МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математические науки

ТОМ 12, №2

2019

Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого
2019

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА

Алферов Ж.И., академик РАН – председатель;
Боровков А.И., проректор по перспективным проектам;
Варшалович Д.А., академик РАН;
Глухих В.А., академик РАН;
Жуков А.Е., чл.-кор. РАН – зам. председателя;
Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Индейцев Д.А., чл.-кор. РАН;
Рудской А.И., академик РАН – зам. председателя;
Сурис Р.А., академик РАН.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия, – главный редактор;
Фотиади А.Э., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия, – зам. главного редактора;
Капралова В.М., канд. физ.-мат. наук, доцент, СПбПУ, СПб., Россия – ответственный секретарь;
Антонов В.И., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Безпрозванный И.Б., д-р биол. наук, профессор, Юго-Западный медицинский центр Техасского университета, Даллас, США;
Блинов А.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Донецкий Д.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, университет штата Нью-Йорк в Стоуни-Брук, США;
Лобода О.С., канд. физ.-мат. наук, доцент, СПбПУ, СПб., Россия;
Малерб Й.Б., Dr.Sc. (Physics), профессор, университет Претории, ЮАР;
Остряков В.М., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Привалов В.Е., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Смирнов Е.М., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Соловьёв А.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, Научно-исследовательский центр мезобионаносистем (MBN), Франкфурт-на-Майне, Германия;
Таганцев А.К., д-р физ.-мат. наук, профессор, Швейцарский федеральный институт технологий, Лозанна, Швейцария;
Топтыгин И.Н., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Тропп Э.А., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Фирсов Д.А., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Хейфец А.С., Ph.D. (Physics), профессор, Австралийский национальный университет, Канберра, Австралия;
Черепанов А.С., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия.

Журнал с 2002 г. входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Сведения о публикациях представлены в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН, в международной справочной системе «Ulrich's Periodical Directory».

С 2008 года выпускается в составе сериального периодического издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ».

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.

Распространяется по Каталогу стран СНГ, Объединенному каталогу «Пресса России» и по Интернет-каталогу «Пресса по подписке». Подписной индекс **71823**.

Журнал индексируется в базе данных **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index), а также включен в базу данных **«Российский индекс научного цитирования»** (РИНЦ), размещенную на платформе Научной электронной библиотеки на сайте

http://www.elibrary.ru

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

Точка зрения редакции может не совпадать с мнением авторов статей.

Адрес редакции и издательства:

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

Тел. редакции (812) 294-22-85.

http://ntv.spbstu.ru/physics

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

THE MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION

ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL

Physics and Mathematics

VOLUME 12, No.2, 2019

Peter the Great St. Petersburg
Polytechnic University
2019

**ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL.
PHYSICS AND MATHEMATICS**

JOURNAL EDITORIAL COUNCIL

Zh.I. Alferov – full member of RAS, head of the editorial council;
A.I. Borovkov – vice-rector for perspective projects;
V.A. Glukhikh – full member of RAS;
D.A. Indeitsev – corresponding member of RAS;
V.K. Ivanov – Dr. Sci.(phys.-math.), prof.;
A.I. Rudskoy – full member of RAS, deputy head of the editorial council;
R.A. Suris – full member of RAS;
D.A. Varshalovich – full member of RAS;
A.E. Zhukov – corresponding member of RAS, deputy head of the editorial council.

JOURNAL EDITORIAL BOARD

V.K. Ivanov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – editor-in-chief;
A.E. Fotiadi – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – deputy editor-in-chief;
V.M. Kapralova – Candidate of Phys.-Math. Sci., associate prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – executive secretary;
V.I. Antonov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
I.B. Bezprozvanny – Dr. Sci. (biology), prof., The University of Texas Southwestern Medical Center, Dallas, TX, USA;
A.V. Blinov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
A.S. Cherepanov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
D.V. Donetski – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., State University of New York at Stony Brook, NY, USA;
D.A. Firsov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
A.S. Kheifets – Ph.D., prof., Australian National University, Canberra, Australia;
O.S. Loboda – Candidate of Phys.-Math. Sci., associate prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
J.B. Malherbe – Dr. Sci. (physics), prof., University of Pretoria, Republic of South Africa;
V.M. Ostryakov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
V.E. Privalov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
E.M. Smirnov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
A.V. Solov'yov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., MBN Research Center, Frankfurt am Main, Germany;
A.K. Tagantsev – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Switzerland;
I.N. Toptygin – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
E.A. Tropp – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia.

The journal is included in the List of leading peer-reviewed scientific journals and other editions to publish major findings of theses for the research degrees of Doctor of Sciences and Candidate of Sciences.

The publications are presented in the VINITI RAS Abstract Journal and Ulrich's Periodical Directory International Database.

The journal is published since 2008 as part of the periodical edition 'Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPb-GPU'.

The journal is registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom, Information Technologies and Mass Communications (ROSKOMNADZOR). Certificate ПИ № ФС77-52144 issued December 11, 2012.

The journal is distributed through the CIS countries catalogue, the «Press of Russia» joint catalogue and the «Press by subscription» Internet catalogue. The subscription index is **71823.**

The journal is in the **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index) and the **Russian Science Citation Index** (RSCI) databases.

© Scientific Electronic Library (http://www.elibrary.ru).

No part of this publication may be reproduced without clear reference to the source.

The views of the authors may not represent the views of the Editorial Board.

Address: 195251 Politekhnicheskaya St. 29, St. Petersburg, Russia.

Phone: (812) 294-22-85.

http://ntv.spbstu.ru/physics

© Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 2019

Содержание

Математическое моделирование физических процессовя

Колесник Е.В., Смирнов Е.М., Смирновский А.А. *Численное решение трехмерной задачи обтекания установленного на пластине цилиндрического тела сверхзвуковым потоком вязкого газа при M = 2,95* 7

Маннанов Э.Р., Галунин С.А., Никаноров А.Н., Наке Б., Козулина Т.П. *Разработка индукционных систем для нагрева дисков* 23

Математическая физика

Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. *Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида* 32

Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. *Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций* 49

Петриченко М.Р., Котов Е.В. *Численная верификация слабых решений типичной предельной задачи Крокко с помощью неявной разностной схемы второго порядка* 63

Приборы и техника физического эксперимента

Непомнящая Э.К., Величко Е.Н. *Модификация метода лазерной корреляционной спектроскопии для анализа полидисперсных суспензий наночастиц* 73

Биофизика и медицинская физика

Пчицкая Е.И., Крылов И.С., Власова О.Л., Болсуновская М.В., Безпрозванный И.Б. *Переход от классического деления дендритных шипиков нейронов на типы к альтернативным методам анализа* 88

Ядерная физика

Радзевич П.В., Бердников А.Я., Бердников Я.А., Котов Д.О., Жарко С.В. *Измерение факторов ядерной модификации эта-мезонов при столкновениях ядер урана* 101

Радзевич П.В., Бердников А.Я., Бердников Я.А., Жарко С.В., Котов Д.О. *Подавление выходов адронов в столкновениях ядер урана при различном кварковом составе рождающихся частиц* 111

Егоров А.Ю., Бердников Я.А. *Асимптотические эффекты при рождении пар адронных струй в протон-протонных столкновениях при сверхвысоких энергиях* 121

Механика

Тихомиров В.В. *Точное решение задачи для трещины, выходящей из вершины двух разнородных клиньев* 130

Авторский указатель 140

Contents

Simulation of physical processes

Kolesnik E.V., Smirnov E.M., Smirnovsky A.A. *Numerical solution of a 3D problem on a supersonic viscous gas flow past a plate-cylindrical body junction at M 2.95* 7

Mannanov E.R., Galunin S.A., Nikanorov A.N., Nacke B., Kozulina T.P. *Development of induction systems for heating of disks* 23

Mathematical physics

Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V. *Generalization of the Thomson formula for general harmonic functions* 32

Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V. *Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions* 49

Petrichenko M.R., Kotov E.V. *Numerical verification of weak solutions of the Crocco typical boundary problem using an implicit second order difference scheme* 63

Experimental technique and devices

Nepomnyashchaya E.K., Velichko E.N. *Modification of laser correlation spectroscopy method for analyzing polydisperse nanoparticle suspensions* 73

Biophysics and medical physics

Pchitskaya E.I., Krylov I.S., Vlasova O.L., Bolsunovskaya M.V., Bezprozvanny I.B. *Analysis of dendritic spines morphology: from classical division to types toward alternative approaches* 88

Nuclear physics

Radzevich P.V., Berdnikov A.Ya., Berdnikov Ya.A., Kotov D.O., Zharko S.V. *The measurement of eta meson nuclear modifiction factors in collisions of uranium nuclei* 101

Radzevich P.V., Berdnikov A.Ya., Berdnikov Ya.A., Zharko S.V., Kotov D.O. *Suppression of the hadronic yields in the uranium nuclei collisions at the different quark's composition of the produced particles* 111

Egorov A.Yu., Berdnikov Ya.A. *Asymptotic effects in dijet production in proton-proton collisions at extremely high energies* 121

Mechanics

Tikhomirov V.V. *The exact solution of the problem on a crack emerging from the top of two dissimilar wedges* 130

Author index 140

DOI: 10.18721/JPM.12201
УДК 519.6:533.6.011

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ УСТАНОВЛЕННОГО НА ПЛАСТИНЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА ПРИ М = 2,95

Е.В. Колесник, Е.М. Смирнов, А.А. Смирновский

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Представлены результаты численного моделирования ударно-волновых и вихревых структур, формирующихся при обтекании сверхзвуковым потоком удлиненного цилиндрического тела, которое примыкает к пластине и пронизывает развивающийся на пластине пограничный слой. Рассмотрен ламинарный режим течения при числе Маха набегающего потока, равном 2,95, и числе Рейнольдса, равном 4000. Решения получены с использованием двух схем для расчета конвективных потоков (HLL и AUSM). Проведено сравнение полей течения, рассчитанных с применением указанных численных схем первого и второго порядков точности. Обсуждаются вопросы сходимости численного решения по сетке.

Ключевые слова: высокоскоростное течение, вязко-невязкое взаимодействие, численное моделирование, схема AUSM, схема HLL

Ссылка при цитировании: Колесник Е.В., Смирнов Е.М., Смирновский А.А. Численное решение трехмерной задачи обтекания установленного на пластине цилиндрического тела сверхзвуковым потоком вязкого газа при М = 2,95// Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 7–22. DOI: 10.18721/JPM.12201

NUMERICAL SOLUTION OF A 3D PROBLEM ON A SUPERSONIC VISCOUS GAS FLOW PAST A PLATE-CYLINDRICAL BODY JUNCTION AT M 2.95

E.V. Kolesnik, E.M. Smirnov, A.A. Smirnovsky

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, results of numerical simulation of a shock-wave pattern and vortex structures forming in supersonic flow past an adjacent-to-plate elongate cylindrical body, which penetrates the developing flat-plate boundary layer, have been presented. The laminar flow regime at Mach number 2.95 was considered, Reynolds number was taken 4000. The solutions were obtained using two schemes for convective flux (HLL and AUSM). Comparison of the flow fields calculated with the mentioned schemes of the first and second orders of accuracy were conducted. Solution grid sensitivity issues were discussed.

Keywords: high-speed flow, viscous-inviscid interaction, numerical simulation, AUSM and HLL schemes

Citation: Kolesnik E.V., Smirnov E.M., Smirnovsky A.A., Numerical solution of a 3D problem on a supersonic viscous gas flow past a plate-cylindrical body junction at M 2.95, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 7–22. DOI: 10.18721/JPM.12201

Введение

Необходимость проведения исследований структуры течения при обтекании дозвуковым и сверхзвуковым потоками каких-либо конструктивных элементов, закрепленных на обтекаемой поверхности, возникает во многих практических задачах авиакосмической отрасли и турбомашиностроения. В аэрокосмической отрасли задачи данной направленности встречаются, в частности, при конструировании таких элементов летательных аппаратов, как соединения фюзеляжа и крыла, хвостового оперения и других элементов, а также при оптимизации взаимодействия сверхзвукового потока с вдуваемой газовой струей, используемой в элементах управления.

Особый интерес к задачам такого рода возник с середины прошлого века в связи с развитием сверхзвуковых и гиперзвуковых летательных аппаратов. При сверхзвуковом обтекании вязким газом области сочленения затупленного тела с пластиной возникает трехмерное течение со сложной ударно-волновой структурой, обширной отрывной областью и системой подковообразных вихрей. Другими словами, в данной задаче ярко проявляются эффекты вязко-невязкого взаимодействия в сверхзвуковом течении вязкого газа.

В целом за последние годы была получена достаточно полная информация об особенностях течения, возникающего при взаимодействии отрывающегося пограничного слоя с головным скачком уплотнения. Обзоры литературы на данную тему можно найти, например, в работах [1, 2].

Отметим также, что и случай дозвукового обтекания, где тоже имеют значение особенности формирования отрывной области перед телом, представляет большой интерес. Это относится, в частности, к задачам турбомашиностроения, где сведения о сложной вихревой структуре течения в окрестности передней кромки лопатки важны для учета особенностей теплообмена в области сочленения лопатки и торцевой стенки в венцах высокотемпературных газовых турбин. Исследованию структуры течения в условиях его дозвукового режима посвящено множество работ как экспериментальных, так и расчетных (см., например, статьи [3 – 6]).

Предметом настоящего исследования является одна из модельных задач, в которой реализуется сложная структура трехмерного потока. Рассматривается сверхзвуковое обтекание удлиненного цилиндрического тела, установленного на пластине, вдоль которой развивается пограничный слой (рис. 1). Данной задаче посвящено довольно большое число экспериментальных работ [7 – 13]. Уже первые исследования структуры потока в данной конфигурации [7 – 9] показали, что перед цилиндрическим телом образуются локальные сверхзвуковые области и скачки уплотнения, которые приводят к появлению вторичной зоны отрыва внутри основной зоны.

В случае высокоскоростных летательных аппаратов наиболее важной характеристикой является интенсивность теплообмена в области перед обтекаемым телом; результаты исследований показывают, что в этой области наблюдается резкое увеличение теплового потока к стенке. В частности, опубликованная недавно работа [13] посвящена изучению локального теплообмена на пластине при обтекании цилиндрического тела потоком с числом Маха, равным 5.

В экспериментах весьма проблематично получить объем данных, в деталях определяющих структуру трехмерного сверхзвукового потока во всей области его развития. Соответственно, большой интерес представляют возможности предсказания структуры потока в рассматриваемой модельной конфигурации на основе методов вычислительной гидрогазодинамики. При этом особое внимание следует уделять обеспечению высокого качества разрешения

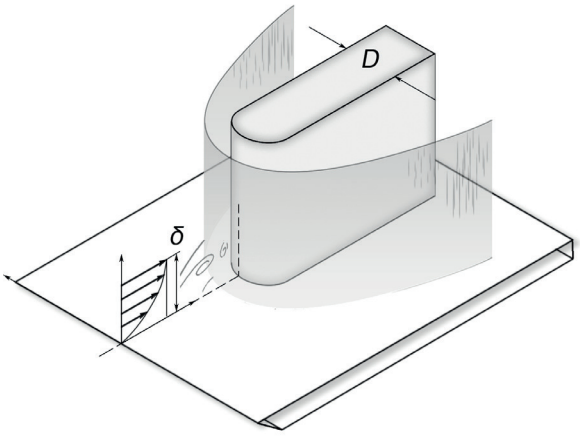


Рис. 1. Схематическое представление постановки задачи:
обтекание вязким газом удлиненного цилиндрического тела с диаметром затупленной части D, установленного на пластине; вдоль пластины развивается пограничный слой (δ – его толщина)

областей вязко-невязкого взаимодействия. В первых работах, посвященных численному моделированию ламинарного и турбулентного течений в рассматриваемой конфигурации [14, 15], использовались расчетные сетки, которые не позволяли детально разрешать все характерные особенности течения. В относительно недавней работе [16], содержащей результаты обстоятельных исследований (как экспериментального, так и численного) обтекания затупленного тела при числе Маха M = 6,7, показано, например, что приемлемое по точности разрешение структуры потока достигается при размерности сетки порядка 15 млн. ячеек.

Численное моделирование сверхзвукового течения в рассматриваемых условиях может осложняться проявлением так называемой «карбункул»-неустойчивости [17, 18], которая приводит к сильному искажению фронта ударной волны в численном решении. Для подавления данной неустойчивости, которой подвержены некоторые широко известные численные схемы, разрабатываются различные подходы, в частности гибридные схемы [18, 16] и введение добавочной искусственной вязкости [19]. Вместе с тем имеются схемы, при использовании которых карбункул-неустойчивость обычно не наблюдается. Это схема Хартена – Лакса – Ван Лира (HLL) [20], которая характеризуется повышенной диссипативностью, и семейство схем, основанных на расщеплении вектора потоков, предложенные Лио и Стефаном (метод AUSM, *англ.* Advection Upstream Splitting Method) [21], относительно которых многими авторами отмечалась их устойчивость к возникновению нефизических осцилляций на фронте ударной волны.

В большинстве опубликованных работ, посвященных численному решению задачи о высокоскоростном обтекании вязким газом затупленного тела, установленного на пластине, рассматривается случай гиперзвукового течения. Особенностям же течений с умеренными значениями числа Маха для набегающего потока и вопросам качества численного воспроизведения эффектов вязко-невязкого взаимодействия в литературе уделялось мало внимания.

В настоящей работе представляются результаты численного решения задачи об обтекании удлиненного затупленного тела, установленного на пластине, при числе Маха набегающего потока, равном 2,95, и числе Рейнольдса, построенном по диаметру затупленной части, равном 4000. Выбор умеренного значения числа Рейнольдса, обеспечивающего ламинарный характер течения в рассматриваемый области, обусловлен нацеленностью работы на получение аккуратного, практически сеточно-сошедшегося решения, с детальным разрешением как сложной структуры течения в вязкой отрывной области с системой подковообразных вихрей, так и газодинамической структуры, характеризуемой отошедшим скачком уплотнения и системой косых волн уплотнения, образующихся при обтекании отрывной области.

Численные решения получены по двум схемам: HLL и AUSM; обе позволили избежать проявлений карбункул-неустойчивости. В работе также проведен сравнительный анализ решений.

Численный метод решения задачи

Базовые положения. Представленные далее численные решения для течения вязкого газа получены по методу конечных объемов (МКО), который основан на использовании интегральной формулировки законов сохранения массы, импульса и энергии, записанных для расчетной ячейки (контрольного объема):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau} d\Omega + \sum_{M} \int_{S_m} \mathbf{F}^{\Sigma} dS = 0, \tag{1}$$

где Ω – контрольный объем; M – число его граней; S_m – площадь текущей грани, $m = \overline{1, M}$; $\mathbf{F}^{\Sigma}$ – вектор потоков на грани контрольного объема; $\mathbf{w} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E]$ – вектор консервативных переменных ($u \equiv u_1$, $v \equiv u_2$, $w \equiv u_3$ – компоненты вектора скорости $\mathbf{V}$ в декартовой системе координат; E – полная энергия; ρ – плотность).

Вектор $\mathbf{F}^{\Sigma}$ является суммой векторов невязких и вязких потоков $\mathbf{F}^{\Sigma} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^{visc}$, которые определяются выражениями:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \\ \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} u + p \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \\ \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} v + p \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \\ \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} w + p \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \\ \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} H \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\mathbf{F}^{visc} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{i} \\ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{j} \\ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{k} \\ \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{V}+\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где p – давление; H – полная энтальпия; $\mathbf{n}$ – нормаль к грани; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты декартовой системы координат ($x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3$).

Компоненты тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\tau}$ и вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$ записываются в виде

$$\tau_{ij} = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - (2/3)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right], \quad (3)$$

$$q_j = -\lambda\left(\partial T/\partial x_j\right), \quad (4)$$

где T – температура; μ – динамический коэффициент вязкости газа, зависимость которого от температуры определяется по формуле Сазерленда; λ – коэффициент теплопроводности газа.

Величины полных энергии и энтальпии определяются выражениями:

$$E = c_v T + V^2/2,\ H = c_p T + V^2/2,$$

где c_v, c_p – удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно; они принимаются постоянными.

Связь между давлением p, плотностью ρ и внутренней энергией e определяется уравнением состояния совершенного газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho e,$$

где γ – показатель адиабаты ($\gamma = c_p/c_v$).

Схемы расчета конвективных потоков. При расчете сверхзвуковых течений особую важность имеет способ аппроксимации невязких потоков $\mathbf{F}$. Схема аппроксимации должна обеспечивать возможность достаточно точного разрешения газодинамических разрывов на небольшом числе внутренних точек при отсутствии осцилляций поля течения в окрестности разрывов. Указанными свойствами обладают методы, получившие большую популярность за последние десятилетия, которые используют в том или ином виде характеристические свойства системы уравнений [22]. К ним относятся схемы расщепления векторов потоков (например, схема расщепления Стегера – Уорминга, метод AUSM) и схемы, основанные на решении задачи Римана о распаде разрыва (например, схемы Годунова, Роу, HLL и HLLC). Далее будут более подробно рассмотрены только схемы AUSM и HLL, выбранные для проведения настоящих расчетов.

При вычислении потоков широко используется понятие параметров «слева» и «справа» от рассматриваемой грани (далее им присваиваются нижние индексы L и R). Если в качестве таких значений используются значения из центров прилегающих ячеек, то численный метод имеет первый порядок точности. Для реализации схем повышенного порядка точности применяются специальные методы определения параметров слева и справа от грани, кратко рассмотренные ниже.

Схема AUSM [21]. Основана на представлении вектора потока $\mathbf{F}$ в виде суммы $\mathbf{F}^{(c)}$ (конвективная составляющая) и $\mathbf{F}^{(p)}$ (составляющая, связанная с давлением):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n} \\ \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}u + p\mathbf{n}\cdot\mathbf{i} \\ \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}v + p\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} \\ \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}w + p\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \\ \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n} \\ \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}u \\ \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}v \\ \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}w \\ \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p\mathbf{n}\cdot\mathbf{i} \\ p\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} \\ p\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{(c)} + \mathbf{F}^{(p)}. \quad (5)$$

Соответственно, $\mathbf{F}_f$ (численный поток на грани) тоже определяется как сумма:

$$\mathbf{F}_f = \mathbf{F}_f^{(c)} + \mathbf{F}_f^{(p)}. \quad (6)$$

При этом для каждой из составляющих используется свой способ расщепления.

