \tilde{\tau}_6 {x_3}^6 = \sum_{i=1}^{7} \tilde{\tau}_{i-1} {x_3}^{i-1}, \qquad (34)$$

где

$$\tilde{\tau}_k = \tilde{\tau}_k(P_0) = \tilde{\tau}_k(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{k} \tilde{E}_i \cdot f_{k-i},$$
$$0 \le k \le 6 \qquad (35)$$

(считаем, что $\tilde{E}_i = 0$ при $i > 4$ и $f_{k-i} = 0$ при $k - i > 2$) [8].

В развернутом виде выражения (35) для коэффициентов $\tilde{\tau}_k$ в соотношениях (34) представлены в приложении 3 работы [8].

Проинтегрируем напряжения (19), (20), (27) по переменной x_3, $z_в \le x_3 \le z_н$.. Получим следующие выражения для внутренних силовых факторов, приведенных к отсчетной поверхности оболочки (и приходящихся на единицу длины сечения, т. е. погонных).

Усилия растяжения или сжатия в направлениях x_1 *и* x_2*:*

$$\tilde{N}_{11} = \tilde{N}_{11}^E - \tilde{N}_{11}^P = \left(N_{11}^{ME} - N_{11}^{MP}\right) -$$
$$-\left(N^{TE} - N^{TP}\right); \qquad (36)$$

$$\tilde{N}_{22} = \tilde{N}_{22}^E - \tilde{N}_{22}^P =$$
$$= \left(N_{22}^{ME} - N_{22}^{MP}\right) - \left(N^{TE} - N^{TP}\right). \qquad (37)$$

Здесь

$\tilde{N}_{11}^E$, $\tilde{N}_{22}^E$ – термоупругие составляющие усилий растяжения [8];

$$\tilde{N}_{11}^E = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\sigma}_{11}^E dx_3 =$$
$$= I_1\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_2\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right) -$$

$$-(1+\mu)\tilde{N}(P_0) = N_{11}^{ME} - N^{TE}; \qquad (38)$$

$$\tilde{N}_{22}^{E} = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\sigma}_{22}^{E} dx_3 =$$

$$= I_1\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_2\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right) -$$

$$-(1+\mu)\tilde{N}(P_0) = N_{22}^{ME} - N^{TE}, \qquad (39)$$

где

$$N_{11}^{ME} = I_1\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_2\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right),$$

$$N_{22}^{ME} = I_1\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_2\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right)$$

– составляющие термоупругих усилий растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке. Величины

$$I_1 = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_в}^{z_н} E(P)dx_3\ ,\quad I_2 = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_в}^{z_н} E(P)x_3 dx_3$$

вычисляем по формулам (57), (58), приведенным ниже.

Далее, $N^{TE} = (1+\mu)\tilde{N}^{E}(P_0)$

– составляющая термоупругих усилий растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями. Величину

$$\tilde{N}^{E}(P_0) = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_в}^{z_н} \tilde{\sigma}(P)dx_3$$

вычисляем по формуле (59), приведенной ниже.

Также в выражениях (36), (37) $\tilde{N}_{11}^{P}$, $\tilde{N}_{22}^{P}$ – термопластические составляющие усилий растяжения;

$$\tilde{N}_{11}^{P} = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\sigma}_{11}^{P} dx_3 =$$

$$= I_1^{P}\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_2^{P}\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right) -$$

$$-(1+\mu)\tilde{N}^{P}(P_0) = N_{11}^{MP} - N^{TP}; \qquad (40)$$

$$\tilde{N}_{22}^{P} = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\sigma}_{22}^{P} dx_3 =$$

$$= I_1^{P}\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_2^{P}\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right) -$$

$$-(1+\mu)\tilde{N}^{P}(P_0) = N_{22}^{MP} - N^{TP}, \qquad (41)$$

где

$$N_{11}^{MP} = I_1^{P}\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_2^{P}\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right),$$

$$N_{22}^{MP} = I_1^{P}\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_2^{P}\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right)$$

– составляющие термопластических усилий растяжения, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке.

В последних формулах

$$I_1^{P} = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_в}^{z_н} E(P)\omega(\varepsilon_i, P)dx_3,$$

$$I_2^{P} = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_в}^{z_н} E(P)\omega(\varepsilon_i, P)x_3 dx_3.$$

Далее,

$$N^{TP} = (1+\mu)\tilde{N}^{P}(P_0)$$

– составляющая термопластических усилий растяжения, обусловленная чисто температурными деформациями,

$$\tilde{N}^{P}(P_0) = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_в}^{z_н} \tilde{\sigma}(P)\omega(\varepsilon_i, P)dx_3.$$

Усилие сдвига в касательной плоскости (dx_1, dx_2). Оно имеет тот же вид, что и при чисто механической нагрузке:

$$\tilde{N}_{12} = \tilde{N}_{12}^{E} - \tilde{N}_{12}^{P}. \qquad (42)$$

Здесь $\tilde{N}_{12}^{E}$ – термоупругая составляющая усилия сдвига [8];

$$\tilde{N}_{12}^{E} = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\tau}_{12}^{E} dx_3 = \mu_1\left(I_1\gamma_{12} + I_2 \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right), \qquad (43)$$

где $\mu_1 = (1-\mu)/2$;

$\tilde{N}_{12}^{P}$ – термопластическая составляющая усилия сдвига

$$\tilde{N}_{12}^{P} = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\tau}_{12}^{P} dx_3 = \mu_1\left(I_1^{P}\gamma_{12} + I_2^{P} \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right). \qquad (44)$$

Изгибающие моменты вдоль линий x_1 *и* x_2*:*

$$\tilde{M}_{11} = \tilde{M}_{11}^{E} - \tilde{M}_{11}^{P} =$$

$$= \left(M_{11}^{ME} - M_{11}^{MP}\right) - \left(M^{TE} - M^{TP}\right); \qquad (45)$$

$$\tilde{M}_{22} = \tilde{M}_{22}^{E} - \tilde{M}_{22}^{P} =$$

$$= \left(M_{22}^{ME} - M_{22}^{MP}\right) - \left(M^{TE} - M^{TP}\right). \qquad (46)$$

Здесь $\tilde{M}_{11}^{E}$, $\tilde{M}_{22}^{E}$ – термоупругие составляющие изгибающих моментов [8];

$$\tilde{M}_{11}^{E} = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\sigma}_{11}^{E} x_3 dx_3 = $$
$$= I_2\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_3\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right) -$$
$$-(1+\mu)\tilde{M}(P_0) = M_{11}^{ME} - M^{TE}; \qquad (47)$$

$$\tilde{M}_{22}^{E} = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\sigma}_{11}^{E} x_3 dx_3 =$$
$$= I_2\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_3\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right) -$$
$$-(1+\mu)\tilde{M}(P_0) = M_{22}^{ME} - M^{TE}, \qquad (48)$$

где

$$M_{11}^{ME} = I_2\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_3\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right),$$
$$M_{22}^{ME} = I_2\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_3\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right)$$

– составляющие термоупругих изгибающих моментов, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке. Величину

$$I_3 = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_в}^{z_н} E(P) x_3{}^2 dx_3$$

вычисляем по формуле (60), приведенной ниже. Далее,

$$M^{TE} = (1+\mu)\tilde{M}^{E}(P_0)$$

– составляющая изгибающих моментов, обусловленная чисто температурными деформациями. Величину

$$\tilde{M}^{E}(P_0) = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_в}^{z_н} \tilde{\alpha}(P) x_3 dx_3$$

вычисляем по формуле (61), приведенной ниже.

Кроме того, $\tilde{M}_{11}^{P}$, $\tilde{M}_{11}^{P}$ – термопластические составляющие изгибающих моментов;

$$\tilde{M}_{11}^{P} = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\sigma}_{11}^{P} x_3 dx_3 =$$
$$= I_2^{P}\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_3^{P}\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right) -$$
$$-(1+\mu)\tilde{M}^{P}(P_0) = M_{11}^{MP} - M^{TP}; \qquad (49)$$

$$\tilde{M}_{22}^{P} = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\sigma}_{11}^{P} x_3 dx_3 =$$
$$= I_2^{P}\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_3^{P}\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right) -$$
$$-(1+\mu)\tilde{M}(P_0) = M_{22}^{MP} - M^{TP}, \qquad (50)$$

где

$$M_{11}^{MP} = I_2^{P}\left(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right) + I_3^{P}\left(\mathrm{X}_1 + \mu\mathrm{X}_2\right),$$
$$M_{22}^{MP} = I_2^{P}\left(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right) + I_2^{P}\left(\mathrm{X}_2 + \mu\mathrm{X}_1\right)$$

– составляющие термопластических изгибающих моментов, имеющие тот же вид, что и при чисто механической нагрузке;

$$I_3^{P} = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_в}^{z_н} E(P)\omega(\varepsilon_i, P) x_3{}^2 dx_3;$$
$$M^{TP} = (1+\mu)\tilde{M}^{P}(P_0)$$

– составляющая изгибающих моментов, обусловленная чисто температурными деформациями, при этом

$$\tilde{M}^{P}(P_0) = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_в}^{z_н} \tilde{\alpha}(P)\omega(\varepsilon_i, P) x_3 dx_3 .$$

Крутящий момент вдоль касательной плоскости (dx_1, dx_2). Он имеет тот же вид, что и при чисто механической нагрузке:

$$\tilde{M}_{12} = \tilde{M}_{12}^{E} - \tilde{M}_{12}^{P}. \qquad (51)$$

Здесь $\tilde{M}_{12}^{E}$ – термоупругая составляющая крутящего момента [8];

$$\tilde{M}_{12}^{E} = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\tau}_{12}^{E} x_3 dx_3 =$$
$$= \mu_1\left[I_2\gamma_{xy} + I_3 \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right]; \qquad (52)$$

$\tilde{M}_{12}^{P}$ – термопластическая составляющая крутящего момента

$$\tilde{M}_{12}^{P} = \int_{z_в}^{z_н} \tilde{\tau}_{12}^{P} x_3 dx_3 = \mu_1\left(I_2^{P}\gamma_{12} + I_3^{P} \cdot 2\mathrm{X}_{12}\right). \qquad (53)$$

Поперечные усилия в главных нормальных сечениях (dx_1, dx_3), (dx_2, dx_3). Имеют тот же вид, что и при чисто механических деформациях:

$$\tilde{Q}_{13} = \tilde{Q}_{13}^{E} - \tilde{Q}_{13}^{P};\ \tilde{Q}_{23} = \tilde{Q}_{23}^{E} - \tilde{Q}_{23}^{P}. \qquad (54)$$

Здесь $\tilde{Q}_{13}^{E}$ и $\tilde{Q}_{23}^{E}$ – термоупругие составляющие поперечных сил [8];

$$\tilde{Q}_{13}^{E}=\int_{z_в}^{z_н}\tilde{\tau}_{13}^{E}dx_3=c\Phi_1\cdot\tilde{Q}(P_0);$$

$$\tilde{Q}_{23}^{E}=\int_{z_в}^{z_н}\tilde{\tau}_{23}^{E}dx_3=c\Phi_2\cdot\tilde{Q}(P_0), \qquad (55)$$

где величина

$$\tilde{Q}^{E}(P_0)=\frac{1}{2(1+\mu)}\int_{z_в}^{z_н}\tilde{\tau}(P)dx_3$$

вычисляется по формуле (62), приведенной ниже.

Далее, $\tilde{Q}_{13}^{P}$, $\tilde{Q}_{23}^{P}$ – термопластические составляющие поперечных сил;

$$\tilde{Q}_{13}^{P}=\int_{z_в}^{z_н}\tilde{\tau}_{13}^{P}dx_3=c\Phi_1\cdot\tilde{Q}^{P}(P_0);$$

$$\tilde{Q}_{23}^{P}=\int_{z_в}^{z_н}\tilde{\tau}_{23}^{P}dx_3=c\Phi_2\cdot\tilde{Q}^{P}(P_0), \qquad (56)$$

где $\tilde{Q}^{P}(P_0)=\frac{1}{2(1+\mu)}\int_{z_в}^{z_н}\tilde{\tau}(P)\omega(\varepsilon_i,P)dx_3.$

Приведем для величин, входящих в формулы (36) – (39), (42), (43), (45) – (52), (54), (55) некоторые расчетные соотношения, полученные в работе [8]:

$$I_1=\frac{\sum_{m=1}^{5}\tilde{E}_{m-1}A_{m-1}}{1-\mu^2}=$$

$$=\frac{\tilde{E}_0A_0+\tilde{E}_1A_1+\tilde{E}_2A_2+\tilde{E}_3A_3+\tilde{E}_4A_4}{1-\mu^2}; \qquad (57)$$

$$I_2=\frac{\sum_{m=1}^{5}\tilde{E}_{m-1}A_{m}}{1-\mu^2}=$$

$$=\frac{\tilde{E}_0A_1+\tilde{E}_1A_2+\tilde{E}_2A_3+\tilde{E}_3A_4+\tilde{E}_4A_5}{1-\mu^2}; \qquad (58)$$

$$\tilde{N}^{E}(P_0)=\frac{\sum_{m=1}^{9}\tilde{\sigma}_{m-1}A_{m-1}}{1-\mu^2}=\frac{\tilde{\sigma}_0A_0+\tilde{\sigma}_1A_1}{1-\mu^2}+$$
$$+\frac{\tilde{\sigma}_2A_2+\tilde{\sigma}_3A_3++\tilde{\sigma}_4A_4}{1-\mu^2}+ \qquad (59)$$
$$+\frac{\tilde{\sigma}_5A_5+\tilde{\sigma}_6A_6+\tilde{\sigma}_7A_7+\tilde{\sigma}_8A_8}{1-\mu^2};$$

$$I_3=\frac{\sum_{m=1}^{5}\tilde{E}_{m-1}A_{m+1}}{1-\mu^2}=$$

$$=\frac{\tilde{E}_0A_2+\tilde{E}_1A_3+\tilde{E}_2A_4+\tilde{E}_3A_5+\tilde{E}_4A_6}{1-\mu^2}; \qquad (60)$$

$$\tilde{M}^{E}(P_0)=\frac{\sum_{m=1}^{9}\tilde{\sigma}_{m-1}A_{m}}{1-\mu^2}=\frac{\tilde{\sigma}_0A_1+\tilde{\sigma}_1A_2}{1-\mu^2}+$$
$$+\frac{\tilde{\sigma}_2A_3+\tilde{\sigma}_3A_4+\tilde{\sigma}_4A_5}{1-\mu^2}+ \qquad (61)$$
$$+\frac{\tilde{\sigma}_5A_6+\tilde{\sigma}_6A_7+\tilde{\sigma}_7A_8+\tilde{\sigma}_8A_9}{1-\mu^2};$$

$$\tilde{Q}^{E}(P_0)=\frac{\sum_{m=1}^{7}\tilde{\tau}_{m-1}A_{m-1}}{2(1+\mu)}=$$
$$=\frac{\tilde{\tau}_0A_0+\tilde{\tau}_1A_1+\tilde{\tau}_2A_2}{2(1+\mu)}+ \qquad (62)$$
$$+\frac{\tilde{\tau}_3A_3+\tilde{\tau}_4A_4+\tilde{\tau}_5A_5+\tilde{\tau}_6A_6}{2(1+\mu)}.$$

Нам понадобится еще одно выражение, приведенное в статье [8]:

$$N_1^{E}(P_0)=\frac{1}{1-\mu^2}\int_{z_в}^{z_н}\tilde{\pi}(P)dx_3=\frac{\sum_{m=1}^{12}\tilde{\pi}_{m-1}A_{m-1}}{1-\mu^2}=$$
$$=\frac{\left[\tilde{\pi}_0A_0+\tilde{\pi}_1A_1+\tilde{\pi}_2A_2+\ldots+\tilde{\pi}_{11}A_{11}+\tilde{\pi}_{12}A_{12}\right]}{1-\mu^2}, \qquad (63)$$

где

$$\tilde{\pi}(P)=\tilde{\sigma}(P)\cdot\tilde{\varepsilon}(P)=\tilde{\pi}_0+\tilde{\pi}_1x_3+$$
$$+\tilde{\pi}_2x_3^{\,2}+\ldots+\tilde{\pi}_{11}x_3^{\,11}+\tilde{\pi}_{12}x_3^{\,12}=\sum_{i=1}^{13}\tilde{\pi}_{i-1}x_3^{\,i-1}, \qquad (64)$$

причем

$$\tilde{\pi}_k=\tilde{\pi}_k(P_0)=\tilde{\pi}_k(x_1,x_2)=\sum_{i=0}^{k}\tilde{\sigma}_i\cdot\tilde{\varepsilon}_{k-i},$$
$$0\le k\le 12 \qquad (65)$$

(считаем, что $\tilde{\sigma}_i=0$ при $i>8$ и $\tilde{\varepsilon}_{k-i}=0$ при $k-i>4$).

Выражения (65) для коэффициентов $\tilde{\pi}_k$, входящих в соотношение (64), в развернутом виде приведены в приложении 4 работы [8].

В формулах (57) – (63) $A_{m-1} = \int_{z_в}^{z_н} x_3^{m-1} dx_3$, $1 \le m \le 12$ – геометрические характеристики главных нормальных сечений оболочки [8].

Функционал W полной энергии деформации. Указанный функционал рассматриваемых оболочек на данном отрезке $[t_0, t_1]$ времени t для задач динамики в соответствии с [4, 12] имеет вид

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left(K - \tilde{U} + A \right) dt , \qquad (66)$$

где K и $\tilde{U}$ – кинетическая и потенциальная энергии оболочки; A – работа внешних сил.

В задачах динамики подлежащие определению функции перемещений u_1, u_2, u_3 и углов Ψ_1, Ψ_2 являются не только функциями координат x_1, x_2, но и времени t: $u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, t), u_3 = u_3(x_1, x_2, t)$ и $\Psi_1 = \Psi_1(x, y, t)$, $\Psi_2 = \Psi_2(x, y, t)$.

Для задач статики полная энергия деформации оболочки (функционал Лагранжа) может быть записана в следующем виде [1, 2, 4–12]:

$$W = \tilde{U} - A . \qquad (67)$$

В соотношениях (66) и (67)

$$K = \frac{\rho}{2} \iiint_\Omega \left[\left(H_1 \frac{\partial u_1^{(x3)}}{\partial t} \right)^2 + \left(H_2 \frac{\partial u_2^{(x3)}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(x3)}}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega ; \qquad (68)$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \iiint_\Omega [\tilde{\sigma}_{11} \tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \tilde{\sigma}_{22} \tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{12} \gamma_{12}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{13} \gamma_{13} + \tilde{\tau}_{23} \gamma_{23}] d\Omega ; \qquad (69)$$

$$A = \iint_S (P_1 u_1 + P_2 u_2 + q u_3) dS . \qquad (70)$$

Здесь ρ – плотность материала оболочки ($\rho \approx \text{const}$); P_1, P_2 и $q \equiv P_3$ – компоненты внешней механической нагрузки в направлениях x_1, x_2 и x_3 (в задачах динамики – функции не только координат x_1 и x_2, но и времени t);

$$\Omega = [-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2] \times [z_в, z_н]$$

– компакт в пространстве (x_1, x_2, x_3); $S = [-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2]$ – компакт на плоскости (x_1, x_2); $d\Omega$ и dS – дифференциалы объема и отсчетной поверхности данной оболочки

$$(d\Omega = H_1 H_2 dx_1 dx_2 dx_3;\ dS = H_1 H_2 dx_1 dx_2) ,$$

при этом координаты x_1, x_2, x_3 считаются неподвижными.

С учетом соотношений (8), (19), (20), (27) выражение для потенциальной энергии (69) запишем в виде

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \iiint_\Omega [(\tilde{\sigma}_{11}^E - \tilde{\sigma}_{11}^P) \tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + (\tilde{\sigma}_{22}^E - \tilde{\sigma}_{22}^P) \tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + (\tilde{\tau}_{12}^E - \tilde{\tau}_{12}^P) \gamma_{12}^{(x3)} + (\tilde{\tau}_{13}^E - \tilde{\tau}_{13}^P) \gamma_{13} + (\tilde{\tau}_{23}^E - \tilde{\tau}_{23}^P) \gamma_{23}] d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_\Omega [(\sigma_{11}^M - \sigma^T)(\varepsilon_{11}^{(x3)} - \tilde{\varepsilon}) + (\sigma_{22}^M - \sigma^T)(\varepsilon_{22}^{(x3)} - \tilde{\varepsilon}) + \tilde{\tau}_{12} \gamma_{12}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{13} \gamma_{13} + \tilde{\tau}_{23} \gamma_{23}] d\Omega =$$

$$= \tilde{U}^E - \tilde{U}^P = U^M - U^T . \qquad (71)$$

Здесь

$$\tilde{U}^E = \frac{1}{2} \iiint_\Omega \left(\tilde{\sigma}_{11}^E \tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \tilde{\sigma}_{22}^E \tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{12}^E \gamma_{12}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{13}^E \gamma_{13} + \tilde{\tau}_{23}^E \gamma_{23} \right) d\Omega ; \qquad (72)$$

$$\tilde{U}^P = \frac{1}{2} \iiint_\Omega \left(\tilde{\sigma}_{11}^P \tilde{\varepsilon}_{11}^{(x3)} + \tilde{\sigma}_{22}^P \tilde{\varepsilon}_{22}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{12}^P \gamma_{12}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{13}^P \gamma_{13} + \tilde{\tau}_{23}^P \gamma_{23} \right) d\Omega \qquad (73)$$

– суть термоупругая и термопластическая составляющие потенциальной энергии (69) деформирования оболочки;

$$U^M = \frac{1}{2} \iiint_\Omega \left(\sigma_{11}^M \varepsilon_{11}^{(x3)} + \sigma_{22}^M \varepsilon_{22}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{12} \gamma_{12}^{(x3)} + \tilde{\tau}_{13} \gamma_{13} + \tilde{\tau}_{23} \gamma_{23} \right) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_\Omega \Big[(\sigma_{11}^{ME} - \sigma_{11}^{MP}) \varepsilon_{11}^{(x3)} + (\sigma_{22}^{ME} - \sigma_{11}^{MP}) \varepsilon_{22}^{(x3)} +$$

$$+(\tilde{\tau}_{12}^{E}-\tilde{\tau}_{12}^{P})\gamma_{12}^{(x3)}+(\tilde{\tau}_{13}^{E}-\tilde{\tau}_{13}^{P})\gamma_{13}+(\tilde{\tau}_{23}^{E}-\tilde{\tau}_{23}^{P})\gamma_{23}\Big]d\Omega=$$

$$=U^{ME}-U^{MP} \qquad (74)$$

является составляющей потенциальной энергии (69), имеющей тот же вид, что и при чисто механической нагрузке, а

$$U^{T}=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\Big[\sigma^{T}\left(\varepsilon_{11}^{(x3)}+\varepsilon_{22}^{(x3)}\right)+$$

$$+\left(\sigma_{11}^{M}+\sigma_{22}^{M}\right)\tilde{\varepsilon}+2\sigma^{T}\tilde{\varepsilon}\Big]d\Omega=$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\Big\langle(\sigma^{TE}-\sigma^{TP})\left(\varepsilon_{11}^{(x3)}+\varepsilon_{22}^{(x3)}\right)+\Big[(\sigma_{11}^{ME}-\sigma_{11}^{MP})+$$

$$+(\sigma_{22}^{ME}-\sigma_{22}^{MP})\Big]\tilde{\varepsilon}+2(\sigma^{TE}-\sigma^{TP})\tilde{\varepsilon}\Big\rangle d\Omega=$$

$$=U^{TE}-U^{TP} \qquad (75)$$

имеет смысл составляющей потенциальной энергии (69), обусловленной чисто температурными деформациями.

В функционалах (74), (75) величины

$$U^{ME}=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left(\sigma_{11}^{ME}\varepsilon_{11}^{(x3)}+\sigma_{22}^{ME}\varepsilon_{22}^{(x3)}+\right.$$

$$\left.+\tilde{\tau}_{12}^{E}\gamma_{12}^{(x3)}+\tilde{\tau}_{13}^{E}\gamma_{13}+\tilde{\tau}_{23}^{E}\gamma_{23}\right)d\Omega,$$

$$U^{MP}=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left(\sigma_{11}^{MP}\varepsilon_{11}^{(x3)}+\sigma_{22}^{MP}\varepsilon_{22}^{(x3)}+\right.$$

$$\left.+\tilde{\tau}_{12}^{P}\gamma_{12}^{(x3)}+\tilde{\tau}_{13}^{P}\gamma_{13}+\tilde{\tau}_{23}^{P}\gamma_{23}\right)d\Omega$$

можно трактовать как термоупругую и термопластическую составляющие энергии U^{M}, а величины

$$U^{TE}=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\Big[\sigma^{TE}\left(\varepsilon_{11}^{(x3)}+\varepsilon_{22}^{(x3)}\right)+$$

$$+\left(\sigma_{11}^{ME}+\sigma_{22}^{ME}\right)\tilde{\varepsilon}+2\sigma^{TE}\tilde{\varepsilon}\Big]d\Omega,$$

$$U^{TP}=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\Big[\sigma^{TP}\left(\varepsilon_{11}^{(x3)}+\varepsilon_{22}^{(x3)}\right)+$$

$$+\left(\sigma_{11}^{MP}+\sigma_{22}^{MP}\right)\tilde{\varepsilon}+2\sigma^{TP}\tilde{\varepsilon}\Big]d\Omega$$

– как термоупругую и термопластическую составляющие энергии U^{T}.

Проинтегрируем по переменной x_3, $z_{\text{в}}\le x_3\le z_{\text{н}}$ выражения (68) и (69) в функционалах (66) и (67).

В результате получаем следующие выражения:

$$K=\frac{\rho}{2}\iint_{S}\Bigg\{A_0\left[\left(H_1\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2+\left(H_2\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2\right]+$$

$$+2A_1\left[H_1^2\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+H_2^2\frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\right]+$$

$$+A_2\left[\left(H_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right)^2+\left(H_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\right)^2\right]\Bigg\}dS \qquad (76)$$

и, в частности,

$$W=\left(U^{M}-A\right)-U^{T}, \qquad (77)$$

где (с учетом формулы (70))

$$U^{M}-A\ =$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{S}\Big[N_{11}^{M}\varepsilon_{11}+N_{22}^{M}\varepsilon_{22}+N_{12}^{M}\gamma_{12}+M_{11}^{M}\mathrm{X}_1+$$

$$+M_{22}^{M}\mathrm{X}_2+2M_{12}^{M}\mathrm{X}_{12}-2(P_1u_1+P_2u_2+qu_3)\Big]dS\ ; \qquad (78)$$

$$U^{T}=\frac{1}{2}\iint_{S}\Big[2N^{T}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)+$$

$$+2M^{T}\left(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2\right)-2N_1^{T}\Big]dS\,. \qquad (79)$$

В формулах (78) и (79)

$$N_{11}^{M}=N_{11}^{ME}-N_{11}^{MP};\ N_{22}^{M}=N_{22}^{ME}-N_{22}^{MP};$$

$$N_{12}^{M}=N_{12}^{ME}-N_{12}^{MP};\ M_{11}^{M}=M_{11}^{ME}-M_{11}^{MP};$$

$$M_{22}^{M}=M_{22}^{ME}-M_{22}^{MP};\ N^{T}=N^{TE}-N^{TP};$$

$$M^{T}=M^{TE}-M^{TP};$$

$$N_1^{T}=(1+\mu)\Big[(N_1^{E}(P_0)+N_1^{P}(P_0)\Big],$$

где величина $N_1(P_0)$ вычисляется по формуле (63), а $N_1^{E}(P_0)=\dfrac{1}{1-\mu^2}\int\limits_{z_{\text{в}}}^{z_{\text{н}}}\tilde{\pi}(P)\omega(\varepsilon_i,P)dx_3$.

Уравнения движения или равновесия оболочки могут быть получены на основе фундаментальных принципов наименьшего действия (в форме Гамильтона – Остроградского) или минимума потенциальной энергии (в форме Лагранжа) [1, 5, 7 – 13, 15], согласно которым

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(K - \tilde{U} + A \right) dt = 0 \qquad (80)$$

или, соответственно,

$$\delta W = \delta(\tilde{U} - A) = 0 ,$$

где δ – символ вариации.

Таким образом, для задач статики и динамики построена математическая модель деформирования оболочек переменной толщины, находящихся под действием механической нагрузки и температурного поля. Начальные и граничные условия, соответствующие тому или иному способу закрепления контура оболочки, предполагаются заданными.

Предложенная математическая модель термоупругости может быть обобщена на случаи различных свойств материалов рассматриваемых оболочек (нелинейная упругость, вязкоупругость, ортотропия и др.)

В задачах статики для отыскания минимума функционала (67), записанного с учетом выражений (68) – (79), можно эффективно применять метод Ритца при разложении искомых функций перемещений u_1, u_2, u_3 и углов Ψ_1 и Ψ_2 в ряды.

В задачах динамики для решения системы уравнений движения оболочки, эквивалентной вариационному уравнению (80), целесообразно последовательно применять методы Власова – Канторовича и Рунге – Кутта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ландау, Л.Д.** Теоретическая физика. В 10 т. Т. VII. Теория упругости [Текст]: учебное пособие / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2007. – 264 с.

2. **Безухов, Н.И.** Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст]: учебник для втузов / Н.И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

3. **Малинин, Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст]: учебник для вузов / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.

4. **Безухов, Н.Н.** Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур [Текст] / Н.Н. Безухов, В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат [и др.]; под ред. И.И. Гольденблата. – М.: Машиностроение, 1965. – 566 с.

5. **Жилин, П.А.** Прикладная механика. Основы теории оболочек [Текст]: учебное пособие / П.А. Жилин. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – 167 с.

6. **Карпов, В.В.** Математические модели термоупругости оболочек переменной толщины при учете различных свойств материала [Текст] / В.В. Карпов, В.Н. Филатов // Вестник гражданских инженеров. – 2006. – № 3. – С. 42–45.

7. **Карпов, В.В.** Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования [Текст]: учебное пособие / В.В. Карпов, О.В. Игнатьев, А.Ю. Сальников. – М.: АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2002.– 420 с.

8. **Жгутов, В.М.** Геометрически нелинейные математические модели термоупругости оболочек переменной толщины [Текст] / В.М. Жгутов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2011. – № 4. – С. 46–56.

9. **Жгутов, В.М.** Математическая модель, алгоритм исследования и анализ устойчивости нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях [Текст] / В.М. Жгутов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2009. – № 4. – С. 24–30.

10. **Жгутов, В.М.** Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости ребристых оболочек с учетом ползучести материала при конечных прогибах [Текст] / В.М. Жгутов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 53–59.

11. **Жгутов, В.М.** Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости упругих ребристых оболочек при конечных прогибах [Текст] / В.М. Жгутов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2011. – № 1. – С. 122 – 129.

12. **Абдикаримов, Р.А.** Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины [Текст] / Р.А. Абдикаримов, В.М. Жгутов // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 6. – С. 38 – 47.

13. **Абдикаримов, Р.А.** Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих изотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины (асимметричный случай) [Текст] / Р.А. Абдикаримов, В.М. Жгутов // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 8. – С. 47 – 55.

14. **Жгутов, В.М.** Метод конструктивной анизотропии для ортотропных и изотропных ребристых оболочек [Текст] / В.М. Жгутов // Инженерно-стро-

ительный журнал. – 2009. – № 8. – С. 40 – 46.

15. **Жгутов, В.М.** Ответ профессору Карпову Владимиру Васильевичу (о научном приоритете в методе конструктивной анизотропии для ребристых оболочек и на функционал, описывающий ползучесть их материала) [Текст] / В.М. Жгутов // Инженерно-строительный журнал. – 2011. – № 3. – С. 75 – 80.

16. **Кочин, Н.Е**. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления [Текст] / Н.Е. Кочин. – М.: Наука, 1965. – 428 с.

17. **Акивис, М.А.** Тензорное исчисление [Текст] / М.А. Акивис, В.В. Гольдберг. – М.: Наука, Физматлит, 1969. – 352 с.

18. **Старовойтов, Э.И.** Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании [Текст] / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – М.: Физматлит, 2006. – 378 с.

19. **Жилин, П.А.** Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики [Текст]: учебное пособие / П.А. Жилин.. – СПб.: Изд-во СПбГТУ. – 339 с.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

А.Л.Санин, Е.А.Семёнов

СВОБОДНЫЕ И СВЯЗАННЫЕ КВАНТОВЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ ДУФФИНГА, ВЛИЯНИЕ ШУМА

Осциллятор Дуффинга – модель нелинейных колебаний в классической динамике. Функция Гамильтона осциллятора содержит потенциал, состоящий из двух слагаемых. Одно из них пропорционально квадрату координаты, а второе имеет четвертую степень. Если коэффициент при квадратичном слагаемом отрицательный, а коэффициент при слагаемом в четвертой степени положительный, то мы имеем двухъямный осциллятор Дуффинга. При обоих положительных слагаемых осциллятор Дуффинга является одноямным. Наряду с отдельным осциллятором, в научной литературе проводятся исследования связанных осцилляторов Дуффинга (см., например, работу [1]). Изучение колебаний имеет фундаментальное значение для многих приложений, в частности, в физике твердого тела и теории молекул.