Конвективный поток $\mathbf{F}^{(c)}$ выражается через число Маха M, построенное по нормальной составляющей скорости, –

$$\mathrm{M} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}/a,$$

где $a=\sqrt{\gamma RT}$ – скорость звука (R – газовая постоянная):

$$\mathbf{F}^{(c)}=\mathrm{M}\begin{bmatrix}\rho a\\ \rho a u\\ \rho a v\\ \rho a w\\ \rho a H\end{bmatrix}\equiv \mathrm{M}\hat{\mathbf{F}}^{(c)}. \qquad (7)$$

Расщепление конвективного потока осуществляется в зависимости от знака числа Маха на грани M_f следующим образом:

$$\mathbf{F}_f^{(c)}=\begin{cases}\mathrm{M}_f\left[\hat{\mathbf{F}}^{(c)}\right]_L, & \mathrm{M}_f\ge 0,\\ \mathrm{M}_f\left[\hat{\mathbf{F}}^{(c)}\right]_R, & \mathrm{M}_f<0.\end{cases} \qquad (8)$$

Число Маха на грани определяется как сумма положительной и отрицательной составляющих:

$$\mathrm{M}_f=\mathrm{M}_L^{+}+\mathrm{M}_R^{-},$$

где расщепление на составляющие проводится с помощью следующего соотношения:

$$\mathrm{M}_{L/R}^{\pm}=\begin{cases}\pm\dfrac{1}{4}(\mathrm{M}_{L/R}\pm 1)^2, & |\mathrm{M}_{L/R}|\le 1;\\ \dfrac{1}{2}(\mathrm{M}_{L/R}\pm|\mathrm{M}_{L/R}|), & |\mathrm{M}_{L/R}|>1.\end{cases} \qquad (9)$$

Часть потока, связанная с давлением, определяется как

$$\mathbf{F}_f^{(\mathrm{p})}=\left(p_L^{+}+p_R^{-}\right)\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{i}\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{j}\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\\ 0\end{bmatrix}, \qquad (10)$$

где расщепление давления на положительную и отрицательную составляющие также проводится в зависимости от числа Маха:

$$p_{L/R}^{\pm}=\begin{cases}\pm\dfrac{p_{L/R}}{4}(\mathrm{M}_{L/R}\pm 1)^2(2\mp\mathrm{M}_{L/R}), & |\mathrm{M}_{L/R}|\le 1;\\ \dfrac{p_{L/R}}{2}\dfrac{(\mathrm{M}_{L/R}\pm|\mathrm{M}_{L/R}|)}{\mathrm{M}_{L/R}}, & |\mathrm{M}_{L/R}|>1.\end{cases} \qquad (11)$$

Схема HLL [20]. Основана на приближенном решении задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Предполагается, что решение состоит из двух основных разрывов, которые описывают распространение сильных особенностей типа ударных волн; другие особенности – типа контактных или тангенциальных разрывов – при этом не учитываются.

Скорости основных разрывов (характеристик) S_L и S_R, из которых состоит решение, определяются следующими выражениями [23]:

$$S_L=\min\left(\mathbf{V}_L\cdot\mathbf{n}-a_L,\tilde{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{n}-\tilde{a}\right), \qquad (12)$$

$$S_R=\min\left(\mathbf{V}_R\cdot\mathbf{n}+a_R,\tilde{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{n}+\tilde{a}\right), \qquad (13)$$

где a_L, a_R – скорости звука, посчитанные по параметрам слева и справа от грани; величины a и V, помеченные волной, – это переменные, которые для текущей грани рассчитываются посредством осреднения по Роу [24].

Согласно приближенному решению задачи Римана [20], характеристики S_L и S_R отделяют друг от друга три области с постоянными параметрами газа на диаграмме $x-t$: две области с параметрами невозмущенного газа «слева» и «справа» от грани, а третья – область между ними.

Численный поток на грани зависит от конфигурации, отвечающей текущей грани:

$$\mathbf{F}_f=\begin{cases}\mathbf{F}_L, & 0\le S_L;\\ \mathbf{F}^{*}, & S_L\le 0\le S_R;\\ \mathbf{F}_R, & 0\ge S_R,\end{cases} \qquad (14)$$

где поток $\mathbf{F}^{*}$ определяется формулой

$$\mathbf{F}^{*}=\frac{S_R\mathbf{F}_L-S_L\mathbf{F}_R+S_LS_R\left(\mathbf{w}_R-\mathbf{w}_L\right)}{S_R-S_L}. \qquad (15)$$

Повышение порядка точности. Повышенный порядок точности численной схемы достигается за счет использования техники квазимонотонной интерполяции сеточных решений – подхода MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) [25], согласно которому проводится кусочно-полиномиальная реконструкция решения в каждом контрольном объеме и восстановление значений на грани с повышенным порядком. При этом для монотонизации решения в расчетах по схемам вто-

рого порядка точности применяются схемы уменьшения полной вариации (TVD-схемы, *англ.* Total Variation Diminishing) [26]. Обобщение данного подхода на случай неструктурированных сеток заключается в применении квазиодномерных вычислений при локальном выделении для каждой грани некоего подходящего направления (аналогичного координатному направлению, исходно присутствующему в структурированных сетках). Другими словами, помимо значений переменных в центрах ячеек, расположенных по обе стороны грани, требуется, как минимум, еще две виртуальные точки слева и справа от центральных точек (точки P_L^+, P_L^- и P_R^+, P_R^- на рис. 2), в которых каким-либо образом восстанавливаются значения переменных.

Представленные ниже численные решения получены с использованием подхода, предложенного в работе [27] и подробно описанного в работе [28]. При таком подходе для каждой грани f проводят две прямые (лучи реконструкции), которые проходят через центр грани и центры прилегающих к грани ячеек (прямые реконструкции – l и r на рис. 2); на каждой из этих прямых определяют по две дополнительные точки, значения переменной в которых находят посредством интерполяции по известным значениям переменных в некоторых близлежащих центрах ячеек («интерполирующих тройках»).

Алгоритм нахождения таких ячеек [28] заключается в следующем: вначале определяется множество N_1, включающее всех соседей первого уровня для текущей ячейки, т. е. множество ячеек, имеющих хотя бы один общий узел с текущей ячейкой, за вычетом самой ячейки. Далее все ячейки из множества N_1 сортируются по возрастанию косинуса угла между лучом реконструкции, выпущенным из центра текущей ячейки, и вектором направления на центр ячейки из этого множества. Далее тройки ячеек перебирают в порядке возрастания суммы индексов этих ячеек в отсортированном массиве и используют первую из найденных «интерполирующих троек». Имеется в виду такая тройка ячеек, центры которых образуют треугольник, а прямая реконструкции его пересекает.

После определения значений в дополнительных точках, значения слева и справа на грани вычисляют в соответствии с линейной односторонней экстраполяцией:

$$u_L^f = u_L + \psi_L \left(u_L - u_L^- \right) / 2, \qquad (16)$$

$$u_R^f = u_R - \psi_R \left(u_R^+ - u_R \right) / 2, \qquad (17)$$

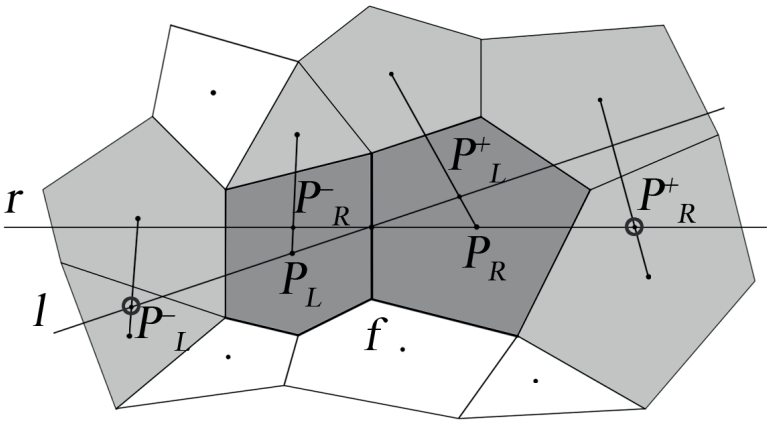


Рис. 2. Схема к построению алгоритма квазиодномерных вычислений на примере двумерного поля;

темно-серым тоном выделены левая и правая ячейки, прилегающие к рассматриваемой грани f, светло-серым – все ячейки шаблона, задействованные при определении значений в дополнительных точках (приведены их обозначения); r, l – прямые реконструкции для грани f

где u — любая из реконструируемых переменных; $\psi(r)$ — ограничитель, введенный для контроля осцилляций и вычисляемый как функция отношения двух разностей:

$$\psi_L = \psi_L\left(\left(u_L^+ - u_L\right)/\left(u_L - u_L^-\right)\right), \qquad (18)$$

$$\psi_R = \psi_R\left(\left(u_R^- - u_R\right)/\left(u_R - u_R^+\right)\right). \qquad (19)$$

В качестве функции ψ в настоящих расчетах использовался TVD-ограничитель Ван Альбады [29].

Постановка задачи и вычислительный инструментарий

На рис. 3 показана расчетная область для рассматриваемой задачи сверхзвукового обтекания удлиненного цилиндрического тела, установленного на адиабатической пластине, вдоль которой развивается ламинарный пограничный слой. Течение предполагается симметричным, и расчетная область охватывает только половину исходной конфигурации. Размеры области: $R = 15D$, $h = 10D$, $L = 8D$, где D — диаметр затупленной части тела, также полагаемого адиабатическим.

Задача определяется следующим набором безразмерных параметров: числом Маха набегающего потока M, числом Рейнольдса Re_D, числом Прандтля Pr, показателем адиабаты γ и отношением диаметра тела к толщине набегающего пограничного слоя D/δ. В данной работе численные решения получены при $\mathrm{M} = 2{,}95$, $\mathrm{Re}_D = 4000$, $\mathrm{Pr} = 0{,}71$, $\gamma = 1{,}4$, $D/\delta_{95\%} = 1$. На входной границе расчетной области предписывались профили скорости и температуры для пограничного слоя заданной толщины $\delta_{95\%}$.

Описанный выше численный метод, в сочетании с неявной схемой «в приращениях», реализован авторами настоящей статьи как одна из опций конечно-объемного неструктурированного программного кода SINF/Flag-S, разработанного на кафедре «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Для проведения расчетов использовались вычислительные ресурсы суперкомпьютерного центра того же университета (www.scc.spbstu.ru).

Результаты расчетов и их обсуждение

Структура потока. Численное решение, полученное по схеме AUSM на наиболее подробной из использованных сеток, представлено на рис. 4 — 6. (вопросы сеточной сходимости решения обсуждаются ниже). В целом, структура рассчитанного поля течения аналогична описанной ранее в работах, проведенных для более высоких значений чисел Маха и Рейнольдса [15, 16]. Перед телом образуется головной скачок уплотнения, который, взаимодействуя с погра-

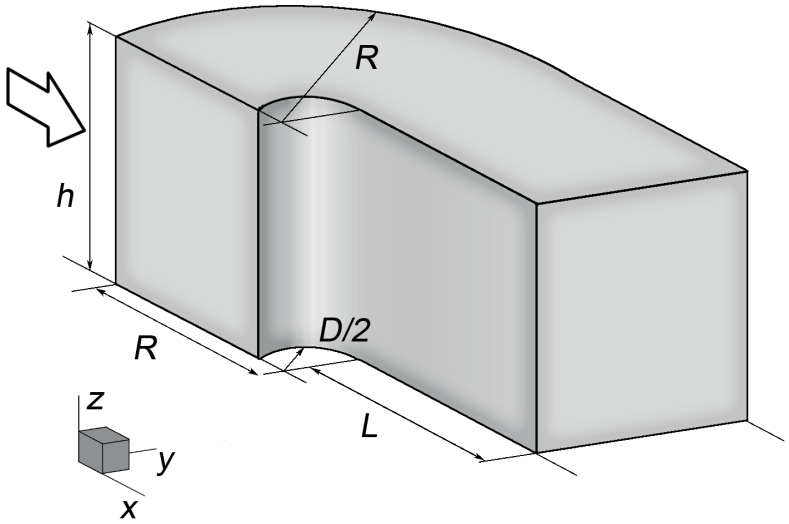


Рис. 3. Расчетная область для задачи сверхзвукового обтекания удлиненного цилиндрического тела (см. рис. 1).

Представлены геометрические параметры: D — диаметр затупленной части тела; R, L, h — размеры расчетной области; стрелкой указано направление потока

ничным слоем, вызывает отрыв последнего. Зона отрыва индуцирует косые волны сжатия; они пересекаются с головным скачком. Внутри отрывной области возникают зоны сверхзвуковых скоростей и местные волны уплотнения, приводящие к повторному отрыву пристенного течения. В результате перед телом формируется протяженная отрывная область с цепочкой вихревых образований, каждое из которых становится «головой» огибающего тело подковообразного вихря.

Поверхностные линии тока, приведенные на рис. 4, показывают области отрыва и присоединения пограничного слоя. На том же рисунке представлено распределение давления (оно отнесено к значению давления в набегающем потоке P_{in}). Видно, в частности, что максимальное давление в лобовой части обтекаемого тела превышает входное давление примерно в десять раз.

Более детальная визуализация течения в плоскости симметрии дается на рис. 5, где посредством изображения поля модуля градиента плотности иллюстрируется ударно-волновая структура в сочетании с картиной линий тока, свидетельствующей о формировании цепочки вихрей в отрывной области. Анализ рисунка показывает, что вихри, заполняющие отрывную область, индуцируют возникновение косых волн уплотнения, взаимодействующих с головным скачком. Это взаимодействие приводит к изгибу фронта головного скачка в сторону обтекаемого тела, а также к формированию струи газа, которая при натекании на тело приводит к появлению зоны локального повышения давления; данная особенность подробнее обсуждается ниже.

На рис. 6 приведено распределение числа Маха в плоскости симметрии, пунктирной линией обозначена звуковая линия (M = 1). В отрывной области, где поток в основном дозвуковой, наблюдаются, однако, две зоны сверхзвукового течения. Поток, который из заторможенной области движется вдоль поверхности обтекаемого тела по направлению к пластине, разгоняется до сверхзвуковых скоростей, а затем сворачивается в вихрь, где также достигается сверхзвуковая скорость.

Сеточная сходимость. Исследование сеточной сходимости проводилось с использованием ряда квазиструктурированных сеток: сетка 1 содержала 0,3 млн. ячеек, сетка 2 – 2,4 млн., сетка 3 – 8,1 млн., сетка 4 – 13,3 млн. Сетка 2 получена путем измельчения сетки 1 в два раза по каждому координатному направлению, сетка 3 – измельчением сетки 2 в 1,5 раза, построение сетки 4 осуществлялось при помощи измельчения сетки 3 только вблизи передней кромки тела (по координате Z/D – от 0 до 2,5 и по координате X/D – от −2 до 0). Все сетки имели одинаковую структуру: со сгущением сеточных линий к обтекаемо-

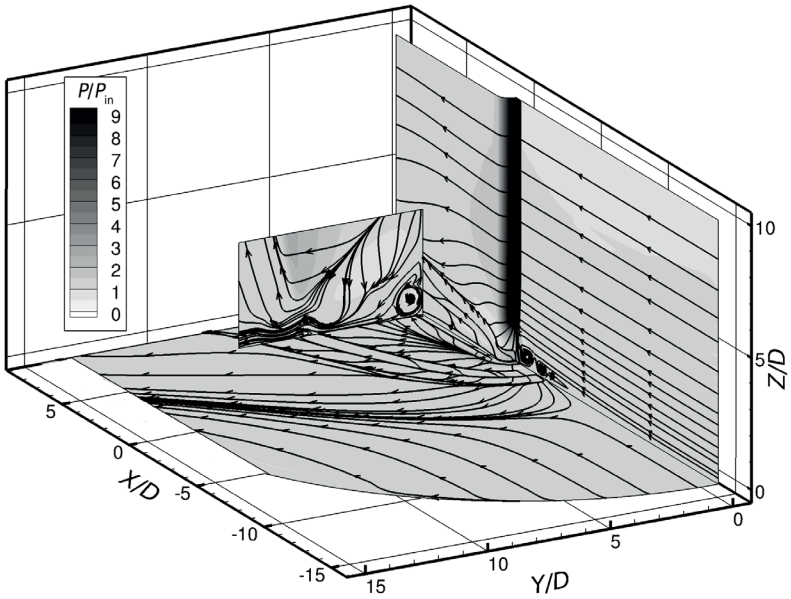


Рис. 4. Картина поверхностных линий тока и структура течения в продольном (плоскость *XZ*) и поперечном (*XY*) сечениях потока. Показаны также распределения давления в этих сечениях и на поверхности обтекаемого тела

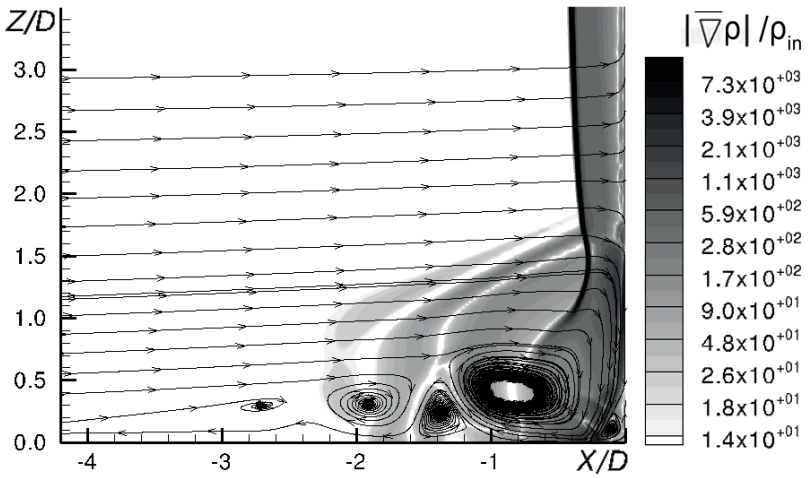


Рис. 5. Поле градиента плотности и линии тока в плоскости симметрии.
Приводятся значения градиента плотности, рассчитанные посредством дифференцирования по безразмерным координатам и отнесенные к значению плотности в набегающем потоке ρ_{in}

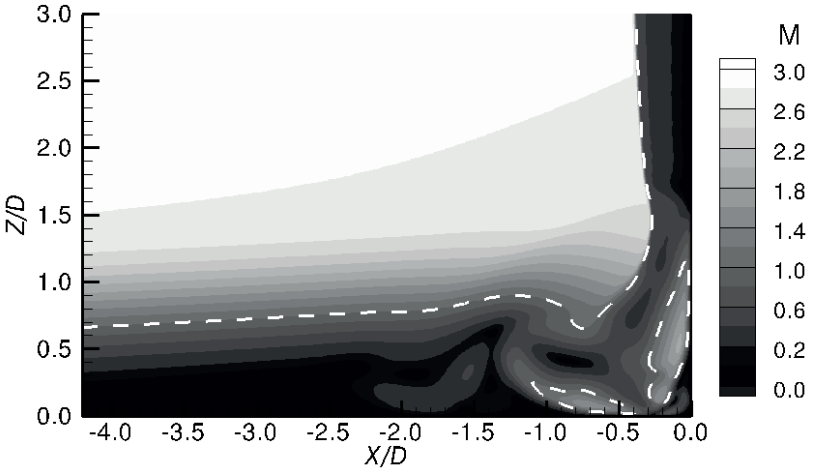


Рис. 6. Поле числа Маха в плоскости симметрии; штриховой линией обозначена звуковая линия M = 1

му телу и к поверхности пластины. Общий вид расчетной сетки 1 иллюстрируется на рис. 7.

Результаты, полученные по схеме AUSM при использовании разных сеток, представлены на рис. 8, где показано распределение давления вдоль лобовой линии на поверхности тела, а также распределение коэффициента трения на пластине вдоль линии симметрии (давление отнесено к аналитически вычисляемому значению полного давления за прямым скачком уплотнения P_{t2}). Отметим характерное повышение давления в области при $Z/D \approx 1{,}5$, которое связано с формированием струи газа при взаимодействии косых волн уплотнения с головным скачком. Примечательно также, что схема первого порядка точности не воспроизводит данный характерный пик давления даже на самой подробной сетке; это обусловлено, прежде всего, недостаточностью разрешения косых волн уплотнения. Более того, по схеме первого порядка предсказывается существенно более простая вихревая структура отрывной области перед телом.

Решение, полученное на сетке 3, весьма близко к решению на сетке 4 как в отношении рассматриваемого распределения давления, так и трения на пластине. Это позволяет заключить, что при использовании схем второго порядка точности сетка 4 является достаточно подробной для разрешения всех деталей вихревой структуры в области сопряжения тела и пластины и обеспечивает также высококачественное разрешение ударно-волновой структуры.