Переход к микро- и наномасштабам стимулировал интерес к изучению квантового аналога осциллятора Дуффинга, или квантового осциллятора Дуффинга. Квантовый осциллятор Дуффинга, включающий силу трения и внешнюю силу, изучался ранее одним из авторов этой статьи в работе [2].

В настоящее время уделяется определенное, но недостаточное внимание к связанным квантовым осцилляторам Дуффинга. Здесь следует отметить работы по изучению стационарных состояний и энергетических уровней [3].

В данной статье мы излагаем результаты исследования двумерных колебаний, обусловленных квантовыми осцилляторами Дуффинга вдоль двух координат. При отсутствии связи между степенями свободы мы имеем два свободных осциллятора Дуффинга, а введение связи означает переход к системе связанных осцилляторов Дуффинга. Настоящее исследование мотивируется внутренней логикой развития теории колебаний квантовых систем и приложениями в современных нанотехнологиях. Статья посвящена двухъямным осцилляторам Дуффинга (свободным и связанным). В ней исследуются идентичные и неидентичные осцилляторы, проблема синхронизации и передача спектра сигнала из одной степени свободы в другую, а также влияние шума. В статье проводится численное интегрирование нестационарного уравнения Шредингера, выполняются расчеты средних значений координат, их Фурье-спектров, а также автокорреляторов. Настоящая статья является продолжением работы [4], в которой исследовался двухъямный осциллятор Дуффинга, связанный с гармоническим осциллятором.

Основные уравнения и допущения

Уравнение Шредингера в безразмерной форме имеет вид

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi+U_\Sigma\psi. \qquad (1)$$

Оно определяет временную эволюцию волновой функции $\psi=\psi(x,y,t)$; x,y,t – координаты и время, соответственно.

Уравнение (1) является инвариантным относительно выбора единиц измерения. Наши вычисления могут быть применены к твердотельным мезоскопическим системам. Полный потенциал U_Σ определяется как сумма

$$U_\Sigma = U_1(x) + U_2(y) + U_3(x,y), \qquad (2)$$

где $U_1(x)$, $U_2(y)$ – двухъямные потенциалы, $U_3(x,y)$ – потенциал связи.

Эти потенциалы являются конечными в точках $\pm x_\alpha, \pm y_\alpha$ на стенках внешней ямы. В целом мы имеем модель плоской ячейки. Если $U_3(x,y) = 0$, то динамическая система может рассматриваться как состоящая из двух свободных двухъямных осцилляторов Дуффинга. Если $U_3(x,y) \neq 0$, то система осцилляторов Дуффинга становится связанной. Для потенциалов вводятся стандартные выражения

$$\begin{aligned} U_1(x) &= a_x x^4 - b_x x^2 + c_1; \\ U_2(y) &= a_y y^4 - b_y y^2 + c_2; \\ U_3(xy) &= \gamma xy, \end{aligned} \qquad (3)$$

где a_x, a_y, b_x, b_y – варьируемые параметры; c_1, c_2 выбираются так, чтобы сделать минимальные значения U_1, U_2 равными нулю.

Граничные условия на внешних стенках квантовой системы и начальная волновая функция определяются как

$$\psi(\pm x_\alpha, \pm y_\alpha, t) = 0, \quad \psi(x,y,t=0) = \psi_0(x,y). \qquad (4)$$

Начальное условие задается гауссовым волновым пакетом:

$$\begin{aligned} \psi_0 = C \exp\Big[&-\alpha_x (x - x_0)^2 - \alpha_y (y - y_0)^2 + \\ &+ iV_{0x}(x - x_0) + iV_{0y}(y - y_0)\Big], \end{aligned} \qquad (5)$$

где x_0, y_0 – средние координаты пакета, V_{0x}, V_{0y} – средние скорости. Постоянная C находится из условия нормировки.

Динамические свойства квантовых волновых пакетов изучались при помощи вычислений средних значений координат $\langle x \rangle, \langle y \rangle$, средних скоростей $\langle V_x \rangle, \langle V_y \rangle$, а также нормальных отклонений $\langle \Delta x \rangle, \langle \Delta y \rangle$, $\langle \Delta V_x \rangle, \langle \Delta V_y \rangle$. Произведения $g_x = \Delta x \Delta V_x$, $g_y = \Delta y \Delta V_y$ удовлетворяют соотношениям неопределенностей

$$g_x \geq \frac{1}{2}, \quad g_y \geq \frac{1}{2}. \qquad (6)$$

Временные реализации $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ обсуждались в рамках Фурье-преобразований. Соответствующие амплитуды Фурье были обозначены как $F_{<x>}(\Omega), F_{<y>}(\Omega)$, где величина Ω – частота. В качестве дополнительного средства в изучении волновопакетной динамики использовался автокоррелятор, вычисленный по формуле

$$R = \left| \int_{-x_\alpha}^{x_\alpha} dx \int_{-y_\alpha}^{y_\alpha} dy \psi^*(x,y,t) \psi_0(x,y) \right|^2. \qquad (7)$$

Численное интегрирование уравнения Шредингера (1) было проведено в замкнутой области

$$\overline{R} = \{(x,y,t) : -7 \leq x \leq 7, \ -7 \leq y \leq 7, \ 0 \leq t \leq 2000\}.$$

Термин «фигуры Лиссажу» обычно используется для описания режимов с соизмеримыми частотами. Мы применили его для режима, когда отношение частот является иррациональным, а траектории становятся незамкнутыми.

Синхронизация квантовых осцилляторов Дуффинга

Динамические исследования синхронных колебаний в системе, состоящей из двух идентичных двухъямных осцилляторов Дуффинга, были проведены для разных наборов параметров и начальных условий.

Обсудим более подробно результаты численного моделирования системы с параметрами

$$a_x = a_y = 0{,}002; \ b_x = b_y = -0{,}05.$$

Карты уровней потенциалов, исследуемых в задаче, представлены на рис. 1; численные значения координат и уровней потенциала – в табл. 1. Форма потенциального рельефа при $\gamma = 0$ является простой. Она характеризуется максимумами, минимумами, а также седловыми точками. Если $\gamma \neq 0$, то расположение на плоскости (x,y) экстремумов и седловых точек, а также значения потенциалов в них изменяются. В численных расчетах, приведенных ниже, величина средней энергии волнового пакета была меньше максимального значения потенциала. В задаче с внешним шумом средняя энергия в начальный момент времени также была меньше максимума потенциала.

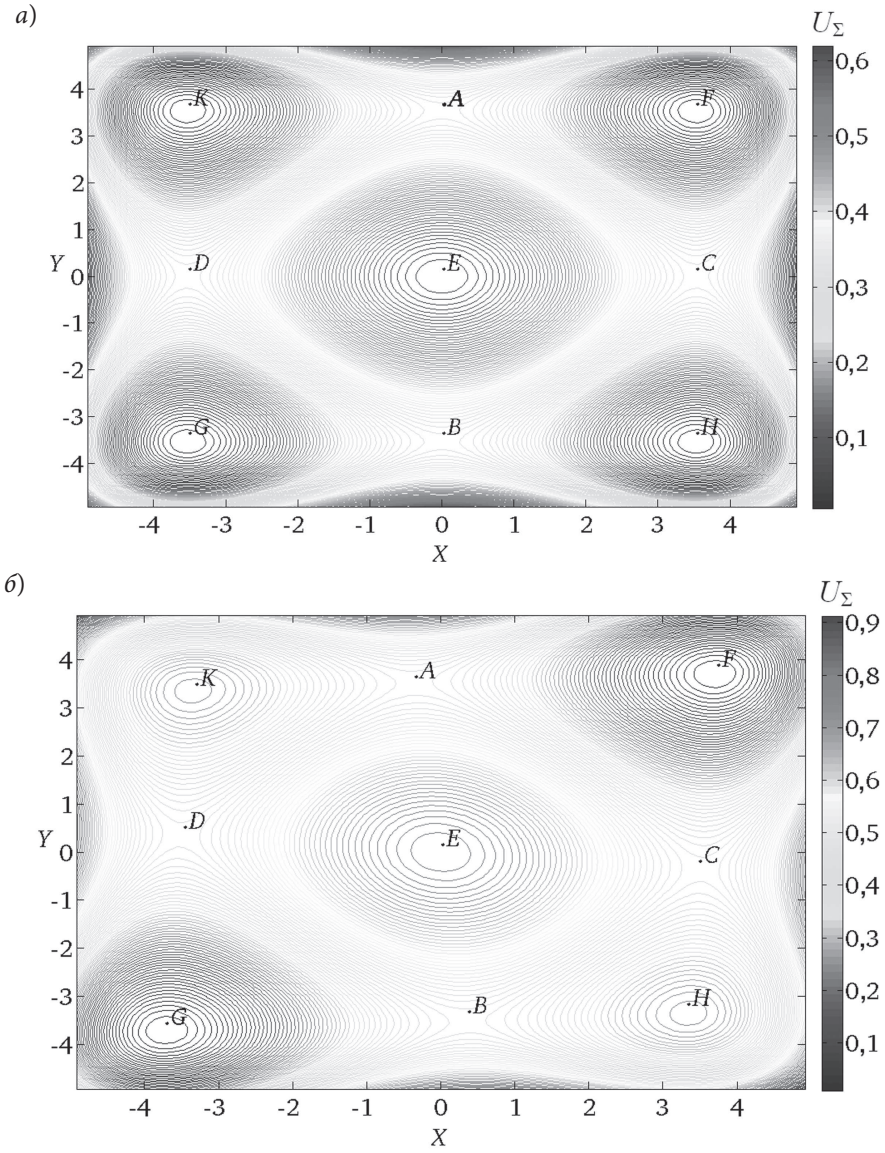


Рис. 1. Карта уровней потенциала на плоскости (x, y) для свободных ($\gamma = 0$) (*а*) и связанных ($\gamma = 0{,}01$) (*б*) идентичных осцилляторов Дуффинга: *A, B, C, D* –седловые точки потенциала; *E* – точка максимума потенциала; *F, G, H, K* – точки минимума потенциала.
Координаты точек и значения потенциала приведены в табл. 1

Таблица 1

Координаты точек и значения уровня потенциала на картах рис. 1

γ	Координата (потенциал)	Значение координаты (потенциала) в точке								
		A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*K*
0	*X*	0	0	3,52	–3,52	0	3,52	–3,52	3,52	–3,52
	Y	3,52	–3,52	0	0	0	3,52	–3,52	–3,52	3,52
	U_Σ	0,3125				0,625	0			
0,01	*X*	–0,36	3,48	0,36	–3,48	0	3,65	–3,65	3,35	–3,35
	Y	3,48	–0,36	–3,48	0,36	0	3,65	3,65	–3,35	3,35
	U_Σ	0,4502				0,756	0		0,2492	

Начальный волновой пакет характеризуется величинами $\alpha_x = \alpha_y = 0,5$; средними значениями $x_0 = y_0 = 3,52; V_{0x} = V_{0y} = 0,05$. В том случае, когда связь отсутствует, то есть $\gamma = 0$, мы имеем два свободных двухъямных осциллятора Дуффинга. Они обладают одинаковыми свойствами. Временные реализации для $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ представляют собой модулированные колебания с разными временными периодами (рис. 2,*а*). Волновой пакет перемещается из начального крайнего положения, пересекает область барьера и достигает другого крайнего положения. Процесс повторяется. Частота этого процесса $\Omega = 0,037$ определяет больший период в колебаниях средних координат, а ампли-

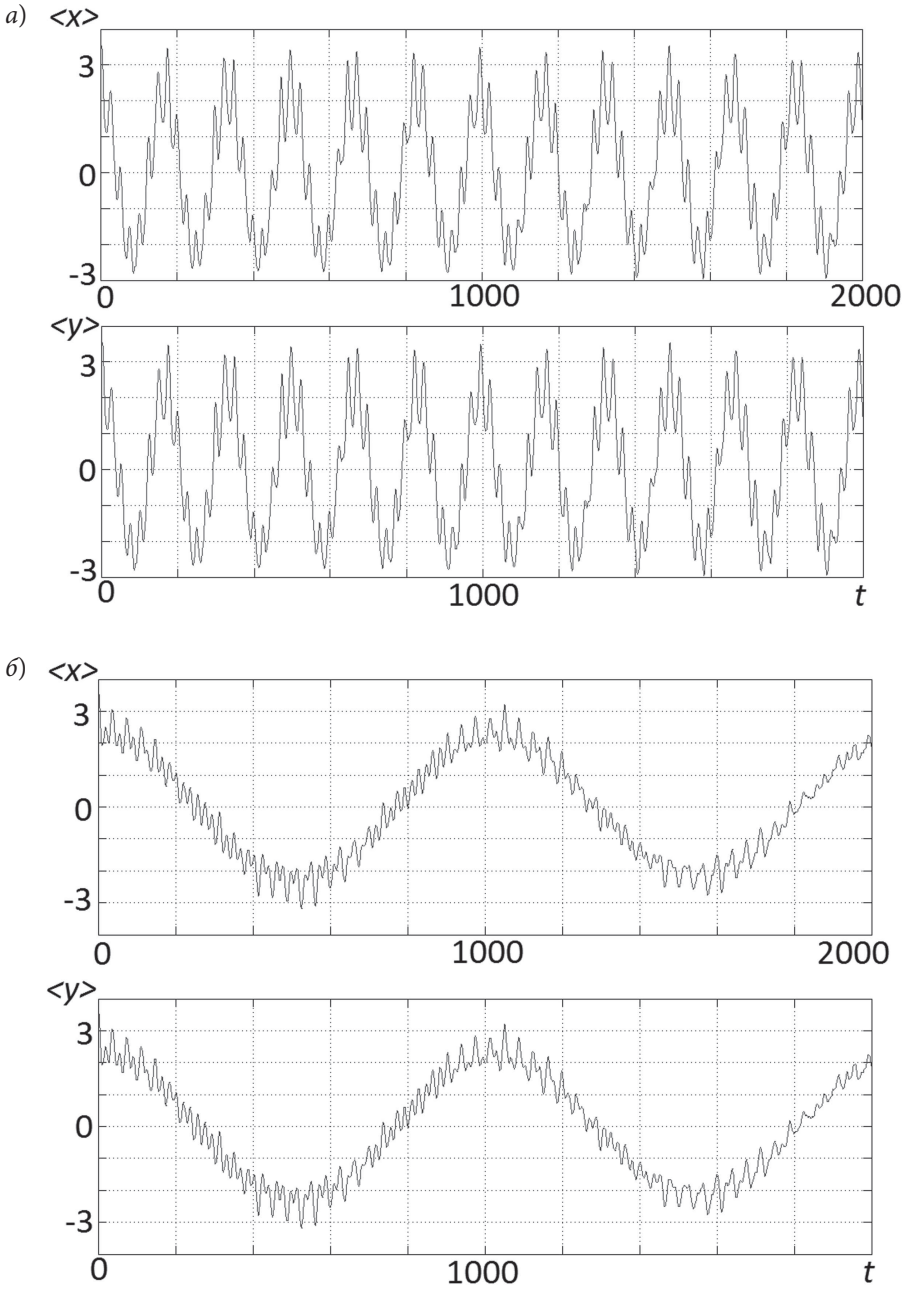


Рис. 2. Временные реализации средних координат для свободных ($\gamma = 0$) (*а*) и связанных ($\gamma = 0,01$) (*б*) идентичных осцилляторов Дуффинга

Таблица 2

Значения частот Ω и Фурье-амплитуд $F_{<x>}(\Omega)$ для наиболее интенсивных компонент спектра

Ω	0,006	0,066	0,160	0,173	0,220	0,264	0,342
$F_{<x>}(\Omega)$	1,0929	0,0147	0,0522	0,0733	0,0318	0,0198	0,0313

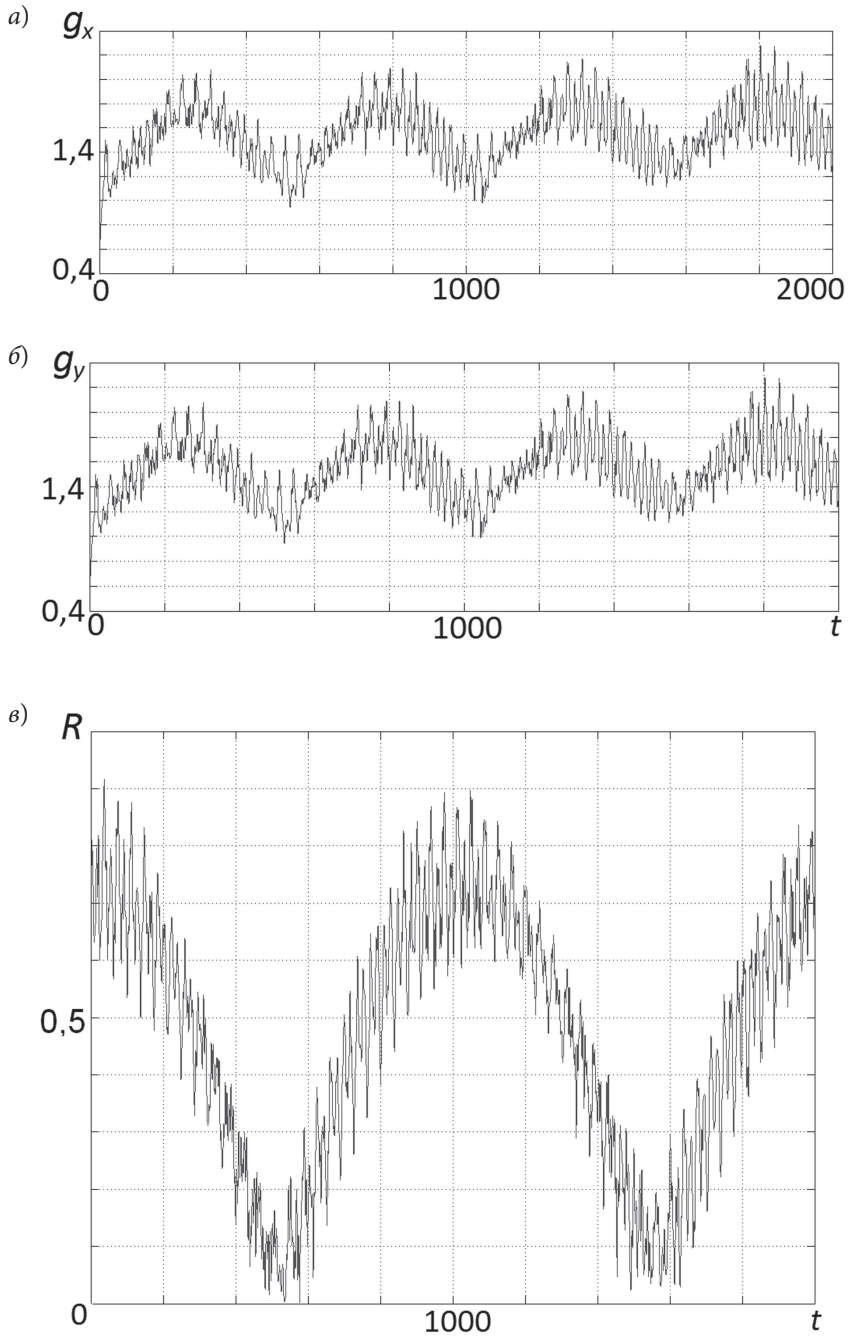


Рис. 3. Зависимость произведений неопределенностей g_x (*а*), g_y (*б*) и автокоррелятора R (*в*) от времени для связанных идентичных осцилляторов ($\gamma = 0,01$)

туда Фурье на этой частоте является наибольшей. Амплитуды Фурье на частотах Ω, соответствующих малым периодам, в 10 – 50 раз меньше амплитуды на частоте $\Omega = 0,037$. Естественно, для двух свободных осцилляторов Дуффинга фигура Лиссажу представляет собой отрезок прямой в зависимости $\langle y \rangle = f(\langle x \rangle)$.

Введение связи между осцилляторами Дуффинга изменяет картину динамических процессов. Здесь мы рассмотрим систему со слабой связью при $\gamma = 0,01$. Параметры a_x, b_x, a_y, b_y и начальные условия оставляем неизменными, как для случая свободных колебаний. Временные реализации $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ даны на рис. 2,*б*. В отличие от режима свободных колебаний, заметно уменьшается скорость перемещения пакета из одного крайнего положения в другое. Однако, по-прежнему, обе реализации идентичны, а спектры частот $F_{<x>}(\Omega)$, $F_{<y>}(\Omega)$ одинаковы. В табл. 2 приведены частоты и Фурье-амплитуды для наиболее интенсивных компонент.

Компоненты с Фурье-амплитудами, меньшими $0,01$, не включены в табл. 2. Можно полагать, что механизм распространения волнового пакета через область барьера связан с туннелированием. Однако свойства и особенности туннелирования в двумерной системе с заданным потенциалом U_Σ требуют проведения дополнительных исчерпывающих исследований. Произведения неопределенностей и автокорреляторы даны на рис. 3. Несмотря на то, что спектр содержит множество частот, фигура Лиссажу, выражающая зависимость $\langle y \rangle = f(\langle x \rangle)$, представляет собой отрезок прямой (с высокой степенью точности). Расчеты, проведенные для значений $\gamma = 0,03$ и $0,05$ при одинаковых остальных параметрах и начальных условиях, показывают, что спектры частот совпадают и фигуры Лиссажу представляют собой отрезки прямых.

Другими словами, синхронизация колебаний волновых пакетов сохраняется. Влияние начальных условий на синхронизацию исследовалось при скоростях пакета $V_{0x} = V_{0y} = 0,10;\ 0,15;\ 0,30$, остальные параметры оставались неизменными. Увеличение начальных скоростей пакета приводило к перераспределению энергий колебаний в спектрах. Спектры частот $F_{<x>}(\Omega)$, $F_{<y>}(\Omega)$ были одинаковы, а фигуры Лиссажу укладывались на отрезки прямых. Автокоррелятор как функция времени (рис. 3,*в*) иллюстрирует многочастотный процесс, повторяющийся через крупномасштабные промежутки времени и приближающийся к минимальным значениям на малых участках. Наибольшие значения не спадают монотонно к нулю, поэтому динамический режим является регулярным.

Неидентичные осцилляторы Дуффинга

Колебания в системе, состоящей из двух неидентичных квантовых осцилляторов Дуффинга, исследовались для набора параметров, характеризующих двухъямные потенциалы вдоль каждой оси:

$$a_x = 0,0025;\ a_y = 0,0020;\ b_x = 0,055;\ b_y = -0,050.$$

Форма двумерного потенциала, соответствующего этим параметрам, дана на рис. 4.

В качестве первого шага исследуем режим колебаний при $\gamma = 0$. Начальные условия были использованы те же, что и в прошлом случае для идентичных осцилляторов. При отсутствии связи временные реализации $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ даны на рис. 5.

Таблица 3

Координаты точек и значения уровня потенциала на картах рис. 4

Координата (потенциал)	Значение координаты (потенциала) в точке								
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*K*
X	–0,68	0,68	3,24	–3,24	0,00	3,64	–3,64	3,00	–3,00
Y	3,48	–3,48	–0,68	0,68	0,00	3,88	–3,88	–3,16	3,16
U_Σ	0,590		0,582		0,870	0,000		0,470	

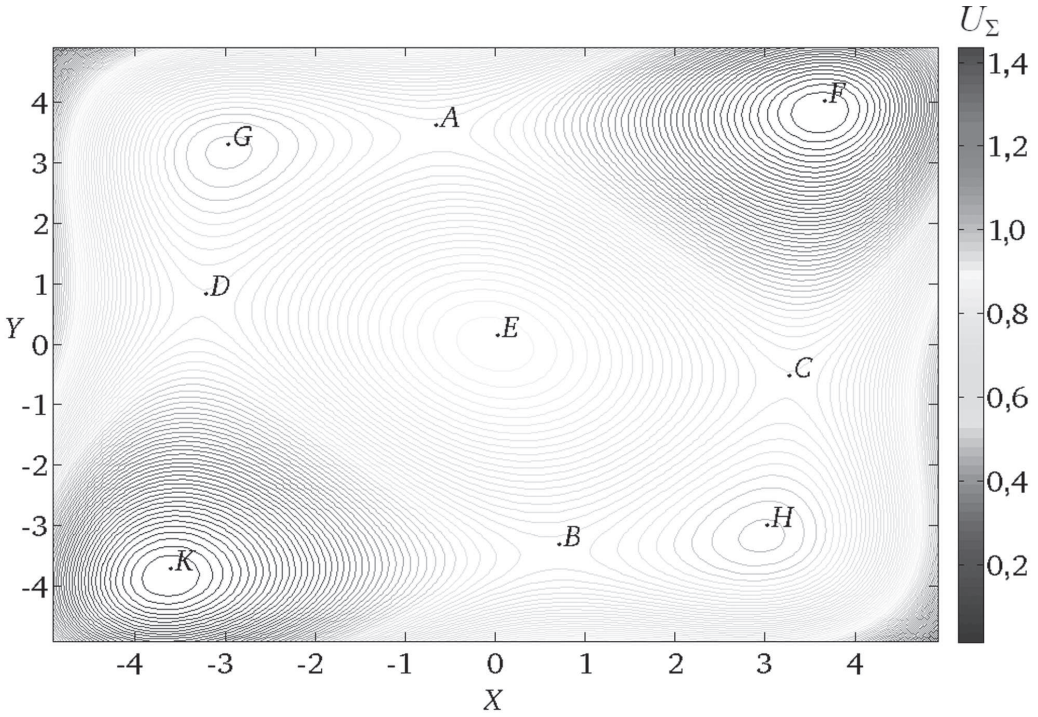


Рис. 4. Карта уровней потенциала на плоскости (x, y) для связанных неидентичных осцилляторов Дуффинга ($\gamma = 0,02$). Обозначения точек соответствуют приведенным на рис. 1. Координаты точек и значения потенциала представлены в табл. 3

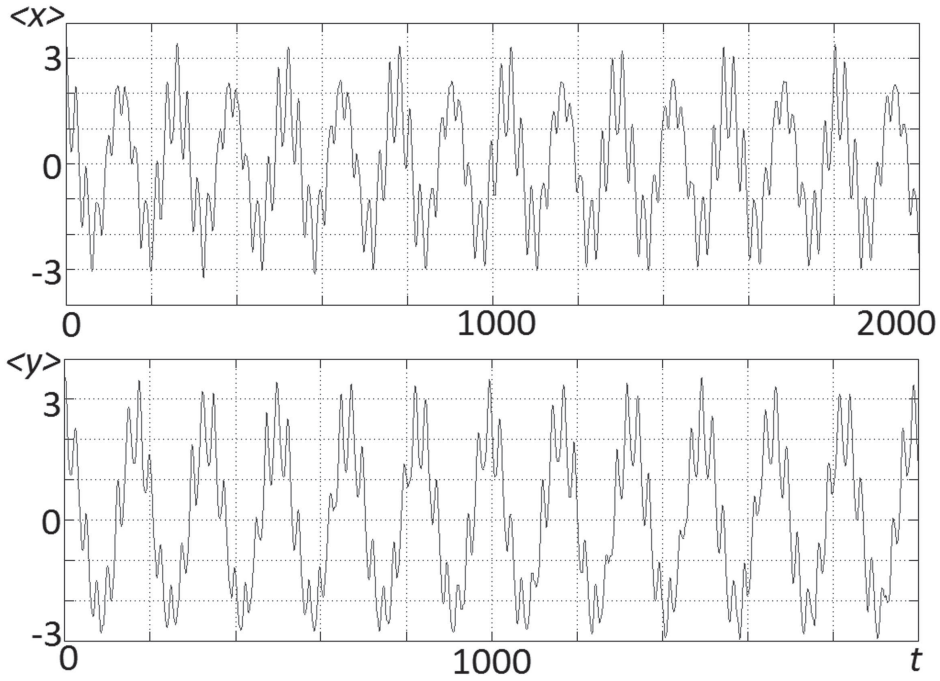


Рис. 5. Временные реализации средних координат для свободных неидентичных осцилляторов ($\gamma = 0$). Малые вариации a_x, b_x , по сравнению со случаем идентичных осцилляторов, приводят к изменению реализации $\langle x \rangle$

Видны два выраженных временных масштаба: крупный и мелкий; при этом крупномасштабные колебания промодулированы мелкомасштабными. Зависимость амплитуд Фурье $F_{<x>}(\Omega)$, $F_{<y>}(\Omega)$ от частоты Ω представлена на рис. 6. Как и следовало ожидать, для независимых осцилляторов Дуффинга, отличающихся параметрами потенциала, частоты колебаний средних значений различны. Фигура Лиссажу, выражающая зависимость $\langle y \rangle = f(\langle x \rangle)$ для рассматриваемого многочастотного процесса, не лежит на прямой, как это может быть при синхронных колебаниях. Она заполняет некоторую область, не является замкнутой, что типично при наличии несоизмеримых частот (рис. 7). Введение связи между степенями свободы изменяет картину динамических процессов: временных реализаций, их Фурье-спектров и другие свойства.

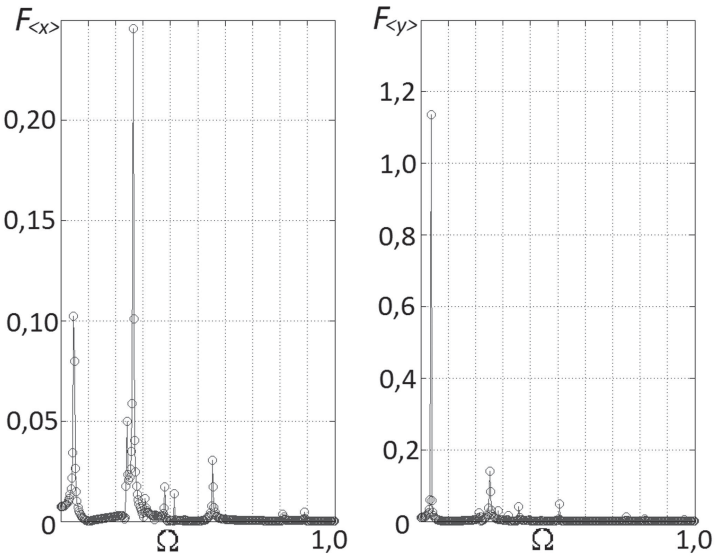


Рис. 6. Фурье-спектр колебаний средних координат для свободных неидентичных осцилляторов ($\gamma = 0$)

Таблица 4

Значения частот Ω и Фурье-амплитуд для наиболее интенсивных спектральных компонент (см. рис. 6)

Ω	$F_{<x>}(\Omega)$	Ω	$F_{<y>}(\Omega)$
0,047	0,1022	0,038	1,1354
0,242	0,0500	0,214	0,0246
0,264	0,2458	0,251	0,1401
0,308	0,0115	0,283	0,0289
0,380	0,0173	0,320	0,0164
0,553	0,0304	0,506	0,0479

Рис. 7. Фигура Лиссажу для свободных неидентичных осцилляторов ($\gamma = 0$)

Табл. 4 характеризует наиболее эффективные спектральные компоненты.

При наличии слабой связи $\gamma = 0,02$ для параметров и начальных условий, совпадающих с предыдущим вариантом расчета, временные реализации для средних координат $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ существенно изменяются (рис. 8). Крупномасштабный период колебаний существенно возрастает, как и ранее; мелкомасштабные колебания модулируют колебания с большим периодом.

Качественные изменения в картине реализаций, по сравнению с предыдущим вариантом при $\gamma = 0$, обусловлены чувствительностью системы к изменениям параметров потенциала.

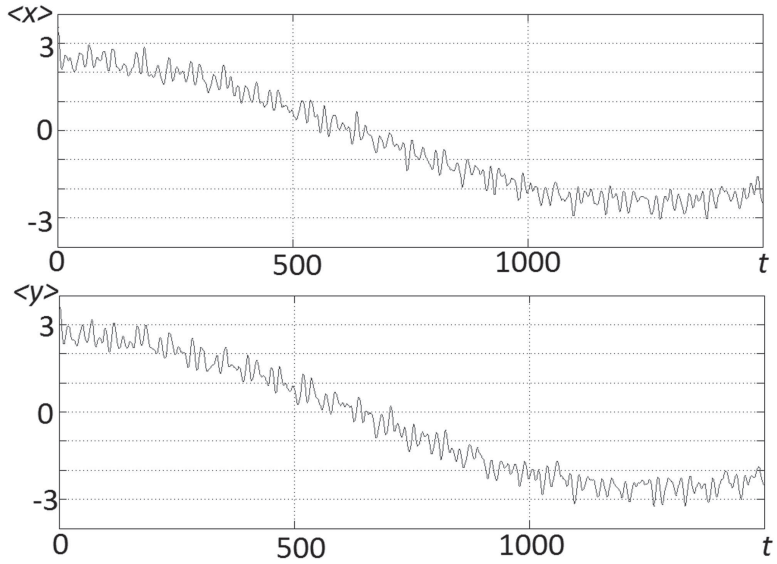


Рис. 8. Временные реализации средних координат для связанных неидентичных осцилляторов ($\gamma = 0,02$)

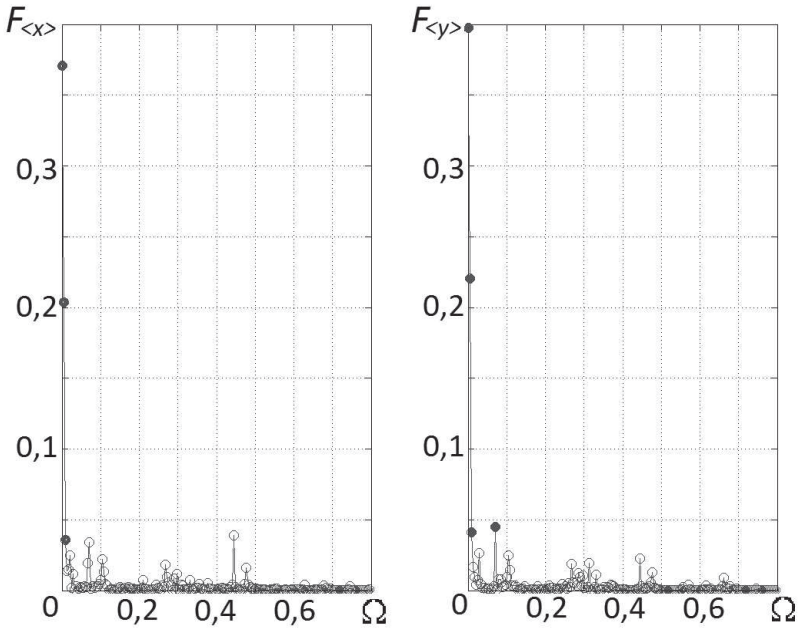


Рис. 9. Фурье-спектр колебаний средних координат для связанных неидентичных осцилляторов ($\gamma = 0,02$)

Такие свойства по отношению к другим полиномиальным потенциалам (потенциал Хенона – Хейлеса) отмечались в работе [5]. Частотный отклик дан на рис. 9. В спектрах $F_{<x>}(\Omega)$, $F_{<y>}(\Omega)$ много совпадающих частот, однако амплитуды спектральных компонент на этих частотах отличаются. Фигура Лиссажу (рис. 10) занимает меньшую область на плоскости $\left(\langle x\rangle, \langle y\rangle\right)$, чем в предыдущем режиме при $\gamma = 0$, «прижимается» к диагонали квадранта. Для полностью синхронного движения фигура Лиссажу представляет собой отрезок прямой на диагонали. Поэтому можно косвенно говорить о стремлении системы к самосинхронизации.

Влияние шума на колебания неидентичных осцилляторов

Влияние шума на динамику квантовых осцилляторов Дуффинга можно рассмотреть на примере двух неидентичных осцилляторов с параметрами и начальными условиями, которые обсуждались в предыдущем разделе. Для этого в формулу потенциала (2) вводится дополнительное слагаемое, которое представляет собой набор импульсов $U_4 = -F_0 x$, действующих в течение очень коротких временных промежутков Δt. Шум формируется при помощи генерации случайных импульсов. Функция распределения импульсов является равномерной. Рассмотрим вариант расчета, когда импульсы имеют разные полярности и значения на промежутке [–5, 5]. Расстояние между импульсами постоянно, а их частота следования совпадает с одной из частот спектра колебаний связанных неидентичных осцилляторов Дуффинга. Характерные реализации для $\langle x\rangle$, $\langle y\rangle$ даны на рис. 11. Они являются откликом на случайное воздействие. Среднее значение для кинетической энергии $\langle T\rangle$ как функции времени представлено на рис. 12. Для обеих компонент $F_{<x>}(\Omega)$, $F_{<y>}(\Omega)$ частотный спектр является широкополосным, а их зависимости от Ω – не плавные, а скачкообразно изменяющиеся. Наиболее сильные изменения амплитуд происходят в диапазоне $[0{,}01586;\ 0{,}03875]$ для частот $\Omega \in [0{,}02199;\ 0{,}04461]$. При $\Omega \geq 0{,}8$ вариации амплитуд и широкополосность спектра остаются, однако величины амплитуд сильно уменьшаются. В частотном спектре для обеих компонент имеется множество совпадающих частот. Несмотря на внешний случайный сигнал и слабую связь, происходит передача сигнала в виде отдельных спектральных компонент, но с разными амплитудами Фурье. Фигуры Лиссажу не являются простыми, а характеризуются запутанной траекторией. Если

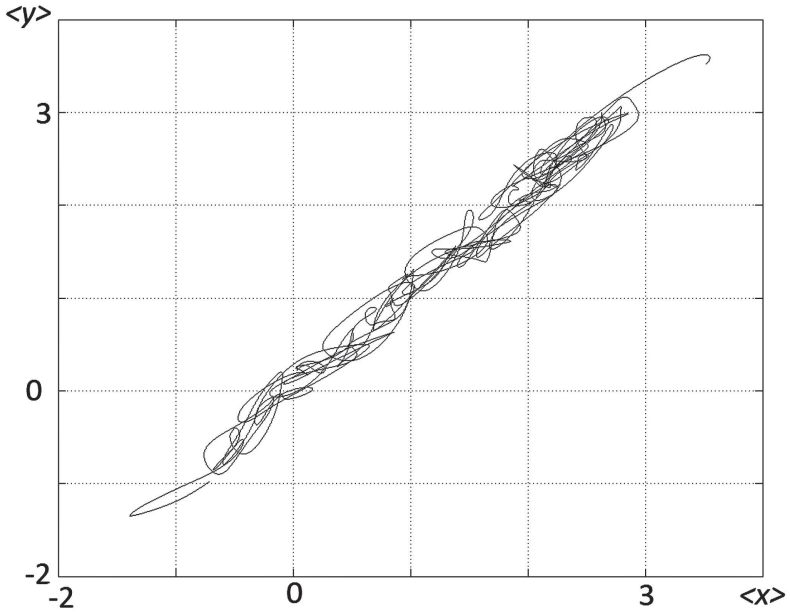


Рис. 10. Фигура Лиссажу для связанных неидентичных осцилляторов ($\gamma = 0{,}02$)

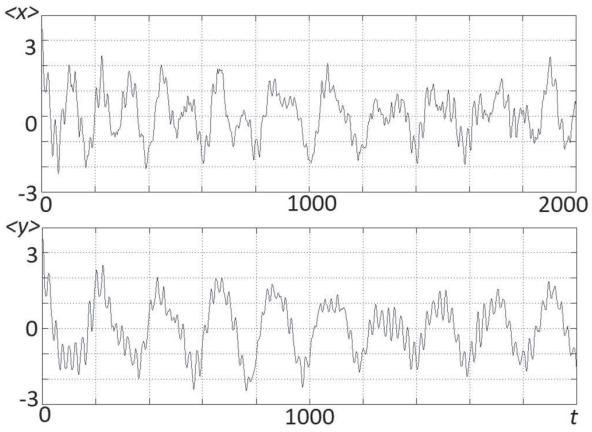


Рис. 11. Временные реализации средних координат для неидентичных осцилляторов под влиянием шума ($\gamma = 0,02$)

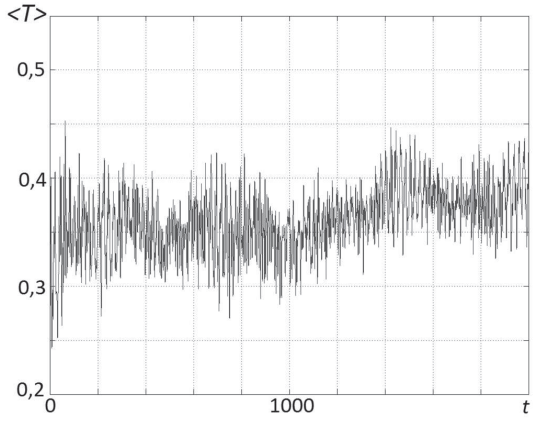


Рис. 12. Изменение кинетической энергии пакета под воздействием шума в системе неидентичных осцилляторов ($\gamma = 0,02$)

амплитуды импульсов шума распределены на промежутке $[-7,5;\ 7,5]$, то по сравнению с предыдущим вариантом частотный спектр колебаний становится более богатым. Колебания средних координат $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ уменьшаются по амплитуде и происходят относительно значений $\langle x \rangle \cong 0, \langle y \rangle \cong 0$. Фигуры Лиссажу становятся сложными и не «прижимаются» к диагонали квадранта. Произведения неопределенностей представляют собой сложные осцилляции и по величине значительно удаляются от минимального значения, равного 0,5. На расчетном промежутке $t \in [0; 2000]$ нет перехода из одного крайнего положения в другое и обратно, как это было при отсутствии шума.

Таким образом, в рамках численного интегрирования уравнения Шредингера с начальными условиями в форме гауссовых волновых пакетов были исследованы двухъямные осцилляторы Дуффинга как свободные, так и при слабой связи. Детально изучены временные реализации для динамических средних, произведения неопределенностей, частотные спектры, автокорреляторы и другие характеристики волновых квантовых пакетов. В результате установлено, что система чувствительна к малым изменениям функции Гамильтона, обусловленным введением потенциала связи. Спектр частот, характеризующий среднюю координату как функцию времени, смещается в сторону меньших частот. Время перехода из одного крайнего положения пакета в другое существенно возрастает. Для идентичных связанных осцилляторов Дуффинга реализуется режим синхронных колебаний. Спектры частот и формы колебаний совпадают. Если осцилляторы Дуффинга являются неидентичными, то возможна частичная передача частот из одного осциллятора в другой. Воздействие шума на систему связанных неидентичных осцилляторов Дуффинга может приводить к ослаблению колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Vincent, U.E.** Synchronization and bifurcation in coupled periodically forced non-identical Duffing oscillators [Текст] / U.E. Vincent, A. Kenfack // Phys. Scr. – 2008. – Vol.77. – P. 045005 (7 p).

2. **Sanin, A.L.** Oscillatory motion in confined potential systems with dissipation in the context of the Shrodinger-Langevin-Kostin equation [Текст] /A.L. Sanin, A.A. Smirnovsky // Phys. Lett. A. – 2007. – Vol. 372. – No. 1. – P. 21 – 27.

3. **Chung, N.N.** Energy eigenvalues and squeezing properties of general systems of coupled quantum anharmonic oscillators [Текст] / N.N. Chung, L.Y. Chew // Phys. Rev. A. – 2007. – Vol.76. – P. 032113 (9 p).

4. **Sanin, A.L.** Two-dimensional oscillations in a quantum well with polynomial potential [Текст] / A.L. Sanin, E.A. Semyonov // Nonlinear phenomena in complex systems. – 2011. – Vol. 14. – No. 6. – P. 411 – 416.

5. **Neetu, Gupta.** Does the classically chaotic Henon – Heiles oscillator exhibit quantum chaos under intense laser fields? [Текст] / Neetu Gupta, B.M. Deb. // Pramana-Journal of Physics. – 2006. – Vol. 67. – No. 6. – P. 1055 – 1071.

УДК 530.182

Е.Г. Апушкинский

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ

Под нелинейным преобразованием спектра сигнала понимают преобразование, при котором спектр исходного входного сигнала нелинейным образом связан со спектром выходного. При этом можно ожидать, что на временной оси кроме исходных импульсных сигналов появятся дополнительные импульсные сигналы. В качестве примеров эффектов, при которых возникают новые импульсы в ответ на воздействие одного и более импульсов, можно привести эхо-явления (рис. 1).

Сегодня известно большое количество эхо-явлений, наблюдаемых в различных областях физики. К ним относятся ядерное и электронное спиновые эха [1, 2], фотонное [3], циклотронное [4], плазменное [5] эха и т. п. В работах [6, 7] выделены общие свойства эхо-явлений.

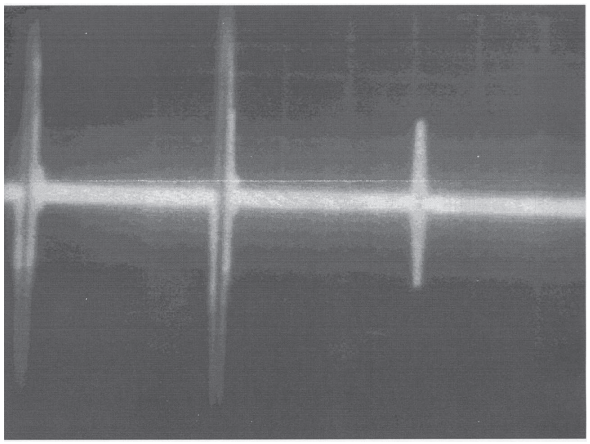


Рис. 1. Осциллограмма ядерного спинового эха (третий сигнал слева направо) от двух возбуждающих импульсов (первые два сигнала)

В наиболее общем понимании эхо – это явление испускания веществом (макросистемой) импульсного излучения, которое возникает спустя некоторое время после облучения этого вещества импульсами внешнего поля и представляет собой процесс самопроизвольного восстановления когерентного состояния излучателей (микросистем), составляющих данное вещество. Эхо возникает в макросистемах, которые можно представить как некоторую совокупность микросистем (осцилляторов) с близкими собственными частотами, способных взаимодействовать с внешним излучением. Осцилляторы должны либо нелинейно взаимодействовать с импульсами внешнего возбуждающего поля, либо обладать собственными нелинейными свойствами. При этих условиях в веществе в момент образования эха возникает такое состояние, при котором макросистема в своем поведении эквивалентна микросистеме, т. е. все осцилляторы колеблются в одинаковой фазе и излучают когерентный сигнал, который и есть эхо-сигнал. При этом длительность любого из возбуждающих импульсов должна быть меньше длительности каждого из трех релаксационных времен, свойственных данной системе осцилляторов, а именно:

T_2 – времени сбоя фаз отдельных осцилляторов за счет различного рода взаимодействий;

T_e – времени, характеризующего процесс затухания колебания каждого осциллятора;

T_1 – времени, за которое в системе осцилляторов исчезают все последствия возбуждения, или в краткой записи:

$$\Delta t_m \leq T_2,\ T_e,\ T_1,$$

где Δt_m – длительность m-го возбуждающего импульса.

В сущности, процесс взаимодействия излучения с веществом распадается на отдельные взаимодействия излучения с каждым из осцилляторов. Суммирование результатов реакций на внешнее воздействие происходит с учетом функции распределения осцилляторов по собственным частотам [6]. При этом следует повторить, что эхо возникает лишь при условиях, когда процесс данного взаимодействия носит нелинейный характер или сами эти осцилляторы обладают нелинейными свойствами. В последнем случае импульсное поле лишь возбуждает колебания этих осцилляторов [6, 7].

Эхо-сигналы – это новые дополнительные импульсные сигналы, возникающие на временной оси в результате нелинейного преобразования входных импульсных сигналов. Поэтому естественно предположить, как это и было сделано в работе [7], что за возникновение эхосигналов ответственно не нелинейное преобразование временного представления сигналов, а нелинейное преобразование их спектров. Таким образом, если в результате взаимодействия отдельного осциллятора с внешним возбуждающим излучением происходит нелинейное преобразование этого излучения в определенной частотной области, то в системе таких осцилляторов может возникнуть эхо-сигнал.

Будем рассматривать каждый из осцилляторов как четырехполюсник, на вход которого подается сигнал $s(t)$, а на выходе формируется сигнал $U_l(t)$. При этом физическая природа этих воздействий, как и реализация самого четырехполюсника, не принципиальны. Если в соотношении между входными и выходными сигналами выполняется принцип суперпозиции, то такой четырехполюсник называется линейным, а если не выполняется – то нелинейным. В дальнейшем будем рассматривать нелинейные четырехполюсники, у которых спектр выходного сигнала связан со спектром входного, через нелинейное преобразование. Подобное свойство нелинейности может быть обусловлено различными физическими причинами и приводить, например, к зависимости частоты либо коэффициента затухания периодических колебаний нелинейных систем от их амплитуды. Причем данные нелинейные свойства могут проявляться как во время внешнего воздействия, так и без него, когда они являются собственными нелинейными свойствами осциллятора. Рассмотрим, как подобного рода нелинейность отражается на преобразовании реального, ограниченного во времени, физического сигнала. Физически реализуемые сигналы $s(t)$ определены на положительной полуоси времени. Однако преобразование Фурье требует задания исходной функции на всей временной оси. Поэтому доопределим функцию, описывающую входной сигнал, на отрицательную полуось времени четным образом, т. е. будем рассматривать функцию

$$S(t) = \begin{cases} s(t), \text{ если } t > 0; \\ 0, \text{ если } t = 0; \\ s(-t), \text{ если } t < 0. \end{cases}$$

Соответственно, спектр сигнала $S(t)$ обозначим

$$\hat{S}(\omega) = \hat{s}(\omega) + \hat{s}^*(\omega),$$

где

$$\hat{s}(\omega) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt,$$

а спектр выходного сигнала $U_l(t)$ обозначим как $\hat{U}_l(\omega)$. Будем рассматривать нелинейное частотное преобразование входного сигнала на l-м осцилляторе с собственной частотой колебаний ω_l в виде

$$\hat{U}_l(\omega) = \sum_{n=0}^{N} \left\{ a_n(\omega, \omega_l) \left[\hat{S}(\omega) \right]^n \right\}, \qquad (1)$$

где $a_n(\omega, \omega_l)$ – коэффициенты, определяющие функцию передачи осциллятора и зависящие не только от ω, ω_l, но еще и от T_1, T_e, T_2.

В целях экономии места в дальнейшем эти коэффициенты будем обозначать просто a_n. При $N \to \infty$ соотношение (1) есть не что иное, как разложение в ряд по ортогональным функциям. Действительно,

$$\hat{S}(\omega) = \hat{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt$$

допускает представление в ортогональном базисе, в котором возможно разложение входной

функции $S(t)$. Следовательно, каждую степень $\hat{S}$ также можно представить в ортогональном базисе, а значит и вся функция $\hat{U}_l(\omega)$ представима в указанном базисе.

Слагаемое при $n = 0$ в преобразовании (1) можно интерпретировать как собственные тепловые шумы четырехполюсника, при $n = 1$ – как обычное линейное преобразование входного сигнала этим четырехполюсником (например, обычная фильтрация), а последующие слагаемые – уже как нелинейное частотное преобразование входного сигнала.

В качестве входного сигнала рассмотрим последовательность M неперекрывающихся импульсов (рис. 2):

$$S(t) = \sum_{m=1}^{M} S_m(t - \tau_m), \qquad (2)$$

где τ_m – момент начала m-го импульса.

Положим, что каждая функция $S_m(t-\tau_m)$ и, соответственно, вся сумма $S(t)$ являются вещественными функциями; тогда $\hat{S}(\omega) = \hat{S}^*(-\omega)$. Это означает, что спектр сигнала, лежащий в отрицательной области частот, может быть представлен через комплексно-сопряженный спектр того же сигнала на положительной области частот. Тогда, по свойству линейности преобразования Фурье и с учетом теоремы запаздывания, получаем следующее разложение:

$$\hat{S}(\omega) = \sum_{m=1}^{M} \hat{S}_m(\omega) = \\ = \sum_{m=1}^{M} \left[\hat{s}_m(\omega) e^{-i\omega\tau_m} + \hat{s}^*_m(\omega) e^{+i\omega\tau_m} \right], \qquad (3)$$

где i – мнимая единица.

Данный сигнал воздействует на каждый осциллятор (микросистему) вещества (макросистему), причем последовательно; другими словами, на момент воздействия, например, m-го импульса осциллятор уже воспринял все предыдущие $m - 1$ импульсов, и на частотной нелинейности происходит взаимодействие спектра m-го импульса с результатом реакции осциллятора на предыдущие импульсы. Тогда, если осциллятор обладает частотной нелинейностью, то спектр выходного сигнала от l-го осциллятора после M импульсов будет следовать выражению:

$$\hat{U}_l(\omega) = \sum_{n=0}^{N} \left\{ a_n \left[\sum_{m=1}^{M} \hat{S}_m \right]^n \right\}. \qquad (4)$$

С помощью алгебраических преобразований можно представить последнюю формулу следующим образом:

$$\hat{U}_l(\omega) = \sum_{n=0}^{N} \left\{ a_n \frac{(M+n-1)!}{(M-1)!n!} \sum_{m=1}^{M} C_m \prod_{k=1}^{M} \hat{S}_k^{q_k} \right\}, \qquad (5)$$

где C_m – числовые коэффициенты; q_k – показатели степени, определяемые путем перебора всевозможных комбинаций от 0 до n, при условии, что

$$q_1 + q_2 + \ \ldots \ + q_k = n.$$

Общий сигнал, испускаемый веществом, получается из формулы (5) применением обратного преобразования Фурье и суммированием импульсов от всех осцилляторов с учетом функции распределения данных осцилляторов по резонансным частотам. Считая, что данное распределение является непрерывным и описывается функцией распределения $F(\omega_l)$, можно заменить суммирование интегрированием и получить формулу для описания сигнала, излучаемого веществом после его облучения последовательностью из M импульсов:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega_l) \times \\ \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{(M+n-1)!}{(M-1)!n!} \sum_{m=1}^{M} C_m \prod_{k=1}^{M} \hat{S}_k^{q_k} \right] e^{i\omega t} d\omega \right\} d\omega_l. \qquad (6)$$

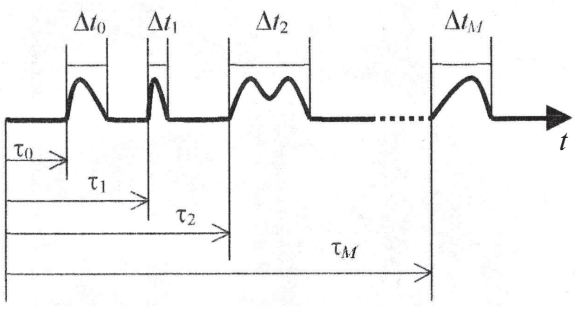


Рис. 2. Рассматриваемый входной сигнал (см. формулу (2))

Выходное излучение вещества, которое формируется из вкладов от отдельных осцилляторов, может менять свою интенсивность во времени, если в определенные моменты излучение от отдельных осцилляторов становится синфазным. Естественно, наблюдается синфазное излучение осцилляторов сразу после возбуждающих импульсов (называется свободной индукцией), а также синфазное излучение в виде эхо-сигналов. Длительность сигналов свободной индукции пропорциональна времени расфазировки излучателей T_2^*, а длительность эхо-сигналов – примерно в два раза больше. Заметим, что в момент эха фазы сигналов всех осцилляторов одинаковы и не зависят от частоты ω_l. Это утверждение, в строгом смысле, справедливо только в момент максимума эхосигнала, в процессе же остального эха фазы колебаний отдельных осцилляторов слабо различаются. Во время нарастания эхо-сигнала они сходятся, а во время спада расходятся. В момент максимума эха все вещество ведет себя так же, как каждый отдельный осциллятор, а фаза колебаний каждого осциллятора есть наблюдаемая величина. Вследствие этого, явление эха используется для воспроизведения информации, так как оно позволяет осуществлять перенос когерентности во времени, а сама информация записывается и хранится при этом в виде фаз колебаний.

Продемонстрируем, используя формулу (6), что в системах осцилляторов с частотной нелинейностью возможно формирование эхосигналов. Рассмотрим простейший случай воздействия на четырехполюсник двух импульсов: $s_1(t)$, начинающегося в момент времени τ_1, и $s_2(t)$, начинающегося в момент τ_2. Тогда, согласно формуле (6), отклик четырехполюсника со второй степенью нелинейности в области спектров будет выражаться как

$$U(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(\omega_l)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[a_0+a_1\left(\hat S_1+\hat S_2\right)+ a_2\left(\hat S_1^2+2\hat S_1\hat S_2+\hat S_2^2\right)\right]e^{i\omega t}d\omega\right\}d\omega_l. \quad (7)$$

Нас интересует вид сигнала на выходе четырехполюсника после второго импульса, т. е. при $t > \tau_2$. Характеристики этого сигнала должны зависеть от вида спектров обоих импульсов. В формуле (7) этому требованию отвечает только слагаемое

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left[F(\omega_l)\int_{-\infty}^{\infty}\{2a_2\hat S_1\hat S_2e^{i\omega t}\}d\omega\right]d\omega_l, \quad (8)$$

которое при $t > \tau_2$ эха дать не может. Действительно,

$$\hat S_1\hat S_2e^{i\omega t}=\left[\hat s_1e^{-i\omega\tau_1}+ +\hat s_1^*e^{+i\omega\tau_1}\left(\hat s_2e^{-i\omega\tau_2}+\hat s_2^*e^{+i\omega\tau_2}\right)\right]e^{i\omega t}.$$

Ситуация изменится, если рассмотреть следующую степень нелинейности в формуле (4). Тогда сигнал на выходе четырехполюсника будет иметь вид

$$U(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(\omega_l)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[a_0+a_1\left(\hat S_1+\hat S_2\right)+ a_2\left(\hat S_1^2+2\hat S_1\hat S_2+\hat S_2^2\right)+ a_3\left(\hat S_1^3+3\hat S_1^2\hat S_2+3\hat S_1\hat S_2^2+\hat S_2^2\right)\right]e^{i\omega t}d\omega\right\}d\omega_l. \quad (9)$$

В этой формуле уже присутствуют слагаемые вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left\{F(\omega_l)\int_{-\infty}^{\infty}\left[3a_3\left(\hat S_1\hat S_2^2+\hat S_1^2\hat S_2\right)e^{i\omega t}\right]d\omega\right\}d\omega_l. \quad (10)$$

Используем следующее представление для спектров сигналов:

$$\hat S_m=\hat s_me^{-i\omega\tau_m}+\hat s_m^*e^{+i\omega\tau_m}.$$

Тогда после его подстановки в слагаемые (10) получим, что эхо-сигнал после второго импульса могут дать только три слагаемых:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left\{F(\omega_l)\int_{-\infty}^{\infty}\left(3a_3\left[\hat s_1\hat s_2^2e^{i\omega(t-2\tau_2-\tau_1)}+ +\hat s_1^*\hat s_2^2e^{i\omega(t-2\tau_2+\tau_1)}+ +\hat s_1^2\hat s_2e^{i\omega(t-\tau_2-2\tau_1)}\right]\right)d\omega\right\}d\omega_l.$$

Видно, что сигнал, возникающий на удвоенном временном интервале между первым и вторым возбуждающими импульсами, будет

давать второе слагаемое. Таким образом, первичное эхо имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left\{F(\omega_l)\int_{-\infty}^{\infty}\left[3a_3\hat{s}_1^*\hat{s}_2^2e^{i\omega(t-2\tau_2+\tau_1)}\right]d\omega\right\}d\omega_l. \quad (11)$$

Представляет интерес сравнить этот результат со спектрами двухимпульсных эхо-сигналов различной природы, полученных путем приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений. В работе [8] показано, что при $\tau_1 = 0$ приближенное решение уравнений Блоха дает для спектра первичного ядерного спинового эха, возникающего в момент времени $t = 2\tau_2$, следующее выражение:

$$\hat{S}_{2\tau_2} = \hat{s}_1^*\hat{s}_2^2.$$

Аналогичные выражения получены путем приближенного решения нелинейных уравнений для спектров первичных эхо-сигналов, возникающих в высокотемпературных сверхпроводниках [9]. Следовательно, предложенный алгоритм для исследования формы и моментов появления эхо-сигналов хорошо совпадает с полученными ранее экспериментальными и теоретическими результатами.

Исходя из приведенных выше рассуждений, можно сделать вывод, что в случае возбуждения импульсами на одинаковых несущих частотах минимальная степень нелинейности по отношению к входному сигналу, при которой возникает эхо, равна трем. При более высокой степени нелинейности будут наблюдаться дополнительные или вторичные эхо-сигналы в моменты времени $t = k\tau_2$. Однако для параметрического эха [10], возникающего при возбуждении двумя импульсами, у которых несущие частоты отличаются в два раза (частота второго импульса в два раза больше), минимальная степень нелинейности для возникновения эха будет равна двум. Это следует из формулы (8) и было показано для малосигнального приближения в работе [11] с использованием уравнения Матье.

С помощью предложенного нами механизма определим теперь моменты появления и вид спектров эхо-сигналов, возникающих при возбуждении тремя импульсами с одинаковыми несущими частотами. Согласно формуле (6), отклик после трех импульсов четырехполюсника, имеющего третью степень нелинейности в области спектров, будет следовать выражению

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}F(\omega_l)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[a_0 + a_1\left(\hat{S}_1+\hat{S}_2+\hat{S}_3\right)+\right.\right.$$
$$+a_2\left(\hat{S}_1^2+2\hat{S}_1\hat{S}_2+\hat{S}_2^2+2\hat{S}_1\hat{S}_3+2\hat{S}_2\hat{S}_3+\hat{S}_3^2\right)+$$
$$+a_3(\hat{S}_1^3+3\hat{S}_1^2\hat{S}_2+3\hat{S}_1\hat{S}_2^2+$$
$$+3\hat{S}_1^2\hat{S}_3+3\hat{S}_1\hat{S}_3^2+\hat{S}_2^3+3\hat{S}_2^2\hat{S}_3+$$
$$\left.\left.+3\hat{S}_2\hat{S}_3^2+6\hat{S}_1\hat{S}_2\hat{S}_3+\hat{S}_3^3)\right]e^{i\omega t}d\omega\right\}d\omega_l.$$

Из последней формулы видно, что эхо-сигналы могут дать только следующие слагаемые:

$$U_{echo}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}F(\omega_l)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[a_3(3\hat{S}_1\hat{S}_2^2+3\hat{S}_1\hat{S}_3^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+3\hat{S}_2\hat{S}_3^2+6\hat{S}_1\hat{S}_2\hat{S}_3\right]e^{i\omega t}d\omega\right\}d\omega_l.$$

Первые три слагаемых данной формулы – это эхо-сигналы, соответствующие возбуждению только двумя импульсами. Они появляются, соответственно, в моменты времени $2\tau_2$ от первых двух и в момент времени $2\tau_3$ от первого и третьего импульсов. Слагаемое $3S_2S_3^2$ отвечает за эхо-сигнал, возникающий от второго и третьего импульса в отсутствие первого, т. е. происходит сдвиг начала отсчета и следует считать $\tau_2 = 0$. Последнее слагаемое – единственное, которое дает эхо после третьего импульса и зависит от вида спектров всех трех импульсов:

$$\hat{S}_1\hat{S}_2\hat{S}_3 = \left(\hat{s}_1e^{-i\omega\tau_1}+\hat{s}_1^*e^{+i\omega\tau_1}\right)\times$$
$$\times\left[\hat{s}_2\hat{s}_3e^{-i\omega(\tau_2+\tau_3)}+\hat{s}_2^*\hat{s}_3e^{-i\omega(-\tau_2+\tau_3)}+\right.$$
$$\left.+\hat{s}_2\hat{s}_3^*e^{-i\omega(\tau_2-\tau_3)}+\hat{s}_2^*\hat{s}_3^*e^{i\omega(\tau_2+\tau_3)}\right].$$

При $\tau_1 = 0$ эхо будет в момент времени $\tau_2 + \tau_3$ и его спектр отвечает формуле $\hat{s}_1^*\hat{s}_2\hat{s}_3$. Для этого эха спектры, получаемые при теоретическом рассмотрении спинового эха и эха в сверхпроводниках, выражаются как $\hat{s}_1^*\hat{s}_2\hat{s}_3$ [8, 9]. Отметим, что после третьего импульса наблюдаются еще сигналы в моменты времени $2\tau_3 - \tau_2$,

Основные параметры эхо-сигналов, возникающих после разных способов возбуждения при различных степенях нелинейности четырехполюсника

N	3		4		5		Комментарий		
M	Время появления эха	Спектр эха	Время появления эха	Спектр эха	Время появления эха	Спектр эха	Пример эха и соответствующие уравнения	Спектры из решений уравнений	Литература
1	$\frac{3}{2}\Delta t$	$\hat{s}_1^3$	$2\Delta t$	$\hat{s}_1^4$	$\frac{5}{2}\Delta t$	$\hat{s}_1^5$	Ядерное спиновое эхо, система дифференциальных уравнений Блоха: $\frac{\partial u}{\partial t} + f(t)u^2 + g(t)u - h(t) = 0$ (14)		[13, 14]
2	$2\tau_2$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^2$	$2\tau_2$	$(\hat{s}_1^*)^2 \hat{s}_2^2$	$2\tau_2$	$(\hat{s}_1^*)^3 \hat{s}_2^2$	Ядерное спиновое эхо, система дифференциальных уравнений Блоха: уравнение (14). Фононное эхо: уравнение (15).	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^2$	[8, 9, 14]
			$3\tau_2$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^3$	$3\tau_2$	$(\hat{s}_1^*)^2 \hat{s}_2^3$		$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^3$	
					$4\tau_2$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^4$			
3	$\tau_2+\tau_3$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2 \hat{s}_3$	$\tau_2+\tau_3$	$(\hat{s}_1^*)^2 \hat{s}_2 \hat{s}_3$	$\tau_2+\tau_3$	$(\hat{s}_1^*)^3 \hat{s}_2 \hat{s}_3 + \hat{s}_1^* \hat{s}_2 \lvert\hat{s}_2\rvert^2 \hat{s}_3 + \hat{s}_1^* \hat{s}_2 \lvert\hat{s}_3\rvert^2 \hat{s}_3$	Ядерное спиновое эхо, система дифференциальных уравнений Блоха: уравнение (14). Фононное эхо: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2 \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{T_2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha_L}{\rho} \nu(x,t)$ (15)	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2 \hat{s}_3$	[8, 9, 14]
			$\tau_2+2\tau_3$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2 \hat{s}_3^2$	$\tau_2+2\tau_3$	$(\hat{s}_1^*)^2 \hat{s}_2 \hat{s}_3^2$		$\hat{s}_1^* \lvert\hat{s}_2\rvert^2 \hat{s}_3^2$	
			$2\tau_2+\tau_3$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^2 \hat{s}_3$	$2\tau_2+\tau_3$	$(\hat{s}_1^*)^2 \hat{s}_2^2 \hat{s}_3$			
			$2\tau_3-\tau_2$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^* \hat{s}_3^2$	$2\tau_3-\tau_2$	$(\hat{s}_1^*)^2 \hat{s}_2^* \hat{s}_3^2$			

Окончание таблицы

N	3		4		5		Комментарий		
M	Время появления эха	Спектр эха	Время появления эха	Спектр эха	Время появления эха	Спектр эха	Пример эха и соответствующие уравнения	Спектры из решений уравнений	Литература
					$2\tau_3$	$\hat{s}_1^* \lvert \hat{s}_2 \rvert^2 \hat{s}_3^2$			
					$2\tau_2$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^2 \lvert \hat{s}_3 \rvert^2$			
					$2\tau_2+2\tau_3$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^2 \hat{s}_3^2$			
					$\tau_2+3\tau_3$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2 \hat{s}_3^3$			
					$3\tau_2+\tau_3$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^3 \hat{s}_3$			
					$3\tau_3-\tau_2$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^* \hat{s}_3^3$			
					$3\tau_2-\tau_3$	$\hat{s}_1^* \hat{s}_2^3 \hat{s}_3^*$			
					$2\tau_3-2\tau_2$	$\hat{s}_1^* \left(\hat{s}_2^* \right)^2 \hat{s}_3^2$		$\hat{s}_1^* (\hat{s}_2^*)^2 \hat{s}_3^2$	

Обозначения: M – число входных импульсов, N – степень нелинейности; $\Delta t, \tau_m$ – см. рис. 2. Примечания: 1.Все спектры эхо-сигналов приведены без учета постоянных коэффициентов; 2. Для $M = 1$ использован прямоугольный импульс длительностью Δt с гармоническим заполнением; 3. Система уравнений Блоха записана для всех M после приведения к одному уравнению [14].