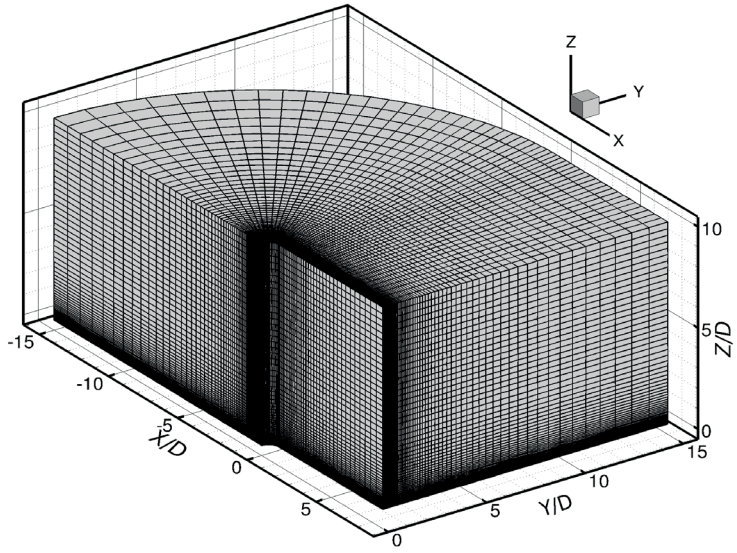


Рис. 7. Расчетная сетка 1, содержащая 0,3 млн. ячеек
(см. пояснения в тексте)

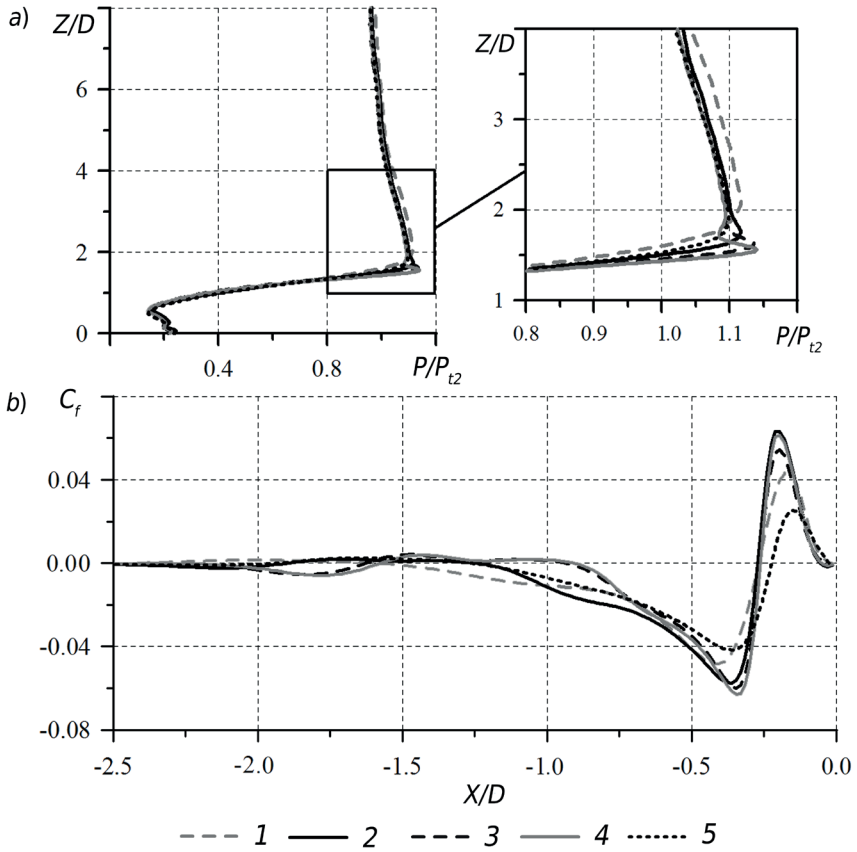


Рис. 8. Распределения безразмерного давления вдоль лобовой линии (*a*) и коэффициента трения на пластине вдоль линии симметрии (*b*).

Даны результаты расчетов по схеме AUSM второго порядка точности на сетках 1 – 4 (номера кривых совпадают с номерами сеток) и первого порядка точности на сетке 4 (кривая *5*)

Сопоставление решений, полученных по разным схемам

Сопоставительные расчеты проводились на самой мелкой сетке (сетка 4) с использованием схем HLL и AUSM первого и второго порядков точности. Сравнение результатов, полученных при использовании различных схем, удобно проводить посредством анализа расчетных распределений давления вдоль выбранных линий на обтекаемом теле, а также предсказываемых распределений коэффициента трения вдоль отдельных линий на поверхности пластины. Выбранные для анализа линии показаны на рис. 9, а сравниваемые распределения — на рис. 10 и 11.

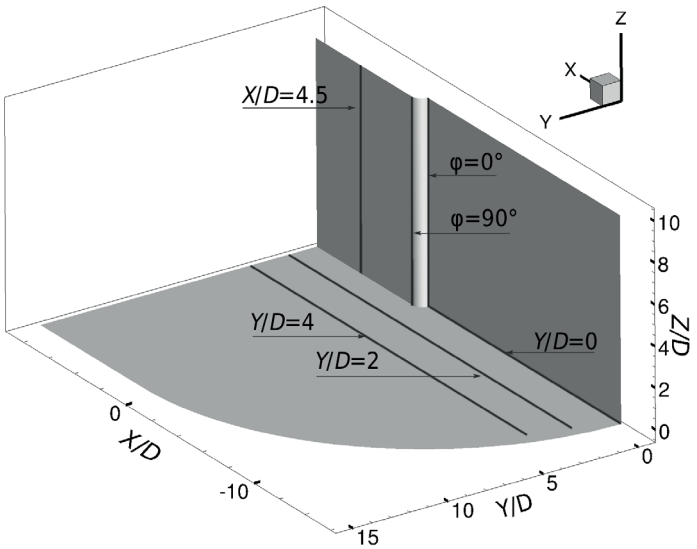


Рис. 9. Положение линий тока на обтекаемом теле, выбранных для анализа расчетных распределений давления и коэффициента трения
(см. сравнительный анализ на рис. 10, 11)

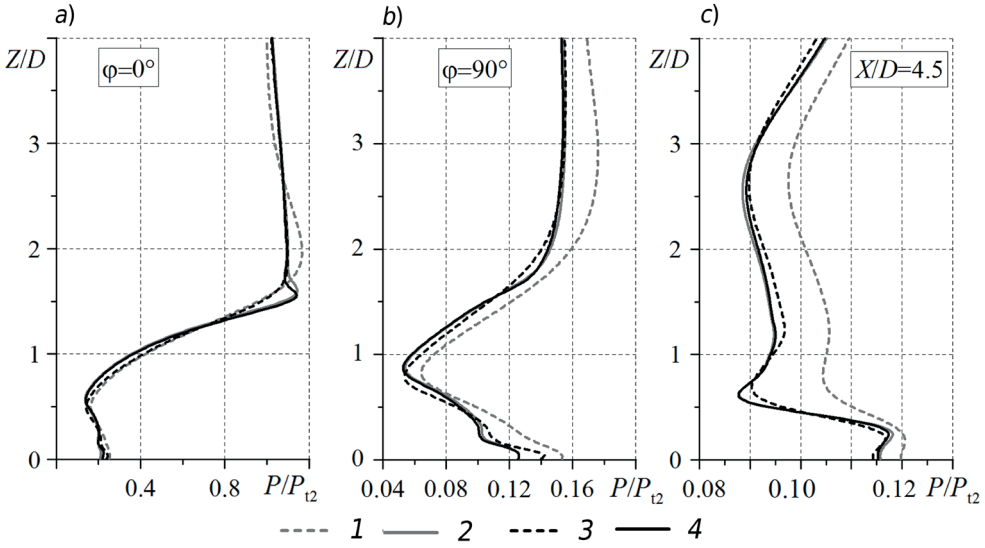


Рис. 10. Распределения безразмерного давления вдоль вертикальных линий на поверхности обтекаемого тела (см. рис. 9): *a* — на лобовой линии (φ = 0°), *b* — в конце закругления (φ = 90°), *c* — ниже по потоку (*X*/*D* = 4,5).
Расчеты выполнены по разным схемам: *1*, *2* — HLL первого и второго порядков точности соответственно; *3*, *4* — AUSM первого и второго порядков точности

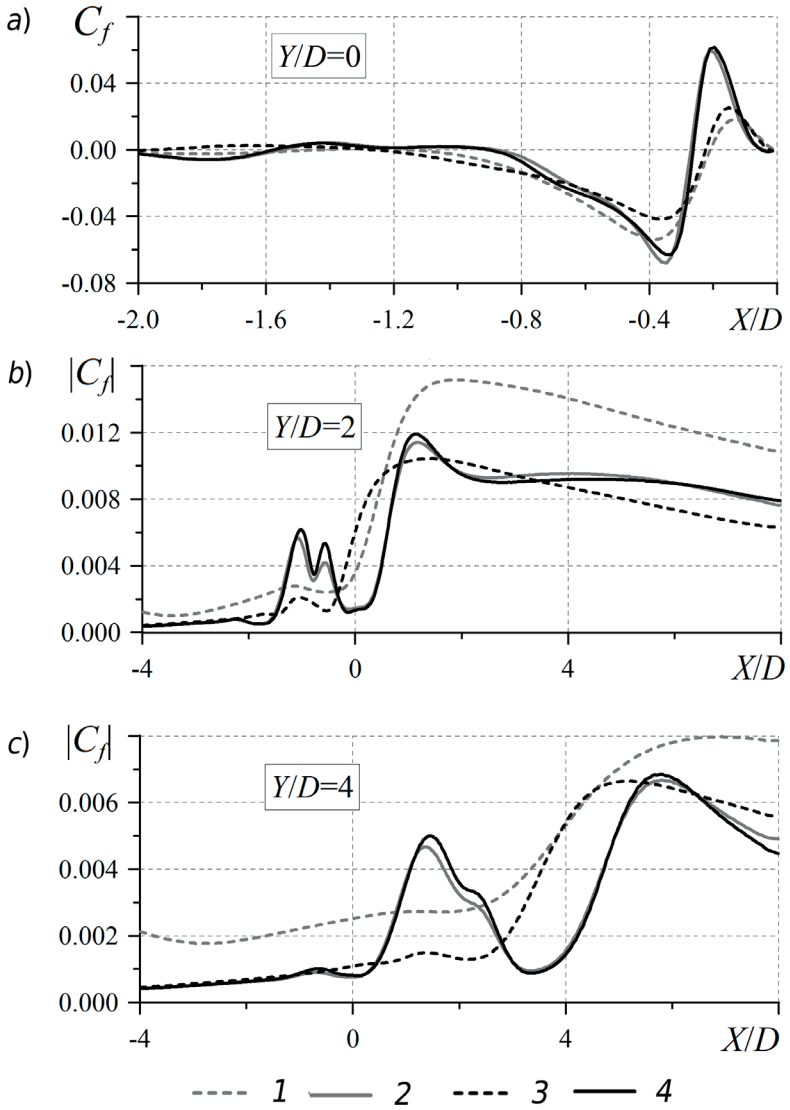


Рис. 11. Распределения коэффициента трения вдоль нескольких линий на поверхности пластины: *a* – на линии симметрии ($Y/D = 0$); *b*, *c* – на расстояниях двух ($Y/D = 2$) и четырех ($Y/D = 4$) диаметров от тела, соответственно.

Расчеты выполнены по разным схемам: *1*, *2* – HLL первого и второго порядков точности соответственно; *3*, *4* – AUSM первого и второго порядков точности

Вследствие повышенной диссипативности схем первого порядка точности, решения, полученные по схемам первого и второго порядков, в отдельных частях потока различаются весьма существенно как в случае AUSM, так и в случае HLL-схемы. Следует отметить, однако, что при использовании схемы AUSM первого порядка ударно-волновая структура течения на наиболее подробной сетке воспроизводится в целом удовлетворительно. Рис. 10 показывает, в частности, что распределение давления по поверхности тела, полученное по схеме AUSM первого порядка, близко к рассчитанному по схеме второго порядка (за исключением отдельных локальных особенностей); тогда как применение схемы HLL первого порядка приводит к распределению, которое имеет иной вид.

Что же касается качества разрешения вязких эффектов, то, как уже отмечалось, схема AUSM первого порядка оказывается излишне диссипативной: даже в случае наиболее подробной сетки ее использование приводит к уменьшению числа разрешаемых вихрей и спаду их интенсивности (см. рис. 11). Применение схемы HLL первого порядка приводит к еще менее приемлемым результатам: предсказывается совершенно другой уровень трения на большей

части пластины (см. рис. 11). При общей близости результатов, полученных по схемам AUSM и HLL второго порядка точности, имеется ряд локальных различий. В частности, из анализа распределения давления вдоль лобовой линии (см. рис. 10) следует, что в решении, полученном по схеме AUSM, локальный пик давления имеет заметно меньшую ширину. Анализ же распределения трения на пластине (см. рис. 11) показывает, что интенсивность вихревого движения в решении, полученном по HLL-схеме, несколько ниже, чем в случае AUSM-схемы.

Заключение

Получено семейство численных решений для модельной задачи о взаимодействии сверхзвукового течения вязкого газа (воздуха) с удлиненным затупленным телом, установленном на пластине, вдоль которой развивается ламинарный пограничный слой. Решения с использованием двух схем для расчета конвективных потоков (HLL и AUSM) и на сетках разной размерности получены при числе Маха набегающего потока, равном 2,95, и числе Рейнольдса, равном 4000.

Течение, которое развивается при обтекании рассмотренной конфигурации, является трехмерным, с яркими проявлениями эффектов вязко-невязкого взаимодействия. Возникающая перед телом отрывная область имеет сложную вихревую структуру, а вокруг тела формируется семейство подковообразных вихрей, стелющихся вдоль пластины. Обтекание отрывной области сверхзвуковым потоком индуцирует возникновение косых волн уплотнения, взаимодействие которых с головным скачком приводит к формированию струи газа, вызывающей местное повышение давления на теле.

По результатам проведенного исследования сеточной сходимости показано, что в случае использования схем второго порядка точности, сетки, содержащие 13 – 15 млн. гексагональных ячеек, позволяют разрешить все детали вихревой структуры течения в области сопряжения тела и пластины, а также достичь высококачественного разрешения ударно-волновой структуры. Схемы первого порядка точности даже на самой подробной сетке из числа использованных не позволяют воспроизвести существенные особенности течения, обусловленные вязкими эффектами. Решения, полученные по схемам AUSM и HLL второго порядка точности, находятся в хорошем согласии, но в целом схема HLL проявляет себя как более диссипативная.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dolling D.S.** Fifty 2019s of shock-wave/boundary layer research: What next? // AIAA Journal. 2001. Vol. 39. No. 8. Pp. 1517–1531.

2. **Babinsky H., Harvey J.K.** Shock wave/boundary-layer interactions. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 461 p.

3. **Devenport W.J., Simpson R.L.** Time-dependent and time-averaged turbulence structure near the nose of a wing-body juncture // Journal of Fluid Mechanics. 1990. Vol. 210. Pp. 23–55.

4. **Fleming J.L., Simpson R.L., Cowling J.E., Devenport W.J.** An experimental study of a turbulent wing-body junction and wake flow // Experiments in Fluids. 1993. Vol. 14. No. 5. Pp. 366–378.

5. **Ballio F., Franzetti S.** Topological analysis of a junction vortex flow // Proceedings of Advances in Fluid Mechanics. Montreal, Canada. 2000. 24–26 May. WIT Press, Southampton. 2000. Pp. 255–264.

6. **Levchenya A.M., Smirnov E.M., Goryachev V.D.** RANS-based numerical simulation and visualization of the horseshoe vortex system in the leading edge endwall region of a symmetric body // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2010. Vol. 31. No. 6. Pp. 1107–1112.

7. **Войтенко Д.М., Зубков А.И., Панов Ю.А.** Обтекание цилиндрического препятствия на пластине сверхзвуковым потоком газа // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 1. С. 121.

8. **Адуевский В.С., Медведев К.И.** Физические особенности течения в области отрыва при трехмерном взаимодействии пограничного слоя с ударной волной // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 25–34.

9. **Тетерин М.П.** Исследование течения газа в области падения скачка уплотнения на цилиндр, обтекаемый потоком большой сверхзвуковой скорости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 2. С. 143 –147.

10. **Dolling D.S., Bogdonoff S.M.** Blunt fin-

induced shock wave/turbulent boundary-layer interaction // AIAA Journal. 1982. Vol. 20. No. 12. Pp. 1674–1680.

11. **Ozcan O., Holt M.** Supersonic separated flow past a cylindrical obstacle on a flat plate // AIAA Journal. 1984. Vol. 22. No. 5. Pp. 611–617.

12. **Houwing A.F.P., Smith D.R., Fox J.S., Danehy D.M., Mudford N.R.** Laminar boundary layer separation at a fin-body junction in a hypersonic flow // Shock Waves. 2001. Vol. 11. No. 1. Pp. 31–42.

13. **Borovoy V., Mosharov V., Radchenko V., Skuratov A.** The shock-waves interference in the flow around a cylinder mounted on a blunted plate //7th European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS). 2017. Report 2017-63. Pp. 1–8.

14. **Hung C.-M., Buning P.G.** Simulation of blunt-fin-induced shock-wave and turbulent boundary-layer interaction // Journal of Fluid Mechanics. 1985. Vol. 154. Pp. 163–185.

15. **Lakshmanan B., Tiwari S.N.** Investigation of three-dimensional separation at wing/body junctions in supersonic flows // Journal of Aircraft. 1994. Vol. 31. No. 1. Pp. 64–71.

16. **Tutty O.R., Roberts G.T., Schuricht P.H.** High-speed laminar flow past a fin–body junction // Journal of Fluid Mechanics. 2013. Vol. 737. Pp. 19–55.

17. **Peery K.M., Imlay S.T.** Blunt body flow simulations // AIAA. 1988. July. Paper 88-2924.

18. **Quirk J.J.** A contribution to the great Riemann solver debate // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1994. Vol. 18. No. 6. Pp. 555–574.

19. **Rodionov V.** Artificial viscosity to cure the carbuncle phenomenon: The three-dimensional case // Journal of Computational Physics. 2018. Vol. 361. Pp. 50–55.

20. **Harten A., Lax P.D., van Leer B.** On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // SIAM Review. 1983. Vol. 25. No. 1. Pp. 35–61.

21. **Liou M.S., Steffen C.J.** A new flux splitting scheme // Journal of Computational Physics. 1993. Vol. 107. No. 1. Pp. 23–39.

22. **Toro E.F.** Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 724 p.

23. **Einfeldt B.** On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1988. Vol. 25. No. 2. Pp. 294–318.

24. **Roe P.L.** Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // Journal of Computational Physics. 1981. Vol. 43. No. 2. Pp. 357–372.

25. **Van Leer B.** Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method // Journal of Computational Physics. 1979. Vol. 32. No. 1. Pp. 101–136.

26. **Harten A.** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983. Vol. 49. No. 3. Pp. 357–393.

27. **Le Touze C., Murrone A., Guillard H.** Multislope MUSCL method for general unstructured meshes // Journal of Computational Physics. 2015. Vol. 284. Pp. 389–418.

28. **Бахвалов П.А., Козубская Т.К.** Схема с квазиодномерной реконструкцией переменных, определенных в центрах элементов трехмерной неструктурированной сетки // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 3. С. 79–95.

29. **Van Albada G.D., Van Leer B., Roberts W.W.** A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics // Astronomy and Astrophysics. 1982. Vol. 108. No. 1. Pp. 76–84.

Статья поступила в редакцию 26.03.2019, принята к публикации 03.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КОЛЕСНИК Елизавета Владимировна – *инженер кафедры «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
kolesnik_ev@mail.ru

СМИРНОВ Евгений Михайлович – *доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
smirnov_em@spbstu.ru

СМИРНОВСКИЙ Александр Андреевич – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

smirta@mail.ru

REFERENCES

1. **Dolling D.S.,** Fifty years of shock-wave/boundary layer research: What next?, AIAA Journal. 39 (8) (2001) 1517–1531.

2. **Babinsky H., Harvey J.K.,** Shock wave/boundary-layer interactions, Cambridge University Press, Cambridge (2011).

3. **Devenport W.J., Simpson R.L.,** Time-dependent and time-averaged turbulence structure near the nose of a wing-body juncture, Journal of Fluid Mechanics. 210 (1990) 23–55.

4. **Fleming J.L., Simpson R.L., Cowling J.E., Devenport W.J.,** An experimental study of a turbulent wing-body junction and wake flow, Experiments in Fluids. 14 (5) (1993) 366–378.

5. **Ballio F., Franzetti S.,** Topological analysis of a junction vortex flow, Proceedings of Advances in Fluid Mechanics, Montreal, Canada, 24–26 May, 2000. WIT Press, Southampton (2000) 255–264.

6. **Levchenya A.M., Smirnov E.M., Goryachev V.D.,** RANS-based numerical simulation and visualization of the horseshoe vortex system in the leading edge endwall region of a symmetric body, International Journal of Heat and Fluid Flow. 31 (6) (2010) 1107–1112.

7. **Voytenko D.M., Zubkov A.I., Panov Yu.A.,** Obtekaniye tsilindricheskogo prepyatstviya na plastine sverkhzvukovym potokom gaza [Flow past a cylindrical obstacle on the plate by a supersonic gas stream], Fluid Dynamics. (1) (1966) 121.

8. **Aduyevskiy B.C., Medvedev K.I.,** Fizicheskiye osobennosti techeniya v oblasti otryva pri trekhmernom vzaimodeystvii pogranichnogo sloya s udarnoy volnoy [Physical features of the flow in the separation region in three-dimensional interaction of the boundary layer with a shock wave], Fluid Dynamics. (1) (1967) 25 –34.

9. **Teterin M.P.,** Issledovaniye techeniya gaza v oblasti padeniya skachka uplotneniya na tsilindr, obtekayemyy potokom bolshoy sverkhzvukovoy skorosti [Investigation of gas flow in the region of the shock drop sealing on a cylinder, streamlined by a large supersonic flow], Fluid Dynamics. (2) (1967) 143–147.

10. **Dolling D.S., Bogdonoff S.M.,** Blunt fin-induced shock wave/turbulent boundary-layer interaction, AIAA Journal. 20 (12) (1982) 1674–1680.

11. **Ozcan O., Holt M.,** Supersonic separated flow past a cylindrical obstacle on a flat plate, AIAA Journal. 22 (5) (1984) 611–617.

12. **Houwing A.F.P., Smith D.R., Fox J.S., et al.,** Laminar boundary layer separation at a fin-body junction in a hypersonic flow, Shock Waves. 11 (1) (2001) 31–42.

13. **Borovoy V., Mosharov V., Radchenko V., Skuratov A.**, The shock-waves interference in the flow around a cylinder mounted on a blunted plate, 7th European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS). Report 2017-63. (2017) 1–8.

14. **Hung C.-M., Buning P.G.,** Simulation of blunt-fin-induced shock-wave and turbulent boundary-layer interaction, Journal of Fluid Mechanics. 154 (1985) 163–185.

15. **Lakshmanan B., Tiwari S.N.,** Investigation of three-dimensional separation at wing/body junctions in supersonic flows, Journal of Aircraft. 31 (1) (1994) 64–71.

16. **Tutty O.R., Roberts G.T., Schuricht P.H.,** High-speed laminar flow past a fin-body junction, Journal of Fluid Mechanics. 737 (2013) 19–55.

17. **Peery K.M., Imlay S.T.,** Blunt body flow simulations, AIAA, Paper 88-2924 (1988).

18. **Quirk J.J.,** A contribution to the great Riemann solver debate, International Journal for Numerical Methods in Fluids. 18 (6) (1994) 555–574.

19. **Rodionov V.,** Artificial viscosity to cure the carbuncle phenomenon: The three-dimensional case, Journal of Computational Physics. 361 (2018) 50–55.

20. **Harten A., Lax P.D., van Leer B.,** On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, SIAM Review. 25 (1) (1983) 35–61.

21. **Liou M.S., Steffen C.J.,** A new flux splitting scheme, Journal of Computational Physics. 107 (1) (1993) 23–39.

22. **Toro E.F.,** Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2009).

23. **Einfeldt B.,** On Godunov-type methods for gas dynamics, SIAM Journal on Numerical

Analysis. 25 (2) (1988) 294–318.

24. **Roe P.L.,** Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, Journal of Computational Physics. 43 (2) (1981) 357–372.

25. **Van Leer B.,** Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method, Journal of Computational Physics. 32 (1) (1979) 101–136.

26. **Harten A.,** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics. 49 (3) (1983) 357–393.

27. **Le Touze S., Murrone A., Guillard H.,** Multislope MUSCL method for general unstructured meshes, Journal of Computational Physics. 284 (2015) 389–418.

28. **Bakhvalov P.A., Kozubskaya T.K.**, Skhema s kvaziodnomernoy rekonstruktsiyey peremennykh, opredelennykh v tsentrakh elementov trekhmernoy nestrukturirovannoy setki [Cell-centered quasi-one-dimensional reconstruction scheme on 3D hybrid meshes], Matem. modelirovaniye. 28 (3) (2016)79 –95.

29. **Van Albada G.D., Van Leer B., Roberts W.W.,** A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics, Astronomy and Astrophysics. 108 (1) (1982) 76–84.

Received 26.03.2019, accepted 03.04.2019.

THE AUTHORS

KOLESNIK Elizaveta V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
kolesnik_ev@mail.ru

SMIRNOV Evgueni M.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
smirnov_em@spbstu.ru

SMIRNOVSKY Alexander A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
smirta@mail.ru

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

DOI: 10.18721/JPM.12202
УДК 537.856

РАЗРАБОТКА ИНДУКЦИОННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ НАГРЕВА ДИСКОВ

Э.Р. Маннанов[1], С.А. Галунин[1], А.Н. Никаноров[2], Б. Наке[2], Т.П. Козулина[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Российская Федерация;

[2] Институт электротехнологий Ганноверского университета им. В. Лейбница, г. Ганновер, Германия

В статье представлены экспериментальные и численные результаты, полученные при нагреве стального диска индукционным методом. Исследование направлено на обеспечение локального равномерного нагрева диска при минимальном отклонении температуры от 450°С. Рассматриваемая система включала трехвитковые индукторы и нагреваемый металлический диск. Результаты компьютерных исследований были реализованы на лабораторном макете. Температурное распределение по материалу диска и его изменения регистрировались с помощью тепловизора. Моделирование электромагнитных и термических процессов при нагреве вращающейся заготовки в форме диска выполнено на базе программного пакета ANSYS APDL. Сравнение полученных численных результатов с экспериментальными данными показало, что расхождение между ними составило около 5 %, что указывает на адекватность выполненного моделирования. Проведен детальный анализ источников отклонения модели от экспериментальных данных.

Ключевые слова: индукционный нагрев, численное моделирование, термообработка, нагрев вращением

Ссылка при цитировании: Маннанов Э.Р., Галунин С.А., Никаноров А.Н., Наке Б., Козулина Т.П. Разработка индукционных систем для нагрева дисков // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 23–31. DOI: 10.18721/JPM.12202

DEVELOPMENT OF INDUCTION SYSTEMS FOR HEATING OF DISKS

E.R. Mannanov[1], S.A. Galunin[1], A.N. Nikanorov[2], B. Nacke[2], T.P. Kozulina[1]

[1] St. Petersburg Electrotechnical University "LETI", St. Petersburg, Russian Federation;

[2] Institute for Electrotechnology of the Leibniz University of Hanover, Hannover, Germany

The paper presents the experimental and numerical results obtained by the induction heating a steel disk. This study has been aimed at realizing the local uniform heating the disk at minimum temperature departure from 450°C. The system-of-interest included 3-turn inducers and a steel disk heated up. The computer-based investigation results were implemented at a laboratory mock-up. The temperature distribution over the disk material and its changes were recorded by a thermal imager. Simulation of electromagnetic and thermal processes occurring in heating a rotating disk-shaped work piece was carried out using ANSYS APDL base. A comparison between the obtained numerical data and experimental one showed a disagreement of about 5 %. It pointed to an adequacy of simulation carried out. A detailed analysis of the disagreement sources was made.

Keywords: induction heating, electrothermal task, numerical simulation, heat treatment, heating with rotation

Citation: Mannanov E.R., Galunin S.A., Nikanorov A.N., Nacke B., Kozulina T.P., Development of induction systems for heating of disks, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 23–31. DOI: 10.18721/JPM.12202

Введение

Численные методы широко используются при разработке систем индукционного нагрева, поскольку создают большие возможности для получения высокоточных результатов, их высокой эффективности и наглядности. Кроме того, такие методы позволяют использовать автоматическую параметризацию, что исключает чрезвычайно высокие затраты на вероятностный спектр экспериментальных испытаний и ошибок. Однако желание воспроизвести все факторы, влияющие на процесс нагрева металла в электромагнитном поле, которое направлено на повышение качества процесса и, соответственно, достижение более высоких целевых показателей, сопряжено со значительным усложнением постановки задачи.

При численном решении задачи нагрева, для правильного воспроизведения экспериментальных результатов неизбежно следует рассматривать параметры нелинейности свойств материалов, зависящих от температуры. Кроме того, магнитная проницаемость μ зависит от самого магнитного поля, возникающего в результате магнитного насыщения.

Нелинейный характер поведения материалов требует решения задачи во временно́й области вместо более простой обработки данных в частотной области.

Частота тока, проходящего через материал, может достигать высоких значений (до сотен килогерц для процессов индукционной закалки), которые приводят к значительным колебаниям магнитного поля за одну секунду. Таким образом, периодическое электромагнитное решение может быть получено для короткого интервала времени, тогда как температурное распределение будет изменяться в более широких временных (секундных) интервалах. Можно утверждать, что распределение температуры по образцу материала реагирует на среднее значение мощности плотности магнитного поля. В случае переменного поведения величины μ эффективность вычислений не исключает обновления значения μ за каждый короткий период времени, что неизбежно приводит к неоправданно длительным вычислениям.

В уравнении теплопроводности быстро меняющийся исходный член, выражающий объемную удельную мощность внутренних источников теплоты, можно заменить усредненным значением по одному периоду электрического тока, рассчитанного на основе ранее полученного значения магнитного поля, зависящего от времени. Такое решение позволяет оптимально обновлять значения физических параметров, отражающих свойства материалов, с учетом нового значения температуры в узлах сетки.

Численное моделирование

Цель настоящего исследования – обеспечить локальный равномерный нагрев диска при минимальном отклонении температуры от 450°С. Выбор данного значения температуры сделан на основе результатов работы [7], где приведены данные, полученные после отпуска насквозь закаленного металлического образца толщиной 3 мм.

Каждое исследование, связанное с разработкой новых или модернизацией существующих электротехнологий требует экспериментальной проверки. Результаты компьютерных исследований [1 – 6] были реализованы на лабораторном макете. В качестве инструмента для наблюдения за изменением температуры использовался тепловизор. В настройках программного обеспечения установлен коэффициент черноты, равный 0,95. Диапазон температуры был установлен в пределах от 200 до 1200°С. Это позволяло повысить чувствительность прибора в конечной температурной зоне, равной 450°С.

Системы, разработанные с помощью программного пакета ANSYS APDL, представляют собой 3D-модели индукционных систем для расчета связанных электромагнитных и тепловых задач нагрева диска. Рассматриваемая система включает трехвитковые индукторы и нагреваемый металлический диск. Диск изготовлен из закаленной стали и имеет следующие основные размеры: внешний диаметр – 410 мм, толщина – 3 мм. Рабочая частота систеа мы составляет 2,5 кГц. Во время нагрева в объекте поддерживается постоянная мощность. Окружающей средой служит воздух; она численно описана как немагнитная непроводящая среда, не содержащая источников генерации электромагнитного поля.

Глубина проникновения тока в сталь зависит от ее марки, и при частоте тока 2,5 кГц принята лежащей в диапазоне 1,5 – 0,7 мм, при этом относительная магнитная проницаемость μ должна лежать в диапазоне 10 – 40.

Известно, что для выполнения высо-

коэффективного отпуска стали требуется выполнять прогрев глубже, чем глубина ее закалки. Объемный индукционный нагрев с малым перепадом температур по сечению достигается за счет относительно небольшой скорости нагрева. Равномерность температуры в заданной области может быть достигнута как за счет высокой теплопроводности нагреваемого объекта, так и изменения требуемого интервала времени нагрева ввиду малой толщины изделия. Достижение заданного температурного уровня возможно при использовании и других значений частот, что обеспечит отличное от исходного распределение температуры по поверхности диска при неизменности исходных данных. Также, если предполагать наличие сложного профиля образца, изготовленного штамповкой, то для нагрева такого образца с целью последующего отпуска использование частот свыше 2500 Гц может повлечь за собой возникновение горячих точек.

В численных моделях геометрическая форма индукторов и позиционирование объекта нагрева полностью повторяет натурные образцы. Заготовка крепится к системе передачи крутящего момента, связанной с электрическим двигателем. Вихревые токи создают (по умолчанию) локальное нагревание электропроводящей заготовки под индуктором, но зафиксировать это явление с помощью тепловизора можно только на поверхности. Именно поэтому в данном случае необходимо провести численное моделирование.

На рис. 1 – 3 представлены результаты первого этапа исследования. 3D-модель разбивается на конечно-элементную сетку следующим образом: на толщину диска приходится пять разбиений на каждый ее миллиметр; по диаметру диска конечные элементы сетки более крупные, однако их размер позволяет получить неплохие результаты. Удается построить зависимости между основными параметрами, выполнить оценку соответствия численных результатов экспериментальным данным.

Электромагнитные и теплофизические характеристики, а именно относительная магнитная проницаемость, удельное сопротивление, коэффициент теплопроводности, коэффициент теплоотдачи, теплоемкость имеют нелинейный характер и зависят как от температуры закаленного стального диска, так и от температуры окружающей среды. Плотность материала диска предполагается постоянной и равномерной.

Принципы построения модели для решения связанных задач электромагнетизма и теплофизики, учет вращения, нелинейность магнитной проницаемости μ и алгоритм обновления данных при динамическом изменении температуры подробно описаны в докладе [4].

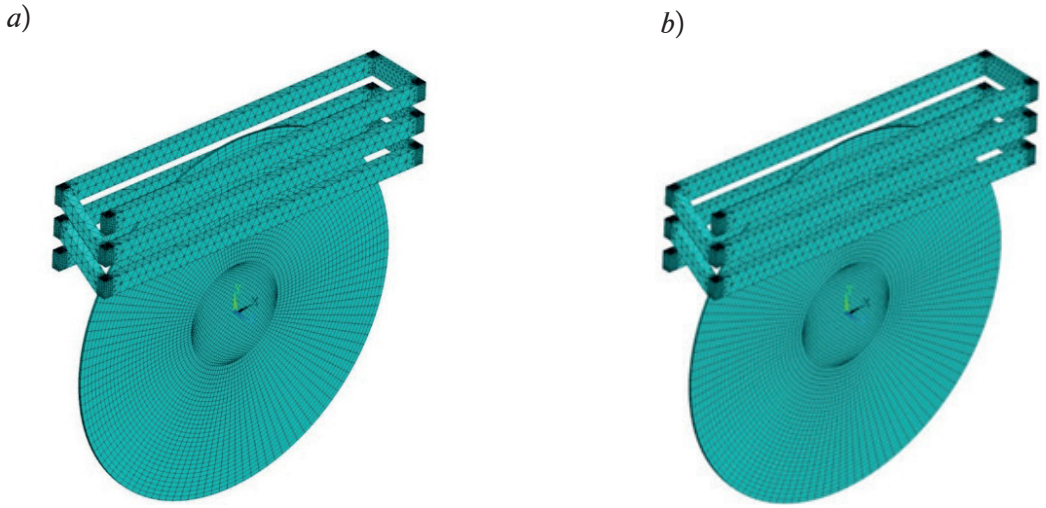
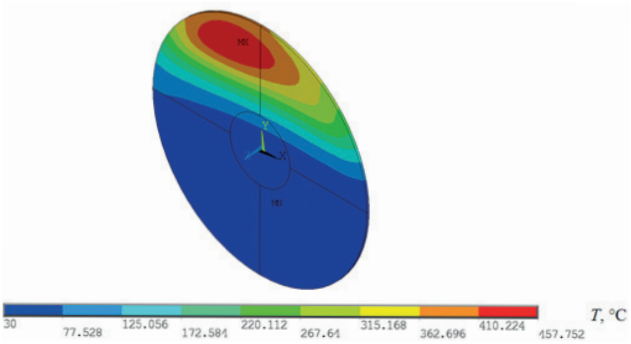


Рис. 1. 3D-модели индукционной системы нагрева в продольном (*a*) и поперечном (*b*) магнитных полях

Сравнение результатов экспериментов и численного моделирования представлено на рис. 2.

Имеется ряд объективных причин расхождения расчетных данных с опытными. Резкие провалы на графике температурного распределения по радиусу заготовки (рис. 3) объясняются тем, что тепловизор находился на некотором отдалении от системы нагрева. В конкретном примере указанные провалы характеризуются температурой на поверхности водоохлаждаемых витков индуктора. Ввиду частичного размещения заготовки внутри индуктора, оказалось невозможным иначе осуществить температурные измерения.

a)



b)

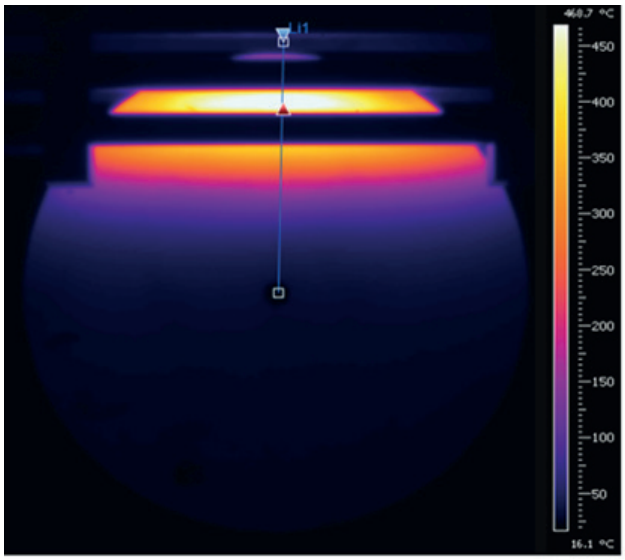


Рис. 2. Сравнение результатов моделирования (*a*) с экспериментальными данными (*b*);
получены для температурного распределения по поверхности заготовки при стационарном нагреве диска в высокочастотном продольном магнитном поле;
b — прямая, проходящая от края диска к его центру, указывает направление, вдоль которого произведен замер температуры; красный треугольник указывает максимальную температуру на поверхности диска

На втором этапе было промоделировано вращение диска. При скорости вращения заготовки 18 об/мин, нагрев до температуры 450 °С достигался за 30 с (рис. 4 и 5). Графики построены на основе усредненных результатов.

Время нагрева выбрано в предположении, что проводится отпуск металлического изделия. При высокочастотной закалке значительное влияние на механические свойства оказывает температура отпуска. Как уже было указано, выбор данного значения температуры сделан на основе результатов работы [7], где приведены данные, полученные после отпуска насквозь закаленного металлического образца толщиной 3 мм. Умеренная скорость нагрева способна обеспечить стабильность температурного поля, и как следствие, высокую прочность, пластичность и вязкость металла. Дальнейшее повышение температуры отпуска неизбежно приведет к снижению прочности и повышению ударной вязкости изделия.

При низкой скорости вращения металлического диска конечное температурное распределение формируется за счет процессов теплопроводности материала и тепловых потерь с его поверхностей. Полученные результаты согласуются с данными работы [8 — 10], где приведены зависимости выделяемой дополнительной мощности в диске от частоты вращения.

Как видно из представленных в настоящей работе данных, кромки диска, за счет тепловых потерь через излучение, обладают более низкой температурой относительно требуемого уровня, а максимум температуры по радиусу диска смещен в сторону центра нагреваемого образца.

Ввиду влияния рабочей частоты и конструкции индуктора на конечный температурный профиль металлического диска, нами был смоделирован его сквозной нагрев под отпуск. Это позволило обеспечить минимизацию перепада температур по сечению диска в зоне нагрева. При численном исследовании, однако, не было учтено наличие закаленного слоя. Можно предсказать, не прибегая к моделированию, что на практике это будет проявляться в неравномерном снижении твердости по радиусу диска, но твердость будет снижена оптимальным способом.

Расхождение численных результатов с

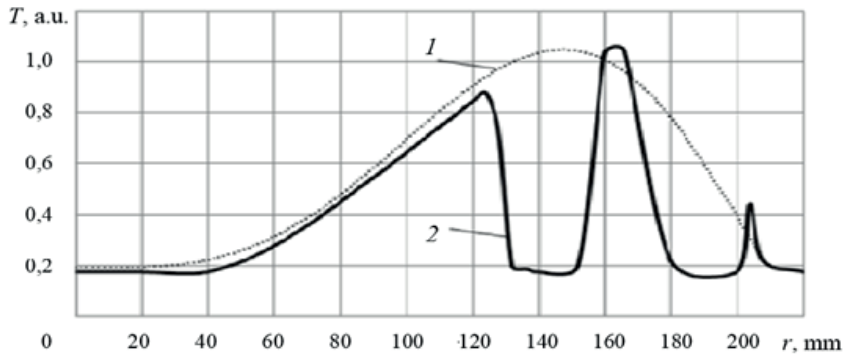
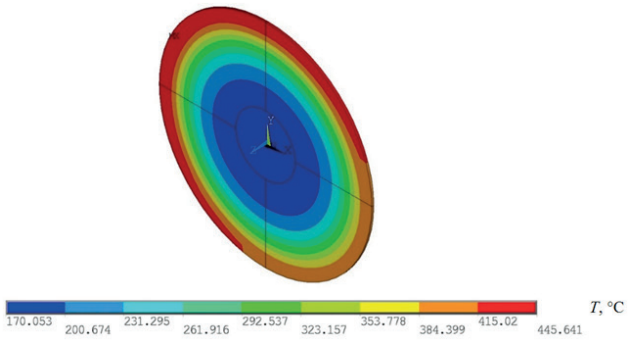


Рис. 3. Конечный температурный профиль вдоль радиуса заготовки по результатам численного моделирования (*1*) и эксперимента (*2*)

a)



b)

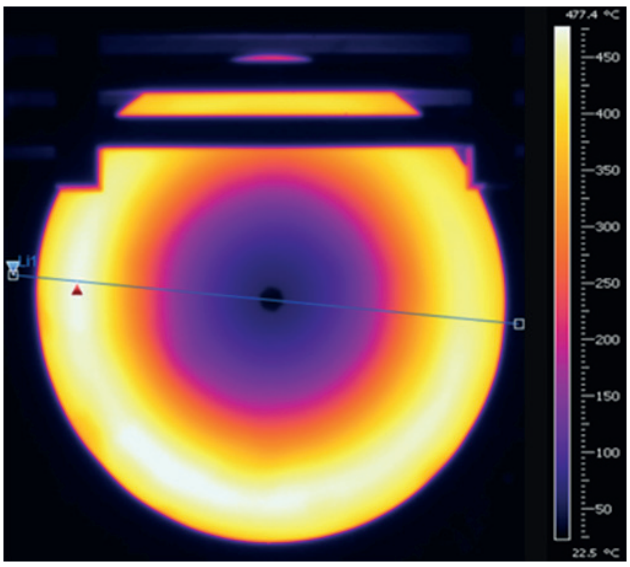


Рис. 4. Сравнение результатов моделирования (*a*) с экспериментальными данными (*b*);
получены для температурного распределения по поверхности заготовки при нагреве диска вращением в высокочастотном продольном магнитном поле;
b — прямая, проходящая через центр диска, указывает направление, вдоль которого произведен замер температуры; красный треугольник указывает максимальную температуру на поверхности диска

экспериментальными данными составляет около 5 %, что указывает на адекватность выполненного нами моделирования.

Естественная конструкция нагревательной системы предполагает также наличие магнитопровода, который позволяет использовать более низкую частоту электромагнитного поля благодаря контролю полюсного шага индуктора.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что предложенная индукционная система чувствительна к изменению геометрических параметров — геометрии индуктора и позиции витков относительно заготовки, а также к изменению электрических параметров. Следовательно, существует такая оптимальная конфигурация параметров, которая позволит достичь наилучшего результата — равномерного локального нагрева изделия в допустимом диапазоне отклонений температуры от заданного значения за наименьший промежуток времени проведения технологической операции термообработки.