$2(\tau_3-\tau_2)$, $2\tau_3$ [8, 9]. Вид этих сигналов, естественно, должен зависеть от всех трех импульсов. Их спектры получаются при учете в рассматриваемом алгоритме, соответственно четвертой для эха в момент $2\tau_3-\tau_2$ и пятой – в моменты $2(\tau_3-\tau_2)$, $2\tau_3$ – степеней нелинейности для эха. При возбуждении двумя импульсами учет четвертой степени нелинейности дает эхо-сигналы в моменты времени $2\tau_2$ и $3\tau_2$, а пятой – еще добавляет сигнал при $t=4\tau_2$. При возбуждении четырьмя импульсами, после окончания четвертого импульса можно получить пять эхо-сигналов, если учесть в приведенном алгоритме четвертую степень нелинейности. Все эти эхо-сигналы наблюдались экспериментально в работе [12]. Отметим, что для получения эха после m импульсов понадобится степень нелинейности $n=m$.

Используя рассмотренный выше подход, мы можем легко объяснить особенности одноимпульсного эха, наблюдаемого многими авторами [13]. В качестве возбуждающего рассмотрим прямоугольный импульс длительностью Δt с гармоническим заполнением. Функцию, задающую этот импульс, доопределим на отрицательную полуось времени, как и раньше, четным образом. Будем считать, что входной сигнал задается на всей временной оси в следующем виде:

$$S(t)=\begin{cases} a_0\sin\omega_0 t, & \text{если } t\in[0,\Delta t];\\ 0, & \text{если } t<-\Delta t,\ t>\Delta t;\\ -a_0\sin\omega_0 t, & \text{если } t\in[0,-\Delta t]. \end{cases} \quad (12)$$

Фурье-образ этой функции будет иметь вид

$$\hat{S}(\omega)=\frac{a_0\Delta t}{2i}\left\{\frac{\sin\left[(\omega_0+\omega)\frac{\Delta t}{2}\right]}{(\omega_0+\omega)\frac{\Delta t}{2}}e^{i(\omega_0+\omega)\frac{\Delta t}{2}}+\right. \quad (13)$$

$$\left.+\frac{\sin\left[(\omega_0-\omega)\frac{\Delta t}{2}\right]}{(\omega_0-\omega)\frac{\Delta t}{2}}e^{i(\omega_0-\omega)\frac{\Delta t}{2}}\right\}.$$

Очевидно, что минимальная степень нелинейности, при которой может появиться эхо-сигнал на частоте ω_0 для $t>\Delta t$, будет $N=3$. Это эхо появится при $t=1{,}5\Delta t$. Нелинейность $N=4$ даст эхо в момент времени $t=2\Delta t$. Оба эти сигнала наблюдались экспериментально [14].

Спектры эхо-сигналов, рассчитанные согласно приведенному выше алгоритму для нелинейности не выше пятой при возбуждении одним, двумя или тремя радиочастотными импульсами, сведены в таблице. В нее включены спектры только тех сигналов, которые возникают после последнего возбуждающего импульса и учитывают спектры всех импульсов последовательности. Для сравнения там же приводятся спектры эхо-сигналов, полученные путем приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эхо-явления для тех же возбуждений. Отметим, что представленные в таблице спектры не содержат полос пропускания веществ, времен релаксации и постоянных коэффициентов, определяющих их соотношения между собой.

Как видно из данных таблицы, предложенный в настоящей работе алгоритм дает хорошее соответствие с результатами теоретического анализа формы и местоположения эхо-сигналов вне зависимости от их природы. Поэтому он может оказаться полезным как для инженеров-разработчиков радиоаппаратуры, использующих эхо-явления, так и для физиков-исследователей, столкнувшихся с новыми проявлениями этого эффекта. Особенно привлекательным для анализа эхо-сигналов данный алгоритм может оказаться при использовании сложных и шумовых внешних воздействий, когда трудности приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений существенно возрастают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hahn, E.L.** Spin echoes [Текст] / E.L. Hahn // Phys. Rev. – 1950. – Vol. 80. – № 4. – P. 580–594.

2. **Blume, R.J.** Electron spin relaxation times in sodium-ammonia solutions [Текст] / R.J. Blume //Phys. Rev. – 1958. – Vol. 109. – № 6. – P. 1867–1873.

3. **Kurmit, N.A.** Observation of a photon echo [Текст] / N.A. Kurmit, I.D. Abella, S.R. Hartman //Phys. Rev. Letters. – 1964. – Vol. 13. – № 9. – P. 567–568.

4. **Hill, R.M.** Cyclotron resonance echo [Текст] / R.M. Hill, D.E. Kaplan //Phys. Rev. Letters. – 1965. –

Vol. 14. – № 26. – P. 1062 – 1063.

5. **Ikezi, H.** Observation of spatial ion-wave echoes [Текст] / H. Ikezi, N. Takahashi //Phys. Rev. Letters. – 1968. – Vol.20. – № 4. – P. 140–142.

6. **Корпел, А.** Нелинейное эхо, фазовое сопряжение, обращение времени и электронная голография [Текст] / А. Корпел, М. Чаттерджи //ТИИЭР. – 1981. – Т. 69. – № 12. – С. 22–43.

7. **Рыжак, И.С.** Об общих закономерностях формирования каузального нелинейного эха и их применении к многофункциональной обработке сигналов [Текст] / И.С. Рыжак //Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45. – № 1. – С. 5–38.

8. **Апушкинский, Е.Г.** К вопросу миниатюризации устройств обработки информации на основе ядерного спинового эха [Текст] / Е.Г. Апушкинский, А.В. Казак, О.А. Нестеров //Вопросы радиоэлектроники. – 1982. – Сер. ТПО. – Вып. 1. – С. 13–22.

9. **Апушкинский, Е.Г.** Ультразвуковые и вихревые колебания в высокотемпературных сверхпроводниках [Текст] / Е.Г. Апушкинский, М.С. Астров, В.К. Соболевский //ЖТФ. – 2011. – Т. 81 – № 6. – С. 42–50.

10. **Петров, М.П.** Магнитоупругие колебания и параметрическое эхо в тонких пластинах бората железа [Текст] / М.П. Петров, А.П. Паугурт, И.В. Плешаков, А.В. Иванов //Письма в ЖТФ. – 1985. – Т. 11. – № 19. – С. 1204 – 1207.

11. **Нестеров, М.М.** Амплитудные и частотные свойства параметрического эхо-сигнала в информационных системах [Текст] / М.М. Нестеров, И.В. Плешаков, Я.А. Фофанов //Научное приборостроение. – 2006. – Т. 16. – № 1. – С. 64 – 71.

12. **Тарханов, В.И.** Геометрическая алгебра, ЯМР и обработка информации [Текст] / В.И. Тарханов. – СПб.: Изд. СПбГПУ. – 2002. – 214 с.

13. **Буньков, Ю.М.** Одноимпульсное спиновое эхо в ядерных системах с большим динамическим сдвигом частоты [Текст] / Ю.М. Буньков, Б.С. Думеш, М.И. Куркин //Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 19. – Вып. 4. – С. 216–219.

14. **Barbara, T.M.** Integration of Bloch's equations with radiation damping [Текст] / T.M. Barbara // Journal of Magnetic Resonance. – 1992. – Vol. 98. – P. 608–610.

АСТРОФИЗИКА

УДК 524, 539.1

Г.И. Васильев, Е.Е. Холупенко, С.Н. Яблоков, Д.А. Байко, А.М. Быков, А.М. Красильщиков, Г.Г. Павлов

ВЛИЯНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ФОНА НОЧНОГО НЕБА НА НАЗЕМНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ ГАММА-ВСПЛЕСКОВ В ДИАПАЗОНЕ 1 – 10 ГэВ

В последнее десятилетие в развитии техники наземных черенковских гамма-телескопов достигнут существенный прогресс. Построены сложные стереоскопические системы телескопов, такие как H.E.S.S. [1], MAGIC [2], VERITAS [3], CANGAROOIII [4]. Планируются еще более сложные и совершенные системы телескопов: CTA [5] и H.E.S.S. Phase II [6]. Развитие таких систем направлено на улучшение ряда важных технических параметров (увеличение площади собирающей поверхности, повышение квантовой эффективности детекторов, увеличение количества используемых инструментов и т. п.), что, в свою очередь, должно привести к повышению чувствительности систем и расширению диапазона энергий гамма-квантов, доступных для наблюдения. В частности, предполагается, что удастся добиться уменьшения нижнего значения энергии наблюдения (так называемой энергии порога) до 5 ГэВ. Такое значение обусловлено предельными параметрами (прежде всего, эффективностью фотоэлектронных умножителей) регистрирующей аппаратуры, которую в последнее время стало технически возможным создать. При указанном значении энергии порога ключевую роль в процессе наблюдения начинают играть (наряду с ограничениями, связанными с недостатками используемой аппаратуры) природные факторы, которые не оказывали влияния при больших значениях энергии наблюдения. К таким факторам относятся, например, фон космических электронов высоких энергий [7], геомагнитное поле, более широкое рассеяние вторичных частиц ливня в атмосфере Земли (оно ухудшает возможности идентификации черенковских вспышек, вызванных гамма-квантами).

Настоящая работа посвящена рассмотрению еще одного фактора, ограничивающего возможности наблюдения космического гамма-излучения наземными черенковскими гамма-телескопами, а именно – фона ночного неба.

Метод исследования влияния оптического фона ночного неба на вероятность регистрации космических гамма-квантов

В качестве основной характеристики, выражающей влияние диффузного оптического фона ночного неба на возможности наблюдения космического гамма-излучения наземными черенковскими гамма-телескопами, была выбрана вероятность P идентификации черенковской вспышки (рис. 1, *а*) при наличии оптического фона (рис. 1, *б*), в зависимости от энергии E первичного гамма-кванта. При выбранном методе идентификации величину P нельзя рассчитать непосредственно, но можно определить ее верхнюю и нижнюю границы, которые оказываются близкими по значению. За верхнюю границу вероятности P принимается следующая величина, определяемая в результате серии численных экспериментов:

$$P_u = \left\langle N_{id} / N_{tot} \right\rangle_{BG},$$

где N_{id} – количество идентифицированных событий, N_{tot} – общее количество симулиро-

ванных событий; скобки с нижним индексом BG означают усреднение по реализациям оптического фона (BG – от англ. background).

За нижнюю оценку вероятности P принимается величина

$$P_l = \left\langle N_{id} / N_{tot} \right\rangle_{BG} \left(1 - P_f\right),$$

где P_f – вероятность ложной идентификации черенковской вспышки, т. е. ее идентификации при наличии в фокальной плоскости телескопа только фотонов оптического фона.

Анализируемое изображение (рис. 1,*в*), смоделированное для фокальной плоскости телескопа, представляет собой круглую область диаметром 1,2 м, разбитую на 11310 пикселей (форма пикселя – квадрат со стороной 1 см). Интенсивность засветки пикселя I_k (k – номер пикселя) – это количество фотонов (натуральное число) в диапазоне 300 – 600 нм, попавших в пиксель в течение временного промежутка характерной длительности 10 нс.

Для анализа изображения был использован следующий алгоритм фильтрации оптического фона.

1. Интенсивности I_k, величина которых не превышала некоторого значения I^{th}, обнуляются. Вероятность ложных регистраций черенковских вспышек P_f зависит от I^{th}. При увеличении значения I^{th} вероятность ложных регистраций стремится к нулю, но при этом

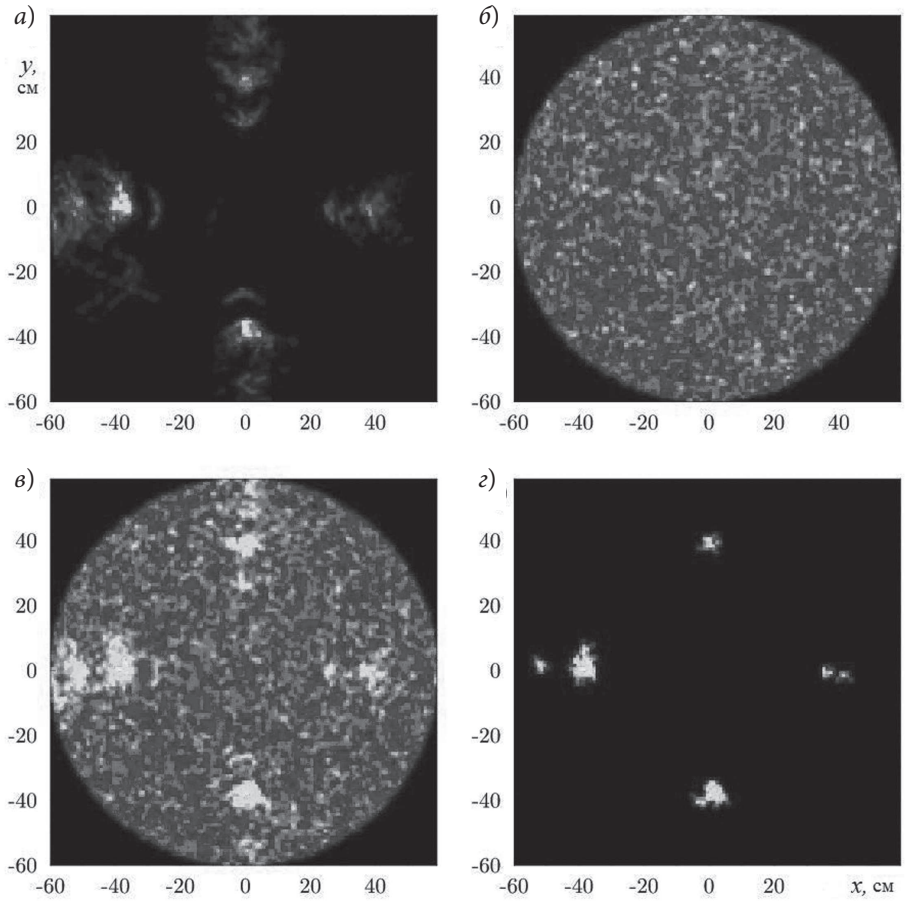


Рис. 1. Изображения в фокальных плоскостях телескопов (для удобства восприятия фокальные плоскости всех телескопов приведены на одном рисунке): *а* – черенковская вспышка, сформировавшаяся при взаимодействии гамма-кванта (энергией 5 ГэВ) с атмосферой; *б* – оптический фон ночного неба; *в* – совместное изображение *а* и *б*; *г* – изображение *в* после обработки фильтром (см. пояснения в тексте). Максимальные значения интенсивностей составляют 18 (*а*), 15 (*б*), 25 (*в*,*г*)

существенно уменьшается и вообще доля регистраций (т. е. существенно уменьшается величина P_u). С другой стороны, существенное уменьшение величины I^{th} приводит к росту вероятности ложных регистраций, что, в свою очередь, уже не позволяет оценить разумным образом истинное значение вероятности регистрации P. В настоящей работе был выбран специальный критерий для порогового значения I^{th}: оно определялось как минимальное натуральное число, для которого при фильтрации изображений, содержащих только оптический фон, вероятность ложных регистраций не превышает 0,02.

2. Обнуляются интенсивности тех пикселей, для которых интенсивности двух или более ближайших соседей по горизонтали либо по вертикали имеют нулевые значения.

3. В двухпиксельной окрестности по вертикали и горизонтали тех пикселей, интенсивности которых не были обнулены, восстанавливаются начальные значения интенсивностей I_k.

Результат обработки исходного изображения (рис. 1, *в*) представлен на рис. 1, *г*.

Процесс идентификации состоял в следующем: вспышка считалась зарегистрированной в том случае, если после применения вышеописанного фильтра оставался хотя бы один пиксель с ненулевой интенсивностью.

Недостатком такого подхода к идентификации черенковских вспышек можно считать тот результат, что среди идентифицированных велика доля вспышек, приводящих к засвечиванию небольшого количества пикселей (вплоть до одного). Для таких вспышек фактически невозможно как изучение их морфологических свойств (определение параметров Хилласа [8]), так и восстановление характеристик ливня (его трехмерная реконструкция) и первичной частицы (прежде всего, ее энергии). Это приводит, в частности, к существенному ухудшению возможностей селекции событий (способности отличать фотонные и лептонные события от адронных с помощью морфологических характеристик пятна, наблюдаемого от черенковской вспышки).

Но преимущество указанного метода идентификации состоит в том, что он позволяет определить общее количество гамма-квантов, приходящих с определенного направления. Это, в свою очередь, позволяет осуществлять один из наиболее важных типов наблюдений в гамма-астрономии – регистрацию гамма-всплесков и измерение их кривых блеска (потока гамма-квантов в зависимости от времени). Вместе с наблюдениями в килоэлектроновольтном диапазоне, производимыми на орбитальных обсерваториях, таких как КОНУС-ВИНД [9] или Swift [10] (используются, в том числе, как быстрые триггеры для наблюдений в других диапазонах), измерения кривых блеска и полных потоков гамма-всплесков на энергиях более 3 ГэВ с помощью черенковских гамма-телескопов могут дать исключительно ценную информацию о физических механизмах, лежащих в основе гамма-всплесков.

Параметры моделирования черенковских вспышек и оптического фона ночного неба

При моделировании рассматривалась регистрирующая система из четырех идентичных телескопов с параболическими зеркалами диаметром 30 м, фокусным расстоянием 46,9 м и полем зрения 2,9 град, расположенных в точках с координатами (100 м, 0 м); (0 м, 100 м); (–100 м, 0 м) и (0 м, –100 м) на высоте 5 км над уровнем моря. Величина геомагнитного поля составляла 0,3 Гс, поле было направлено вдоль оси x параллельно земной поверхности. При расчетах использовалась стандартная модель атмосферы [11]. Для простоты рассмотрения и выделения главного эффекта – уменьшения вероятности регистрации под влиянием оптического фона – задавалось вертикальное падение первичного космического гамма-кванта в точку с координатами (0 м, 0 м). Значения энергии падающих гамма-квантов варьировались в диапазоне 1 – 10 ГэВ с шагом 1 ГэВ. С помощью оригинального кода [12], разработанного на основе пакета библиотек GEANT4 [13], для каждого значения энергии было симулировано 500 событий. При симуляции оптического фона ночного неба предполагалось, что средний поток фотонов составляет $4{,}6 \cdot 10^3$ фотон·м$^{-2}$нс$^{-1}$стер$^{-1}$ [14], что соответствует значению потока диффузного оптического фона из плоскости Галактики. Такое предположение дает оценку снизу вероятности идентификации черенковской вспышки от гамма-кванта, так как Галактическая плоскость – самый яркий диффузный источник на ночном небе). Было смоделировано 500 изображений оптического фона, причем каждое

соответствовало 10 нс наблюдения. В общей сложности было смоделировано и обработано 2,5 млн. изображений черенковских вспышек при наличии оптического фона. При этом вероятность ложных регистраций P_f составила 0,012.

Результаты и их обсуждение

Для представления основного результата работы – зависимости вероятности P регистрации черенковских вспышек от энергии первичного гамма-кванта E – была выбрана величина P_u; такой выбор оправдан, поскольку разница между верхней (P_u) и нижней (P_l) оценками составляет всего 1,2 %. Зависимость P_u от E представлена на рис. 2. Видно, что вероятность идентификации черенковских вспышек существенно снижается при энергиях первичных гамма-квантов менее 10 ГэВ и достигает значения 0,5 при энергии около 2,7 ГэВ. Это обстоятельство необходимо учитывать при построении кривых блеска гамма-всплесков и определении общей интенсивности гамма-всплеска.

Пусть наблюдаемое число первичных гамма-квантов в единицу времени составляет $N^{\gamma}_{obs}(t)$ и предполагается, что реальный спектр гамма-всплеска имеет степенной вид, т. е.

$$n^{\gamma}(t,E)=(\alpha-1)\frac{N^{\gamma}(t)}{E_0}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\alpha},$$

где $n^{\gamma}(t,E)$ – количество фотонов в единицу времени в единичном интервале энергий, E_0 – пороговая энергия наблюдений.

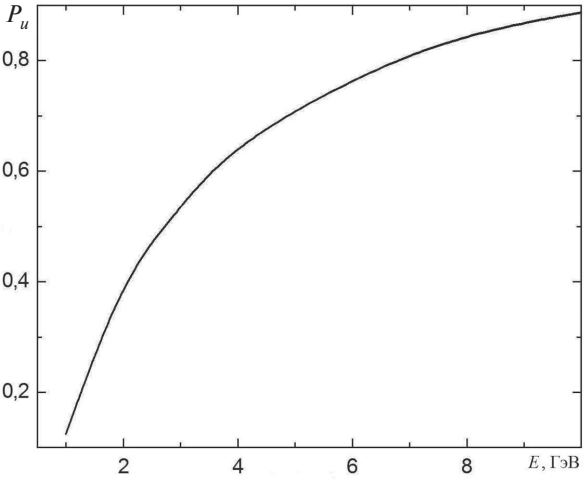


Рис. 2. Зависимость вероятности P_u (верхней оценки вероятности идентификации черенковской вспышки) от энергии первичного гамма-кванта E

В этом случае реальное число гамма-квантов $N^{\gamma}(t)$, приходящих в единицу времени в точку стояния телескопа, будет определяться по формуле $N^{\gamma}(t)=\beta(E_0,\alpha)N^{\gamma}_{obs}(t)$, где коэффициент $\beta(E_0,\alpha)$ дается формулой

$$\beta(E_0,\alpha)=\left(\int_{E_0}^{\infty}(\alpha-1)\frac{P(E)}{E_0}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\alpha}dE\right)^{-1}.$$

Результаты расчетов величины $\beta(E_0,\alpha)$ приведены в таблице. Из ее данных видно, что при значениях пороговой энергии E_0, меньших 7 ГэВ, коэффициент $\beta(E_0,\alpha)$ существенно отличается от единицы. Это означает, что неучет влияния оптического фона будет приводить к существенной недооценке интенсивности гамма-всплеска.

Результаты расчетов коэффициента $\beta(E_0,\alpha)$

E_0, ГэВ	Значение коэффициента β при различных α				
	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
3	1,38	1,44	1,49	1,52	1,56
4	1,26	1,29	1,32	1,34	1,36
5	1,19	1,21	1,23	1,24	1,26
6	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19
7	1,13	1,13	1,14	1,15	1,15

Таким образом, проведенный в рамках настоящей работы расчет позволяет корректно учесть количество гамма-квантов, которые не были зарегистрированы черенковским гамма-телескопом из-за влияния оптического фона ночного неба, и, соответственно, получить правильную оценку интенсивности наблюдаемого гамма-всплеска.

Авторы настоящей статьи благодарят за поддержку научную школу НШ-3769.2010.2. Часть расчетов выполнена в Межведомственном суперкомьютерном центре РАН, а также в его филиале в ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (договор 11.G34.31.0001) и РФФИ (гранты 11-02-12082-ОФИ-М-2011 и 11-02-00253-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hofmann, W.** Status of the High Energy Stereoscopic System (H.E.S.S.) Project [Текст] / W. Hoffman // Proceedings of 27th ICRC, Hamburg, Germany. – 2001. – Vol. 7. – P. 2785 – 2788.

2. **Fonseca, V.** The MAGIC telescope project [Текст] / V. Fonseca // Acta Physica Polonica B. – 1999. – Vol. 30.– No. 7.– P. 2331 – 2349.

3. **Weekes, T.C.** VERITAS: Very Energetic Radiation Imaging Telescope Array System [Текст] / T.C. Weekes, C. Akerlof, S. Biller [et al.] // Proceedings of the 25th ICRC. – Durban, South Africa. – 1997.– Vol. 5.– P. 173 – 176.

4. **Mori, M.** The CANGAROO-III project [Текст] / M. Mori, S.A. Dazeley, P.G. Edwards [et al.] // GeV–TeV Gamma Ray Astrophysics Workshop, AIP Conference Proceedings. Melville, N.Y. , USA. – 2000.– Vol. 515.– P. 485 – 491.

5. **de Naurois, M.** The CTA Project [Текст] / M. de Naurois // Société Francaise d'Astronomie et d'Astrophysique (SF2A). – 2008. – P. 195 – 198.

6. **Vincent, P.** H.E.S.S. Phase II [Текст] / P. Vincent // Proceedings of the 29th ICRC. Pune, India. – 2005. – Vol. 5 – P. 163 – 166.

7. **Supanitsky, A.D.** Earth magnetic field effects on the cosmic electron flux as background for Cherenkov telescopes at low energies [Электронный ресурс] / A.D. Supanitsky, A.C. Rovero // arXiv:1204.1865v1 [astro-ph.IM] – 2012.

8. **Hillas, A.M.** Cherenkov light images of EAS produced by primary gamma-rays and by nuclei [Текст] / A.M. Hillas // Proceedings of the 19th ICRC. Goddard Space Flight Center, USA. – 1985. – Vol. 3 – P. 445 – 448.

9. **Aptekar, R.L.** KONUS-W gamma-ray burst experiment for ISTP wind spacecraft [Текст] / R.L. Aptekar, I.V. Dementyev, D.D. Frederiks [et al.] // AIP Conference Proceedings, Huntsville, Alabama, USA. – 1991. – Vol. 265. – P. 359 – 362.

10. **Acciari, V.A.** VERITAS observations of gamma-ray bursts detected by Swift [Текст] / V.A. Acciari, E. Aliu, T. Arlen [et al.] // The Astrophysical Journal. – 2011. – Vol. 743. – Iss. 1. – art. id. 62.

11. Manual of the ICAO Standard Atmosphere (extended to 80 kilometres (262 500 feet)) [Электронный ресурс]: Doc 7488-CD, Third Edition, ICAO. – 1993. ISBN 92-9194-004-6.

12. **Васильев, Г.И.** Особенности пространственного распределения черенковских фотонов в стволе широкого атмосферного ливня, вызванного гамма-квантом с энергией 5 ГэВ [Текст] / Г.И. Васильев, Е.Е. Холупенко, Д.А. Байко [и др.] // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2011.–№ 4 (134). – С. 79 – 86.

13. **Allison, J.** Geant4 developments and applications [Текст] / J. Allison, K. Amako, J. Apostolakis [et al.] // Nuclear Science. – 2006.– Vol. 53.– P. 270 – 278. http://geant4.cern.ch

14. **Ona-Wilhelmi, E.** Determination of the night sky background around the Crab pulsar using its optical pulsation [Текст] / E. Ona-Wilhelmi, J. Cortina, O.C. de Jager, V. Fonseca // Astroparticle Physics. – 2004. – Vol. 22. – Iss. 1. – P. 95 – 102.

УДК 524.3-6

А.М. Быков, П.Е. Гладилин, С.М. Осипов, Г.Г. Павлов

РОЛЬ ШЛАНГОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В УСКОРЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Величина магнитного поля в предфронте ударных волн определяет максимальные энергии заряженных частиц, ускоренных волной, и характеристики наблюдаемого синхротронного излучения оболочек остатков сверхновых звезд. Спектр магнитных полей определяет длины свободного пробега частиц, ускоряемых на ударной волне. Величина магнитного поля вблизи фронта ударной волны может превышать на несколько порядков величину магнитного поля в окружающей межзвездной среде, что следует из анализа рентгеновского излучения ряда остатков сверхновых, в которых происхождение рентгеновских фотонов обу-

словлено синхротронным излучением частиц, ускоренных до энергий порядка 10^{14} эВ. Механизм усиления магнитного поля в предфронте ударной волны, по-видимому, обусловлен МГД-неустойчивостями анизотропного распределения ускоренных частиц. Долгое время основным механизмом усиления поля считалась резонансная неустойчивость [1]. В работе А.Р. Белла [2] было продемонстрировано наличие эффективной нерезонансной токовой неустойчивости, усиливающей коротковолновые моды с масштабами, меньшими гирорадиуса релятивистских частиц. Коротковолновые моды, однако, неэффективны как рассеиватели частиц максимальных энергий. Поэтому в работе [3] была исследована токовая длинноволновая неустойчивость, развивающаяся на фоне мелкомасштабной турбулентности Белла. В связи с проблемой формирования длинноволновых флуктуаций магнитного поля в работе [1] обсуждалась шланговая неустойчивость, связанная с наличием анизотропии давления. В этой работе неустойчивость рассмотрена в МГД-приближении. Последовательный анализ шланговой неустойчивости должен быть выполнен в рамках кинетической теории. В кинетическом подходе указанная неустойчивость для изотропного распределения частиц в системе покоя ударной волны рассматривалась в работе [4]. В подходе, близком к используемому в статье, шланговая неустойчивость рассматривалась в работе [5].

Кинетическая модель шланговой неустойчивости релятивистских частиц

В данной работе мы приводим расчет шланговой неустойчивости, связанной с наличием анизотропии давления ускоренных частиц, в кинетическом бесстолкновительном случае в условиях предфронта ударной волны в остатке сверхновой звезды. Мы решаем кинетические уравнения для возмущений функций распределения холодных фоновых электронов и протонов, а также ускоренных частиц. Мы рассматриваем в системе покоя предфронта (система покоя фоновых протонов) возмущения, распространяющиеся вдоль направления постоянного магнитного поля $\mathbf{B}_0$, и предполагаем, что ток ускоренных частиц сонаправлен с магнитным полем.

Мы рассматриваем функцию распределения ускоренных частиц следующего вида:

$$f_0^{cr} = \frac{n_{cr} N(p)}{4\pi}\left[1+\frac{3u_s}{c}\mu+\frac{\delta}{2}\left(3\mu^2-1\right)\right], \quad (1)$$

где n_{cr} – концентрация ускоренных частиц; $\mu = \cos\theta$ (θ – угол между направлением постоянного магнитного поля и импульсом частицы); u_s – скорость ударной волны; δ – параметр, определяющий анизотропию давления; $N(p)$ – спектр ускоренных частиц, нормированный на единицу;

$$N(p) = \frac{(\alpha-3)\,p_0^{(\alpha-3)}}{\left(1-\left(\frac{p_0}{p_m}\right)^{\alpha-3}\right)p^{\alpha}}, p_0 \le p \le p_m \quad (2)$$

(α – показатель спектра, p_0, p_m – минимальный и максимальный импульсы ускоренных частиц).

Неустойчивость, вызванная током ускоренных частиц (второе слагаемое в квадратных скобках выражения (1)), в данной геометрии рассматривалась в работах [2, 3, 6]. В данной работе мы вводим в функцию распределения (1) анизотропию давления (третье слагаемое в квадратных скобках выражения (1)). Линеаризованные уравнения Максвелла и бесстолкновительные кинетические уравнения дают следующее дисперсионное соотношение в геометрии задачи (см. [2, 3]):

$$\left(\omega^2-k^2v_a^2\right)\mathbf{E}\pm\frac{4\pi}{c}\frac{en_{cr}\left(\omega-ku_s\right)}{B_0}v_a^2\mathbf{E}+ +4\pi i\omega\frac{v_a^2}{c^2}\mathbf{j}^{cr}=0, \quad (3)$$

где $v_a = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$ (ρ – плотность фоновой плазмы); $\mathbf{E}$ – электрическое поле возмущения; e – единичный электрический заряд; c – скорость света; i – мнимая единица; ω, $\mathbf{k}$ – частота волны и волновой вектор волны возмущения; $\mathbf{j}^{cr}$ – возмущение тока ускоренных частиц;

$$\mathbf{j}^{cr} = -\mathbf{E}i\frac{e^2}{2}\int_0^{\infty}dp\int_{-1}^{1}d\mu X\frac{p^2v(p)\left(1-\mu^2\right)}{\omega-kv(p)\mu\pm\Omega};$$

$$X=\frac{1}{\omega}\left[\omega\left(-\mu\frac{1}{p}\frac{\partial f_0^{cr}}{\partial\mu}+\frac{\partial f_0^{cr}}{\partial p}\right)+\frac{kv(p)}{p}\frac{\partial f_0^{cr}}{\partial\mu}\right] \quad (4)$$

($v(p)$ – скорость ускоренной частицы, $\Omega=\frac{eB_0}{p}$ – гирочастота).

Знаки плюс-минус в выражениях (3), (4) соответствуют различным циркулярным поляризациям мод. Второе слагаемое в выражении (3) соответствует вкладу фоновых электронов и возникает в данном выражении ввиду равенства нулю суммарного по всем компонентам электрического тока в невозмущенном состоянии.

Дисперсионное соотношение для шланговой неустойчивости, полученное в МГД-рассмотрении плазмы [1], имеет вид

$$\omega=\pm\sqrt{v_a^2-\frac{P_\parallel-P_\perp}{\rho}}k, \quad (5)$$

где $P_\parallel-P_\perp$ – разность продольного и поперечного (относительно направления магнитного поля) давления, то есть анизотропия давления.

Соотношение (5) верно на масштабах, больших гирорадиусов частиц плазмы. Неустойчивость возникает, когда выражение под корнем в формуле (5) отрицательно. Выражение для анизотропии давления ускоренных частиц, имеющих функцию распределения (1), имеет вид

$$P_\parallel^{cr}-P_\perp^{cr}=\frac{3}{5}\delta P^{cr};$$

$$P^{cr}=\frac{1}{3}n_{cr}\int_0^\infty v(p)\,pN(p)\,p^2dp. \quad (6)$$

Вычислим возмущение тока ускоренных частиц по формуле (4), используя функцию (1). В дальнейшем будем предполагать, что $v(p)\approx c$. Вклад в ток, связанный со слагаемыми, пропорциональными 1 и μ, в функции распределения (1), имеет вид

$$\mathbf{j}_1^{cr}=\mp\mathbf{E}i\frac{ecn_{cr}}{\omega B_0}\left\{\left(u_sk-\frac{\alpha}{3}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\omega\right)A_0(x_0,x_m)-\right.$$
$$-\omega\frac{u_s}{c}A_2(x_0,x_m)+$$
$$\left.+\frac{(\alpha-3)\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\omega}{3\left(1-\left(\frac{p_0}{p_m}\right)^{\alpha-3}\right)}\left[\sigma_0(p_0)-\left(\frac{p_0}{p_m}\right)^{\alpha-3}\sigma_0(p_m)\right]\right\}. \quad (7)$$

Вклад, связанный со слагаемыми, пропорциональными μ^2, в функции распределения (1), имеет вид

$$\mathbf{j}_2^{cr}=\mp\mathbf{E}i\frac{ecn_{cr}}{\omega B_0}\delta\left\{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\omega A_1(x_0,x_m)+\right.$$
$$+kcA_2(x_0,x_m)+$$
$$+\frac{(\alpha-3)\omega}{2\left(1-\left(\frac{p_0}{p_m}\right)^{\alpha-3}\right)}\times \quad (8)$$
$$\left.\times\left[\sigma_1(p_0)-\left(\frac{p_0}{p_m}\right)^{\alpha-3}\sigma_1(p_m)\right]\right\};$$

$$A_{0,1,2}(x_0,x_m)=\int_{p_0}^{p_m}\sigma_{0,1,2}(p)N(p)\,p^2dp; \quad (9)$$

$$\sigma_0(p)=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\frac{\left(1-\mu^2\right)}{1\mp x\mu}d\mu; \quad (10)$$

$$\sigma_1(p)=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\frac{\left(1-\mu^2\right)\mu^2}{1\mp x\mu}d\mu; \quad (11)$$

$$\sigma_2(p)=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\frac{\left(1-\mu^2\right)\mu}{1\mp x\mu}d\mu, \quad (12)$$

где $x=\frac{kcp}{eB_0}$, $x_0=\frac{kcp_0}{eB_0}$, $x_m=\frac{kcp_m}{eB_0}$.

В выражения (7), (8), в фигурные скобки, входит ряд слагаемых, пропорциональных частоте ω. Поскольку при интегрировании выражения (4) пренебрегалось величиной ω в знаменателе подынтегрального выражения, то данные слагаемые верны только в первом порядке по ω, то есть уже отброшен вклад, пропорциональный ω^2. В дальнейшем слагаемыми, пропорциональными ω, мы будем пренебрегать в предположении малости фазовой скорости мод по сравнению с u_s. Формулы (10), (11) и (12) имеют в

знаменателе подынтегрального выражения полюс. Интегрирование в этих выражениях производится по правилу Ландау. В результате интегрирования получаем следующие соотношения:

$$\sigma_0(x)=\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{3}{4x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\mp \mp\frac{3\pi i}{4x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\Theta\left(|x|-1\right); \quad (13)$$

$$\sigma_1(x)=\frac{3}{2}\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{4x^3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\mp \mp\frac{3\pi i}{4x^3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\Theta\left(|x|-1\right); \quad (14)$$

$$\sigma_2(x)=\mp\frac{1}{x}\pm\frac{3}{2}\frac{1}{x^3}\pm\frac{3}{4x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+ +\frac{3\pi i}{4x^4}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\Theta\left(|x|-1\right), \quad (15)$$

где Θ – функция Хевисайда.

Формула, аналогичная выражению (13), получена в работах [2, 3].

Если фазовая скорость мод много меньше скорости ударной волны, то основной вклад в дисперсионное соотношение будут вносить слагаемые из выражения (7), пропорциональные волновому вектору. Аналогичное утверждение относится к выражению (8), поскольку фазовая скорость много меньше скорости света. Таким образом, мы пренебрегаем в выражениях (7), (8) слагаемыми, пропорциональными частоте. Необходимо также пренебречь частотой во втором слагаемом выражения (3). Мы получаем, преобразуя (3) с использованием (7), (8), следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega^2=v_a^2\left[k^2\pm\frac{4\pi e n_{cr} k u_s}{cB_0}\left\{1-A_0\left(x_0,x_m\right)\right\}\mp \mp\frac{4\pi e n_{cr} k\delta}{B_0}A_2\left(x_0,x_m\right)\right]. \quad (16)$$

В работах [2, 3] делались вычисления в предположении, что $x_m \gg 1$ (то есть максимальный гирорадиус ускоренных частиц много больше длины волны возмущения, что математически эквивалентно приравниванию бесконечности верхнего предела интегрирования по импульсу).

Второе слагаемое правой части соотношения (16) соответствует неустойчивости Белла [1] при $x_0 > 1$ (рис. 1, *а*). Данная неустойчивость есть пороговая, и область усиления мод данным механизмом определяется следующим соотношением:

$$k_0 > k > \frac{1}{r_{g0}},$$

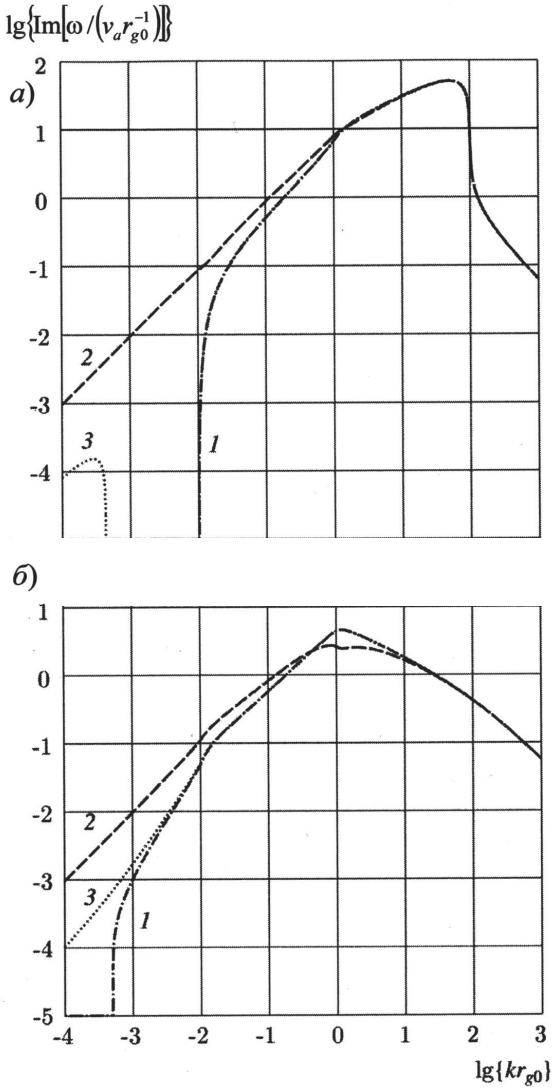


Рис. 1. Зависимость показателей роста неустойчивостей от величины kr_{g0} (k – волновой вектор) для правой (*а*) и левой (*б*) циркулярных поляризаций и различный значений χ: 0 (*1*), c/u_s (*2*), 2 (*3*). Использовано выражение (17) с параметрами $k_0 r_{g0}=100$, $u_s/c=0{,}01$, $p_m/p_0=100$, $\alpha=4$

где $k_0 = \frac{4\pi}{c}\frac{en_{cr}u_s}{B_0}$, $r_{g0} = \frac{cp_0}{eB_0}$.

При $x_0 < 1$ второе слагаемое правой части выражения (16) соответствует резонансной неустойчивости, а третье слагаемое – шланговой неустойчивости.

Параметр анизотропии давления ускоренных частиц можно оценить в условиях предфронта ударной волны в остатке сверхновой как

$$\delta = \chi\frac{u_s^2}{c^2},$$

где χ – параметр, равный нескольким единицам; его точное значение зависит от модельного интеграла столкновений ускоренных частиц с магнитными неоднородностями.

Перепишем дисперсионное соотношение (16) в более компактной форме:

$$\omega^2 = v_a^2\left[k^2 \mp kk_0\left\{A_0(x_0,x_m)-1+ \right.\right. \\ \left.\left. +\chi\frac{u_s}{c}A_2(x_0,x_m)\right\}\right]. \qquad (17)$$

Скорости роста неустойчивости

На рис. 1 приведены кривые для различных параметров анизотропии давления, построенных на основе выражения (17) при характерном значении показателя спектра ускоренных частиц $\alpha = 4$ и параметрах $k_0 r_{g0} = 100$; $u_s/c = 0{,}01$; $p_m/p_0 = 100$. Вблизи фронта ударной волны остатка сверхновых звезд значение p_m/p_0 может быть на несколько порядков больше ста, но при удалении от фронта в сторону невозмущенной межзвездной среды минимальный импульс ускоренных частиц растет и отношение постепенно стремится к единице. Для наглядности графиков на рис. 1 мы берем p_m/p_0 равным 100.

При показателе спектра $\alpha = 4$ интеграл в выражении (9) для $A_0(x_0)$ берется аналитически (см. [1]), а для $A_2(x_0)$ аналитически берется интеграл только от мнимой части (15). Нас в основном интересует предел длинных волн ($x_0 < 1$), где может быть важен вклад анизотропии давления. В данной области длин волн вещественная часть $A_0(x_0)$ стремится к единице, то есть в выражение (17) дает вклад только мнимая часть $A_0(x_0)$ при $x_0 \ll 1$, поскольку

$$\mathrm{Re}\left(A_0(x_0)\right) - 1 = O\left(x_0^2\right),$$

а

$$\mathrm{Im}\left(A_0(x_0)\right) = O(x_0)$$

(использовано значение $\alpha = 4$).

Приведем формулы для мнимых частей выражения (9) при $x_0 < 1$ и $x_m >> 1$, $\alpha = 4$ (формулы аналогичны полученным в работе [2]):

$$\mathrm{Im}\left(A_0(x_0)\right) \approx \mp\frac{3i\pi}{16}x_0; \qquad (18)$$

$$\mathrm{Im}\left(A_2(x_0)\right) \approx \frac{i\pi}{10}x_0. \qquad (19)$$

Приведем более точное, чем (18), выражение для $\mathrm{Im}\left(A_0(x_0,x_m)\right)$, которое отвечает за резонансную неустойчивость. В области параметров $x_0 \le 1$, $x_m \ge 1$

$$\mathrm{Im}\left(A_0(x_0,x_m)\right) = \\ = \mp\frac{\alpha-3}{\left(1-\left(\frac{p_0}{p_m}\right)^{\alpha-3}\right)}\frac{3i\pi}{4}x_0^{\alpha-3}\left(\left(\frac{1}{\alpha-2}-\frac{1}{\alpha}\right)+ \right. \\ \left. +\left(-\frac{1}{(\alpha-2)x_m^{\alpha-2}}+\frac{1}{\alpha x_m^{\alpha}}\right)\right); \qquad (20)$$

при $x_m < 1$ $\mathrm{Im}\left(A_0(x_0,x_m)\right) = 0$ и резонансная неустойчивость исчезает в этой области (нет резонансных частиц в спектре для данного значения k).

Основной вклад в дисперсионное соотношение при $x_0 < 1$, $x_m \ge 1$ и параметрах, характерных для предфронта ударной волны, а именно $k_0 r_{g0} = 100$, $u_s/c = 0{,}01$, $p_m/p_0 = 100$, дает величина $\mathrm{Im}\left(A_0(x_0)\right)$ (резонансный вклад, выраженный формулой (20)). Указанная величина значительно превышает вклад от анизотропии давления при $\chi \approx 5$. Резонансный вклад (18) пропорционален величине k, поэтому в данной области по волновому числу показатель роста $\mathrm{Im}(\omega)$ пропорционален k, когда резонасный вклад является основным. Вклад анизотропии давления $\mathrm{Re}\left(A_2(x_0)\right)$ превышает резонансный при $\chi u_s/c \approx 1$ (см. рис. 1, *а*, *б*, кривые *2*).

Шланговая неустойчивость определяется величиной $\mathrm{Re}\left(A_2\left(x_0\right)\right)$, которая прямо связана с вещественной частью (15). Поскольку последняя содержит знаки плюс-минус и перед $A_2\left(x_0\right)$ в соотношении (17) стоят те же знаки, то модуль вещественной части $\left|\mathrm{Re}\left(A_2\left(x_0\right)\right)\right|$, входит с одинаковым знаком для обеих циркулярных поляризаций в дисперсионное соотношение (17), как и $\left|\mathrm{Im}\left(A_0\left(x_0\right)\right)\right|$, в отличие от $\left|\mathrm{Re}\left(A_0\left(x_0\right)\right)-1\right|$. Это приводит к тому, что белловский вклад усиливает только одну циркулярную поляризацию, а резонансный и шланговый – обе.

Приведем полезные асимптотики вещественных частей выражений (13), (14) и (15).

При $x = 1$ они имеют вид

$$\mathrm{Re}\left(\sigma_0\right) \to 1+\frac{1}{5}x^2+\frac{3}{35}x^4+O\left(x^6\right); \quad (21)$$

$$\mathrm{Re}\left(\sigma_1\right) \to \frac{1}{5}+\frac{3}{35}x^2+\frac{1}{21}x^4+O\left(x^6\right); \quad (22)$$

$$\mathrm{Re}\left(\sigma_2\right) \to \pm\frac{1}{5}x\pm\frac{3}{35}x^3\pm\frac{1}{21}x^5+O\left(x^7\right). \quad (23)$$

При $x >> 1$ асимптотики выражаются как

$$\mathrm{Re}\left(\sigma_0\right) \to \frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{5x^6}+O\left(\frac{1}{x^8}\right), \quad (24)$$

$$\mathrm{Re}\left(\sigma_1\right) \to -\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^6}+O\left(\frac{1}{x^8}\right), \quad (25)$$

$$\mathrm{Re}\left(\sigma_2\right) \to \mp\frac{1}{x}\pm\frac{3}{x^3}\mp\frac{1}{x^5}+O\left(\frac{1}{x^7}\right). \quad (26)$$

Получим асимптотику дисперсионного соотношения (17) в области параметров $x_m = 1$ при показателе спектра $\alpha = 4$. Для вычисления интегралов (9) возьмем два первых слагаемых ряда асимптотики (21) и одно слагаемое (23) (мнимые части σ_0 и σ_2 равны нулю в этой области параметров) и, подставляя их в выражение (9), получим следующие формулы:

$$A_0\left(x_0, x_m\right) = 1+\frac{1}{5}x_0 x_m; \quad (27)$$

$$A_2\left(x_0, x_m\right) = \pm\frac{x_0}{5\left(1-\dfrac{p_0}{p_m}\right)}\ln\frac{p_m}{p_0}. \quad (28)$$

Подставляя полученные формулы (27) и (28) в (17), получим следующее выражение:

$$\omega^2 = v_a^2 k^2\left[1\mp k_0 r_{g0}\frac{1}{5}\left\{x_m \pm \chi\frac{u_s}{c}\frac{\ln\dfrac{p_m}{p_0}}{\left(1-\dfrac{p_0}{p_m}\right)}\right\}\right]. \quad (29)$$

Из этого равенства видно, что в области параметров $x_m < 1$ и до «завала» при $\chi = 0$ одна из циркулярных поляризаций усиливается и показатель роста пропорционален $k^{3/2}$ (см. рис. 1, *б*, кривая *1*). При этом циркулярная поляризация этих мод противоположна поляризации мод белловской неустойчивости (см. рис. 1, *а*, кривая *1*, $x_0 > 1$), другая поляризация не усиливается (см. там же). При ненулевом вкладе анизотропии давления ($\chi \neq 0$) начинают усиливаться обе циркулярные поляризации (см. рис. 1, *а*, кривые *2*, *3*).

Итак, шланговая неустойчивость может играть важную роль при росте возмущений, имеющих больший масштаб, чем максимальный гирорадиус ускоренных частиц. Возмущения данного масштаба вносят существенный вклад в рассеяние частиц с наибольшей энергией. Существенное влияние оказывает анизотропия давления ускоренных частиц на показатели роста неустойчивости в области параметров, превышающих минимальный гирорадиус ускоренных частиц; в случае, если параметр анизотропии давления близок к параметру токовой анизотропии или превышает его. При параметре анизотропии давления в c/u_s раз меньшем, чем параметр токовой анизотропии, существенное влияние анизотропия давления ускоренных частиц оказывает на показатели роста неустойчивости в области параметров выше максимального гирорадиуса ускоренных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Blandford, R.** Particle acceleration at astrophysical shocks: A theory of cosmic ray origin [Text] / R. Blandford, D. Eichler // Physics Reports. – 1987. – Vol. 154. – P. 1–75.

2. **Bell**, **A.R.** Turbulent amplification of magnetic field and diffusive shock acceleration of cosmic rays [Text] / A.R. Bell // Monthly Notices Royal Astronomical Society. – 2004. – Vol. 353. – P. 550–558.

3. **Bykov, A.M.** Cosmic ray current driven turbulence in shocks with efficient particle acceleration: The oblique, long-wavelength mode instability [Text] / A.M. Bykov, S.M. Osipov, D.C. Ellison // Monthly Notices Royal Astronomical Society. – 2011. – Vol. 410. – P. 39–52.

4. **Shapiro, V.D.** Non-resonant firehose instability: Consequences for the theory of cosmic ray acceleration [Text] / V.D. Shapiro, K.B. Quest, M. Okolicsanyi // Geophysical Research Letters. – 1998. – Vol. 25. – P. 845–848.

5. **Noerdlinger, P.D.** Persistence of the firehouse instability in highly relativistic plasmas [Text] / P.D. Noerdlinger, A. Ko-Min Yui // Astrophysical Journal. – 1968. – Vol. 151. – P. 901–905.

6. **Amato, E.** A kinetic approach to cosmic-ray-induced streaming instability at supernova shocks [Text] / E. Amato, P. Blasi // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2009. – Vol. 392. – P. 1591–1600.

УДК 524.3-17, 524.354

Ю.А. Уваров, А.М. Быков, Г.Г. Павлов, К.П. Левенфиш, Ю.А. Кропотина

ПУЛЬСАРНАЯ ТУМАННОСТЬ ВЕЛА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНИЗОТРОПИИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УСКОРЕННЫХ ЧАСТИЦ

Современные наблюдения пульсаров в оптическом, радио- и рентгеновском диапазонах показали, что многие молодые пульсары окружены компактными туманностями, излучение которых обладает нетепловыми спектрами. Эти спектры хорошо аппроксимируются степенными функциями энергии излучаемых фотонов [1]. Особенно выделяются пульсары Вела (рис. 1) и Краб, поскольку благодаря их яркости удалось не только измерить спектры излучения их пульсарных туманностей, но и построить детальные изображения их ближайших окрестностей в оптическом, радио- и рентгеновском диапазонах [2–4]. Оказалось, что ближайшие к пульсару окрестности этих пульсарных туманностей обладают сложным внутренним строением, включающим джеты и торообразные структуры. Указания на существование подобных структур имеются и в данных наблюдений других пульсарных туманностей (G54,1 + 0,3; G106,65 + 2,96; 3C58 и др. [1, 5]), но в настоящее время только для пульсарных туманностей

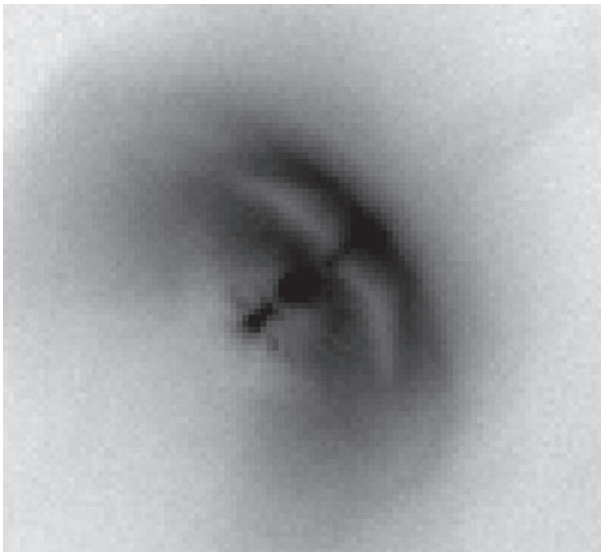


Рис. 1. Рентгеновская карта пульсарной туманности Вела, построенная по данным наблюдений обсерватории Чандра

Отчетливо видна двойная торообразная структура, которая образована арками – наиболее яркими частями двух кольцевых образований, наклоненных к наблюдателю и смещенных относительно друг друга

Вела и Краб существуют рентгеновские карты высокого разрешения, позволяющие детально изучать эти структуры.

Теоретическое описание процессов образования пульсарных туманностей является интересной и не полностью решенной задачей. Общепризнано, что нетепловое излучение является синхротронным излучением ускоренных электронов и позитронов. Однако механизмы образования джетов, формирования торообразных структур и ускорения частиц еще до конца не изучены. Существующие в настоящее время модели пока не позволяют полностью описать всю совокупность наблюдаемых данных.

В предлагаемой работе рассматривается геометрическая модель торообразной структуры пульсарной туманности Вела, на основании которой определяется анизотропия функции распределения лептонов в окрестности этой структуры. Отметим, что результат работы основан на минимальных модельных предположениях и фактически прямо следует из анализа данных наблюдений.

Во втором разделе дается краткое описание существующих в настоящее время моделей торообразной структуры и описывается предлагаемая нами модель. В третьем разделе описывается процесс обработки данных рентгеновских наблюдений туманности Вела. В четвертом разделе описываются и обсуждаются полученные результаты. В заключение приводятся наиболее важные результаты.

Модели пульсарных туманностей

Существующие модели. На рентгеновских изображениях высокого разрешения пульсарной туманности Вела отчетливо видны джеты, двойная торообразная структура (или арки) и диффузный фон (см. рис. 1). Похожие структуры наблюдаются и у пульсарной туманности Краб.

Механизм формирования джетов еще не выяснен до конца, но считается, что они образуются при истечении потока частиц из магнитосферы пульсара вдоль его оси вращения под действием вращающегося магнитного поля пульсара.

Торообразная структура может быть образована ударной волной (УВ), формирующейся на границе раздела радиального экваториального пульсарного ветра и внутренней части пульсарной туманности [3]. Двойственность арок в торообразной структуре в пульсарной туманности Вела при таком подходе возникает в результате смены знака и перехода через нуль тороидальной компоненты магнитного поля на экваторе. Поскольку наблюдаемая нами интенсивность синхротронного излучения непосредственно связана с интенсивностью магнитного поля, то прилегающая к экваториальной плоскости область оказывается не видна. В результате наблюдается двойная торообразная структура, наиболее яркими частями которой являются арки.

В модели Гельфанда с соавторами [3] (далее называется моделью Гельфанда) предполагается цилиндрическая форма фронта ударной волны и используется эффект Доплера для объяснения вариации интенсивности наблюдаемого излучения арок по азимутальному углу (задающему положение на арке и описывающему поворот вокруг оси симметрии). Эти предположения представляются спорными. В случае туманности Вела арки слишком сильно смещены от экваториальной плоскости, чтобы считать форму фронта УВ цилиндрической. Этот вывод подтверждается изображениями туманности. Для строго цилиндрической геометрии зависимость интенсивности излучения обоих торов от азимутального угла должна была бы быть одинаковой. Однако наряду с близкими к нам частями торов – яркими арками, мы наблюдаем дальнюю, менее яркую, часть дальнего тора и при этом не наблюдаем дальнюю часть ближнего тора (рис. 1, 2). Эффект Доплера безусловно имеет место, но он достаточно слаб, поскольку большей частью излучает область за фронтом, где скорость потока хотя и велика, но существенно меньше скорости света. Кроме того, он монотонно зависит от угла между направлением движения потока плазмы и лучом зрения и не может полностью объяснить наблюдаемую угловую зависимость интенсивности излучения (см. рис. 1, дальний тор).

В модели Радхакришнана с соавторами [6] (далее называется моделью Радхакришнана) образование двойных арок объясняется как результат взаимодействия потоков энергичных частиц, вылетающих с магнитных полюсов пульсара, с окружающей пульсар туманностью.

Таким образом, угол наклона магнитного полюса пульсара к оси вращения оказывается напрямую связан простым геометрическим соотношением с размером и положением арок и пульсара. В рамках своей модели [6] авторы пришли к выводу о том, что арки существенно отличаются друг от друга в размерах. Этот вывод, на наш взгляд, не согласуется с изображениями туманности Вела. Однако следующий из геометрических соображений угол наклона магнитной оси к оси вращения, равный 71°, хорошо согласуется с данными поляризации радиоизлучения [6].

В следующем подразделе мы построим более полную феноменологическую модель торообразной структуры пульсарной туманности Вела и с ее помощью на основе анализа зависимости интенсивности излучения арок от азимутального угла восстановим анизотропию функции распределения лептонов.

Предлагаемая модель. На рис. 2 показана геометрия предлагаемой модели торообразной структуры пульсарной туманности Вела. Пульсарный ветер радиально распространяется от магнитосферы пульсара двумя коническими потоками, ограниченными образующими конусов с углами наклона к оси вращения пульсара α_1, α_2 в одном полушарии и β_1, β_2 в другом. На некотором расстоянии от пульсара формируется ударная волна, которая разделяет область пульсарного ветра и внутреннюю часть пульсарной туманности. Такая конфигурация ветра будет наблюдаться и в модели Гельфанда, учитывающей радиальное распространение ветра, и в модели Радхакришнана. В первом случае ветер, распространяющийся вдоль экваториальной плоскости, не будет иметь наблюдательных проявлений из-за слабого магнитного поля. Во втором случае, как будет показано ниже, конические потоки ветра будут сформированы истекающими с магнитных полюсов частицами задолго до УВ.

Ось вращения пульсара является осью симметрии системы, совпадающей с направлением джетов вблизи пульсара. При этом система не обладает строгой симметрией относительно отражения в экваториальной плоскости. Для удобства введем углы

$$\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2;\ \Delta\alpha = (\alpha_2 - \alpha_1)/2;$$

$$\beta = (\beta_1 + \beta_2)/2;\ \Delta\beta = (\beta_2 - \beta_1)/2;$$

ψ – угол между проекцией оси вращения пульсара на изображение туманности и координатной осью *Oy* на плоскости изображения; χ – угол наклона оси симметрии системы к направлению на наблюдателя; φ – азимутальный угол, описывающий поворот вокруг оси симметрии системы (углы χ и φ на рис. 2 не показаны).

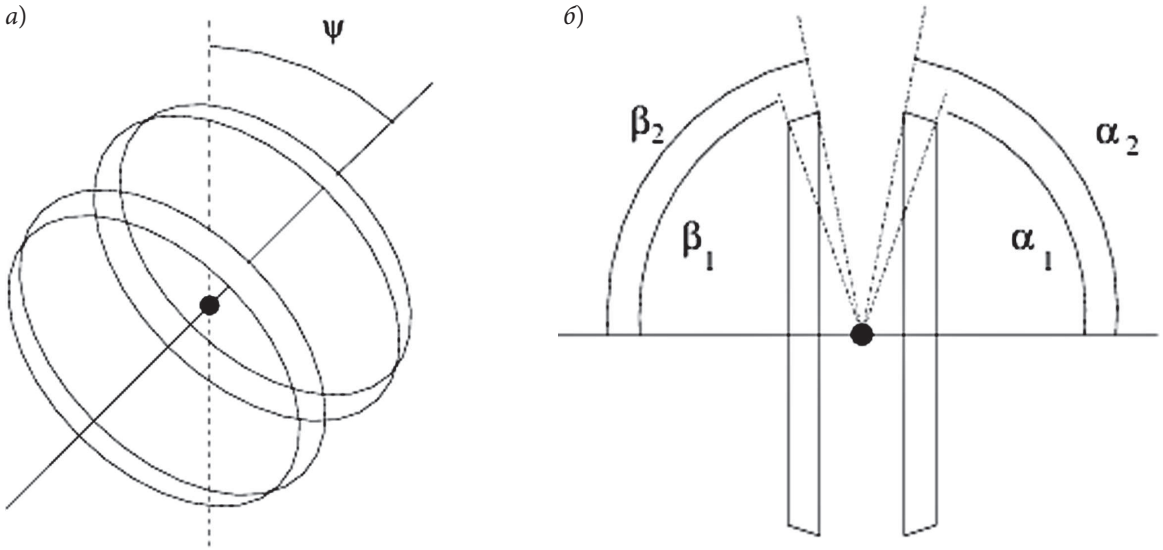


Рис. 2. Геометрическая модель торообразной структуры, образованной ударными волнами: *а* – проекция на небесную плоскость; *б* – сечение плоскостью, проходящей через ось симметрии; пульсар обозначен жирной точкой

Излучение от тороидальной структуры формируется за счет синхротронного излучения ускоренных частиц (электронов и позитронов) в магнитном поле оттекающего потока плазмы, усиленном в узком слое за ударной волной. Толщина области усиленного магнитного поля определяется механизмами его генерации и затухания (их изучение представляет собой отдельную задачу). Эти механизмы рассматривались в работе [7]. Интенсивность синхротронного излучения зависит от угла между магнитным полем и направлением на наблюдателя в области излучения. В данной работе мы рассматриваем случай изотропно ориентированного магнитного поля и предполагаем, что оптическая толщина системы достаточна для того, чтобы интеграл интенсивности излучения по лучу зрения мог быть выражен через значение интенсивности, усредненное по направлениям магнитного поля.