Проведенное исследование показало, что применение нестандартных решений дает дополнительные возможности для регулирования технологического процесса нагрева и повышения эффективности термообработки. Таким образом, можно выделить ключевое направление повышения эффективности индукционных систем нагрева металлических изделий вращением — это модернизация существующих и разработка новых индукционных нагревательных систем на основе автоматической оптимизации геометрических, позиционных и электрических параметров (совместно с использованием компьютерного модели-

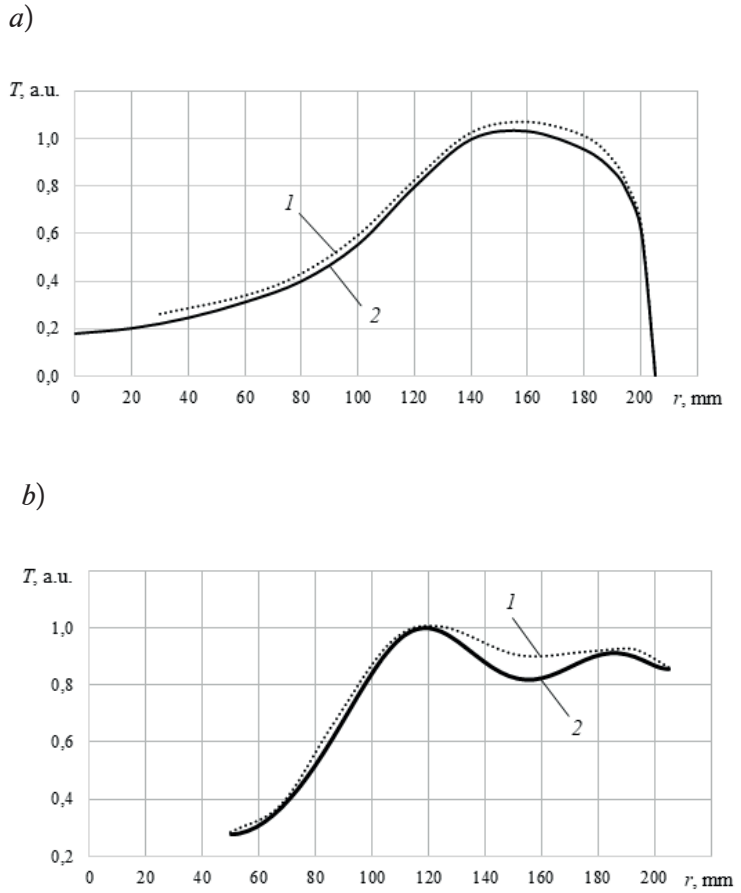


Рис. 5. Температурные профили на поверхности заготовки вдоль радиуса при нагреве диска в продольном (*a*) и поперечном (*b*) магнитных полях: *1* – результаты моделирования, *2* – экспериментальные данные

рования). Данное направление позволит успешно решать сопряженные с данной проблемой физические задачи при термообработке, проектировать форму индукторов, выбирать оптимальный режим работы, закладывать свойства новых материалов в конструкцию разрабатываемых систем, выполнять надежную оценку по внедрению нестандартный решений для сокращения материальных затрат.

Заключение

Для расчета взаимосвязанных электромагнитных и тепловых задач, в программном пакете ANSYS APDL были разработаны проблемно-ориентированные 3D-модели индукционных систем. Разработанные модели были опробованы и верифицированы экспериментально. Полученные результаты можно успешно применять для анализа и решения электротепловых задач при проектировании индукционных установок и параметрическом поиске оптимальных конфигураций рассматриваемых систем. В свою очередь, их оптимальные характеристики обеспечат высокое качество конечного продукта и его максимальный выход, минимальную стоимость оборудования и максимальную суммарную эффективность.

Перспективы использования разработанных моделей связаны с исследованием различных индукционных систем для нагрева заготовок различной формы. Разработанные методы и подходы можно применять для других электротехнических процессов. Предлагаемые решения допускают успешное использование полученных результатов для стальных колец, дисков, зубчатых колес, валов, пружин и других симметричных заготовок различных типоразмеров, для проектирования индукционных установок и параметрического поиска оптимальных системных конфигураций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zlobina M., Nacke B., Nikanorov A.** Numerical investigation of different concepts to control the temperature field at the induction heating of aluminium billets by rotation in superconductive magnets // Proceedings of the 6th International Conference on Electromagnetic Processing of Materials "EPM 2009". Dresden (Germany), 19–23 October 2009. Dresden, 2009. Pp. 177–180.

2. **Fabbri M., Morandi A., Negrini F.** Temperature distribution in aluminium billets heated by rotation in static magnetic field produced by superconducting magnets // COMPEL – The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering. 2005. Vol. 24. No. 1. Pp. 281–290.

3. **Nacke B., Zlobina M., Nikanorov A.** Ulferts: Numerical simulation of induction heating of aluminium billets by rotation in DC magnetic field// Proceedings of International Symposium on Heating by Electromagnetic Sources. Padua. 2007. Pp. 497–504.

4. **Mannanov E., Galunin S., Nikanorov A., Nacke B.** Simulation algorithm for induction heating of rotated workpieces with complex shape // Proceedings of the 18th International UIE-Congress "Electrotechnologies for Material Processing". Hannover (Germany), June 6 – 9, 2017. Pp. 491–496.

5. **Mannanov E., Galunin S., Blinov K.** Numerical optimization of transverse flux induction heating systems // Proceedings of the 2015 IEEE North West Russia Section Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference (ElConRusNW 2015). Pp. 241–244.

6. **Mannanov E., Muratov A., Galunin S.** Numerical investigation of spatial control tools of temperature distribution in the heating systems by rotation // Research and Development of Young Scientists: The Collected Reports of the 6th International Youth Scientific and Practical Conference. Novosibirsk, 16.10. 2015. Pp. 71–75.

7. **Шепеляковский К.З.** Упрочнение деталей машин поверхностной закалкой при индукционном нагреве. М.: Машиностроение, 1972. 287 с.

8. **Лепешкин С.А.** Исследование петлевых индукторов для моделирования и повышения эффективности нагрева вращающихся дисков ГТД // «Энерго- и ресурсосбережение – XXI век». Сб. матер. XIII международной научно-практической интернет-конференции. Орловский гос. ун-т, «Орловский региональный центр энергосбережения». 2015. С. 84–87.

9. **Кувалдин А.Б., Лепешкин А.Р., Лепешкин С.А.** Моделирование режимов индукционного нагрева дисков турбин ГТД с использованием специальных индукторов // Электротехника. Электротехнология. Энергетика. Сб. научн. тр. VII Международной научной конференции молодых ученых. Межвузовский центр содействия научной и инновационной деятельности студентов и молодых ученых Новосибирской области. 2015. С. 70–73.

10. **Лепешкин С.А.** Моделирование и исследование распределений температур во вращающихся дисках с учетом взаимного влияния // «Энерго- и ресурсосбережение – XXI век». Матер. XII Междунар. научно-практ. интернет-конференции. 2014. С. 77–79.

Статья поступила в редакцию 20.01.2019, принята к публикации 15.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

МАННАНОВ Эмиль Рамилевич – *аспирант кафедры электротехнологической и преобразовательной техники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» имени В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197376, *Российская Федерация, г.* Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5.
emil-mannanov@mail.ru

ГАЛУНИН Сергей Александрович – *кандидат технических наук, заведующий кафедрой электротехнологической и преобразовательной техники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» имени В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

197376, *Российская Федерация, г.* Санкт Петербург, ул. Профессора Попова, 5.
galunin@mail.ru

НИКАНОРОВ Александр Николаевич – *кандидат технических наук, научный сотрудник Института электротехнологий Ганноверского университета им. В. Лейбница, г. Ганновер, Германия.*
Wilhelm-Busch-Str. 4, 30167, Hannover, Deutschland
nikanorov@etp.uni-hannover.de

НАКЕ Бернард – *доктор технических наук, директор Института электротехнологий Ганноверского университета им. В. Лейбница, г. Ганновер, Германия.*
Wilhelm-Busch-Str. 4, 30167, Hannover, Deutschland
etp@etp.uni-hannover.de

КОЗУЛИНА Татьяна Павловна – *аспирантка кафедры электротехнологической и преобразовательной техники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» имени В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
197376, *Российская Федерация, г.* Санкт Петербург, ул. Профессора Попова, 5.
kozulina.tatiana@mail.ru

REFERENCES

1. **Zlobina M., Nacke B., Nikanorov A.,** Numerical investigation of different concepts to control the temperature field at the induction heating of aluminium billets by rotation in superconductive magnets, Proceedings of the 6th International Conference on Electromagnetic Processing of Materials "EPM 2009", Dresden (Germany), 19–23 October 2009, Dresden (2009) 177–180.

2. **Fabbri M., Morandi A., Negrini F.,** Temperature distribution in aluminium billets heated by rotation in static magnetic field produced by superconducting magnets, COMPEL – The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering. 24 (1) (2005) 281–290.

3. **Nacke B., Zlobina M., Nikanorov A.,** Ulferts: Numerical simulation of induction heating of aluminium billets by rotation in DC magnetic field, Proceedings of International Symposium on Heating by Electromagnetic Sources, Padua (2007) 497–504.

4. **Mannanov E., Galunin S., Nikanorov A., Nacke B.,** Simulation algorithm for induction heating of rotated workpieces with complex shape, Proceedings of the 18th International UIE-Congress "Electrotechnologies for Material Processing", Hannover (Germany), June 6–9 (2017) 491–496.

5. **Mannanov E., Galunin S., Blinov K.,** Numerical optimization of transverse flux induction heating systems, Proceedings of the 2015 IEEE North West Russia Section Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference (ElConRusNW 2015), (2015) 241–244.

6. **Mannanov E., Muratov A., Galunin S.,** Numerical investigation of spatial control tools of temperature distribution in the heating systems by rotation, Research and Development of Young Scientists: The Collected Reports of the 6th International Youth Scientific and Practical Conference, Novosibirsk, 16.10. 2015. (2015) 71–75.

7. **Shepelyakovskiy K.Z.,** Uprochneniye detaley mashin poverkhnostnoy zakalkoy pri induktsionnom nagreve [Machine parts strengthening by shell hardening in the induction heating], Mashinostroyeniye, Moscow, 1972.

8. **Lepeshkin S.A.,** Issledovaniye petlevykh induktorov dlya modelirovaniya i povysheniya effektivnosti nagreva vrashchayushchikhsya diskov GTD [Studies in the loop inducers for modeling and improvement of efficiency of rotating TE discs' heating], In collected book "Energy- and Resource- Saving – The 21th century", Proceedings of the 13th International Theoretical and Practical Internet Conference, "The Orel Region Center of Energy-Saving" (2015) 84– 87.

9. **Kuvaldin A.B., Lepeshkin A.R., Lepeshkin S.A.,** Modelirovaniye rezhimov induktsionnogo nagreva diskov turbin GTD s ispolzovaniyem spetsialnykh induktorov [Modeling of induction heating modes for turbines' disks using special inducers], "Electrotechnics, Electrotechnology, Energetics" – Coll. Book of Scientific Papers of the 7th Intern. Sci. Conf. for Youth Reseachers, Novosibirsk Oblast (2015) 70–73.

10. **Lepeshkin S.A.**, Modelirovaniye i issledovaniye raspredeleniy temperatur vo vrashchayushchikhsya diskakh s uchetom vzaimnogo vliyaniya [Modeling and investigation of temperature distribution in the rotating disks with consideration for their mutual coupling], In: "Energy- and Resourse-Saving – The 21th Century", Proceedings of the 12th International Research-to-Practice Internet Conference (2014) 77–79.

Received 20.01.2019, accepted 15.04.2019.

THE AUTHORS

MANNANOV Emil R.
St. Petersburg Electrotechnical University "LETI"
5 Professora Popova St., 197376, St. Petersburg, Russian Federation
emil-mannanov@mail.ru

GALUNIN Sergei A.
St. Petersburg Electrotechnical University "LETI"
5 Professora Popova St., 197376, St. Petersburg, Russian Federation
galunin@mail.ru

NIKANOROV Alexander N.
Institute for Electrotechnology of the Leibniz University of Hanover
Wilhelm-Busch-Str. 4, 30167, Hannover, Deutschland
nikanorov@etp.uni-hannover.de

NACKE Bernard
Institute for Electrotechnology of the Leibniz University of Hanover
Wilhelm-Busch-Str. 4, 30167, Hannover, Deutschland
etp@etp.uni-hannover.de

KOZULINA Tatiana P.
St. Petersburg Electrotechnical University "LETI"
5 Professora Popova St., 197376, St. Petersburg, Russian Federation
kozulina.tatiana@mail.ru

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

Математическая физика

DOI: 10.18721/JPM.12203
УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТОМСОНА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОБЩЕГО ВИДА

А.С. Бердников[1], Л.Н. Галль[1], Н.Р. Галль[1], К.В. Соловьев[2,1]

[1]Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Статья продолжает цикл работ, посвященный изучению электронно- и ионно-оптических свойств электрических и магнитных полей, представимых в аналитической форме. Целью исследования является поиск альтернативных рецептов для генерирования новых аналитических решений трехмерного уравнения Лапласа и, в частности, для генерирования трехмерных гармонических функций, являющихся однородными по Эйлеру. Рассматриваются обобщения широко известной алгебраической формулы Томсона (преобразование Кельвина), которые используют линейные алгебраические формы с частными производными первого порядка. Приведен исчерпывающий список симметризованных однородных дифференцирующих выражений первого порядка, преобразующих произвольные трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции. Дано обобщение полученных трехмерных формул на случай произвольного (конечного) числа измерений.

Ключевые слова: электростатическое поле, магнитостатическое поле, скалярный потенциал, уравнение Лапласа, формула Томсона

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 32–48. DOI: 10.18721/JPM.12203

GENERALIZATION OF THE THOMSON FORMULA FOR GENERAL HARMONIC FUNCTIONS

A.S. Berdnikov[1], L.N. Gall[1], N.R. Gall[1], K.V. Solovyev[2,1]

[1]Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russian Federation;

[2]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The paper continues the investigation of electron and ion optical properties of electric and magnetic fields which can be represented in an analytical form. The target of this research is new recipes for generating analytical solutions of 3D Laplace equation, in particular, for generating 3D harmonic functions which are homogeneous in Euler terms. Linear algebraic expressions with first order partial derivatives which generalize the widely known Thomson formula (Kelvin transformation), are analyzed. The paper provides an exhaustive list of symmetric and homogeneous first order differentiating expressions that convert an arbitrary 3D harmonic function into some new 3D harmonic functions. The produced 3D expressions are generalized for the *n*-dimensional case.

Keywords: electrostatic field, magnetostatic field, scalar potential, Laplace's equation, Thomson formula

Citation: Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V., Generalization of the Thomson formula for general harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48. DOI: 10.18721/JPM.12203

Введение

Формула Томсона [1 – 3] для трехмерных гармонических функций является уникальным инструментом. Любая другая формула подобного типа может отличаться от оригинальной формулы Томсона лишь тривиальной заменой переменных, представленной в виде суперпозиции сдвигов, отражений, вращений и пропорциональных растяжений координат. Опишем действие формулы Томсона более подробно.

Если $U(x,y,z)$ есть произвольная гармоническая функция трех переменных, т. е. она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0 \qquad (1)$$

(здесь и далее нижние индексы, составленные из символов x, y, z, обозначают частные производные по соответствующим переменным), то функция

$$V\left(x,y,z\right) = \frac{1}{r}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right), \qquad (2)$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, тоже будет гармонической [1, 2]. Повторное использование формулы (2) осуществляет обратный переход от функции $V(x,y,z)$ к функции $U(x,y,z)$. Удостовериться в гармоничности функции V, полученной из уравнения (2) (если функция U будет гармонической), можно с помощью тождества

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \equiv \frac{1}{r^5}\left(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}\right),$$

где функция V задается выражением (2), а функция U – произвольная.

Замена переменных, использованная для аргументов функции U в формуле (2), представляет собой инверсию в шаре единичного радиуса с центром в начале координат. Формула (2) известна как формула Томсона по имени ее автора – выдающегося британского физика и механика Уильяма Томсона, лорда Кельвина [3 – 5]; иногда эту формулу также называют преобразованием Кельвина [1, 6 – 10]. Трансформация (2) сохраняет гармоничность функции и может, в частности, использоваться не только при решении краевых задач с условием Дирихле, когда внутренняя задача Дирихле преобразуется во внешнюю и наоборот, но и при генерировании новых аналитических решений для скалярных потенциалов электростатических и магнитостатических полей, которые оказываются полезными при синтезе электронно- и ионно-оптических систем [11 – 13].

Полезным инструментом при синтезе электронно- и ионно-оптических систем специального вида являются электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру [14 – 18]. Траектории движения заряженных частиц в электростатических и магнитостатических полях, однородных по Эйлеру, подчиняются принципу подобия траекторий Ю.К. Голикова [19, 20], откуда и следуют уникальные оптические свойства устройств, управляющих движением заряженных частиц и использующих однородные по Эйлеру электрические и магнитные поля.

Как правило, такие поля характеризуются скалярным электрическим или магнитным потенциалом, представляющим собой функцию, однородную (точнее, положительно однородную) по Эйлеру в смысле, который придается этому термину в классическом математическом анализе [21, 22]:

$$\forall\lambda > 0:\ U\left(\lambda x,\lambda y,\lambda z\right) \equiv \lambda^k U\left(x,y,z\right), \qquad (3)$$

где k – степень однородности скалярной функции (она не обязательно целочисленная) и, соответственно, степень однородности поля.

Возможные исключения, когда скалярный потенциал однородного поля не является однородной функцией, исследуются в статье [23].

Если $U(x,y,z)$ – гармоническая и однородная по Эйлеру функция со степенью однородности k, то гармоническая функция $V(x,y,z)$, вычисленная согласно правилу (2), также будет однородной по Эйлеру со степенью однородности $(-k-1)$. Повторное использование трансформации (2) осуществляет обратный переход от функции $V(x,y,z)$ к функции $U(x,y,z)$. Поэтому для каждой гармонической функции, однородной по Эйлеру со степенью однородности k, обязательно существует гармонический прототип со степенью

однородности ($-k-1$), из которого ее можно получить с помощью формулы (2). В сочетании с операцией дифференцирования по переменным x, y, z, которая является универсальным способом получения новых гармонических однородных функций с понижением степени однородности [24, 25], формула Томсона (2) позволяет получать алгебраически-дифференциальные формулы общего вида для трехмерных гармонических однородных функций с любыми целочисленными степенями однородности [24, 26]. В качестве исходной точки используется формула Донкина для трехмерных гармонических однородных функций нулевой степени [16, 17, 24, 27 – 31]. Более подробно этот вопрос исследуется в работах [24, 26].

Для однородных по Эйлеру функций U, удовлетворяющих тождеству (3), общий множитель $1/r^2$ в формуле (2) выносится наружу из-под аргументов функции. Тогда формула (2) принимает упрощенный вид (см. трактат У. Томсона [5], приложение Б к главе 1):

$$V(x,y,z) = r^{-2k-1}U(x,y,z). \tag{4}$$

Можно убедиться, что при подстановке в формулу (4) однородной функции U функция (4) будет однородной. Гармоничность функции V, вычисленной в соответствии с правилом (4), следует из тождества

$$\begin{gathered} V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \equiv r^m(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) + \\ + 2mr^{m-2}(xU_x + yU_y + zU_z - kU) + \\ + m(m+2k+1)r^{m-2}U, \end{gathered} \tag{5}$$

справедливого для функций вида $V(x,y,z) = r^m U(x,y,z)$ с произвольным показателем степени m и произвольной функцией U. Действительно, правая часть тождества (5) при $m = 0$ и $m = -2k - 1$ обращается в нуль, так как функция U должна удовлетворять уравнению Лапласа (1) и дифференциальному соотношению Эйлера для однородных функций [21, 22]:

$$xU_x + yU_y + zU_z = kU. \tag{6}$$

Задачей данной работы является поиск альтернативных рецептов для генерирования новых аналитических решений уравнения Лапласа и, в частности, для генерирования трехмерных гармонических функций, являющихся однородными по Эйлеру.

Уникальность алгебраической формулы Томсона

Рассмотрим трансформацию трехмерной гармонической функции $U(x,y,z)$ в соответствии с правилом

$$\begin{gathered} V(x,y,z) = S(x,y,z)\times \\ \times U\big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big), \end{gathered} \tag{7}$$

где S, f, g, h – некоторые фиксированные функции.

Здесь можно ограничиться линейными по U алгебраическими выражениями, поскольку уравнение Лапласа (1) обладает свойством линейности и линейная суперпозиция его решений с постоянными коэффициентами снова является решением.

Потребуем, чтобы для любых гармонических функций U выражение (7) было гармонической функцией. После подстановки выражения (7) в уравнение Лапласа (1) результат представляет собой линейную комбинацию, составленную из частных производных U, U_x, U_y, U_z, U_{xx}, U_{yy}, U_{zz}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz}. Поскольку функция U является гармонической, то производная U_{zz} может быть выражена через частные производные U_{xx} и U_{yy}:

$$U_{zz} = -U_{xx} - U_{yy}. \tag{8}$$

Возникает вопрос, можно ли рассматривать остальные частные производные как независимые. Ответ будет положительным: задача Коши для уравнения Лапласа (1) с начальными условиями

$$U(x,y,z_0) = U^{(0)}(x,y),$$
$$U_z(x,y,z_0) = U^{(n)}(x,y),$$

поставленная для плоскости $z = z_0$, разрешима при любых начальных значениях $U^{(0)}(x,y)$ и $U^{(n)}(x,y)$, по крайней мере, в некоторой окрестности плоскости $z = z_0$. Например, таким решением будет ряд Тейлора по переменной z, где все коэффициенты однозначным образом выражаются через функции $U^{(0)}(x,y)$, $U^{(n)}(x,y)$ и их производные по x, y. Поэтому производные от функций $U^{(0)}(x,y)$ и $U^{(n)}(x,y)$ по переменным x и y, вычисленные в фиксированной точке, будут независимыми числами.