Ударная волна, ограничивающая зону пульсарного ветра, является релятивистской, поэтому функция распределения ускоренных частиц в окрестности ее фронта существенно анизотропна. Однако достаточно разумно допустить, что функция распределения в окрестности фронта обладает локальной осевой симметрией относительно направления нормали к фронту УВ. Это направление в предлагаемой модели совпадает с направлением радиус-вектора от пульсара до области излучения. Синхротронное излучение генерируется ультрарелятивистскими частицами, его диаграмма направленности сильно вытянута по направлению движения частиц. Таким образом, излучение из каждой точки торообразной структуры генерируется частицами, летящими по направлению к наблюдателю. Это направление образует угол θ с нормалью к фронту ударной волны. В рамках этих предположений можно восстановить угловую зависимость анизотропии функции распределения путем измерения интенсивности излучения различных областей тороидальной структуры, отличающихся направлением нормали (и значением угла θ).

Для полного определения угловой зависимости функции распределения необходимо учесть два дополнительных фактора: зависимость оптической толщи излучающей области от угла θ и эффект Доплера. Угловая зависимость оптической толщи в модели тонкого излучающего слоя описывается выражением

$$d \sim 1/\cos\theta,$$

за исключением узкого интервала углов около значения $\theta = 90°$, где предположение о тонком слое нарушается. Эффект Доплера подробно рассматривается в приложении.

Вышеизложенная модель может рассматриваться одновременно и как модифицированная модель Гельфанда [3], учитывающая радиальное распространение ветра и анизотропию функции распределения ускоренных частиц, и как модель Радхакришнана [6], учитывающая анизотропию функции распределения и недипольность магнитного поля пульсара. Отклонение магнитного поля пульсара от дипольного может быть учтено в рамках модели, поскольку в ней не предполагается строгой симметрии относительно отражения в экваториальной плоскости.

Надо отметить, что в случае истечения ветра из областей магнитных полюсов за счет различных скоростей отдельных частиц, начиная с расстояния

$$x \approx \tau c^2/\Delta v,$$

от пульсара будет сформирован конический гидродинамический поток. Здесь τ – период пульсара, равный 89 мс для Велы,

$$\Delta v \approx c - v(\gamma_w) \approx 0{,}5c/\gamma_w{}^2$$

– разброс скоростей в ветре, используемый для оценок.

Считается, что гамма-фактор гидродинамического потока пульсарного ветра составляет величину порядка 10^2–10^5. Принимая значение $\gamma_w \lesssim 10^5$, мы получим для Велы оценку величины расстояния $x \approx 2\tau c\gamma_w{}^2 \lesssim 5\cdot 10^{16}$ см. В то же время, если предположить, что расстояние до пульсара Вела равно 300 пс, то расстояние r от пульсара до ударной волны можно оценить как 10^{17} см. Тем самым в модифицированной модели Радхакришнана однородный конический гидродинамический поток успевает сформироваться задолго до достижения пульсарным ветром ударной волны.

Формула для наблюдаемой интенсивности синхротронного излучения (в единицах фотон·см$^{-2}$·с$^{-1}$·ср$^{-1}$·Гц$^{-1}$) от тороидальной структуры в предположении о степенном спек-

тре электронов $f(E,\theta) = p(\theta)/E^k$ выводится в приложении на основе работы [8] и имеет вид:

$$J(\nu) = \frac{e^3}{m_e c^2 h}\left(\frac{3e}{4\pi m_e^3 c^5}\right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{a(k)}{\nu^{\frac{k+1}{2}}}\left\langle H'^{\frac{k+1}{2}}\right\rangle d_0 \times \quad (1)$$

$$\times\left[\frac{1}{\cos\theta}\right]\cdot\left[p(\theta)\right]\cdot\left[\gamma^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\beta\cos\theta\right)^{\frac{k-1}{2}}\right].$$

Здесь d_0 – толщина излучающего слоя по радиусу; γ, β – гамма-фактор и скорость (в единицах c) потока плазмы в области излучения; H' – величина магнитного поля в системе покоя плазмы; $\left\langle H'^{\frac{k+1}{2}}\right\rangle$ – среднее значение приведенной в угловых скобках величины по отрезку луча зрения, пересекающему область излучения; $a(k)$ – введенная в работе [8] функция, вид которой приводится в приложении.

Первая квадратная скобка содержит множитель, переводящий толщину слоя в оптическую толщу излучающей области вдоль луча зрения и учитывает наклон луча зрения к излучающему слою; вторая учитывает анизотропию функции распределения; третья учитывает усиление, связанное с эффектом Доплера. Надо отметить, что эффекты Доплера и анизотропии оказываются связанными друг с другом. Поскольку в данном выражении используется вид функции распределения в системе покоя фронта УВ, то учитывающий эффект Доплера множитель несколько отличается от выражения, описывающего тот же эффект, но в случае, когда исходная функция распределения задается в системе покоя среды.

Метод расчета анизотропии функции распределения

С помощью пакетов ciao, heasoft и ds9 мы обработали данные наблюдений пульсарной туманности Вела, полученные обсерваторией Чандра за 2009 – 2010 гг., с суммарной экспозицией 430 килосекунд, и построили карту туманности в диапазоне энергий фотонов 0,5 – 10 кэВ с угловым разрешением 1″.

Воспользовавшись формулой (1) и положив $p(\theta) = 1$, мы построили модельную карту интенсивности излучения пульсарной туманности Вела в пренебрежении анизотропией функции распределения. Мы предполагаем скорость оттекающего потока после прохождения УВ равной $c/3$ [7]. Поскольку эта скорость существенно меньше c, то эффект Доплера дает малый вклад в вариацию интенсивности излучения. Следовательно, возможная ошибка в значении этой скорости не влияет существенно на результат.

На рис. 3 приведены построенные в одинаковом разрешении наблюдаемое рентгеновское

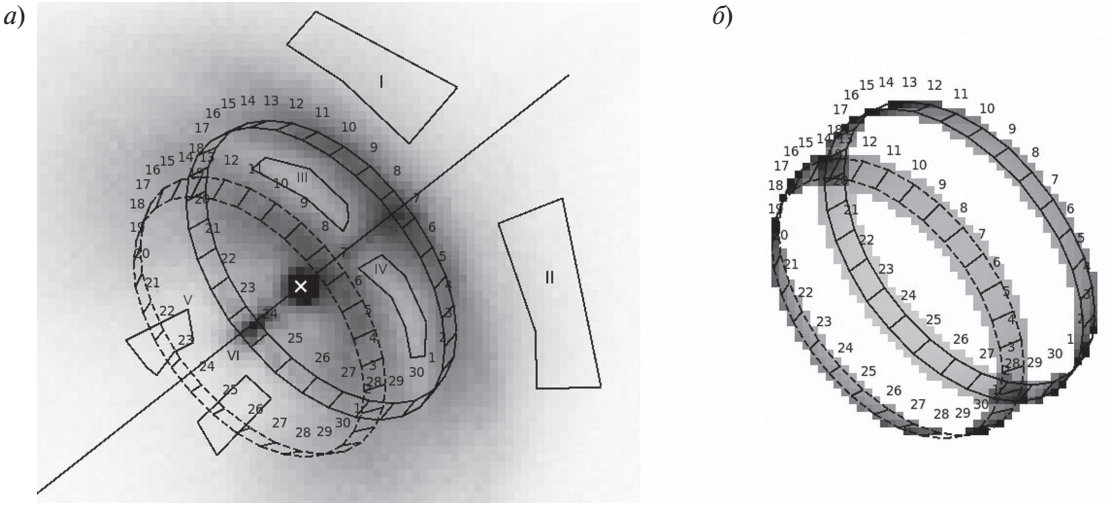


Рис. 3. Сравнение наблюдаемого рентгеновского изображения (*а*) с модельной картой интенсивности излучения (*б*) пульсарной туманности Вела, построенных с одинаковым угловым разрешением.

Арабскими цифрами пронумерованы области, использовавшиеся для анализа интенсивности излучения тороидальной структуры, римскими – области оценки интенсивности излучения диффузного фона; сплошные линии относятся к дальнему тору, пунктирные – к ближнему. Показаны ось симметрии системы (проекция) и позиция пульсара (белый крест)

изображение пульсарной туманности Вела вместе с ее модельным изображением. Сравнивая полученную модельную карту с картой наблюдений, мы восстановили как геометрические параметры модели, так и анизотропию функции распределения $p(\theta)$ в наблюдаемом диапазоне углов.

Требование совпадения структуры изображений позволяет определить геометрические параметры модели. Угол наклона оси джета к лучу зрения $\chi = 55°$, угол наклона проекции оси джета к оси Oy $\psi = 38°$, угол раствора ближнего конуса $\alpha = 66°$ и его толщина $\Delta\alpha = 8°$, угол раствора дальнего конуса $\beta = 78°$ и его толщина $\Delta\beta = 8°$. Расстояние r от пульсара до фронтов УВ для обоих конусов одинаково и составляет 22 пикселя (в пикселях изображения, приведенного на рис. 3). Один пиксель соответствует одной угловой секунде, или (в предположении о расстоянии до пульсара Вела, равном 300 пс) расстоянию $4{,}5 \cdot 10^{15}$ см.

Для определения $p(\theta)$ мы разбили торообразные структуры на 30 областей одинаковой ширины по полярному и азимутальному углам. Для реального и модельного изображений туманности Вела производилась фильтрация карт по каждой из областей. Затем находилось полное число отсчетов, зарегистрированное от каждой из областей, и площади проекций областей в пикселях. Далее, для реального и модельного изображений для каждой из областей рассчитывалась средняя интенсивность излучения в отсчетах на пиксель. Из средней наблюдаемой интенсивности вычитался средний уровень фона и вычислялось отношение этой разности к средней модельной интенсивности. Полученное отношение пропорционально $p(\theta)$ с точностью до постоянного множителя. Угол θ определялся для каждой из областей как угол наклона луча зрения к нормали к поверхности области в ее центре. Ошибки в определении угла θ оценивались как максимально возможные отклонения в выбранной области этого угла от центрального значения.

Несколько областей (с номерами 1, 15 для дальнего тора и 17, 28, 29 для ближнего) сильно наклонены к лучу зрения и после фильтрации не содержат ненулевых пикселей. Области 8, 23 для обоих торов проецируются на направление джета и дают сильно завышенное значение интенсивности за счет вклада джета в излучение. Все эти области исключались из анализа.

Области 2, 3, 13, 14 ближнего тора и 18, 19, 27, 28 дальнего тора частично перекрываются друг с другом. При внимательном анализе карты пульсарной туманности заметно, что вклад дальнего тора в излучение в области перекрытия существенно меньше вклада ближнего. Ввиду этого области 18, 19, 27, 28 дальнего тора также исключались из анализа, а вклад из области перекрытия был целиком отнесен к излучению ближнего тора.

Для оценки среднего фона было выбрано 6 областей, показанных на рис. 3. Значения интенсивности фона изменяются в широких пределах от 230 отсчетов на пиксель для областей V, VI до 900 для областей III, IV. Характерная статистическая ошибка при этом составляет примерно 30 отсчетов на пиксель. Систематическая ошибка, связанная с неоднородностью фона по пульсарной туманности, оказывается существенно больше и может быть оценена в 200 – 300 отсчетов на пиксель. При этом максимальная интенсивность излучения от торообразной структуры составляет порядка 2000 отсчетов на пиксель. В качестве основной была выбрана модель с фоном 400 отсчетов на пиксель.

Обсуждение результатов

Результаты проведенного анализа приведены на рис. 4. Некоторым значениям угла θ соответствуют две различных области. Значения функции распределения для этих областей могут заметно отличаться, что говорит о неполной осевой симметрии системы. Эта асимметрия может быть следствием зависимости флуктуаций магнитного поля или функции распределения частиц от азимутального угла. Разница значений величин угловой части функции распределения, вычисленная для таких парных областей, позволяет оценить ошибку ее определения, которая оказывается меньше или равной 20 и 30 % соответственно для направлений наружу (от пульсара) и внутрь (к пульсару) пульсарной туманности. Приведенные на рис. 4 ошибки определения угла θ оцениваются как максимально возможные отклонения значений этого угла для рассматриваемых областей от его центрального значения.

Функция распределения имеет существенно неизотропный вид. Она вытянута вдоль направления нормали к фронту и сильно падает в направлении плоскости фронта. При этом она более вытянута в направлении от пульсара. Это видно по поведению кривой, соответствующей дальнему тору, поскольку для угла $\theta \approx 45°$ значение функции распределения превышает указанное значение для угла $\theta \approx 135°$ примерно в два раза.

Ближняя торообразная структура позволяет исследовать угловую зависимость анизотропии функции распределения вплоть до углов $\theta = 120°$. Однако неравномерное фоновое излучение пульсарной туманности описывается моделью постоянного фона неидеально. Для ближнего тора в диапазоне углов $90° < \theta < 120°$ модельный фон превышает реальный и оценочные значения функции распределения оказываются ниже нулевого уровня. Точки, соответствующие указанному диапазону, не показаны на рис. 4.

Дополнительный вклад в излучение областей 16, 17, 29, 30 дальнего тора, не учтенный в использовавшейся модели фона, вносит диффузное излучение окрестности ближнего тора. В итоге оценка функции распределения для этих областей получается завышенной, и соответствующие этим областям точки (см. рис. 4) являются верхними пределами.

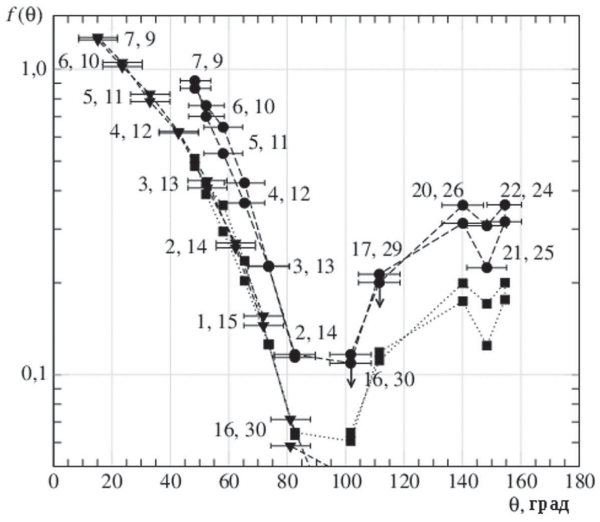


Рис. 4. Угловые зависимости функции распределения в системе покоя пульсарной туманности, построенные по данным анализа излучения ближнего (треугольные точки) и дальнего (круглые точки) торов. Квадратными точками показан деленный на фактор 2 график функции распределения, построенный по данным анализа излучения дальнего тора. Цифры обозначают номера областей, использовавшихся для анализа (см. рис. 3)

Для сравнения угловой зависимости анизотропии функции распределения в окрестностях дальнего и ближнего торов на рис. 4 квадратными точками дополнительно показана кривая, соответствующая кривой для дальнего тора, но деленной на фактор 2. Видно хорошее согласие вида угловой зависимости анизотропии, определенной для обоих торов в перекрывающемся диапазоне углов $50° < \theta < 90°$.

Отличие интенсивностей излучения дальнего и ближнего торов в 2 раза может быть следствием несимметричности истечения ветра относительно экваториальной плоскости. Ранее отмечалось, что сравнение геометрической модели с реальной картой приводит к значению угла раствора дальнего конуса 78°, что на 12° градусов больше соответствующей величины для ближнего конуса, равной 66°. Таким образом, наблюдается тенденция нелинейного роста интенсивности излучения при увеличении угла раствора конуса. Изучение физических механизмов возникновения подобной асимметрии требует дополнительного исследования, выходящего за рамки данной работы.

Надо отметить, что асимметрия относительно экваториальной плоскости естественным образом объясняется в модели Радхакришнана недипольностью магнитного поля. В то же время интерпретация этой асимметрии в модели Гельфанда связана с некоторыми трудностями, поскольку формирование ветра в этой модели происходит на световом цилиндре, на котором недипольные компоненты магнитного поля должны быть много меньше дипольной компоненты.

Таким образом, на основе анализа данных наблюдений обсерватории Чандра и простой геометрической модели был предложен метод определения анизотропии функции распределения электронов в окрестности пульсарной туманности Вела. Мы достаточно надежно восстановили вид угловой зависимости анизотропии функции распределения в системе покоя пульсарной туманности в диапазонах углов $10° < \theta < 90°$ и $130° < \theta < 160°$.

Функция распределения оказывается существенно анизотропной, вытянутой вдоль

нормали к фронту ударной волны. Причем более сильно она вытянута по направлению от пульсара, чем по направлению к пульсару. В направлениях, лежащих вблизи плоскости фронта УВ, функция распределения сильно ослаблена (см. рис. 4).

Пульсарная туманность является не строго симметричной относительно экваториальной плоскости. Наблюдаемая тенденция нелинейного увеличения интенсивности излучения торообразной структуры при увеличении угла раствора конуса, образующего указанную структуру, заслуживает отдельного исследования.

Работа была частично поддержана грантом ведущих научных школ РФ (4035.2012.2), грантом РФФИ (11–02–12082–офи–м–2011) и Министерством образования и науки РФ (контракт 11.G34.31.0001).

Приложение

Эффект Доплера

Для расчета синхротронного излучения мы используем формулы из работы [8], которые применимы в системе покоя плазмы, поскольку в этой системе, в предположении квазинейтральности плазмы, отсутствуют электрические поля. В данной работе мы исследуем функцию распределения частиц в системе покоя фронта ударной волны. Чтобы корректно рассчитать синхротронное излучение, основываясь на этой функции распределения, необходимо сначала перейти в систему покоя среды, а затем, после расчета излучения, следует сделать обратный переход в систему покоя фронта, совпадающую в нашей модели с системой покоя наблюдателя.

Для описания этого перехода необходимы формулы, связывающие функции распределения частиц и фотонов в обеих системах. Хорошо известно, что функции распределения частиц Лоренц-инвариантны, так же как и элементы фазового объема. Из элементов объемов в обыкновенном и импульсном пространствах также можно составить инварианты. Итак, для любых двух систем отсчета:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{r},\mathbf{p}) = f'(\mathbf{r}',\mathbf{p}') = \text{inv}; \\ EdV = E'dV' = \text{inv}; \\ \frac{dp_x dp_y dp_z}{E} = \frac{dp'_x\, dp'_y\, dp'_z}{E'} = \text{inv}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\frac{p^2 dp d\Omega_p}{E} = \frac{p'^2\, dp'\, d\Omega_{p'}}{E'} = \text{inv}.$$

Объемная мощность излучения ε, выраженная в единицах фотон в секунду в элементе объема в диапазоне частот $d\nu$ в элемент телесного угла, связана с функцией распределения фотонов n_{ph} формулой

$$\varepsilon(\nu,\theta) = c\cdot n_{ph}(\nu,\theta).$$

Здесь и далее используется предположение об аксиальной симметрии функции распределения. В нашей модели осью симметрии является нормаль к фронту УВ.

В свою очередь,

$$\begin{aligned} dN_{ph} &= n_{ph}(\nu,\theta)\, d\nu d\Omega_k dV = \\ &= \left(\frac{c}{2\pi}\frac{n_{ph}(\nu,\theta)}{k^2}\right) k^2 dk d\Omega_k dV. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь использовалась связь $2\varpi\nu = ck$. Выделенное в круглых скобках выражение является инвариантной функцией распределения, поэтому

$$\frac{n_{ph}(\nu,\theta)}{k^2} = \frac{n'_{ph}(\nu',\theta')}{k'^2}, \quad \text{или}$$

$$n_{ph}(\nu,\theta) = \frac{\nu^2}{\nu'^2} n'_{ph}(\nu',\theta').$$

Отсюда следует:

$$\varepsilon(\nu,\theta) = \frac{\nu^2}{\nu'^2}\varepsilon'(\nu',\theta'). \tag{4}$$

Аналогично, если функция распределения электронов нормирована как

$$dN = f(E,\theta)\, dV dE d\Omega_p,$$

то

$$\begin{aligned} f(E,\theta) &= \frac{p^2}{p'^2}\frac{\dfrac{dE}{dp}}{\dfrac{dE'}{dp'}} f'(E',\theta') = \\ &= \frac{p^3}{p'^3}\frac{E'}{E} f'(E',\theta'). \end{aligned} \tag{5}$$

В случае ультрарелятивистских частиц формулу можно упростить:

$$f(E,\theta)=\frac{E^2}{E'^2}f'(E',\theta'). \qquad (6)$$

Перейдем непосредственно к описанию нашей системы. Будем обозначать переменные, относящиеся к системе покоя среды, штрихом. Обозначения переменных, относящихся к системе покоя фронта, будут использоваться без штриха.

Наблюдаемый поток излучения в единицах фотон·см$^{-2}$·с$^{-1}$·ср$^{-1}$·Гц$^{-1}$ может быть рассчитан по формуле

$$J(\nu)=\int\varepsilon(\nu,\theta)dl\,.$$

При этом функция распределения излучаемых фотонов в системе покоя среды, согласно работе [8], может быть выражена формулой

$$\varepsilon'(\nu',\theta')= \\ =\int I'(\nu',E',\mathbf{k}',\mathbf{H}')f'(E',\theta')dE'. \qquad (7)$$

Направление волнового вектора $\mathbf{k}$ практически совпадает с направлением движения $\mathbf{n}\approx\mathbf{k}/k$ излучающей ультрарелятивистской частицы; выражение $I(\nu,E,\mathbf{k},\mathbf{H})$ имеет вид

$$I(\nu,E,\mathbf{k},\mathbf{H})=\frac{\sqrt{3}e^3H_\perp}{m_ec^2}\frac{1}{h\nu_c}\int\limits_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(\eta)d\eta; \\ \nu_c=\frac{3eH_\perp}{4\pi m_ec}\left(\frac{E}{m_ec^2}\right)^2. \qquad (8)$$

В итоге получаем выражение для наблюдаемого потока излучения:

$$J(\nu)=\int\frac{\nu^2}{\nu'^2}\varepsilon'(\nu',\theta')dl= \\ =\int dl\frac{\nu^2}{\nu'^2}\int I'(\nu',E',\mathbf{k}',\mathbf{H}')f'(E',\theta')dE'= \\ \int dl\frac{\nu^2}{\nu'^2}\int I'(\nu',E',\mathbf{k}',\mathbf{H}')\times \\ \times\frac{E'^2}{E^2(E',\theta')}f(E(E',\theta'),\theta(E',\theta'))dE'. \qquad (9)$$

Мы рассматриваем аксиально симметричное распределение частиц, имеющее степенной энергетический спектр, поэтому функция распределения представима в виде $f(E,\theta)=p(\theta)/E^k$. Энергии ультрарелятивистских частиц и частоты фотонов преобразуются следующим образом:

$$E=\frac{E'}{\gamma(1-\beta\cos\theta')}; \\ \nu=\frac{\nu'}{\gamma(1-\beta\cos\theta')}.$$

Углы θ для ультрарелятивистских частиц преобразуются по формуле:

$$\cos\theta=\frac{\cos\theta'-\beta}{1-\beta\cos\theta'}.$$

Видно, что представление функции распределения в виде произведения степенной функции энергии и функции угла θ сохраняется при преобразовании Лоренца вдоль ее оси симметрии.

В результате мы можем упростить формулу (9):

$$J(\nu)=\int dl\frac{\nu^2}{\nu'^2}\int I'(\nu',E',\mathbf{k}',\mathbf{H}')\times \\ \times\frac{E'^2}{E^2(E')}f(E(E',\theta'),\theta(\theta'))dE'= \\ =\int dl\frac{\nu^2}{\nu'^2}\int I'(\nu',E',\mathbf{k}',\mathbf{H}')\times \\ \times\frac{E'^2}{E^{2+k}(E',\theta')}p(\theta)dE'= \\ =\int\gamma^k(1-\beta\cos\theta)^k\,p(\theta)dl\int I'(\nu',E',\mathbf{k}',\mathbf{H}')\frac{dE'}{E'^k}. \qquad (10)$$

Интеграл по энергии берется в работе [8]. После дополнительного усреднения по направлению магнитного поля вдоль луча зрения получаем выражение:

$$J(\nu)=\int\gamma^k(1-\beta\cos\theta)^k\,p(\theta)a(k)\frac{e^3}{m_ec^2h}\times \\ \times\left(\frac{3e}{4\pi m_e^3c^5}\right)^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{H'}{\nu'(\nu)}\right)^{\frac{k+1}{2}}dl= \\ =\frac{e^3}{m_ec^2h}\left(\frac{3e}{4\pi m_e^3c^5}\right)^{\frac{k-1}{2}}\times \qquad (11)$$

$$\times\frac{a(k)\gamma^{\frac{k-1}{2}}}{\nu^{\frac{k+1}{2}}}\int\left(1-\beta\cos\theta\right)^{\frac{k-1}{2}}p(\theta)H'^{\frac{k+1}{2}}dl,$$

где

$$a(k)=2^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{3k-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3k+19}{12}\right)\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{k+5}{4}\right)/\left[8\sqrt{\pi}(k+1)\Gamma\left(\frac{k+7}{4}\right)\right].$$

При наших предположениях о тонкой излучающей области функции, зависящие от угла θ, можно считать слабо меняющимися, и интеграл сводится к выражению (1):

$$J(\nu)=\frac{e^3}{m_ec^2h}\left(\frac{3e}{4\pi m_e^3c^5}\right)^{\frac{k-1}{2}}\frac{a(k)}{\nu^{\frac{k+1}{2}}}\left\langle H'^{\frac{k+1}{2}}\right\rangle d_0\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\cos\theta}\right]\cdot\left[p(\theta)\right]\cdot\left[\gamma^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\beta\cos\theta\right)^{\frac{k-1}{2}}\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kargaltsev, O.** Pulsar wind nebulae in the Chandra era [Text] / O. Kargaltsev, G.G. Pavlov // 40 years of pulsars: Millisecond pulsars, magnetars and more. AIP Conference Proceedings. – 2008. – № 983 – P. 171 – 185.

2. **Pavlov, G.G.** Observations of the Vela pulsar and its compact nebula with the Chandra high resolution camera [Text] / G.G. Pavlov, D. Sanwal, G.P. Garmire [et al.] // American Astronomical Society Meeting Abstracts №196. Bulletin of the American Astronomical Society. – 2000. – № 32 – P. 733.

3. **Helfand, D.J.** Vela pulsar and its synchrotron nebula [Text] / D.J. Helfand, E.V. Gotthelf, J.P. Halpern // Astrophysical Journal. – 2001. – № 556. – P. 380 – 391.

4. **Hester, J.J.** The Crab nebula: An astrophysical chimera. [Text] / J.J. Hester // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. – 2008. – № 46. – P. 127 – 155.

5. **Gaensler, B.M.** The evolution and structure of pulsar wind nebulae [Text] / B.M. Gaensler, P.O. Slane // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. – 2006. – № 44 – P. 17 – 47.

6. **Radhakrishnan, V.** Vela, its X-ray nebula, and the polarization of pulsar radiation [Text] / V. Radhakrishnan, A.A. Deshpande // Astronomy and Astrophysics. – 2001. – № 379. – P. 551 – 556.

7. **Kennel, C.F.** Confinement of the Crab pulsar's wind by its supernova remnant [Text] / C.F. Kennel, F.V. Coroniti // Astrophysical Journal. – 1984. – № 283. – P. 694 – 709.

8. **Ginzburg V.L.** Cosmic magnetobremsstrahlung (synchrotron radiation) [Text] / V.L. Ginzburg, S.I. Syrovatskii // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. – 1965. – № 3. – P. 297 – 350.

УДК 378.1:53

Н.М.Кожевников

ЮБИЛЕЙНОЕ ЗАСЕДАНИЕ ПРЕЗИДИУМА НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОГО СОВЕТА ПО ФИЗИКЕ МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

15 июня 2012 г. в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете состоялось заседание Президиума НМС по физике Минобрнауки РФ, посвященное 10-летию работы совета в нынешнем составе [1]. Вел заседание председатель НМС по физике, академик РАН Ж.И. Алфёров. В заседании приняли участие около 25 человек из Москвы, Санкт-Петербурга, Новгорода, Таганрога, представляющих крупнейшие вузы страны.

В обсуждении отчета о работе НМС по физике за 2002 – 2012 гг. приняли участие руководители секций совета член-корреспондент РАН Д.Р. Хохлов (МГУ им. М.В. Ломоносова, сек-

Заседание Президиума ведет председатель НМС по физике, академик Ж.И. Алфёров. На фото (слева направо): проректор СПбГПУ В.В. Глухов; Президент СПбГПУ, академик Ю.С. Васильев; академик Ж.И. Алфёров; зам. председателя НМС, зав. кафедрой экспериментальной физики СПбГПУ В.К. Иванов

Идет заседание Президиума НМС по физике. На фото (за столом, слева направо): В.Н. Козлов (советник ректора СПбГПУ, зам. председателя УМО по университетскому политехническому образованию), П.И. Романов (директор НМУ УМО СПбГПУ), А.В. Речинский (проректор по учебной работе СПбГПУ), Ж.И. Алфёров, В.К. Иванов (выступает), В.М. Петров (декан радиофизического факультета СПбГПУ), Н.М. Кожевников (ученый секретарь НМС по физике), В.В. Гаврушко (Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого), А.Н. Морозов (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Н.П. Калашников (МИФИ), Д.Р. Хохлов (МГУ), Ю.А.Гороховатский (РГПУ им. А.И.Герцена), Н.С. Пурышева (МПГУ), В.Л. Петров (зам. председателя Координационного совета УМО и НМС, проректор МГГУ)

ция «Физическое образование в классических университетах»), профессор Ю.А. Гороховатский (РГПУ им. А.И. Герцена, секция «Физическое образование в педагогических вузах»), профессор Г.Г. Спирин (МАИ, секция «Физическое образование в технических вузах»), профессор В.В. Гаврушко (Новгородский гос. университет им. Я. Мудрого, секция «Физическое образование в медицинских и сельскохозяйственных вузах», профессор А.Н. Морозов (МГТУ им. Н.Э. Баумана, комиссия по учебному физическому эксперименту), профессор Н.С.Пурышева (МПГУ).

Все выступавшие с тревогой отмечали, что проблем с преподаванием физики в средней и высшей школе гораздо больше, чем успехов. Отсутствие физики как обязательной дисциплины ЕГЭ привело к резкому уменьшению числа школьников, выбравших этот экзамен, а значит уменьшилось и число абитуриентов на технические направления в вузах. Школьники боятся сдавать ЕГЭ по физике, так как этот экзамен рассчитан на профильный уровень изучения предмета, а таких школ в стране не более 10 – 15 %.

Очень сложная ситуация с преподаванием физики в вузах, особенно там, где физика не является профильной дисциплиной (медицинские, сельскохозяйственные, педагогические, да и ряд технических вузов). Повсеместно происходит переход на одно- и двухсеместровые курсы физики, а это означает, что изучение физики сводится к поверхностному знакомству с основными терминами и понятиями.

На заседании Президиума НМС по физике было решено подготовить обращение к новому министру образования и науки, в котором отразить единодушное мнение научно-педагогической общественности о необходимости

С отчетом о работе секции НМС по физике «Физическое образование в классических университетах» выступает член-корреспондент РАН Дмитрий Ремович Хохлов. На фото (слева направо): Н.П. Калашников (НИЯУ МИФИ), Д.Р. Хохлов (МГУ им. М.В. Ломоносова), О.Н. Голубева (РУДН), Ю.А. Гороховатский (РГПУ им. А.И. Герцена)

Участники заседания слушают доклад В.В. Гаврушко. На фото (за столом, слева направо): Н.М. Кожевников, В.В. Гаврушко, ..., Ж.И. Алферов, В.К. Иванов, С.Н. Колгатин, С.К. Стафеев, А.Э. Фотиади, В.М. Петров

принятия неотложных мер по спасению физики на всех уровнях образовательной системы.