Следовательно, если никаких дополнительных ограничений на гармоническую функцию U не накладывается, то в итоговой линейной комбинации частных производных от функции U, получившейся

после подстановки условия (8), оставшиеся частные производные следует считать независимыми, а каждый из множителей, сгруппированных перед этими частными производными, обязан быть нулем. В набор независимых частных производных входят смешанные производные любого порядка по x, y, но лишь нулевого и первого порядка по z. Это правило выполняется не только для производных не выше второго порядка, которые используются в рассматриваемой линейной комбинации, но и в общем случае (см. следующий раздел).

В результате для неизвестных функций S, f, g, h в предположении, что $S(x,y,z) \neq 0$, получается система из девяти уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}
f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z = 0, \\
f_x h_x + f_y h_y + f_z h_z = 0, \\
g_x h_x + g_y h_y + g_z h_z = 0, \\
f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2, \\
g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2, \\
S\left(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}\right) + \\
+2S_x f_x + 2S_y f_y + 2S_z f_z = 0, \\
S\left(g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}\right) + \\
+2S_x g_x + 2S_y g_y + 2S_z g_z = 0, \\
S\left(h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}\right) + \\
+2S_x h_x + 2S_y h_y + 2S_z h_z = 0, \\
S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = 0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Эта система уравнений является переопределенной (уравнений больше, чем неизвестных функций) и поэтому, вообще говоря, может не иметь решений [32 – 38]. Однако факт существования формулы Томсона (2) гарантирует, что у системы (9) имеются интересующие нас невырожденные решения, отличные от нуля.

Первые пять уравнений системы (9) означают, что взаимно-однозначное, непрерывно дифференцируемое отображение

$$\begin{gathered}
x' = f(x, y, z),\ y' = g(x, y, z), \\
z' = h(x, y, z)
\end{gathered} \tag{10}$$

является конформным, т. е. локально сохраняет углы между линиями в точке их пересечения независимо от расположения этих линий, и преобразует бесконечно малые отрезки в пропорциональные бесконечно малые отрезки с коэффициентом пропорциональности, который не зависит от направления. Такое отображение сохраняет форму бесконечно малых фигур, но не сохраняет длину линий, их кривизну, а также глобальную форму фигур и, возможно, ориентацию локального базиса [39, 40].

Для двумерной плоскости семейство конформных преобразований весьма разнообразно и, по сути, совпадает с семейством аналитических функций одного комплексного переменного [41 – 45]. Однако для размерности три и выше это не так: теорема Лиувилля о конформных отображениях в евклидовых пространствах (см. работы [46 – 52]) постулирует, что в этих случаях семейство конформных отображений совпадает с группой преобразований Мёбиуса [53 – 55] и что других многомерных конформных отображений не имеется. К сожалению, элементарного доказательства этой важной теоремы найти не удалось; по-видимому, самое простое доказательство содержится в работе [52].

Группа Мёбиуса в общем случае представляет собой группу, порождаемую следующими элементарными преобразованиями и их суперпозициями:

а) сдвиги (параллельный перенос),

$$x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c;$$

б) трехмерные вращения вокруг неподвижной точки [56, раздел 14.10];

в) отражения относительно гиперплоскостей, в частности элементарные симметрии

$$x' = -x,\ y' = -y,\ z' = -z;$$

г) пропорциональное растяжение по всем координатам относительно некоторого центра

$$x' = kx,\ y' = ky,\ z' = kz$$

(здесь в качестве центра используется начало координат);

д) инверсия относительно сферы,

$$\begin{gathered}
x' = x r_0^2/(x^2+y^2+z^2), \\
y' = y r_0^2/(x^2+y^2+z^2), \\
z' = z r_0^2/(x^2+y^2+z^2)
\end{gathered}$$

(здесь r_0 – радиус сферы, а в качестве центра сферы используется начало координат).

Не все перечисленные здесь преобразования являются независимыми. Так

например, растяжение можно заменить двумя последовательными инверсиями относительно сфер с общим центром, но разными радиусами, а отражения относительно гиперплоскостей $x = 0$, $y = 0$ или $z = 0$ можно заменить растяжением с коэффициентом масштабирования -1 в комбинации с поворотом на 180° относительно одной из координатных осей.

Для двумерного случая, наиболее типичного для практических приложений, группа Мёбиуса совпадает с группой дробно-линейных конформных преобразований, к которой добавлены комплексно-сопряженные дробно-линейные конформные преобразования (антиконформные, если под конформными преобразованиями понимать такие, которые сохраняют не только значения локальных углов, но и их направление, т. е. ориентацию локального базиса).

Можно показать, что любой элемент группы Мёбиуса приводится к одному из двух возможных видов:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{b} + \frac{\lambda A(\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2}, \tag{11}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{b} + \lambda A(\mathbf{r} - \mathbf{a}), \tag{12}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор (вообще говоря, n-мерный) для исходной точки; $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор для преобразованной точки; $\mathbf{a}$ — исходный центр геометрического преобразования; $\mathbf{b}$ — конечное расположение центра геометрического преобразования; λ — коэффициент растяжения (вещественное число); A — ортогональная матрица, удовлетворяющая условию $AA^T = A^TA = E$ и описывающая поворот в n-мерном пространстве относительно начала координат (возможно, с изменением ориентации локального базиса, если определитель матрицы A равен -1).

Для доказательства этого утверждения достаточно убедиться, что композиция геометрического преобразования (11) либо (12) с каждым из элементарных преобразований группы Мёбиуса, перечисленных выше, снова приводится либо к эталонному виду (11), либо к эталонному виду (12).

Трехмерные геометрические преобразования вида (11) или (12) очевидным образом раскладываются на суперпозицию элементарных преобразований в виде начального сдвига, инверсии с центром в начале координат (для преобразования (11)), трехмерных вращений вокруг начала координат [56, раздел 14.10] (возможно, в комбинации с одной из симметрий, изменяющих ориентацию системы), пропорционального растяжения относительно начала координат и окончательного сдвига к новому центру. При сдвиге, вращении, симметричном отражении и пропорциональном растяжении аргументов гармоническая функция U остается гармонической, так что в этих случаях множитель $S(x,y,z)$ для формулы (7) будет равен единице (точнее, произвольной константе, как это следует из системы уравнений (9)). В случае инверсии с центром в начале координат множитель $S(x,y,z)$ для формулы (7) с точностью до константы-множителя определяется в соответствии с формулой Томсона (2), и система уравнений (9) подтверждает, что этот множитель единственный.

Последовательное выполнение этих преобразований, когда конформное преобразование (10) записано в форме (11) либо (12), дает окончательное решение для проблемы нахождения алгебраических формул вида (7), сохраняющих свойство гармоничности. Если же требуется, чтобы однородная по Эйлеру гармоническая функция преобразовывалась в однородную же гармоническую функцию, то с точностью до поворота и пропорционального растяжения аргументов x, y, z относительно начала координат, а также с точностью до умножения значений потенциала во всех точках пространства на константу, ответом будет либо формула Томсона (2), либо тождественное равенство $V(x,y,z) = U(x,y,z)$. Доказательство уникальности формулы Томсона (2) можно найти также в книгах [8, 10].

Расширенная форма с привлечением первых производных

Отсутствие у чисто алгебраической трансформации (7) других содержательных решений, кроме классической формулы Томсона (2), заставляет искать другие способы генерирования новых гармонических функций. Рассмотрим трансформацию трехмерной гармонической функции $U(x,y,z)$ в соответствии с правилом

$$\begin{aligned} V(x,y,z) = \\ = S(x,y,z)\cdot U\big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big) + \\ + P(x,y,z)\cdot U_x\big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big) + \\ + Q(x,y,z)\cdot U_y\big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big) + \\ + R(x,y,z)\cdot U_z\big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big), \end{aligned} \tag{13}$$

где S, P, Q, R, f, g, h – некоторые фиксированные функции, U – произвольная гармоническая функция.

Как и раньше, потребуем, чтобы для заданных функций S, P, Q, R, f, g, h и любых гармонических функций U выражение (13) было гармонической функцией. Чтобы гарантировать, что функция (13) будет однородной функцией при однородных функциях U, потребуем, чтобы функции S, P, Q, R, f, g, h тоже были однородными по Эйлеру (легко убедиться, что такое требование будет не только достаточным, но и необходимым). А чтобы избавиться от излишней в нашем случае свободы выбора в виде трехмерных поворотов вокруг начала координат, ограничимся, по аналогии с формулой (2), случаем, когда

$$f(x,y,z) = x\varphi(x,y,z),$$
$$g(x,y,z) = y\varphi(x,y,z),$$
$$h(x,y,z) = z\varphi(x,y,z),$$

где общий множитель $\varphi(x,y,z)$ – это функция, однородная по Эйлеру.

Следует, однако, помнить, что здесь есть опасность отбросить какие-либо по-настоящему интересные решения, а не только вращения.

Однородные функции φ, S, P, Q, R удобно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) &= r^m\omega(x/r, y/r), \\ S(x,y,z) &= r^n s(x/r, y/r), \\ P(x,y,z) &= r^{n+m+1}u(x/r, y/r), \\ Q(x,y,z) &= r^{n+m+1}v(x/r, y/r), \\ R(x,y,z) &= r^{n+m+1}w(x/r, y/r), \end{aligned} \tag{14}$$

где m – степень однородности общего множителя для аргументов функции U; n – степень однородности множителя перед самой функцией U; $\omega(\chi,\eta)$, $s(\chi,\eta)$, $u(\chi,\eta)$, $v(\chi,\eta)$, $w(\chi,\eta)$ – некоторые, пока неизвестные, функции двух переменных.

Такая форма записи является слегка измененной формой универсального представления [21, 22] для однородных функций степени k:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = x_1^k g\left(x_2/x_1, \ldots x_n/x_1\right) \tag{15}$$

и не приводит к потере допустимых решений. Важно, что замена переменных, использованная при конструировании подстановки (14), является обратимой:

$$\begin{cases} \chi = x\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \eta = y\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \chi\rho, \\ y = \eta\rho, \\ z = \pm\rho\sqrt{1-\chi^2-\eta^2}. \end{cases}$$

После подстановки формул (13) в уравнение Лапласа (1) результат будет представлять собой линейную комбинацию с некоторыми, не зависящими от U, множителями, составленную из частных производных

$$U,\ U_x,\ U_y,\ U_z,\ U_{xx},$$
$$U_{yy},\ U_{zz},\ U_{xy},\ U_{xz},\ U_{yz},$$
$$U_{xxx},\ U_{xxy},\ U_{xxz},\ U_{xyy},\ U_{xyz},$$
$$U_{xzz},\ U_{yyy},\ U_{yyz},\ U_{yzz},\ U_{zzz}.$$

Поскольку функция U является гармонической, некоторые из этих производных можно выразить через другие:

$$U_{zz} = -U_{xx} - U_{yy},\ U_{xzz} = -U_{xxx} - U_{xyy},$$
$$U_{zzy} = -U_{xxy} - U_{yyy},\ U_{zzz} = -U_{xxz} - U_{yyz}.$$

Рассуждения, использованные в предыдущем разделе, показывают, что оставшиеся частные производные следует рассматривать как независимые. Поэтому после подстановки в полученную линейную комбинацию приведенных выше выражений для зависимых производных

$$U_{zz},\ U_{xzz},\ U_{yzz},\ U_{zzz}$$

и выделения общих множителей перед оставшимися частными производными, каждый из получившихся множителей должен оказаться тождественно равным нулю.

Получающаяся система уравнений в частных производных относительно неизвестных функций

$$\omega(\chi,\eta),\ s(\chi,\eta),\ u(\chi,\eta),\ v(\chi,\eta),\ w(\chi,\eta)$$

оказывается переопределенной. Она имеет достаточно сложный вид, и в связи с этим она здесь не приводится в явном виде. Из тех же соображений нами был опущен анализ совместности полученной системы уравнений и ее решений, так как он является весьма громоздким и, кроме стандартных технических приемов, ничего нового не содержит.

Анализ данной системы с помощью со-

ответствующих методов [32 – 38] приводит к следующим решениям, исчерпывающим все возможные случаи:

а) при $m = 0$ и $n = -1$ либо $m = -2$ и $n = 0$

$$\omega(\chi,\eta) = c,\ s(\chi,\eta) = 0,$$
$$u(\chi,\eta) = c_a,\ v(\chi,\eta) = c_b,\ w(\chi,\eta) = c_c,$$

где c, c_a, c_b, c_c – произвольные константы;

б) при $m = 0$ и $n = 1$ либо $m = n = -2$

$$\omega(\chi,\eta) = c, s(\chi,\eta) = (c_a / c)\chi + (c_b / c)\eta + (c_c / c)\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$
$$u(\chi,\eta) = c_a\left(-1+2\chi^2\right) + 2c_b\chi\eta + 2c_c\chi\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$
$$v(\chi,\eta) = 2c_a\chi\eta + c_b\left(-1+2\eta^2\right) + 2c_c\eta\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$
$$w(\chi,\eta) = 2c_a\chi\sqrt{1-\chi^2-\eta^2} + 2c_b\eta\sqrt{1-\chi^2-\eta^2} + c_c\left(1-2\chi^2-2\eta^2\right),$$

где c, c_a, c_b, c_c – произвольные константы;

в) при $m = n = 0$ либо $m = -2$ и $n = -1$

$$\omega(\chi,\eta) = c, s(\chi,\eta) = c_e,$$
$$u(\chi,\eta) = c_d\chi + c_c\eta - c_b\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$
$$v(\chi,\eta) = -c_c\chi + c_d\eta + c_a\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$
$$w(\chi,\eta) = c_b\chi - c_a\eta + c_d\sqrt{1-\chi^2-\eta^2},$$

где c, c_a, c_b, c_c, c_d, c_e – произвольные константы.

В итоге получается список из базовых формул, которые преобразуют исходные гармонические функции в новые гармонические функции:

$$V(x,y,z) = U(x,y,z), \tag{16}$$

$$V(x,y,z) = U_x(x,y,z), \tag{17}$$

$$V(x,y,z) = U_y(x,y,z), \tag{18}$$

$$V(x,y,z) = U_z(x,y,z), \tag{19}$$

$$V(x,y,z) = xU(x,y,z) + \left(x^2-y^2-z^2\right)U_x(x,y,z) + 2xyU_y(x,y,z) + 2xzU_z(x,y,z); \tag{20}$$

$$V(x,y,z) = yU(x,y,z) + 2xyU_x(x,y,z) + \left(-x^2+y^2-z^2\right)\times U_y(x,y,z) + 2yzU_z(x,y,z); \tag{21}$$

$$V(x,y,z) = zU(x,y,z) + 2xzU_x(x,y,z) + 2yzU_y(x,y,z) + \left(-x^2-y^2+z^2\right)U_z(x,y,z); \tag{22}$$

$$V(x,y,z) = xU_x(x,y,z) + yU_y(x,y,z) + zU_z(x,y,z); \tag{23}$$

$$V(x,y,z) = yU_x(x,y,z) - xU_y(x,y,z); \tag{24}$$

$$V(x,y,z) = zU_x(x,y,z) - xU_z(x,y,z); \tag{25}$$

$$V(x,y,z) = zU_y(x,y,z) - yU_z(x,y,z); \tag{26}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{27}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{28}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{29}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{30}$$

$$V(x,y,z) = \frac{x}{r^3}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right) + \frac{x^2-y^2-z^2}{r^5}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right) + \frac{2xy}{r^5}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right) + \frac{2xz}{r^5}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{31}$$

$$V(x,y,z) = \frac{y}{r^3}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right) + \frac{2xy}{r^5}U_x(v) + \frac{-x^2+y^2-z^2}{r^5}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right) + \frac{2yz}{r^5}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \tag{32}$$

$$V(x,y,z)=\frac{z}{r^3}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)+$$
$$+\frac{2xz}{r^5}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)+$$
$$+\frac{2yz}{r^5}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)+ \quad (33)$$
$$+\frac{-x^2-y^2+z^2}{r^5}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right);$$

$$V(x,y,z)=\frac{x}{r^3}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)+$$
$$+\frac{y}{r^3}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)+\frac{z}{r^3}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \quad (34)$$

$$V(x,y,z)=\frac{y}{r^3}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)-$$
$$-\frac{x}{r^3}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \quad (35)$$

$$V(x,y,z)=\frac{z}{r^3}U_x\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)-$$
$$-\frac{x}{r^3}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right); \quad (36)$$

$$V(x,y,z)=\frac{z}{r^3}U_y\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)-$$
$$-\frac{y}{r^3}U_z\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right), \quad (37)$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Формулы (16) – (19) тривиальны, однако по формальным причинам все же включены в этот список. Происхождение формул (20) – (22) на первый взгляд не очевидно, но можно заметить, что они получаются из формулы Томсона (2) после ее дифференцирования по одной из переменных x, y, z и повторного преобразования Томсона (2), которое возвращает аргументы функции U к прежнему виду.

Формулы (24) – (26) упоминаются в монографии [24], но почему-то лишь применительно к однородным гармоническим функциям нулевой степени. Формула (23), как и формулы (20) – (22), до настоящего момента авторам не встречалась (что, конечно, не означает, что таких ссылок нет).

Формулы (27) – (37) получаются из формул (16) – (26) с помощью преобразования Томсона. В частности, формула (27) получается из тождественного преобразования (16) и в силу этого совпадает с формулой (2).

В отличие от оригинальной формулы Томсона, повторное применение дифференцирующих преобразований (16) – (37) не возвращает преобразуемые функции к исходному виду. Однако некоторые комбинации преобразований (16) – (37) могут оказаться тождеством либо снова одной из указанного набора формул. Это связано с тем, что старшие производные от функции U, возникающие при комбинировании дифференцирующих преобразований (16) – (37), могут в конечном итоге сократиться, так как функция U удовлетворяет уравнению Лапласа.

Для однородных по Эйлеру функций формулы (16) и (23) – (26) сохраняют степень однородности функции. Формулы (17) – (19) понижают степень однородности функции на единицу, а формулы (20) – (22) повышают степень однородности функции на единицу. Соответственно, однородные функции степени k преобразуются формулами (27) и (34) – (37) в однородные функции степени ($-k-1$), формулами (28) – (30) – в однородные функции степени ($-k$), а формулами (31) – (33) – в однородные функции степени ($-k-2$).

Как и формула (16), применительно к гармоническим функциям, однородным по Эйлеру, формулы (23) и (34) вполне бесполезны. Из дифференциального соотношения Эйлера (6) для однородных функций [21, 22] следует, что результатом применения формулы (23) будет та же самая однородная гармоническая функция, только умноженная на константу (степень однородности). Соответственно, результат применения формулы (34) эквивалентен действию формулы (27), умноженной на константу.

Обобщение на случай *n* переменных

Известно, что формула Томсона (2) для трехмерных гармонических функций допускает обобщение на многомерный случай [7, 9]. Если

$$V(x_1,x_2,\ldots x_n)=\frac{1}{r^{n-2}}U\left(\frac{x_1}{r^2},\frac{x_2}{r^2},\ldots,\frac{x_n}{r^2}\right), \quad (38)$$

где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, а функция U –

гармоническая (удовлетворяет n-мерному уравнению Лапласа), то функция V также будет гармонической. Результатом подстановки в уравнение Лапласа функции

$$V\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = \frac{1}{r^m} U\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^m} U^*\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$$

будут цепочка равенств

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r^m} U^*\right) = U^* \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r^m}\right) +$$

$$+2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^m}\right) + \frac{1}{r^m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U^*}{\partial x_i^2};$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k}\left(\frac{-2x_i x_k}{r^4}\right) + \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{1}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial x_i^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k}\left(\frac{-2x_k}{r^4} + \frac{8x_i^2 x_k}{r^6}\right) + \frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{-2x_i}{r^4}\right) +$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_s}\left(\frac{4x_i^2 x_k x_s}{r^8}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i}\left(\frac{-2x_i x_k}{r^6}\right) +$$

$$+\frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{-2x_i}{r^4}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i}\left(\frac{-2x_i x_k}{r^6}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \frac{1}{r^4};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^m}\right) = \frac{-m x_i}{r^{m+2}};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r^m}\right) = \frac{-m}{r^{m+2}} + \frac{m\left(m+2\right)x_i^2}{r^{m+4}},$$

где в качестве аргументов для функции U используются значения

$$x_1/r^2,\ x_2/r^2,\ \ldots,\ x_n/r^2.$$

В конечном счете, поскольку $\sum_{i=1,n} x_i^2 = r^2$, на выходе получается тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{U^*}{r^m}\right) = \frac{m\left(m+2-n\right)}{r^{m+2}} U +$$

$$+\frac{2\left(m+2-n\right)}{r^{m+4}} \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{1}{r^{m+4}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2},$$

правая сторона которого для гармонических функций U обращается в нуль при $m = n - 2$. Следует отметить, что формула (38) остается справедливой, в том числе и при $n = 2$, когда она оказывается частным случаем конформного преобразования плоскости (точнее, антиконформного, т. е. с изменением направления отсчета углов):

$$V\left(x, y\right) = U\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Формулы с участием частных производных первого порядка из предыдущего раздела также переносятся на многомерный случай:

$$V\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = U\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right); \quad (39)$$

$$V\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = \frac{\partial U\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)}{\partial x_i}; \quad (40)$$

$$V\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = \left(n-2\right) x_i U\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) +$$

$$+\left(2x_i^2 - r^2\right) \frac{\partial U\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)}{\partial x_i} + \quad (41)$$

$$+\sum_{k \neq i} 2x_i x_k \frac{\partial U\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)}{\partial x_k};$$

$$V\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = \sum_k x_k \frac{\partial U\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)}{\partial x_k}; \quad (42)$$

$$V\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = x_i \frac{\partial U\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)}{\partial x_j} - \quad (43)$$

$$-x_j \frac{\partial U\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)}{\partial x_i};$$

$$V\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = \frac{1}{r^{n-2}} U\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right); \quad (44)$$

$$V\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right); \quad (45)$$

$$V\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = \frac{\left(n-2\right)x_i}{r^n} U\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right) +$$

$$+\frac{\left(2x_i^2 - r^2\right)}{r^{n+2}} \frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right) + \quad (46)$$

$$+\sum_{k \neq i} \frac{2x_i x_k}{r^{n+2}} \frac{\partial U}{\partial x_k}\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right);$$

$$V\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) =$$

$$= \sum_k \frac{x_k}{r^n} \frac{\partial U}{\partial x_k}\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right); \quad (47)$$

$$V\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = \frac{x_i}{r^n} \frac{\partial U}{\partial x_j}\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right) -$$

$$-\frac{x_j}{r^n} \frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right), \quad (48)$$

где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$.

В отличие от трехмерного случая, теперь уже нет уверенности, что приведенные формулы исчерпывают весь список симметрических однородных алгебраических формул с участием первых производных, которые будут преобразовывать произвольную n-мерную гармоническую функцию в новую n-мерную гармоническую функцию.

Формула (46) получается при дифференцировании формулы (38) по переменной x_i. Формула (41) получается из формулы (46) с помощью подстановки (38). Также с помощью подстановки (38) из формулы (42) получается формула (47), а из формулы (43) — формула (48). Наконец, в справедливости формулы (42) можно убедиться с помощью тождества

$$\sum_i \frac{\partial^2 V\left(x_1,\ldots x_n\right)}{\partial x_i^2} \equiv \sum_i \frac{\partial^2 U\left(x_1,\ldots x_n\right)}{\partial x_i^2} + \\ +\sum_k \left(x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_i \frac{\partial^2 U\left(x_1,\ldots x_n\right)}{\partial x_i^2} \right)\right),$$

которое выполнено для любых функций V вида (42), а в справедливости формулы (43) − с помощью тождества

$$\sum_k \frac{\partial^2 V\left(x_1,\ldots x_n\right)}{\partial x_k^2} \equiv \\ \equiv x_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_k \frac{\partial^2 U\left(x_1,\ldots x_n\right)}{\partial x_k^2} \right) - \\ -x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \frac{\partial^2 U\left(x_1,\ldots x_n\right)}{\partial x_k^2} \right),$$

которое выполнено для любых функций V-вида (43).

Заключение

В работе приведен исчерпывающий список однородных симметрических дифференцирующих выражений первого порядка, преобразующих произвольные трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции. Дано обобщение полученных формул на случай произвольного числа измерений.

Существуют аналогичные формулы, в которых используются частные производные более высокого порядка. В частности, такие формулы можно получать при многократном дифференцировании формулы Томсона (2) по переменным x, y и z, а также как результат суперпозиции полученных в данной работе дифференциальных преобразований первого порядка (16) − (37). Составление полного списка трансформирующих формул, которые характеризуются более высокими порядками производных, в них участвующих, выходит за рамки настоящей работы; оно представляет значительные технические трудности и, по нашему мнению, не имеет большого практического смысла.

При обращении к трансформациям с участием производных старшего порядка, следует учитывать, что у гармонической функции некоторые частные производные второго порядка и выше выражаются друг через друга. К любой трансформирующей формуле можно прибавить с произвольным множителем трехмерное уравнение Лапласа (1), в исходной форме либо после дифференцирования по x, y или z нужное число раз. Это не изменит природу трансформирующего преобразования (лишь алгебраическую форму) и, хотя и сохранит в неизменности его базовое свойство преобразовывать исходные гармонические функции в новые гармонические, но и к появлению дополнительных аналитических выражений для трехмерных гармонических функций также не приведет.

Можно заметить, что в процессе выкладок неявным образом использовалось предположение, что подстановка (10) будет невырожденной (обратимой). Возможно, при использовании вырожденных замен переменных существуют какие-либо дополнительные решения, не учтенные в данной работе. Однако большого практического значения такие вырожденные преобразования гармонических функций, даже если они есть, по всей видимости, не имеют. Например, подставив вместо аргументов какой-либо гармонической функции константы, получим на выходе константу, которая, безусловно, является гармонической функцией с формальной точки зрения, но при этом вполне бесполезной для практического использования.

Слабым местом проделанного анализа является предположение, что замена переменных имеет симметризованный вид

$$f(x, y, z) = x\varphi(x, y, z),$$
$$g(x, y, z) = y\varphi(x, y, z),$$
$$h(x, y, z) = z\varphi(x, y, z),$$

а все функции, участвующие в диффе-

ренциально-алгебраической формуле (13), являются однородными по Эйлеру. Список решений (16) – (37) сознательно ограничен симметрическими однородными линейными дифференциальными выражениями первого порядка. Возможно, существуют дополнительные дифференциально-алгебраические выражения вида (13), отличные от решений (16) – (37) и свободные от этого ограничения, которые также преобразуют трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции. Однако полноценный анализ такой расширенной задачи [57 – 60] выходит за рамки целей, поставленных в данном исследовании.

Следует также отметить, что уравнение Лапласа (1) не является единственным уравнением математической физики, для которого описываемый здесь подход оказывается полезным и результативным. Так, в работе [61] исследуются похожие дифференциальные преобразования для многомерного уравнения теплопроводности. К сожалению, результаты работы [61] нельзя прямо перенести на уравнение Лапласа, хотя уравнение Лапласа и является стационарным пределом уравнения теплопроводности. Причина состоит в том, что преобразования, используемые в работе [61], включают в явном виде время, причем таким образом, что стационарные решения преобразуются в нестационарные.

Благодарности

Данная публикация входит в цикл работ, посвященных исследованию электронно- и ионно-оптических свойств электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру и представимых в аналитической форме. Этот цикл продолжает традицию аналитических исследований свойств электронно- и ионно-оптических систем, созданную нашим учителем, выдающимся физиком-теоретиком Юрием Константиновичем Голиковым (1942 – 2013), который работал на кафедре физической электроники СПбГПУ и щедро делился с учениками своими глубокими энциклопедическими знаниями в области фундаментальных математических результатов классиков XVII – XIX и начала XX века, не слишком-то популярных в наше компьютеризированное время.

Авторы считают своей обязанностью выразить глубокую благодарность создателям, сотрудникам и спонсорам сайтов Bibliothique nationale de France [62] и Proceedings of the Royal Society of London [63], благодаря самоотверженной работе которых, в частности, имеется возможность свободно познакомиться с уникальными архивными материалами [3, 28, 29]. Авторы благодарны создателям, сотрудникам и спонсорам цифровой библиотеки Numdam [64] за возможность открытого доступа к раритетным математическим публикациям из французских математических журналов, в частности к статье 1883 года издания [65]. Необходимо также отметить большую пользу для проделанного нами исследования архивных источников, полученных из цифровых библиотек HathiTrust Digital Library [66] и Das Göttinger Digitalisierungszentrum (GDZ) [67], где, в частности, есть возможность ознакомиться с оцифрованной версией журнала «The Cambridge and Dublin Mathematical Journal», издававшегося в конце XIX века и содержащего оригинальные публикации Уильяма Томсона и Джорджа Буля на рассматриваемую тему. Указанным публичным организациям и фондам, бескорыстно занимающимся сохранением уникального исторического научного наследия Европы и обеспечивающих к нему открытый доступ, авторы выражают свою самую искреннюю благодарность.

Вычисления, приводимые в данной работе, выполнены с помощью программы Wolfram Mathematica [68].

Данная работа частично выполнена в рамках государственного задания № 075-00780-19-00 Института аналитического приборостроения РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сретенский Л.Н.** Теория ньютоновского потенциала. Москва, Ленинград: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946. 318 с.

2. **Голиков Ю.К.** Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2 (44). С. 165–181.

3. **Thomson W.** Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1847. Tome XII. Pp. 256–264.

4. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Ч. I. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 572 с.

5. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Ч. II. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 560 с.

6. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.

7. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

8. **Kellogg O.D.** Foundations of potential theory. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1967. 386 p.

9. **Уэрмлер Дж.** Теория потенциала. М.: Мир, 1980. 134 с.

10. **Helms L.L.** Potential theory. 2nd Ed. London, Heidelberg, New-York, Dordrecht: Springer, 2014. 485 p.

11. **Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В.** Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Ленинград: Изд-во ЛПИ, 1984. 79 с.

12. **Голиков Ю.К., Соловьёв К.В.** Электростатические ионные ловушки. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2008. 152 с.

13. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 409 с.

14. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.

15. **Краснова Н.К.** Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. 01.04.04. СПб.: СПбГПУ, 2013. 259 с.

16. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 2. С. 91–94.

17. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44–47.

18. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. № 1. С. 50–58.

19. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.

20. **Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.** Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.

21. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

22. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.

23. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Об однородности скалярных и векторных потенциалов электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5. № 1. С. 10–27.

24. **Гобсон Е.В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952. 476 с.

25. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Теорема о дифференцировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 3. С. 107–119.

26. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру, с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 4. С. 13–30.

27. **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.** Курс современного анализа. Ч. 2: Трансцендентные функции. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. 516 с.

28. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. Pp. 43–57.

29. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c. // Proceedings of the Royal Society of London. 1856 –1857. Vol. 8. Pp. 307–310.

30. **Голиков Ю.К.** Решение задачи Коши для однородных гармонических потенциалов нулевой кратности // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2 (44). С. 59–62.

31. **Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Применение формулы Донкина в теории электростатических призм // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 11. С. 1711–1719.

32. **Гюнтер Н.М.** Интегрирование уравне-

ний в частных производных первого порядка. Ленинград, Москва: ОНТИ, 1934. 368 с.

33. **Трикоми Ф.** Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957. 443 с.

34. **Рашевский П.К.** Геометрическая теория уравнений с частными производными. Москва, Ленинград: ГИТТЛ, 1947. 362 с.

35. **Фиников С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва, Ленинград: ОГИЗ, 1948. 432 с.

36. **Картан Э.** Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во Московского ун-та, 1962. 237 с.

37. **Щербаков Р.Н.** Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во ТГУ, 1973. 236 с.

38. **Капцов О.В.** Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009. 184 с.

39. **Янушаускас А.** Гармонические по М.А. Лаврентьеву отображения // Partial Differential Equations. Banach Center Publications. 1983. Vol. 10. No. 1. Pp. 213–241.

40. **Янушаускас А.И.** Трехмерные аналон ги конформных отображений. Новосибирск: Наука, 1982. 173 с.

41. **Коппенфельс В., Штальман Ф.** Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 406 с.

42. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

43. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. В 2 тт. М.: Наука, 1968. Т. 1 – 486 с., Т. 2 – 624 с.

44. **Евграфов М.А.** Аналитические функции. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 448 с.

45. **Гурвиц А., Курант Р.** Теория функций. М.: Наука, 1968. 646 с.

46. **Клейн Ф.** Высшая геометрия. Москва, Ленинград: ГОНТИ, 1939. 400 с.

47. **Решетняк Ю.Г.** Теорема Лиувилля о конформных отображениях при минимальных предположениях регулярности // Сибирский математический журнал. 1967. Т. 8. № 4. С. 835–840.

48. **Flanders H.** Liouville's theorem on conformal mapping // Journal of Mathematics and Mechanics. 1966. Vol. 15. No. 1. Pp. 157–161.

49. **Phillips R.** Liouville's theorem // Pacific Journal. 1969. Vol. 28. No. 2. Pp. 397–405.

50. **Blair D.E.** Inversion theory and conformal mapping. Ser. "Student Mathematical Library". Vol. 9 // American Mathematical Society. 2000. 118 p.

51. "Liouville's theorem (conformal_mappings)" // URL: https://en.wikipedia. org/wiki/.

52. **Рашевский П.К.** Введение в Риманову геометрию и тензорный анализ. Москва, Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 199 с.

53. **Kobayashi S.** Transformation groups in differential geometry. Ser. "Classics in Mathematics". Vol. 70. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1995. 182 p.

54**. Wilker J.B.** Inversive geometry // Davis C., Grünbaum B., Sherk F.A. (Eds.) The Geometric Vein. New York: Springer, 1981. Pp. 379–442.

55. "Möbius transformation". "Higher dimensions" // URL: https://en. wikipedia.org/wiki/

56. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. Пер. со 2-го американского переработанного издания. М.: Наука, 1973. 831 с.

57. **Буляница А.Л., Курочкин В.Е.** Исследование процессов упорядочивания в открытых системах // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 2. С. 43–49.

58. **Буляница А.Л., Евстрапов А.А., Рудницкая Г.Е.** Метод моментов при расчете параметров каналов в микроразмерных системах // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 4. С. 28–40.

59. **Евстрапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Беленький Б.Г., Петряков А.О., Курочкин В.Е.** Особенности применения алгоритмов цифровой фильтрации электрофореграмм при анализе веществ на микрочипе // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 2. С. 57–63.

60. **Буляница А.Л.** Математическое моделирование в микрофлюидике: основные положения // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 2. С. 51–66.

61. **Brzezina M., Šimůnková M.** On the harmonic morphism for the Kolmogorov type operators // Král J., Lukeš J., Netuka I., Veselý J. (Eds.) Potential Theory – ICPT-94. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1996. Pp. 341 –358.

62. Bibliothèque nationale de France // URL: http://gallica.bnf.fr.

63. Proceedings of the Royal Society of London // URL: http://rspl.royalsocietypublishing.org.

64. Numdam, the French digital mathematics library // URL: http://www.numdam.org/.

65. **Floquet G.** Sur les equations différentielles linéaires à coefficients périodiques // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 2e Serié. 1883. Vol. 12. Pp. 47–88.

66. HathiTrust Digital Library // URL:

https://www.hathitrust.org/.
67. Das Göttinger Digitalisierungszentrum (GDZ) // URL: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/.
68. Wolfram mathematica // URL : http://wolfram.com/mathematica/

Статья поступила в редакцию 21.03.2019, принята к публикации 15.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

ГАЛЛЬ Лидия Николаевна – *доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
lngall@yandex.ru

ГАЛЛЬ Николай Ростиславович – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
gall@ms.ioffe.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

REFERENCES

1. **Sretensky L.N.,** Teoriya niyutonovskogo potentsiala [Theory of the Newtonian potential], Moscow, Leningrad, OGIZ-GITTL, 1946.
2. **Golikov Yu.K.,** Analytical ways of describing harmonic functions, Vestnik of Aktobe's K. Zhubanov Regional State University, Physics and Mathematics. (2(44)) (2016) 165–181.
3. **Thomson W.,** Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville, Journal de Mathématiques Pures et Appliqués. 12 (1847) 256–264.
4. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 1, University Press, Cambridge, 1912.
5. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 2, University Press, Cambridge, 1912.
6. **Smirnov V.I.,** A course of higher mathematics, Vol. 4: Integral equations and partial differential equations, Pergamon Press, Oxford, 1964.
7. **Vladimirov V.S.,** Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics], Mir Publishers, Moscow, 1984.
8. **Kellogg O.D.**, Foundations of potential theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.
9. **Wermer J.,** Potential theory, 2nd Ed., Ser. "Lecture Notes in Mathematics", Vol. 408, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1981.
10. **Helms L.L.** Potential theory, 2nd Ed., Springer, London, Heidelberg, New-York, Dordrecht, 2014.
11. **Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuhin V.V.,** Raschet elementov elektrostaticheskikh elektronno-opticheslikh sistem [Design of elements of electron optical systems], Leningrad Polytechnic Inst. Publishing, Leningrad, 1984.
12. **Golikov Yu.K., Solovyov K.V.,** Elektrostaticheskiye ionnyye lovushki [Electrostatic ion traps], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, Saint-Petersburg, 2008.

13. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Teoriya synteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, Saint-Petersburg , 2010.

14. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 56 (2) (2011) 164–170.

15. **Krasnova N.K.,** Theory and synthesis of disperging and focusing electron optical media, Dr. Sci. Thesis. St. Petersburg, 2013. (in Russian).

16. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, I, Technical Physics. 45 (2) (2000) 232–235.

17. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, II, Technical Physics. 45 (3) (2000) 330–333.

18. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Analytical structures of generalized homogeneous electrical spectrographic media, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 24 (1) (2014) 50–58.

19. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Generalized similarity principle of similarity in electron spectrography, Prikladnaya fizika (Applied Physics). (2) (2007) 5–11.

20. **Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R.,** The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Technical Physics Letters. 43 (2) (2017) 156–158.

21. **Fichtenholz G.M.,** Differential- und Integralrechnung, I, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 1968.

22. **Smirnov V.I.**, A course of higher mathematics, Vol. I: Elementary Calculus, Pergamon Press, Oxford, 1964.

23. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** On homogeneity of scalar and vector potentials of electric and magnetic fields, homogeneous in Euler terms, Uspekhi Prikladnoi Fiziki (Advances in Applied Physics). 5 (1) (2017) 10–27.

24. **Hobson E.W.,** The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, University Press, Cambridge, 2012.

25. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** The theorem on the differentiation of three-dimensional electric and magnetic potentials, homogeneous in Euler terms, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 27 (3) (2017) 107–119.

26. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** General formulas for three-dimensional electric and magnetic potentials homogeneous in Euler terms with an integer order of homogeneity, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 26 (4) (2016) 13–30.

27. **Whittaker E.T., Watson G.N.,** A course of modern analysis, University Press, Cambridge, 1950.

28. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 147 (1857) 43–57.

29. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Proceedings of the Royal Society of London. 8 (1856–1857) 307–310.

30. **Golikov Yu.K.,** Resheniye zadachi Koshy dlya odnorodnykh garmonicheskikh potentsialov nulevoy plotnosty [Solution of the Cauchy problem for homogeneous harmonic potentials of a zero power], Vestnik of Aktobe's K. Zhubanov Regional State University, Physics and Mathematics. (2 (44)) (2016) 59–62.

31. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.,** Application of the Donkin formula in the theory of electrostatic prisms, Technical Physics. 63 (11) (2018) 1659–1666.

32. **Günther N.M.,** Integrirovaniye uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka [Integration of first-order partial differential equations], ONTI, Leningrad, Moscow, 1934.

33. **Tricomi F.G.,** Lezioni sulle equazioni a derivative parziali, Editrice Gherono, Torino, 1954.

34. **Rashevsky P.K.,** Geometricheskaya teoriya uravneniy s chastnymy proizvodnymy [Geometric theory of partial differential equations], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1947.

35. **Finikov S.P.,** Metod vneshnikh form Kartana v differentsialnoy geometriy [Cartan's method of exterior forms in differential geometry], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1948.

36. **Cartan É.,** Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Ser. "Actualités Scientifiques et Industrielles", No. 994, Hermann, Paris, 1945.

37. **Shcherbakov R.N.,** Osnovy metoda vneshnikh form i lineuchatoy differentsialnoy geometriy [Fundamentals of the method of external forms and differential line geometry], Tomsk State University Publishing House, Tomsk, 1973.

38. **Kaptsov O.V.,** Metody integrirovaniya uravneniy s chastnymy proizvodnymy [Methods for integrating partial differential equations], Fizmatlit, Moscow, 2009.

39. **Janushauskas A.,** Harmonic mappings as

defined by M.A. Laurentiev, In: Partial Differential Equations, Banach Center Publications. 10 (1) (1983) 213–241.

40. **Janushauskas A.I.,** Tryokhmernyye analogui konformnykh otobrazheniy [Three-dimensional analogues of conformal mappings], Nauka, Novosibirsk, 1982.

41. **Koppenfels W., Stallmann F.,** Praxis der Konformen Abbildung, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959.

42. **Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.,** Methoden der komplexen Funktionen-theorie, Verlag Wissenshaft, 1969.

43. **Markushevich A.I.,** Theory of functions of a complex variable, Vol. 1–3, Providence, US, Amer. Math. Society Publ., 2005.

44. **Evgrafov M.A.,** Analytic functions, Dover Publ., 1978.

45. **Hurwitz A., Courant R.,** Vorlesungen über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen, Springer, Berlin. 1964.

46. **Klein F.,** Vorlesungen über höhere Geometrie, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1926.

47. **Reshetnyak Yu.G.,** Teorema Liuvilya o konformnykh otobrazheniyakh pri minimalnykh predpolozheniyakh regulyarnosty [Liouville's theorem on conformal mappings for minimal regularity assumptions], Siberian Mathematical Journal. 8 (4) (1967) 631–634.

48. **Flanders H.,** Liouville's theorem on conformal mapping, Journal of Mathematics and Mechanics. 15 (1) (1966) 157–161.

49. **Phillips R.,** Liouville's theorem, Pacific Journal. 28 (2) (1969) 397–405.

50. **Blair D.E.,** Inversion theory and conformal mapping, Ser. "Student Mathematical Library", Vol. 9, American Mathematical Society, 2000.

51."Liouville's theorem (conformal_ mappings)", URL: https:// en.wikipedia. org/ wiki/.

52. **Rashevsky P.K.,** Introduction to Riemannian geometry and tensor analysis, ONTI NKTP USSR, Moscow, Leningrad, 1936.

53. **Kobayashi S.,** Transformation groups in differential geometry, Ser. "Classics in Mathematics", Vol. 70, New York: Springer-Verlag, Berlin, 1995.

54. **Wilker J.B.,** Inversive geometry, In: Davis C., Grünbaum B., Sherk F.A. (Eds.) The Geometric Vein, Springer, New York (1981) 379–442.

55. "Möbius transformation", Section "Higher dimensions", URL: https://en.wikipedia.org/ wiki/.

56. **Korn G.A., Korn T.M.,** Mathematical handbook for scientists and engineers, Definitions, theorems and formulas for reference and review, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney, 1968.

57. **Bulyanitsa A.L., Kurochkin V.E.,** Studying ordering processes in open systems (on the example of pattern evolution in colonies of imperfect mycelial fungi), Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 10 (2) (2000) 43–49.

58. **Bulyanitsa A.L., Evstrapov A.A., Rudnitskaya G.E.,** Calculation of microscale system channel parameters by the method of moments, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (4) (2003) 28–40.

59. **Evstrapov A.A., Bulyanitsa A.L., Rudnitskaya G.E., et al.,** Characteristic features of digital signal filtering algorithms as applied to electrophoresis on a microchip, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (2) (2003) 57–63.

60. **Bulyanitsa A.L.,** Mathematical modeling in microfluidics: basic concepts, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 15 (2) (2005) 51–66.