С большим интересом участники заседания выслушали доклад проректора Московского государственного горного университета (МГГУ), профессора В.Л. Петрова «О работе Координационного совета УМО и НМС высшей школы». С работой этого совета члены Президиума НМС по физике связывают определенные надежды на активизацию и повышение эффективности государственно-общественных организаций, к которым относится наш совет.

На заседании Президиума НМС по физике был рассмотрен вопрос и о принципах формирования структуры и содержания аттестационных педагогических измерительных материалов (АПИМ) для аккредитации образовательных учреждений в соответствии с требованиями федеральных государственных общеобразовательных стандартов высшего профессионального образования (ФГОС ВПО). С соответствующим сообщением выступил зам. председателя УМО по университетскому политехническому образованию, профессор В.Н. Козлов (СПбГПУ). Актуальность этого вопроса связана с отсутствием в настоящее время нормативных документов, определяющих содержание и структуру программ изучения физики, а значит и тестовых материалов, с помощью которых оцениваются компетентностные характеристики результатов обучения по разным дисциплинам основной образовательной программы (ООП).

В постановлении по этому вопросу Президиум НМС по физике рекомендовал Координационному совету УМО и НМС ВШ внести в Минобрнауки положения «о примерной основной образовательной программе», «о научно-методических советах по дисциплинам» и другие документы, необходимые для реализации федерального закона «Об образовании» и повышения эффективности работы УМО и НМС. Было предложено поддержать принципы формирования АПИМ, выдвинутые XXII Всероссийской научно-методической конференцией «Проблемы качества образования», в которых разработка тестов опирается на примерные типовые программы соответствующих учебных дисциплин, разработанные НМС в соответствии с ФГОС ВПО. Для конкретной работы в этом направлении, в частности для экспертизы АПИМ, разработанных Росаккредагентством, Президиум сформировал рабочую группу в составе профессоров Н.П. Калашникова (НИЯУ МИФИ), А.Н. Морозова (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Н.С. Пурышевой (МПГУ), Н.М. Кожевникова (СПбГПУ).

Учитывая, что в настоящее время в программах подготовки гуманитариев, экономистов фактически отсутствует естественнонаучный компонент, Президиум НМС по физике образовал в своей структуре новую комиссию «Физика в программах гуманитарных и социально-экономических направлений подготовки». Председателем этой комиссии назначена профессор Российского университета дружбы народов (РУДН) О.Н. Голубева .

Президиум НМС по физике решил также ряд кадровых вопросов. Прекращены полномочия членов Президиума Е.В. Гусляковой, А.В. Барабанова и В.Г. Кадышевского. Новыми членами Президиума стали О.Н. Голубева (РУДН), Н.С. Пурышева (МПГУ), Н.П. Калашников (МИФИ) и С.К. Стафеев (СПбУИТМО).

После завершения заседания его участники отмечали острый характер дискуссии и конструктивность принятых постановлений. Следующее заседание Президиума НМС по физике решено провести осенью 2013 года.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кожевников Н.М.** Деятельность Научно-методического совета по физике в условиях перехода к «уровневой системе» высшего образования» [Текст] / Н.М. Кожевников // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Наука и образование. – 2012. – № 1(142). – С. 277 – 282.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

АПУШКИНСКИЙ Евгений Геннадиевич – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского государственного университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-75-74
apushkinsky@hotmail.com

АРСЕНЬЕВ Дмитрий Германович – *доктор технических наук, профессор кафедры физики и математического моделирования в механике Института международных образовательных программ Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195220, г. Санкт-Петербург, Гражданский пр., 28
(812) 324-03-39
imop@imop.spbstu.ru

БАЙКО Денис Алексеевич – *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник межфакультетской научной лаборатории астрофизики объектов с экстремальным энерговыделением Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, старший научный сотрудник сектора теоретической астрофизики Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
194021, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26
(812) 292-71-80
baiko@astro.ioffe.ru

БАСАЛКЕВИЧ Татьяна Михайловна – *студентка радиофизического факультета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-71
busta.88@mail.ru

БЕЛЕНЬКИЙ Григорий (BELENKY Gregory) – *доктор физико-математических наук, почетный профессор (distinguished professor) факультета электротехники и компьютерных технологий Университета штата Нью-Йорк в Стоуни Брук, США.*
(Department of Electrical and Computer Engineering, State University of New York at Stony Brook, New York 11794-2350, USA)

БЕЛЯЕВ Александр Константинович – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и процессов управления Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 321-47-78
13augen@mail.ru

БЕРДНИКОВ Александр Ярославич – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-75-31
berdnikov@spbstu.ru

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-75-31
berdnikov@spbstu.ru

БЫКОВ Андрей Михайлович – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры космических исследований Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, заведующий лабораторией астрофизики высоких энергий Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 292-71-60
byk@astro.ioffe.ru

ВАСИЛЬЕВ Александр Николаевич – *кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-67-50
a.n.vasilyev@gmail.com

ВАСИЛЬЕВ Геннадий Иванович – *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник межфакультетской научной лаборатории астрофизики объектов с экстремальным энерговыделением Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, старший научный сотрудник лаборатории астрофизики высоких энергий Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 292-71-60
Gennady.Vasilyev@mail.ioffe.ru

ВИННИЧЕНКО Максим Яковлевич – *аспирант кафедры физики полупроводников и наноэлектроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-71
mvin@spbstu.ru

ВИШНЕВСКИЙ Вячеслав Эдуардович – *доктор физико-математический наук, профессор кафедры теории управления Санкт-Петербургского государственного университета.*
198504, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
(812) 428-41-67
ddemidova@mail.ru

ВОРОБЬЕВ Леонид Евгеньевич – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики полупроводников и наноэлектроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812)552-96-71
lvor@rphf.spbstu.ru

ГЛАДИЛИН Петр Евгеньевич – *младший научный сотрудник межфакультетской научной лаборатории астрофизики объектов с экстремальным энерговыделением Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, аспирант лаборатории астрофизики высоких энергий Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 292-71-80
peter.gladilin@gmail.com

ГЛАДЧЕНКО Светлана Викторовна – *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института высокомолекулярных соединений РАН.*

ГОНЧАР Игорь Валерьевич – *аспирант кафедры общей и технической физики Национального минерально-сырьевого университета «Горный».*
199106, г. Санкт-Петербург, В.О., 21-я линия, 2
(812) 321-14-84
unityry@gmail.com

ДЕКТЯРЕВ Дмитрий Николаевич – *аспирант Пермского национального исследовательского политехнического университета.*
614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
(342) 235-51-97
dmitridekt@mail.ru

ЖГУТОВ Владимир Михайлович – *кандидат технических наук, докторант кафедры технологии, организации и экономики строительства Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 535-79-92
abc_kitezht@mail.ru

ЗОЛОТОВ Сергей Александрович – *студент радиофизического факультета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 555-76-47
vaepriv@yandex.ru

ИВАНИЩЕВ Дмитрий Александрович – *кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-75-31
berdnikov@spbstu.ru

ИВАНОВ Алексей Евгеньевич – *аспирант кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-75-31
alexey.ivanov86@gmail.com

ИВАНОВ Алексей Сергеевич – *кандидат технических наук, доцент кафедры общей и технической физики Национального минерально-сырьевого университета «Горный».*
199106, г. Санкт-Петербург, В.О., 21-я линия, 2
(812) 321-14-84
physics@nwpi.ru

ИВАНОВА Наталья Евгеньевна – *доктор медицинских наук, профессор, заместитель директора ФГУП «Российский научно-исследовательский нейрохирургический институт им. профессора А.Л. Поленова Росмедтехнологий».*
191014, г. Санкт-Петербург, ул. Маяковского, 12
(812) 764-92-85
ivamel@mail.ru

ИВАНОВА Ольга Александровна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления Санкт-Петербургского государственного университета.*
198504, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
(812) 428-41-67
ddemidova@mail.ru

КАПРАЛОВА Виктория Маратовна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры интегральной электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-76-21
kapralova2006@yandex.ru

КАРАБЕШКИН Константин Валерьевич – *аспирант кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29
(812) 552-75-16
yanikolaus@yandex.ru

КАРАСЁВ Платон Александрович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-75-16
Platon.Karaseov@rphf.spbstu.ru

КАФИДОВА Галина Александровна – *аспирантка кафедры квантовой электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 550-04-30
gkafidova@gmail.com

КВАШЕНКИНА Ольга Евгеньевна – *аспирантка кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-75-16
kvol.spbspu@gmail.com

КИЗЕВЕТТЕР Дмитрий Владимирович – *доктор физико-математических наук, доцент кафедры электрической изоляции, кабелей и конденсаторов Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-87-26
dmitrykiesewetter@gmail.com

КИМ Виктор Тимофеевич – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-75-31
victor.t.kim@gmail.com

КЛИМЧИЦКАЯ Галина Леонидовна – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и технической физики Национального минерально-сырьевого университета «Горный».*
199106, г. Санкт-Петербург, В.О., 21-я линия, 2
(812) 321-14-84
g_klimchitskaya@mail.ru

КОВАЛЕВСКИЙ Дмитрий Валерьевич – *кандидат физико-математических наук, руководитель группы Международного центра по окружающей среде и дистанционному зондированию им. Нансена, старший научный сотрудник лаборатории теории ядра и элементарных частиц отдела теоретической физики физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.*
199034, г. Санкт-Петербург, В.О., 14-я линия, 7
(812) 324-51-03
dmitry.kovalevsky@niersc.spb.ru

КОЖЕВНИКОВ Николай Михайлович – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-77-90
nkozhevn@mail.ru

КОРОЛЕВА Екатерина Юрьевна – *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН, старший научный сотрудник НОЦ «Физика нанокомпозитных материалов электронной техники» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 292-79-21
e.yu.koroleva@mail.ioffe.ru

КОТОВ Дмитрий Олегович – *кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) *552-75-31*
dm_kotov@phmf.spbstu.ru

КРАСИЛЬЩИКОВ Александр Михайлович – *кандидат физико-математических наук, заместитель заведующего межфакультетской научной лаборатории астрофизики объектов с экстремальным энерговыделением Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, старший научный сотрудник лаборатории астрофизики высоких энергий Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 292-71-60
kra@astro.ioffe.ru

КРОПОТИНА Юлия Андреевна – *заведующая лабораторией кафедры космических исследований Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, стажер-исследователь лаборатории астрофизики высоких энергий Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 292-71-60
juliett.k@gmail.com

ЛАМКИН Иван Анатольевич – *аспирант кафедры микро- и наноэлектроники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина).*
197376, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5
(812) 234-31-64
IALamkin@mail.ru

ЛЕВЕНФИШ Ксения Петровна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры космических исследований Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, старший научный сотрудник сектора теоретической астрофизики Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 292-73-26
ksen@astro.ioffe.ru

ЛИСИН Сергей Кузьмич – *кандидат технических наук, действительный член Санкт-Петербургской инженерной академии, доцент кафедры метрологии Национального минерально-сырьевого университета «Горный».*
199034, г. Санкт-Петербург, Бугский пер., 4-а
(812) 323-79-64
Alex3238024@yandex.ru

ЛУКАШОВА Ольга Федоровна – *студентка радиофизического факультета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 550-04-30
olga.lukashoa.best@gmail.com

МАШКО Марина Олеговна – *студентка радиофизического факультета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-71
mashkomaro@yandex.ru

МЕНЬКОВИЧ Екатерина Андреевна – *студентка факультета электроники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина).*
197376, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5
(812) 234-31-64
ankat.kate@gmail.com

МОКРОВА Дарья Всеволодовна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 550-04-30
dashkeria@gmail.com

НАЗАРОВА Елена Александровна – *студентка радиофизического факультета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-76-21
elenanzrv@rambler.ru

НГУЕН Ван Тханг — *аспирант кафедры физики и математического моделирования в механике Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195220, г. Санкт-Петербург, Гражданский пр., 28
(812) 324-03-39
thangspbstu@mail.ru

ОСИПОВ Сергей Михайлович – *кандидат физико-математических наук, научный сотрудник межфакультетской научной лаборатории астрофизики объектов с экстремальным энерговыделением Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, научный сотрудник лаборатории астрофизики высоких энергий Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 292-71-80
osm2004@mail.ru

ПАВЛОВ Георгий Георгиевич – *кандидат физико-математических наук, заведующий межфакультетской научной лаборатории астрофизики объектов с экстремальным энерговыделением Санкт-Петербургского государственного университета, профессор Пенсильванского государственного университета, США.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
+1 (814) 865-94-82
pavlov@astro.psu.edu

ПАВЛОВ Федор Федорович – *ассистент кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
8 (812) 552-75-74
pavlovfedor@mail.ru

ПЕРВАДЧУК Владимир Павлович – *доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Пермского национального исследовательского политехнического университета.*
614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
(342) 219-83-33
pervadchuk@mail.ru

ПЕРЕВОЗНИК Дмитрий Сергеевич – *студент радиофизического факультета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 550-04-30
piralta17@gmail.com

ПРИВАЛОВ Вадим Евгеньевич – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 555-76-47
vaevpriv@yandex.ru

ПУСТОВАЛОВА Ольга Андреевна – *аспирантка кафедры теории управления Санкт-Петербургского государственного университета.*
198504, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
(812) 428-41-67
ddemidova@mail.ru

РАДЧУК Наталия Борисовна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики полупроводников и наноэлектроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-71
radchukn@gmail.com

РОЖКОВА Наталия Николаевна – *кандидат технических наук, заведующая лабораторией физико-химических исследований наноуглеродных материалов Института геологии Карельского научного центра РАН.*
185910, г. Петрозаводск, Пушкинская ул., 11
(8142) 78-27-53
geolog@krc.karelia.ru

РЯБОВ Виктор Германович – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) *552-75-31*
berdnikov@spbstu.ru

РЯБОВ Юрий Германович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) *552-75-31*
berdnikov@spbstu.ru

САВИНА Алла Юрьевна – *аспирантка кафедры электрической изоляции, кабелей и конденсаторов Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-87-26
savall_07@mail.ru

САМСОНОВ Владимир Михайлович – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) *552-75-31*
berdnikov@spbstu.ru

САНИН Андрей Леонардович – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-26-18
andreylsanin@yandex.ru

СЕМЁНОВ Евгений Александрович – *аспирант кафедры теоретической физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-26-18
seaman2003@tut.by

СИНИЦЫНА Дарья Эдуардовна – *студентка физико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-66-21
sinicina.daria@yandex.ru

СТЕПАНОВА Тамара Павловна – *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института высокомолекулярных соединений РАН.*
199004, г. Санкт-Петербург, Большой пр., 31
(812) 323-74-07
t_stepanova2005@mail.ru

СТРЕКОПЫТОВА Мария Владимировна — *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления Санкт-Петербургского государственного университета.*
198504, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
(812) 428-41-67
ddemidova@mail.ru

СУЕТИН Даниил Петрович — *студент физико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, Санкт Петербург, ул. Политехническая, д.29
(812) 552-75-31
suetindaniil@gmail.com

ТАЛЬНИШНИХ Надежда Андреевна – *студентка факультета электроники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина).*
197376, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5
(812) 234-40-63
Nadya.FEL@mail.ru

ТАРАСОВ Сергей Анатольевич – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры микро- и наноэлектроники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина).*
197376, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5
(812) 234-31-64
SATarasov@mail.ru

ТАРХОВ Дмитрий Альбертович — *доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-67-50
dtarkhov@gmail.com

УВАРОВ Юрий Александрович – *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник межфакультетской научной лаборатории астрофизики объектов с экстремальным энерговыделением Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, старший научный сотрудник лаборатории астрофизики высоких энергий Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 292-71-60
uv@astro.ioffe.ru

УШАКОВ Александр Юрьевич – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики полупроводников и наноэлектроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-71
ushakov@rphf.spbstu.ru

ФЕДОРЦОВ Александр Борисович – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и технической физики Национального минерально-сырьевого университета «Горный».*
199106, г. Санкт-Петербург, В.О., 21-я линия, 2
(812) 321-14-84
vecher@nwpi.ru

ФЕДОТОВ Алексей Иванович – *доктор технических наук, президент Санкт-Петербургской инженерной академии.*
199034, г. Санкт-Петербург, Бугский пер., 4-а
(812) 323-79-64
Alex3238024@yandex.ru

ФИЛИМОНОВ Алексей Владимирович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники и директор НОЦ «Физика нанокомпозитных материалов электронной техники» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-73-33
filimonov@rphf.spbstu.ru

ФИРСОВ Дмитрий Анатольевич – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики полупроводников и наноэлектроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-71
dmfir@rphf.spbstu.ru

ФОТИАДИ Александр Эпаминондович – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-75-16
fotiadi@rphf.spbstu.ru

ХАЙРУЛЛИН Андрей Ранифович – *аспирант Института высокомолекулярных соединений РАН.*
199004, г. Санкт-Петербург, Большой пр., 31
(812) 323-74-07
ahairullin@hotmail.com

ХОЛУПЕНКО Евгений Евгеньевич – *кандидат физико-математических наук, научный сотрудник межфакультетской научной лаборатории астрофизики объектов с экстремальным энерговыделением Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, старший научный сотрудник лаборатории астрофизики высоких энергий Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 292-71-60
eugene@astro.ioffe.ru

ЧУРКИН Юрий Валентинович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и технической физики Национального минерально-сырьевого университета «Горный».*
199106, г. Санкт-Петербург, В.О., 21-я линия, 2
(812) 321-14-84
physics@nwpi.ru

ШАГАНОВ Антон Павлович – *аспирант кафедры физической электроники и инженер НОЦ «Физика нанокомпозитных материалов электронной техники» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-73-33
shaganovanton@gmail.com

ШАДРИН Евгений Борисович – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией физики фазовых переходов Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
194021, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26
(812) 292-71-38
shadr.solid@mail.ioffe.ru

ШМИДТ Наталия Михайловна – *доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН.*
194021, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26
(812) 292-71-93
Natalia.Shmidt@mail.ioffe.ru

ШТЕРЕНГАС Леон (SHTERENGAS Leon) – *PhD, доцент (assistant professor) факультета электротехники и компьютерных технологий университета штата Нью-Йорк в Стоуни Брук, США.*
(Department of Electrical and Computer Engineering, State University of New York at Stony Brook, New York 11794-2350, USA)

ШУМКОВА Дарья Борисовна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Пермского национального исследовательск политехнического университета.*
614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
(342) 219-83-40
shumkova_darya@mail.ru

ЮРОВА Валентина Александровна – *аспирантка кафедры общей и технической физики Национального минерально-сырьевого университета «Горный».*
199106, г. Санкт-Петербург, В.О., 21-я линия, 2
(812) 321-14-84
va-yurova@mail.ru

ЮХНЕВ Андрей Данилович – *научный сотрудник кафедры гидроаэродинамики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-66-21
a.yukhnev@mail.ru

ЯБЛОКОВ Сергей Николаевич – *студент физико-технического факультета и лаборант межфакультетской научной лаборатории астрофизики объектов с экстремальным энерговыделением Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 292-71-60
sergey.yablokov@hotmail.com

АННОТАЦИИ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Апушкинский Е.Г. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ.

Формирование эха происходит в средах, состоящих из множества отдельных осцилляторов, обладающих несильно различающимися частотами и способных взаимодействовать с внешним возбуждающим полем. Каждый такой осциллятор рассматривается как некоторый четырехполюсник, преобразующий входные сигналы. Продемонстрировано, что операция задержки с некоторым преобразованием сигнала будет осуществляться, если каждый четырехполюсник, из которого состоит вещество, обладает нелинейностью, при которой спектр его выходного сигнала связан со спектром входного посредством нелинейного преобразования.

ЭХО-СИГНАЛЫ. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПЕКТРОВ. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ.

Басалкевич Т.М., Тальнишних Н.А., Шмидт Н.М. ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ДЕГРАДАЦИОННОГО ПРОЦЕССА В МОЩНЫХ СИНИХ СВЕТОДИОДАХ InGaN/GaN.

В статье рассмотрены особенности развития деградационного процесса, вольтамперные характеристики, спектры электролюминесценции и внешняя квантовая эффективность. Выяснены причины быстрого развития деградационного процесса в мощных синих светодиодах InGaN/GaN, осложняющие прогнозирование срока службы светодиодов.

БЫСТРАЯ ДЕГРАДАЦИЯ. СВЕТОДИОДЫ InGaN/GaN. ВНЕШНЯЯ КВАНТОВАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ. ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ЭЛЕКТРОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ.

Бердников А.Я., Иванищев Д.А., Котов Д.О., Рябов В.Г., Рябов Ю.Г., Самсонов В.М. ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРИЗНАКОВ ОБРАЗОВАНИЯ КВАРК-ГЛЮОННОЙ ПЛАЗМЫ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ ПРИ ЭНЕРГИИ 62,4 ГэВ.

Представлен результат измерения дилептонного спектра в (Au+Au)-столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 62{,}4$ ГэВ и расчет коктейля диэлектронных пар от известных источников.

КВАРК-ГЛЮОННАЯ ПЛАЗМА. ЛЕПТОНЫ. РОЖДЕНИЕ. ТЕМПЕРАТУРА. АНАЛИЗ.

Бердников Я.А., Иванов А.Е., Ким В.Т., Суетин Д.П. ЯДЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ В АДРОН-ЯДЕРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ.

Рассмотрен процесс жесткого взаимодействия адронов с ядрами при высоких энергиях, приведены результаты моделирования образования лептонных пар в процессе Дрелла – Яна в адрон-ядерных взаимодействиях. Проведено сравнение с экспериментальными данными коллабораций E772 и E886. Получено хорошее согласие разработанной модели HARDPING с экспериментом.

АДРОН-ЯДЕРНЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ. МНОГОКРАТНЫЕ ПЕРЕРАССЕЯНИЯ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ. HARDPING.

Быков А.М., Гладилин П.Е., Осипов С.М., Павлов Г.Г. РОЛЬ ШЛАНГОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В УСКОРЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ.

Проведено сравнение вклада анизотропии давления с вкладом токовой анизотропии функции распределения ускоренных частиц в показатели роста неустойчивостей в условиях предфронта ударных волн остатков сверхновых звезд. Показано, что вклад анизотропии давления может быть важен при масштабах возмущений, близких к гирорадиусам ускоренных частиц максимальной энергии.

МЕЖЗВЕЗДНАЯ СРЕДА. ОСТАТКИ СВЕРХНОВЫХ ЗВЕЗД. УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ НА УДАРНЫХ ВОЛНАХ.

Васильев А.Н., Тархов Д.А. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ КЛАССИЧЕСКИХ И НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

В статье рассмотрены проблемы математического моделирования сложных систем на основе нейросетевой методологии. Параметры систем заданы в некоторых интервалах изменения. В качестве примера приводится нейросетевая модель нестационарного температурного поля в случае как классической, так и неклассической постановки задачи. Приведены результаты вычислений для точных и зашумленных данных.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА. ИНТЕРВАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР. МОДЕЛИРОВАНИЕ. ОБУЧЕНИЕ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ. ФУНКЦИОНАЛ ОШИБКИ. ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ.

Васильев Г.И., Холупенко Е.Е., Яблоков С.Н., Байко Д.А., Быков А.М., Красильщиков А.М., Павлов Г.Г. ВЛИЯНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ФОНА НОЧНОГО НЕБА НА НАЗЕМНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ ГАММА-ВСПЛЕСКОВ В ДИАПАЗОНЕ 1 – 10 ГэВ.

В статье рассмотрено влияние оптического фона ночного неба на возможности детектирования космических гамма-всплесков и измерения их кривых блеска в диапазоне 1 – 10 ГэВ наземными черенковскими гамма-телескопами. Показано, что даже при характеристиках регистрирующей аппаратуры, существенно превышающих значения характеристик современных телескопов, вероятность регистрации черенковских вспышек от космических гамма-квантов с энергиями менее 3 ГэВ существенно уменьшается под влиянием оптического фона ночного неба.

ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЕ. ЧЕРЕНКОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ШИРОКИЕ АТМОСФЕРНЫЕ ЛИВНИ. ГАММА-ВСПЛЕСКИ. ФОН НОЧНОГО НЕБА.

Винниченко М.Я., Фирсов Д.А., Машко М.О., Штеренгас Л. (Shterengas L.), Беленький Г. (Belenky G.), Воробьев Л.Е. РЕКОМБИНАЦИЯ И ЗАХВАТ ЭЛЕКТРОНОВ В ЛАЗЕРНЫХ НАНОСТРУКТУРАХ С КВАНТОВЫМИ ЯМАМИ InGaAsSb/AlGaAsSb.

Исследована динамика фотолюминесценции в пикосекундном и наносекундном временных диапазонах в квантовых ямах InGaAsSb/AlGaAsSb с различными составами барьеров квантовых ям. Определены времена захвата носителей заряда в квантовые ямы, времена энергетической релаксации, время жизни по отношению к резонансной оже-рекомбинации при различных уровнях оптического возбуждения. Обсуждается влияние температуры и дизайна квантовых ям на скорость оже-рекомбинации.

ЛАЗЕРНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. СРЕДНИЙ ИНФРАКРАСНЫЙ ДИАПАЗОН. КВАНТОВЫЕ ЯМЫ. ОЖЕ-РЕКОМБИНАЦИЯ.

Вишневский В.Э., Пустовалова О.А., Иванова О.А., Стрекопытова М.В. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСНОГО РЕЖИМА СТАЦИОНАРНОГО МНОГООБРАЗИЯ.

В статье доказаны теоремы об устойчивости интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений и об устойчивости (асимптотической устойчивости) равновесного режима системы дифференциальных уравнений.

РЕЖИМ. ФУНКЦИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ. НЕРАВЕНСТВО. СЕМЕЙСТВО.

Гончар И.В., Иванов А.С., Федорцов А.В. БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИЙ ИЗМЕРИТЕЛЬ ТОЛЩИНЫ ПЛЕНОК В ДИАПАЗОНЕ ОТ ДЕСЯТИ ДО ТЫСЯЧИ МИКРОН.

Описан быстродействующий лазерно-интерферометрический прибор для исследования толщины пленок, прозрачных в видимом или инфракрасном диапазонах. Пределы измеряемых толщин – от 10 мкм до 1 мм. Частота измерений – 25 раз в секунду, время одного измерения – $3 \cdot 10^{-4}$ с. Это позволяет измерять толщину нестабильных, в том числе жидких, пленок. Благодаря совмещению в одном приборе двух способов определения толщины – по числу пиков угловой зависимости коэффициента отражения лазерного луча и по значению этого коэффициента при заданном угле падения, – удалось снизить ошибку в определении толщины до 150 нм.

ЛАЗЕРНАЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ. ТОНКИЕ ПЛЕНКИ. ТВЕРДЫЕ И ЖИДКИЕ ПЛЕНКИ.

Жгутов В.М. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ.

Разработаны математические модели деформирования оболочек переменной толщины (гладко-переменной толщины и ребристых), находящихся под действием механической нагрузки (статической или динамической) и стационарного температурного поля, учитывающие геометрическую нелинейность, нелинейную упругость (пластичность) и поперечные сдвиги. Предложены уточненные геометрические соотношения для геометрически нелинейных задач и задач устойчивости.

ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ (ГЛАДКО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ И РЕБРИСТЫЕ). ТЕРМОУПРУГОСТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ. НЕЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ (ПЛАСТИЧНОСТЬ). ПОПЕРЕЧНЫЕ СДВИГИ.

Золотов С.А., Привалов В.Е. ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА НА КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ ГАЗОВОГО ЛАЗЕРА.

В статье рассмотрены новые подходы к увеличению коэффициента усиления лазера на смеси He-Ne за счет изменения геометрии активного элемента. Вычислен выигрыш в усилении и оптимальные размеры секций комбинированных активных элементов.

ГАЗОВЫЙ ЛАЗЕР. УСИЛЕНИЕ. АКТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ. МОЩНОСТЬ. ОПТИМИЗАЦИЯ.

Капралова В.М., Назарова Е.А., Иванова Н.Е., Шадрин Е.Б. КОНФОРМАЦИОННЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ АЛЬБУМИНА КАК ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ ПАРАМЕТР.

Получены термоимпедансметрические кривые для растворов человеческого сывороточного альбумина с различными концентрациями и значениями pH. Показано, что наблюдается переход глобула – клубок в отдельных глобулах альбумина, а также что форма термоимпедансметрических кривых отражает изменения конформации альбумина, в том числе в результате действия различных денатурантов. Продемонстрирована возможность изучения кинетики денатурации с помощью термоимпедансметрического метода. Результаты работы позволяют расширить диагностические возможности метода термоимпедансметрии спинномозговой жидкости на конформационные заболевания.

ЧЕЛОВЕЧЕСКИЙ СЫВОРОТОЧНЫЙ АЛЬБУМИН. ДЕНАТУРАЦИЯ. КОНФОРМАЦИОННЫЕ ЗАБОЛЕВАНИЯ. ТЕРМОИМПЕДАНСМЕТРИЯ. ДИАГНОСТИКА.

Карасёв П.А., Карабешкин К.В. ОСОБЕННОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕФЕКТОВ В КРЕМНИИ ПРИ БОМБАРДИРОВКЕ МОЛЕКУЛЯРНЫМИ ИОНАМИ.

В статье рассмотрен молекулярный эффект при бомбардировке кремния ускоренными атомарными и молекулярными ионами различных энергий. Изложены физические механизмы данного эффекта. Описаны результаты экспериментальных исследований и компьютерного моделирования бомбардировки кремния ионами P^+ и PF^+_4.

ИОННАЯ ИМПЛАНТАЦИЯ. КРЕМНИЙ. МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ЭФФЕКТ. КАСКАДЫ СТОЛКНОВЕНИЙ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Квашенкина О.Е. ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В VO_2.

Экспериментально изучены детали нескольких стадий термического фазового перехода металл – полупроводник в пленках диоксида ванадия. Обоснована идея совместного и взаимосвязанного протекания двух составляющих ФП: электронной и структурной. Обсуждается вопрос о типе фазового перехода металл – полупроводник в диоксиде ванадия.

ДИОКСИД ВАНАДИЯ. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД. ПЕРЕХОД МОТТА. ПЕРЕХОД ПАЙЕРЛСА. ТОНКИЕ ПЛЕНКИ. ГИСТЕРЕЗИС. ДИМЕРЫ.

Кизеветтер Д.В., Савина А.Ю. АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРОВ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ РОДАМИНОВЫХ КРАСИТЕЛЕЙ.

Предложено использование различных функций для аппроксимации спектра флуоресценции родамина. Измерены спектры флуоресценции растворов и полимерного волоконного световода, активированного родамином при различных температурах. Определена точность аппроксимации.

ФЛУОРЕСЦЕНЦИЯ. АППРОКСИМАЦИЯ. СПЕКТР. ПОЛИМЕРНОЕ ОПТИЧЕСКОЕ ВОЛОКНО. ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ.

Ковалевский Д.В. ЭФФЕКТЫ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ БАРЬЕРОВ И ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕТКИ В МОДЕЛИ КРОНИГА – ПЕННИ.

При помощи матричного формализма рассчитаны волновые функции состояний непрерывного спектра и энергии поверхностных (таммовских) состояний в модифицированной модели Кронига – Пенни со специальной геометрией потенциала (бесконечно высокий потенциальный барьер в начале координат, ограничивающий область движения электрона положительной полуосью; мощность ближайшего к началу координат δ-образного потенциального барьера/потенциальной ямы отлична от мощности всех прочих барьеров). Особо исследован случай размерного квантования в решетке конечной длины.

ЭЛЕКТРОНЫ. МОДЕЛЬ КРОНИГА – ПЕННИ. ПОВЕРХНОСТНЫЕ СОСТОЯНИЯ. РАЗМЕРНОЕ КВАНТОВАНИЕ.

Кожевников Н.М. ЮБИЛЕЙНОЕ ЗАСЕДАНИЕ ПРЕЗИДИУМА НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОГО СОВЕТА ПО ФИЗИКЕ МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ.

Представлены итоги заседания Президиума НМС по физике Минобрнауки РФ, посвященного десятилетию работы совета в нынешнем составе (2002 – 2012 гг.). После обсуждения отчета о работе совета принят ряд конструктивных постановлений.

ФИЗИКА. ПРОГРАММЫ ПОДГОТОВКИ. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ СОВЕТ. ПРОБЛЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ.

Ламкин И.А., Менькович Е. А., Тарасов С.А. УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ ФОТОДИОДЫ НА ОСНОВЕ КОНТАКТОВ МЕТАЛЛ – ТВЕРДЫЕ РАСТВОРЫ НИТРИДОВ ГАЛЛИЯ И АЛЮМИНИЯ.

В статье рассмотрены проблемы создания качественных омических и выпрямляющих контактов к твердым растворам AlGaN с большой долей Al. Изложены основные проблемы при создании ультрафиолетовых фоточувствительных структур на основе контактов металл – твердые растворы AlGaN.

УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ ФОТОПРИЕМНИКИ. AlGaN. ОМИЧЕСКИЙ КОНТАКТ. БАРЬЕР ШОТТКИ.

Лукашова О.Ф., Мокрова Д.В., Кафидова Г.А., Перевозник Д.С. НЕИНВАЗИВНЫЙ СПЕКЛ-ДАТЧИК СКОРОСТИ КРОВОТОКА В МИКРОЦИРКУЛЯТОРНОМ РУСЛЕ.

Рассматриваются особенности создания неинвазивного спекл-датчика скорости крови в микроциркуляторном русле кожи человека. Оптимизированы функциональные элементы, входящие в структуру датчика, что позволяет изготовить его мобильную версию. Кроме того, в электронное обрамление сенсорной части датчика введен радиоканал Bluetooth, позволяющий передавать информационный сигнал на персональный компьютер для его последующей обработки и хранения. Приводятся результаты экспериментального исследования модели датчика.

СПЕКЛ-ПОЛЕ. МИКРОЦИРКУЛЯЦИЯ. АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ. НЕИНВАЗИВНЫЙ ДАТЧИК.

Нгуен Ван Тханг, Арсеньев Д.Г., Беляев А.К. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ШИПА В ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЯ И ЕГО АВТОКОЛЕБАНИЯ С УЧЕТОМ ГИДРОДИНАМИКИ СМАЗКИ И ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ.

В статье рассмотрены проблемы теоретического представления вопросов устойчивости положения равновесия шипа в подшипнике, заполненном маслом, с учетом центробежных сил и гидродинамики смазки, а также автоколебания около положения равновесия в случае как жесткого, так и гибкого вала. Изложены основные результаты применительно к исследованию короткого подшипника.

ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ СИЛЫ. УСТОЙЧИВОСТЬ. АВТОКОЛЕБАНИЕ. КОРОТКИЙ ПОДШИПНИК. ГИДРОДИНАМИКА СМАЗКИ.

Павлов Ф.Ф. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА ДЕЙТРОНА В ПЕРЕМЕННЫХ СВЕТОВОГО КОНУСА.

Статья посвящена исследованию поведения матричных элементов электромагнитного тока дейтрона в зависимости от переданного импульса. Проведено вычисление матричных элементов электромагнитного тока дейтрона в формализме светового конуса. При этом использован критерий выбора матричных элементов плюсового компонента электромагнитного тока в системе Брейта.

ДЕЙТРОН. СВЕТОВОЙ КОНУС. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА. СИСТЕМА БРЕЙТА.

Павлов Ф.Ф., Бердников Я.А. УГЛОВОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА ДЕЙТРОНА.

Статья посвящена изучению углового условия Грача – Кондратюка. Матричный элемент «плюсового» компонента электромагнитного тока дейтрона определяет 4 независимые функции. Тогда как матричный элемент должен выражаться через три форм-фактора дейтрона: зарядовый, магнитный и квадрупольный. Это означает, что должно существовать дополнительное уравнение. Данное уравнение называется угловым условием. Статья посвящена исследованию поведения данного условия в зависимости от квадрата переданного импульса и показано его нарушение.

ДЕЙТРОН. СВЕТОВОЙ КОНУС. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА. УГЛОВОЕ УСЛОВИЕ.

Первадчук В.П., Шумкова Д.Б., Дектярев Д.Н. ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ И ПОЛУЧЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДВУМЕРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

В статье получены условия разрешимости задачи оптимального управления двумерным нелинейным уравнением параболического типа. Функция оптимального управления определяется при этом явно и зависит от решения полученной системы оптимальности.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. СИСТЕМА ОПТИМАЛЬНОСТИ. КОМПРОМИССНОЕ УПРАВЛЕНИЕ.

Радчук Н.Б, Ушаков А.Ю. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОКОМПОЗИТОВ ПЕРЕХОДНЫХ МЕТАЛЛОВ.

В статье представлены результаты исследования нанокомпозитов переходных металлов на основе арабиногалактана. Рассмотрены спектры поглощения, оптическая активность, синтез нанокомпозитов.

НАНОКОМПОЗИТЫ. АРАБИНОГАЛАКТАН. НИКЕЛЬ. КОБАЛЬТ. ЦИНК. СПЕКТР ПОГЛОЩЕНИЯ. ОПТИЧЕСКАЯ АКТИВНОСТЬ. ПЛАЗМОННЫЙ РЕЗОНАНС.

Санин А.Л., Семёнов Е.А. СВОБОДНЫЕ И СВЯЗАННЫЕ КВАНТОВЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ ДУФФИНГА, ВЛИЯНИЕ ШУМА.

Проведено численное интегрирование нестационарного двумерного уравнения Шредингера. В рамках анализа распространения квантовых волновых пакетов, динамических средних, спектров Фурье, произведений неопределенностей, автокорреляторов изучены динамические закономерности в системе двух связанных квантовых осцилляторов Дуффинга. Показано существование синхронизации в системе двух идентичных осцилляторов и частичная передача спектра сигнала в системе неидентичных осцилляторов. Установлено, что увеличение мощности шума уменьшает амплитуду сложных колебаний и модифицирует спектр частот.

КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ДУФФИНГА. СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ. СИНХРОНИЗАЦИЯ. ШУМ. СПЕКТР.

Уваров Ю.А., Быков А.М., Павлов Г.Г., Левенфиш К.П., Кропотина Ю.А. ПУЛЬСАРНАЯ ТУМАННОСТЬ ВЕЛА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНИЗОТРОПИИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УСКОРЕННЫХ ЧАСТИЦ.

Предложена геометрическая модель торообразной структуры пульсарной туманности Вела. На основе сравнения модельных карт туманности с рентгеновскими картами высокого разрешения, полученными в результате обработки данных наблюдений обсерватории Чандра, предложен метод определения анизотропии функции распределения лептонов (электронов и позитронов) в окрестности пульсарной туманности. Восстановлен вид угловой зависимости функции распределения в системе покоя пульсарной туманности в диапазонах углов наклона направления движения частиц к направлению потока пульсарного ветра θ: $10° < \theta < 90°$ и $130° < \theta < 160°$.

ПУЛЬСАРНЫЕ ТУМАННОСТИ. СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ НА УДАРНЫХ ВОЛНАХ.

Федотов А.И., Лисин С.К. ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ МИНИМИЗАЦИИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА СВОЙСТВ ОБЪЕКТОВ.

Выполнен анализ и синтез параметров и свойств объектов с помощью методов теории минимизации на основе эффективного использования и восстановления экспериментальных данных. Теория наилучшего оценочного преобразования использована для извлечения из опытов научно-технической и иной информации. Построены методики воспроизведения экспериментальных зависимостей с помощью функций отображения результатов, отклонения опытов и др.

НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ. РЕГРЕССИОННЫЙ ФУНКЦИОНАЛ. АППРОКСИМАЦИЯ.

Хайруллин А.Р., Степанова Т.П., Рожкова Н.Н., Гладченко С.В. ДИПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ФУЛЛЕРЕНА C_{60} В БЕНЗОЛЕ, ТОЛУОЛЕ И ОРТОКСИЛОЛЕ.

В работе определены дипольные моменты фуллерена C_{60} в бензоле, толуоле и ортоксилоле в условиях бесконечного разбавления. Установлено, что наименьшая величина дипольного момента фуллерена, равная ~1 Д и соответствующая геометрической структуре минимальных кластеров фуллерена C_{60}, наблюдается в толуоле. Величины дипольного момента в бензоле и ортоксилоле имеют бóльшие значения и составляют 1,82 и 2,27 Д соответственно, что обусловлено наличием в растворах ассоциатов молекул C_{60} с постоянной стехиометрией.

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ. ДИПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ. АССОЦИАЦИЯ. РАСТВОР. ФУЛЛЕРЕН C_{60}. ТОЛУОЛ. ОРТОКСИЛОЛ. БЕНЗОЛ.

Шаганов А.П., Филимонов А.В., Королева Е.Ю., Фотиади А.Э. ФОРМИРОВАНИЕ ПОЛЯРНЫХ НАНООБЛАСТЕЙ И НАНОДОМЕНОВ В ОДНООСНЫХ РЕЛАКСОРАХ SBN-61.

Статья посвящена применению метода рассеяния синхротронного излучения для анализа доменной структуры на образцах $Sr_{0,6}Ba_{0,4}Nb_2O_6$ (SBN). Экспериментально установлено, что на образцах SBN-61 при высокой температуре присутствуют поляризационные центры варьируемого размера, с расстоянием между центрами до единиц микрон. Формирование доменной структуры в SBN-61 сопровождается частичным разупорядочением, обусловленным возрастанием флуктуаций поляризации. Поляризация в объеме данных образцов скоррелирована, а направление преимущественной корреляции может меняться в зависимости от общей упорядоченности.

СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. РЕЛАКСОР. ДОМЕННАЯ СТРУКТУРА. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЦЕНТРЫ. ФЛУКТУАЦИИ ПОЛЯРИЗАЦИИ.

Юрова В.А., Федорцов А.Б., Климчицкая Г.Л., Чуркин Ю.В. ДАВЛЕНИЕ СИЛЫ КАЗИМИРА НА СЛОЙ ДИЭЛЕКТРИКА В НАНОРАЗМЕРНЫХ СЛОИСТЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ АЛЮМИНИЙ – ОКСИД КРЕМНИЯ – КРЕМНИЙ.

Представлен расчет величины давления дисперсионных сил на слой диэлектрика в широко используемой в производстве электронных компонентов твердотельной слоистой структуре алюминий – оксид кремния – кремний. Показано, что в нанометровом диапазоне толщин диэлектрика давление резко возрастает и при толщине в 1

нм достигает значения 8 МПа. При этом результаты расчета не зависят от используемой модели диэлектрической проницаемости образующих структуру веществ.

ДАВЛЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СИЛ. ЭФФЕКТ КАЗИМИРА. СТРУКТУРА МЕТАЛЛ – ДИЭЛЕКТРИК – ПОЛУПРОВОДНИК. ТЕОРИЯ ЛИФШИЦА. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ.

Юхнев А.Д., Синицына Д.Э. РАЗРАБОТКА ТЕХНОЛОГИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ.

Рассматриваются технологии изготовления силиконовых моделей кровеносных сосудов. Описывается методика измерения диаметров моделей и сонной артерии человека при воздействии пульсирующего давления жидкости. Приводятся результаты определения их коэффициентов податливости.

ИМИТАТОР КРОВОТОКА. СИЛИКОНОВАЯ МОДЕЛЬ КРОВЕНОСНОГО СОСУДА. ТОЛЩИНА СТЕНКИ. КОЭФФИЦИЕНТ ПОДАТЛИВОСТИ. УЛЬТРАЗВУКОВОЙ СКАНЕР.

ABSTRACTS

KEY WORDS

Apushkinsky E.G. NONLINEAR SIGNAL SPECTRA TRANSFORMATIONS.

Echo formation occurs in media consisting of many individual oscillators which are able to interact with the external exciting field and have slightly different frequencies. Each this oscillator is considered as a quadripole transforming the input signals. We show that the delay operation with some conversion of the signals will be carried out if each quadripole transforming, has a nonlinearity, in which the spectrum of its output is connected to the spectrum of the input signal through a nonlinear transformation.

ECHO SIGNALS. NONLINEAR TRANSFORMATION OF THE SPECTRA. NONLINEAR OSCILLATORS.

Basalkevich T.M., Talnishnikh N.A., Shmidt N.M. DEVELOPMENT FEATURES OF DEGRADATION PROCESSES IN HIGH-POWER BLUE InGaN/GaN LIGHT-EMITTING DIODES.

The paper describes the features of degradation processes, the current-voltage characteristics, electroluminescence spectra and external quantum efficiency. The reasons for the rapid development of degradation processes in high-power blue InGaN / GaN light-emitting diodes, complicating the prediction of their service life, are elucidated.

RAPID DEGRADATION. InGaN/GaN LEDs. QUANTUM EFFICIENCY. CURRENT-VOLTAGE CHARACTERISTICS. ELECTROLUMINESCENCE.

Berdnikov A.Ya., Ivanishchev D.A., Kotov D.O., Riabov V.G., Riabov Yu.G., Samsonov V.M. THE MEASUREMENT OF ELECTROMAGNETICAL SIGNS OF QUARK-GLUON PLASMA IN HEAVY ION COLLISIONS AT 62.4 GeV.

Dilepton spectra in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ GeV and calculation of dilepton pair cocktail from known sources have been presented.

QUARK-GLUON PLASMA. LEPTONS. PRODUCTION. TEMPERATURE. ANALYSIS.

Berdnikov Ya.A., Ivanov A.E., Kim V.T., Suetin D.P. NUCLEAR EFFECTS IN HADRON-NUCLEAR INTERACTIONS AT HIGH ENERGIES.

The process of hard interaction of hadrons with nuclei at high energies is studied, results of modeling of lepton pairs production in hadron-nuclear interactions in the Drell – Yan process are presented. Comparison with experimental data from E772 and E886 collaboration is carried out. Fine matching of HARDPING model with experiment is obtained.

HADRON-NUCLEAR COLLISIONS. MULTIPLE SCATTERING. ENERGY LOSSES. HARDPING.

Bykov A.M., Gladilin P.E., Osipov S.M., Pavlov G.G. THE ROLE OF FIREHOSE INSTABILITY IN DIFFUSIVE SHOCK ACCELERATION.

Comparison of the contribution of pressure anisotropy to growth rates of instability with the contribution of current anisotropy of distribution function of the accelerated particles is carried out in shock prefronts of the supernova remnants. It is shown that the contribution of anisotropy of pressure can be important at disturbance scales close to gyroradii of the fastest accelerated particles.

INTERSTELLAR MEDIUM. SUPERNOVA REMNANTS. DIFFUSIVE SHOCK ACCELERATION (DSA).

Fedotov A.I., Lisin S.K. USING OF NONLINEAR MINIMIZATION THEORY FOR APPLIED PROBLEMS OF DESIGN OF OBJECTS PROPERTIES.

An analysis and a design of objects parameters and their properties have been carried out by application of the minimization theory procedure using experimental data and their restoring. The theory of the best estimation change was taken to extract

validly the scientific and technical information from experiments. The strategies for regeneration of experimental dependencies were developed by means of results representation, experiments deviations and other things.

NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL. NUMERICAL SOLUTION. REGRESSIVE FUNCTIONAL. APPROXIMATION.

Gonchar I.V., Ivanov A.S., Fedortsov A.B. A FAST-OPERATING INTERFEROMETRY DEVICE FOR MEASURING FILMS THICKNESS OVER THE RANGE FROM TEN TO ONE THOUSAND MICRONS.

A fast-operating laser-interferometric device for measuring the thickness of films which are transparent in visible or infrared ranges is described in this work. The thickness of the films to be investigated is from 10 μm to 1 mm. Measuring frequency is 25 times per second, time of one measurement is $3 \cdot 10^{-4}$ s. This allows measuring the thickness of unstable films including liquid ones. Due to combining two ways of determining the thickness in one device (by the number of peaks in the angular dependence of the laser beam reflectance coefficient, and by the value of this coefficient at a given angle of incidence) the error in determining the thickness is only 150 nm.

LASER INTERFEROMETRY. FILM THICKNESS. SOLID AND LIQUID FILMS.

Kapralova V.M., Nazarova E.A., Ivanova N.E., Shadrin E.B. ALBUMIN CONFORMATIONAL CHANGES AS A DIAGNOSTIC PARAMETER.

Thermoimpedancemetric curves of human serum albumin aqueous solutions of various concentrations and pH are obtained. It is shown that the globule-coil transition in individual globules is observed and the curve shape reflects albumin conformational changes including changes under the different denaturants influence. The possibility of denaturation kinetics study by means of thermoimpedancemetry is demonstrated. Results obtained allow to expand diagnostic capabilities of cerebrospinal fluid thermoimpedancemetry on the conformational diseases.

HUMAN SERUM ALBUMIN. DENATURATION. CONFORMATIONAL DISEASES. THERMOIMPEDANCEMETRY. DIAGNOSTICS.

Karaseov P.A., Karabeshkin K.V. THE FEATURES OF DEFECT FORMATION IN SILICON UNDER MOLECULAR ION BOMBARDMENT.

Molecular effect in silicon under molecular ion bombardment over a wide energy range is described. Physical mechanisms for explanation of this phenomenon are suggested. Results of experimental studies and computer simulation of processes occurred in Si under P^+ and PF^+_4. ion bombardment are presented.

ION IMPLANTATION. SILICON. MOLECULAR EFFECT.COLLISION CASCADE. COMPUTER SIMULATION.

Khayrullin A.R., Stepanova T.P., Rozhkova N.N., Gladchenko S.V. DIPOLE MOMENTS OF C_{60} FULLERENE IN BENZENE, TOLUENE AND ORTHOXYLENE.

The determination of dipole moments of C_{60} fullerene has been carried out in benzene, toluene and ortoxylene solutions under infinite dilution. It was found that dipole moments are 1.0 D, 1.8 D and 2.27 D in toluene, benzene and ortoxylene, respectively.

It means that there are isolated C_{60} molecules in toluene solution but associated clusters with constant stoichiometry in benzene and ortoxylene solutions.

DIELECTRIC PERMETTIVITY. DIPOLE MOMENT. ASSOCIATION. SOLUTION. C_{60} FULLERENE. TOLUOLENE. ORTOXYLENE. BENZENE.

Kiesewetter D.V., Savina A.Yu. THE APPROXIMATION OF RHODAMINE DYES FLUORESCENCE SPECTRA.

Using of different functions for approximation of spectra of fluorescence of Rhodamine has been put forward. The fluorescence spectra of solutions and Rhodamine doped polymeric fibers were measured at different temperatures. The accuracy of approximations was defined.

FLUORESCENCE. APPROXIMATION. SPECTRUM. POLYMER OPTICAL FIBER. TEMPERATURE DEPENDENCE.

Kovalevsky D.V. EFFECTS OF HETEROGENEITY OF POTENTIAL BARRIERS AND LATTICE FINITENESS IN THE KRONIG – PENNEY MODEL.

Using the matrix formalism, the wave functions of continuum states and the energies of surface (Tamm) states are calculated in the modified Kronig – Penney model with a special geometry of the potential (an infinitely high potential barrier at the origin of the coordinates, bounding the region of electron motion to positive semi-axis; the height of the potential delta-barrier / the depth of the potential well closest to the origin of the coordinates differs from the height of all other barriers). Particular attention is paid to the case of size quantization in the lattice of finite length.

ELECTRONS. KRONIG – PENNEY MODEL. SURFACE STATES. SIZE QUANTIZATION.

Kozhevnikov N.M. THE ANNIVERSARY SESSION OF THE PRESIDIUM OF THE SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL COUNCIL ON PHYSICS OF THE MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF THE RUSSIAN FEDERATION.

The results of the meeting of the Presidium of the Scientific and Methodological Council on Physics dedicated to the 10th anniversary of the Council's activity in its current make-up are presented. Upon discussing the Council performance report the Presidium passed a number of constructive resolutions.

PHYSICS. TRAINING PROGRAMMES. SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL COUNCIL. PROBLEMS OF EDUCATION.

Kvashenkina O.E. FEATURES OF ELECTRONIC PHASE TRANSITION IN VO_2.

The details of several stages of the thermal metal-semiconductor phase transition (MSPT) in vanadium dioxide films are experimentally studied. The idea of a joint and coherent coexistence of the two components of MSPT – the electronic and structural components – is substantiated. The problem of the type of metal-semiconductor phase transition in vanadium dioxide is discussed.

VANADIUM DIOXIDE. PHASE TRANSITION. MOTT TRANSITION. PEIERLS TRANSITION. THIN FILMS. HYSTERESIS. DIMERS.

Lamkin I.A., Menkovich E.A., Tarasov S.A. ULTRAVIOLET PHOTODIODES ON THE BASIS OF THE CONTACTS OF METAL AND ALUMINUM-NITRIDE GALLIUM SOLID SOLUTIONS.

The paper considers the problem of creating high-quality ohmic and rectifying contacts to AlGaN solid solutions with a high degree of Al. The basic problems connected with creating ultraviolet photosensitive structures based on the contact metal – AlGaN solid contacts are presented.

UV PHOTODETECTOR. AlGaN. OHMIC CONTACTS. SCHOTTKY BARRIER.

Lukashova O.F., Mokrova D.V., Kafidova G.A., Perevoznik D.S. A NONINVASIVE SPECKLE SENSOR OF BLOOD FLOW VELOCITY IN THE MICROVASCULATURE.

The peculiarities of a noninvasive speckle blood flow velocity sensor development have been considered. Functional elements within the structure of the sensor were optimized, that permitted to produce its mobile version. Also, Bluetooth radio channel, allowing transmitting informational signal to a personal computer for subsequent processing and storage, was included in the sensor *e*-frame. Experimental results of the sensor testing are presented.

SPECKLE FIELD. MICROCIRCULATION. AUTOCORRELATION. NONINVASIVE SENSOR.

Nguyen Van Thang, Arseniev D.G., Belyaev A.K. THE STABILITY OF MOTION OF THE SHAFT SUPPORTED BY FLOATING RING BEARINGS AND ITS SELF-OSCILLATION WITH ALLOWANCE OF LUBRICATION HYDRODYNAMICS AND CENTRIFUGAL FORCES.

Our study gives the theoretical representation of the stability of the balance position of the shaft supported by floating ring bearing with allowance of lubrication hydrodynamics and centrifugal force. The basic results are referred to the short bearing investigation.

CENTRIFUGAL FORCES. STABILITY. SELF-OSCILLATION. SHORT BEARING. LUBRICATION HYDRODYNAMICS.

Pavlov F.F. THE CALCULATION OF MATRIX ELEMENTS FOR THE ELECTROMAGNETIC DEUTERON CURRENT IN A FORMAL LIGHT DESCRIPTION CONE.

The paper investigates the behavior of matrix elements for the electromagnetic deuteron as a function of the momentum transfer. Matrix elements in question were calculated in the light cone formalism using the criteria for option of matrix elements for the plus-component of the electromagnetic current in the Breit frame.

DEUTERON. LIGHT CONE. MATRIX ELEMENTS OF THE ELECTROMAGNETIC CURRENT. BREIT FRAME.

Pavlov F.F., Berdnikov Ya.A. ANGULAR CONDITION FOR MATRIX ELEMENTS OF THE ELECTROMAGNETIC DEUTERON CURRENT.

The paper is devoted to investigation of Grach-Kondratyuk angular condition. The matrix element of the «plus» component of the electromagnetic current of the deuteron defines four independent functions. Whereas, the matrix element should be expressed in three of the deuteron form factors: the charge, magnetic and quadrupole. This means that there must be additional equation. This equation is called the angular condition. The paper investigates the behavior of this condition as a function of the square of the momentum transfer, and shows its violation.

DEUTERON. LIGHT CONE. MATRIX ELEMENTS OF THE ELECTROMAGNETIC CURRENT. ANGULAR CONDITION.

Pervadchuk V.P., Shumkova D.B., Dektyarev D.N. MATTERS OF SOLVABILITY AND DERIVATION OF OPTIMIZATION SYSTEMS IN VARIATIONAL PROBLEMS DESCRIBED BY TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATIONS.

In this paper we obtain conditions for the solvability of the optimal control of two-dimensional nonlinear equation of parabolic type. In this case the function of optimal control is determined explicitly and depends on the solution of the resulting optimality system.

OPTIMAL CONTROL. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. SYSTEM OF OPTIMALITY. COMPROMISE CONTROL.

Radchuk N.B., Ushakov A.Yu. OPTICAL PROPERTIES OF TRANSITION METALS NANOCOMPOSITES.

The paper contains results of investigation of transition metals nanocomposites on the basis of arabinogalactan. Absorption spectra, optical activity and methods of nanocomposites synthesis are considered.

NANOCOMPOSITES. ARABINOGALACTAN. NICKEL. COBALT. ZINK. ABSORPTION SPECTRA. OPTICAL ACTIVITY. PLASMON RESONANCE.

Sanin A.L., Semyonov E.A. QUANTUM DUFFING OSCILLATORS: FREE AND COUPLED, NOISE ACTION.

The numerical integration of the non-stationary two-dimensional Schr dinger equation was carried out. In the context of quantum wave-packets, dynamical means, Fourier spectra, uncertainty relations, autocorrelators there were studied the dynamical properties for two coupled quantum Duffing oscillators. It is shown that synchronization for identical oscillators and partial transmission of the frequency spectrum in non-identical oscillators takes place. It was found that increasing of noise power leads to the amplitude reduction of the complex-shaped oscillations and the expansion of the frequency spectra.

QUANTUM DUFFING OSCILLATORS. COUPLING. SYNCHRONISATION. NOISE. SPECTRA.

Shaganov A.P., Filimonov A.V. Koroleva E.Yu. Fotiadi A.E. THE FORMATION OF POLAR NANOREGIONS AND NANODOMAINS IN SBN-61 SINGLE-AXIS RELAXORS.

The paper is devoted to application of a synchrotron radiation scattering method to the analysis of domain structure of $Sr_{0.6}Ba_{0.4}Nb_2O_6$ (SBN) samples. It is experimentally established that at high temperature there are polarizing centers of the varied size in the SBN-61 samples, with center distances down to the units of micron. Domain structure formation in SBN-61 is accompanied by partial disordering caused by increasing of polarization fluctuations. The polarization in the volume of the samples in question was correlated, and a direction of preferred correlation can change depending on the general ordering.

SYNCHROTRON RADIATION. RELAXOR. DOMAIN STRUCTURE. POLARIZING CENTERS. POLARIZATION FLUCTUATIONS.

Uvarov Yu.A., Bykov A.M., Pavlov G.G., Levenfish K.P., Kropotina Yu.A. VELA PULSAR WIND NEBULA: DETERMINATION OF THE ANISOTROPY OF ACCELERATED PARTICLE DISTRIBUTION FUNCTION.

A geometric model of Vela pulsar wind nebula (PWN) is suggested. The method of determination of leptonic distribution function anisotropy is developed based on the comparison of high resolution roentgen Chandra images of Vela PWN with model predicted images. An angular dependence of distribution function in the nebula rest frame is obtained in the ranges of angle between particle velocity and pulsar wind direction θ: $10° < \theta < 90°$ and $130° < \theta < 160°$.

PULSAR WIND NEBULA. SYNCHROTRON RADIATION. DIFFUSIVE SHOCK ACCELERATION (DSA).

Vasil'ev A.N., Tarkhov D.A. PARAMETRICAL NEURAL NETWORK MODELS OF CLASSICAL AND NON-CLASSICAL PROBLEMS for HEAT CONDUCTION EQUATION.

Problems of mathematical modeling for complex systems are considered in the paper in terms of neural network technique. System parameters are given in some variation intervals. Neural network model of nonstationary temperature field in the case of both classical and non-classical problem statement is cited as an example. Results of neurocomputing for accurate and noise data are given.

BOUNDARY VALUE PROBLEM (BVP). INTERVAL PARAMETER. MODELING. ARTIFICIAL NEURAL NETWORK TRAINING. ERROR FUNCTIONAL. GLOBAL OPTIMIZATION.

Vasil'ev G.I., Kholupenko E.E., Yablokov S.N., Bayko D.A., Bykov A.M., Krasil'shchikov A.M., Pavlov G.G. THE INFLUENCE OF THE NIGHT-SKY BACKGROUND ON GROUND-BASED OBSERVATIONS OF GAMMA-RAY BURSTS IN THE RANGE BETWEEN 1 AND 10 GeV.

The influence of night-sky background on detecting cosmic gamma-ray bursts and measurements of their light curves with ground-based Cherenkov telescopes in the range between 1 and 10 GeV is considered. It is shown that the probability of registration of Cherenkov flashes from cosmic gamma-quanta decreases significantly at energies less than 3 GeV under the influence of night sky optical background even if the sensitivity of detecting units is better than that of modern Cherenkov telescopes.

GAMMA-RAYS. CHERENKOV RADIATION. EXTENSIVE ATMOSPHERIC SHOWERS. GAMMA-RAY BURSTS. NIGHT-SKY BACKGROUND.

Vinnichenko M.Ya., Firsov D.A., Mashko M.O., Shterengas L., Belenky G., Vorobjev L.E. ELECTRON RECOMBINATION AND CAPTURE IN LASER NANOSTRUCTURES WITH InGaAsSb/AlGaAsSb QUANTUM WELLS.

Time dynamics of photoluminescence intensity was studied in InGaAsSb/AlGaAsSb quantum wells with different compositions of the barrier solid solution. The charge carrier capture time in quantum wells, the energy relaxation times, the lifetime related to resonant Auger recombination were estimated. It was shown that under certain design of nanostructures the resonant Auger recombination can be observed. The influence of temperature and structure design on the Auger recombination rate is discussed.

LASER RADIATION. MID INFRARED RANGE. QUANTUM WELLS. AUGER RECOMBINATION.

Vishnevsky V.E., Pustovalova O.A., Ivanova O.A., Strekopitova M.V. THE STABILITY OF THE STATIONARY POLYMEASURE EQUILIBRIUM REGIME.

The paper proves the theorems of the stability of the integral manifold of a system of differential equations and the asymptotic stability of the equilibrium regime of a system of differential equations.

REGIME. FUNCTION. STABILITY. INEQUALITY. FAMILY.

Yukhnev A.D., Sinitsyna D.E. THE BLOOD VESSEL MODELS: THE TECHNOLOGY DEVELOPMENT FOR MAKING AND FOLLOWING INVESTIGATION.

Methods of making the human blood vessel silicon models are considered. The procedure for measurement of model and carotid artery diameters under pulsating pressure of liquid is described. The results of compliant coefficients determination are given.

BLOOD FLOW PHANTOM. SILICON BLOOD VESSEL MODEL. WALL THICKNESS. COMPLIANT COEFFICIENT. ULTRASOUND SCANNER.

Yurova V.A., Fedortsov A.B., Klimchitskaya G.L., Churkin Yu.V. THE CASIMIR FORCE PRESSURE ON THE DIELECTRIC LAYER IN NANOSCALE SOLID-STATE MULTILAYER Al – SiO_2 – Si STRUCTURES.

The calculation of the dispersion forces pressure value on the dielectric layer in solid-state multilayer Al – SiO_2 – Si structure widely used in electronic components production is presented. It is shown that the pressure increases sharply in the nanometer range of the dielectric thickness and at the thickness of 1 nm reaches the value of 8 MPa. The calculation results do not depend on the dielectric permittivity model of the structure matters.

DISPERSION FORCE PRESSURE. CASIMIR EFFECT. METALL – DIELECTRIC – SEMICONDUCTOR STRUCTURE. LIFSHITZ THEORY. PERMITTIVITY.

Zhgoutov V.M. GEOMETRICALLY NONLINEAR THERMOPLASTICITY MATHEMATIC MODELS OF SHELLS WITH THE VARIABLE THICKNESS.

The mathematical deformation models of variable thickness shells (smoothly-variable anb ribbed shells), experiencing either mechanical load or permanent temperature field and taking into account the geometrical nonlinearity, nonlinear elasticity and transverse shear, were developed. There are given refined geometrical proportions for geometrically nonlinear and steadiness problems.

VARIABLE THICKNESS SHELLS (SMOOTHLY-VARIABLE AND RIBBED SHELLS). THERMOELASTICITY. GEOMETRICAL NONLINEARITY. NONLINEAR ELASTICITY. TRANSVERSE SHEAR.

Zolotov S.A., Privalov V.E. THE INFLUENCE OF ACTIVE ELEMENT GEOMETRY ON GAS DISCHARGE LASER GAIN FACTOR.

The article deals with new approaches to increase the gain factor of the laser on the He-Ne mixture by changing the geometry of the active element. The amplification gain and the optimum size of the combined sections of the active elements are calculated.

GAS LASER. GAIN. ACTIVE ELEMENT. POWER. OPTIMIZATION.

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
№ 3 (153) 2012

Учредитель – Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Издание зарегистрировано в Госкомпечати РФ, свидетельство № 013165 от 23.12.94

Редакция

д-р физ.-мат. наук, профессор *В.К. Иванов* – председатель ред. коллегии
д-р физ.-мат. наук, профессор *А.Э. Фотиади* – зам. председателя ред. коллегии
канд. физ.-мат. наук, доцент *В.М. Капралова* – ответственный секретарь
канд. физ.-мат. наук *О.А. Ящуржинская* – научный редактор, корректор
А.С. Колгатина – технический секретарь

Телефон редакции 294-22-85

E-mail: physics@spbstu.ru

Компьютерная верстка *С.В. Горячевой*

Директор Издательства Политехнического университета *А.В. Иванов*

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Подписано в печать. .2012. Формат 60×84 1/8. Бум. тип. № 1.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 29,0. Уч.-изд. л. 29,0. Тираж 1000. Заказ 314

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.
Издательство Политехнического университета,
член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России.
Адрес университета и издательства: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.