61. **Brzezina M., Šimůnková M.,** On the harmonic morphism for the Kolmogorov type operators, In: Král J., Lukeš J., Netuka I., Veselý J. (Eds.), Potential Theory – ICPT-94, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1996) 341–358.

62. Bibliothèque nationale de France, URL: http://gallica.bnf.fr.

63. Proceedings of the Royal Society of London, URL: http://rspl.royalsocietypublishing.org.

64. Numdam, the French digital mathematics library, URL: http://www.numdam.org/.

65. **Floquet G.**, Sur les equations différentielles linéaires à coefficients périodiques, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 2e Serié. 12 (1883) 47–88.

66. HathiTrust Digital Library, URL: https:// www.hathitrust.org/.

67. Das Göttinger Digitalisierungszentrum (GDZ), URL: https://gdz.sub.uni-goettingen. de/.

68. Wolfram Mathematica, URL: http:// wolfram.com/mathematica/.

Received 21.03.2019, accepted 15.04.2019.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

GALL Lidia N.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
lngall@yandex.ru

GALL Nikolaj R.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
gall@ms.ioffe.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

DOI: 10.18721/JPM.12204
УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТОМСОНА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ

А.С. Бердников[1], Л.Н. Галль[1], Н.Р. Галль[1], К.В. Соловьев[2,1]

[1]Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе показано, что формулу Томсона для трехмерных гармонических функций, однородных по Эйлеру, можно обобщить, если вместо чисто алгебраических линейных выражений использовать линейную алгебраическую форму с участием частных производных первого порядка от исходной функции. Приводится исчерпывающий список получающихся выражений первого порядка, преобразующих произвольные трехмерные однородные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции.

Ключевые слова: электростатическое поле, магнитостатическое поле, скалярный потенциал, уравнение Лапласа, формула Томсона

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 49–62. DOI: 10.18721/JPM.12204

GENERALIZATION OF THE THOMSON FORMULA FOR HOMOGENEOUS HARMONIC FUNCTIONS

A.S. Berdnikov[1], L.N. Gall[1], N.R. Gall[1], K.V. Solovyev[2,1]

[1]Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russian Federation;

[2]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, it has been shown that the Thomson formula for three-dimensional harmonic homogeneous functions in Euler terms can be generalized using a linear algebraic form involving the first order partial derivatives of the initial function instead of pure algebraic linear expressions. An exhaustive list of the formed first order expressions converting arbitrary three-dimensional harmonic functions in Euler terms into new three-dimensional homogeneous harmonic functions was presented.

Keywords: electrostatic field, magnetostatic field, scalar potential, homogeneous function, harmonic function

Citation: Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V., Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 49–62. DOI: 10.18721/JPM.12204

Введение

Данная публикация является продолжением работы [1], посвященной исследованию обобщений формулы Томсона для трехмерных гармонических функций общего вида. Рассматриваются дифференциально-алгебраические преобразования, являющиеся аналогом классической формулы Томсона для однородных гармонических функций. Эти преобразования можно использовать для генерирования новых гармонических функций, которые представлены в аналитической форме и являются однородными по Эйлеру. Электрические и магнитные поля, у которых скалярный потенциал (трехмерная гармоническая функция) будет однородной по Эйлеру функцией, подчиняются принципу подобия траекторий Ю.К. Голикова [2, 3]. Такие поля обладают дополнительными полезными электронно- и ионно-оптическими свойствами [4 – 10].

Пусть $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — расстояние от пробной точки (x,y,z) до начала координат. Формулой Томсона (преобразованием Кельвина) называется преобразование

$$V(x,y,z)=\frac{1}{r}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right). \qquad (1)$$

Это преобразование позволяет из гармонической функции $U(x,y,z)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=0, \qquad (2)$$

получить новую гармоническую функцию $V(x,y,z)$ [11 – 18]. Здесь и далее нижние индексы x, y, z обозначают частные производные по соответствующим переменным.

В частности, формула Томсона (1) служит полезным математическим инструментом при генерировании аналитических выражений для скалярных потенциалов электрических и магнитных полей, которые могут использоваться при синтезе новых электронно- и ионно-оптических систем [4 – 10, 19, 20].

Функция $U(x,y,z)$ называется однородной (точнее, положительно однородной) по Эйлеру, если она удовлетворяет тождеству

$$\forall\lambda>0:\ U(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^m U(x,y,z),$$

где m — степень однородности функции (не обязательно целочисленная). [21, 22].

Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая функция $U(x,y,z)$ была положительно однородной по Эйлеру степени m, необходимо и достаточно, чтобы в любой точке пространства (за исключением, возможно, начала координат) выполнялось дифференциальное соотношение Эйлера для однородных функций:

$$xU_x+yU_y+zU_z-mU=0. \qquad (3)$$

Доказательство этого важного утверждения можно найти в работах [21, 22].

Поиск среди линейных алгебраических формул вида

$$V(x,y,z)=S(x,y,z)\times \\ \times U\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big) \qquad (4)$$

(S, f, g, h – некоторые фиксированные функции) других соотношений, обладающих свойством для любых гармонических функций $U(x,y,z)$ порождать новые гармонические функции $V(x,y,z)$, показал, что формула Томсона (1) является, в некотором смысле, уникальной [1, 15, 17].

Дело в том, что с точностью до трехмерных вращений вокруг начала координат, сдвигов (параллельных переносов)

$$x'=x+a,\ y'=y+b,\ z'=z+c,$$

симметрий

$$x'=-x,\ y'=-y,\ z'=-z$$

и пропорционального масштабирования

$$x'=kx,\ y'=ky,\ z'=kz$$

(а также умножения полученных потенциалов на множитель-константу) формула Томсона (1) и тривиальное тождество $V(x,y,z)=U(x,y,z)$ будут единственными выражениями вида (4), удовлетворяющими поставленной задаче.

Исследование линейных выражений с участием первых частных производных от функции U, которые имеют вид

$$\begin{aligned} V(x,y,z)= \\ =S(x,y,z)\cdot U\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big)+ \\ +P(x,y,z)\cdot U_x\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big)+ \\ +Q(x,y,z)\cdot U_y\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big)+ \\ +R(x,y,z)\cdot U_z\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big) \end{aligned} \qquad (5)$$

(S, P, Q, R, f, g, h – некоторые фиксированные функции), показало возможность существования дополнительных формул, преобразующих трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармониче-

ские функции [1].

Теперь трансформирующие преобразования являются уже не чисто алгебраическими, а дифференциально-алгебраическими. Это позволяет расширить набор доступных математических инструментов при генерировании новых трехмерных гармонических функций, служащих скалярными потенциалами для электрических и магнитных полей.

Увеличение порядка частных производных от функции U, которые участвуют в выражении вида (5), приводит к дополнительному расширению списка таких формул, но отчасти делает неудобным процесс оперирования с ними. В частности, по причине зависимости друг от друга вторых производных гармонических функций, такие формулы не будут определены однозначно. А именно, для каждой трансформирующей формулы будет иметься широкий набор таких формул, не эквивалентных друг другу алгебраически по внешнему виду, но дающих на выходе ничем не отличающийся по сути результат.

Следует отметить, однако, что количество полученных в работе [1] трансформирующих преобразований, сохраняющих гармоничность трехмерной гармонической функции, оказалось меньше ожидаемого. Одной из причин отрицательного результата при поиске новых алгебраических и дифференциально-алгебраических выражений первого порядка для генерирования трехмерных гармонических функций, является, по-видимому, слишком жесткое требование, что эти выражения должны работать для любых исходных гармонических функций $U(x,y,z)$. Так, хорошо известно, что для двумерных гармонических функций $U(x,y)$ любое конформное преобразование аргументов будет порождать новую двумерную гармоническую функцию [23 – 27]. Такое преобразование гармонических функций имеет вид (4), но при этом существенно отличается от формулы Томсона (1).

Другим примером служит формула Томсона для однородных гармонических функций (см. работы [28] и [29], приложение Б к главе 1), имеющая вид

$$V(x,y,z) = r^{-2m-1}U(x,y,z). \qquad (6)$$

При подстановке в формулу (6) однородной гармонической функции U степени m функция (6) окажется гармонической, но для произвольной гармонической функции U это определенно не так.

Наконец, рассмотрим трансформирующие преобразования вида

$$\begin{gathered} V(x,y,z) = CU_x(x,y,z) + \\ +BU_y(x,y,z) + AU_z(x,y,z); \\ A = a(2m+1)xz + b(2m+1)yz + \\ +c\left(-mx^2 - my^2 + (m+1)z^2\right); \\ B = a(2m+1)xy + \\ +b\left(-mx^2 + (m+1)y^2 - mz^2\right) + \\ +c(2m+1)yz; \\ C = a\left((m+1)x^2 - my^2 - mz^2\right) + \\ +b(2m+1)xy + c(2m+1)xz, \end{gathered} \qquad (7)$$

которые можно получить при анализе условий гармоничности линейных форм от частных производных U_x, U_y, U_z с коэффициентами, представляющими собой квадратичные формы общего вида по переменным x, y, z. Из тождества

$$\begin{gathered} V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \equiv \\ \equiv (4m+2)(ax+by+cz)\left(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}\right) + \\ +C\left(U_{xxx} + U_{xyy} + U_{xzz}\right) + B\left(U_{xxy} + U_{yyy} + U_{yzz}\right) + \\ +A\left(U_{xxz} + U_{yyz} + U_{zzz}\right) + \\ +2a\left(xU_{xx} + yU_{xy} + zU_{xz} - (m-1)U_x\right) + \\ +2b\left(xU_{xy} + yU_{yy} + zU_{yz} - (m-1)U_y\right) + \\ +2c\left(xU_{xz} + yU_{yz} + zU_{zz} - (m-1)U_z\right) \end{gathered}$$

следует, что, вообще говоря, при требовании для функции U одной лишь гармоничности, выражение (7) будет гармонической функцией, только если

$$a = b = c = 0.$$

Если же U является однородной функцией степени m и удовлетворяет как уравнению Лапласа (2), так и дифференциальному соотношению Эйлера (3), то будут выполнены условия

$$U_{xxx} + U_{xyy} + U_{xzz} = 0,$$

$$U_{xxy} + U_{yyy} + U_{yzz} = 0,$$

$$U_{xxz} + U_{yyz} + U_{zzz} = 0,$$

$$xU_{xx} + yU_{xy} + zU_{xz} = (m-1)U_x,$$

$$xU_{xy} + yU_{yy} + zU_{yz} = (m-1)U_y,$$

$$xU_{xz} + yU_{yz} + zU_{zz} = (m-1)U_z,$$

которые получаются при дифференцировании (2) и (3) по x, y, z.

Тогда выражение (7) окажется гармонической однородной функцией степени (m+1) при любых a, b, c.

Задача данной работы – поиск альтернативных выражений, которые были бы применимы для однородных трехмерных гармонических функций и полезны при генерировании аналитических выражений для трехмерных гармонических функций, являющихся однородными по Эйлеру.

Имеются веские основания полагать, что при ограничении класса трансформируемых гармонических функций можно значительно расширить набор трансформирующих математических выражений.

Постановка задачи

Рассмотрим трансформацию трехмерной однородной гармонической функции $U(x,y,z)$ в соответствии с правилом (5), где S, P, Q, R, f, g, h – некоторые фиксированные функции, а U – произвольная однородная гармоническая функция фиксированной степени m. Требуется, чтобы для заданных функций S, P, Q, R, f, g, h и любых однородных гармонических функций U степени m выражение (5) было гармонической функцией, однородной по Эйлеру.

Поскольку функция U должна удовлетворять дифференциальному соотношению Эйлера (3), в выражении (5) без ограничения общности можно считать, что

$$R(x, y, z) = 0$$

(частная производная U_z может быть выражена через функции U, U_x, U_y).

Кроме того, ограничимся частным случаем

$$f(x,y,z) \equiv x,\ g(x,y,z) \equiv y,$$
$$h(x,y,z) \equiv z,$$

который есть следствие рассматриваемого в работе [1] симметричного варианта замены переменных

$$f(x,y,z) = x\varphi(x,y,z),$$
$$g(x,y,z) = y\varphi(x,y,z),$$
$$h(x,y,z) = z\varphi(x,y,z)$$

(здесь общий множитель $\varphi(x,y,z)$ выносится из-под аргументов функций U, U_x, U_y и U_z в силу того, что эти функции являются однородными по Эйлеру).

Таким образом, далее будут рассматриваться трансформации вида

$$V(x,y,z) = S_0(x,y,z)\cdot U(x,y,z) + P_0(x,y,z)\cdot U_x(x,y,z) + Q_0(x,y,z)\cdot U_y(x,y,z), \quad (8)$$

где S_0, P_0, Q_0 – некоторые фиксированные функции, обеспечивающие однородность и гармоничность функции V при условии однородности и гармоничности функции U, имеющей заданную степень однородности m.

Для того, чтобы выражение (5) было однородной по Эйлеру функцией при подстановке в него произвольной однородной гармонической функции U, функции S, P, Q, R, f, g, h в выражении (5) должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям.

В частности, для выражений вида (8) можно показать, что условие, согласно которому функция S_0 является однородной по Эйлеру степени $n - m$, а функции P_0 и Q_0 являются однородными по Эйлеру степени $n - m + 1$, есть не только достаточное, но и необходимое, чтобы выражение (8) оказалось однородной функцией степени n.

При доказательстве необходимости свойства однородности по Эйлеру у функций S_0, P_0 и Q_0, для функции U используется ее однородность по Эйлеру без привлечения свойства гармоничности. При этом потребуется проверка, что для гармонических однородных функций не появляется дополнительных вариантов, отсутствующих в случае произвольных однородных функций. Однако ограничительные требования

$$f(x,y,z) = x,\ g(x,y,z) = y,$$
$$h(x,y,z) = z,\ R(x,y,z) = 0$$

гарантируют, что других возможных вариантов для функций S_0, P_0 и Q_0 не имеется.

Очевидный метод решения поставленной задачи состоит в том, чтобы из результата подстановки выражения (5) или (8) в уравнение Лапласа и в дифференциальное соотношение Эйлера удалить все зависимые частные производные функции U. После этого множители, сгруппированные перед оставшимися частными производными функции U, будут обязаны быть равными

нулю по отдельности и независимо друг от друга. «Лишние» производные следует исключать, пользуясь не только уравнением Лапласа

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0,$$

как это было сделано в работе [1], но и дифференциальным соотношением Эйлера

$$xU_x + yU_y + zU_z = mU$$

для однородных функций степени m, а также результатами дифференцирования указанных уравнений по переменным x, y, z.

Задача несколько осложняется тем фактом, что при независимом дифференцировании уравнения Лапласа и дифференциального соотношения Эйлера возникают зависимые друг от друга дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned}&\left(xU_{xxx} + yU_{xxy} + zU_{xxz} - (m-2)U_{xx}\right) + \\ &+\left(xU_{xyy} + yU_{yyy} + zU_{yyz} - (m-2)U_{yy}\right) + \\ &+\left(xU_{xzz} + yU_{yzz} + zU_{zzz} - (m-2)U_{zz}\right) \equiv \\ &\equiv x\left(U_{xxx} + U_{xyy} + U_{xzz}\right) + \\ &+y\left(U_{xxy} + U_{yyy} + U_{yzz}\right) + \\ &+z\left(U_{xxz} + U_{yyz} + U_{zzz}\right) - \\ &-(m-2)\left(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}\right).\end{aligned}$$

Однако существует более эффективный способ решения поставленной задачи. Поскольку $U(x,y,z)$ является однородной по Эйлеру функцией степени m, то с помощью замены переменных, использующейся для формулы Донкина [7 – 10, 30 – 34], ее можно представить в виде

$$U(x,y,z) = r^m F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \qquad (9)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, F – некоторая подходящая функция двух переменных.

Такая запись является слегка измененной формой универсального представления однородных функций степени k в соответствии с формулой [21, 22]:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k g(x_2/x_1, \ldots x_n/x_1);$$

она не приводит к потере допустимых решений.

Соответственно, трансформированную функцию $V(x,y,z)$, которая должна будет являться однородной по Эйлеру функцией степени n, можно представить в виде

$$V(x,y,z) = r^n G\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right). \qquad (10)$$

Замена переменных, использованная при конструировании подстановок (9) и (10), является обратимой:

$$\begin{cases} p = \dfrac{x}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ q = \dfrac{y}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2pr}{1 + p^2 + q^2}, \\ y = \dfrac{2qr}{1 + p^2 + q^2}, \\ z = \pm\dfrac{r\left(1 - p^2 - q^2\right)}{1 + p^2 + q^2}. \end{cases} \qquad (11)$$

Для того, чтобы функция U, заданная с помощью равенства (9), была гармонической, т. е. удовлетворяла трехмерному уравнению Лапласа, необходимо и достаточно, чтобы функция F удовлетворяла двумерному эллиптическому уравнению

$$\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2} + \\ + \frac{4m(m+1)}{\left(1 + p^2 + q^2\right)^2} F(p,q) = 0. \qquad (12)$$

Тогда любой однородной гармонической функции U степени m соответствует функция F, удовлетворяющая уравнению (12), а из любого решения уравнения (12) с помощью подстановки (9) получается однородная гармоническая функция степени n, причем указанное соответствие между функциями F и U будет взаимно-однозначным. Это утверждение проверяется с помощью прямой подстановки выражения (9) в трехмерное уравнение Лапласа с последующей заменой переменных согласно правилу (11). Аналогичный прием используется, например, в работах [35 – 39].

Легко понять, что преобразование функции U, согласно правилу (8), которое долж-

но приводить к появлению новой однородной гармонической функции V степени n, эквивалентно преобразованию функции F, согласно правилу

$$G(p,q)=s(p,q)F(p,q)+ \\ +v(p,q)\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}+w(p,q)\frac{\partial F(p,q)}{\partial q} \quad (13)$$

с некоторыми фиксированными функциями

$$s(p,q),\ v(p,q),\ w(p,q),$$

после чего функция G обязана будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 G(p,q)}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 G(p,q)}{\partial q^2}+ \\ +\frac{4n(n+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}G(p,q)=0. \quad (14)$$

В итоге задача свелась к нахождению таких функций $s(p,q)$, $v(p,q)$, $w(p,q)$ и таких индексов m, n, которые бы для любого решения дифференциального уравнения (12) после преобразования (13) порождали бы решения дифференциального уравнения (14). При этом на функции F и G не накладывается никаких дополнительных условий, кроме собственно уравнений (12) и (14).

Решение задачи

После подстановки выражения (13) в уравнение (14) получается линейная комбинация частных производных

$$F,\ F_p,\ F_q,\ F_{pp},\ F_{pq}, \\ F_{qq},\ F_{ppp},\ F_{ppq},\ F_{pqq},\ F_{qqq}$$

(нижние индексы обозначают переменные, по которым берутся соответствующие частные производные).

Производные F_{qq}, F_{pqq}, F_{qqq} являются зависимыми, и их можно выразить через остальные частные производные с помощью уравнения (12). После этого множители, сгруппированные перед оставшимися частными производными

$$F,\ F_p,\ F_q,\ F_{pp},\ F_{pq},\ F_{ppp},\ F_{ppq},$$

должны оказаться равными нулю, если требуется, чтобы функция G удовлетворяла уравнению (14) для любого решения уравнения (12). Полученная система уравнений имеет вид:

$$v_p-w_q=0,\ v_q+w_p=0,$$

$$v_{pp}+v_{qq}+v\frac{4\left(n(n+1)-m(m+1)\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}=-2s_p,$$

$$w_{pp}+w_{qq}+w\frac{4\left(n(n+1)-m(m+1)\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}=-2s_q,$$

$$s_{pp}+s_{qq}+s\frac{4\left(n(n+1)-m(m+1)\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}= \\ =-\frac{16m(m+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^3}(pv+qw)+ \\ +\frac{4m(m+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}\left(v_p+w_q\right).$$

Анализ полученной переопределенной системы уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $s(p,q)$, $v(p,q)$, $w(p,q)$ с помощью методов [40 – 46] приводит к следующим невырожденным решениям, исчерпывающим все возможные случаи.

а) $n = -2 - m$ или $n = 1 + m$:

$$\begin{cases} s(p,q)=\dfrac{(m+1)}{1+p^2+q^2}\times \\ \times\left(4c_a p+4c_b q+c_c\left(1-p^2-q^2\right)\right), \\ v(p,q)=c_c p+2c_b pq+c_a\left(-1+p^2-q^2\right), \\ w(p,q)=c_c q+2c_a pq+c_b\left(-1-p^2+q^2\right), \end{cases}$$

где c_a, c_b, c_c – произвольные константы;

б) $n = -1 + m$ или $n = -m$:

$$\begin{cases} s(p,q)=\dfrac{-m}{1+p^2+q^2}\times \\ \times\left(4c_a p+4c_b q+c_c\left(1-p^2-q^2\right)\right), \\ v(p,q)=c_c p+2c_b pq+c_a\left(-1+p^2-q^2\right), \\ w(p,q)=c_c q+2c_a pq+c_b\left(-1-p^2+q^2\right), \end{cases}$$

где c_a, c_b, c_c – также произвольные константы;

в) $n = m$ или $n = -1 - m$:

$$\begin{cases} s(p,q)=c, \\ v(p,q)=-c_c q+2c_b pq+c_a\left(1+p^2-q^2\right), \\ w(p,q)=c_c p+2c_a pq+c_b\left(1-p^2+q^2\right), \end{cases}$$

где c, c_a, c_b, c_c – произвольные константы.

Кроме того, имеются вырожденные решения. Первое из них имеет вид

$$s(p,q) = 0,\ v(p,q) = 0,\ w(p,q) = 0$$

и не представляет особого интереса.

Второе решение соответствует выбору

$$m = 0,\ n = 0,$$
$$\text{либо } m = 0,\ n = -1,$$
$$\text{либо } m = -1,\ n = 0,$$
$$\text{либо } m = -1,\ n = -1.$$

В этих случаях уравнения (12) и (14) превращаются в двумерные уравнения Лапласа, а преобразование (13) приобретает вид

$$G(p,q) = cF(p,q) + v(p,q)F_p(p,q) + \\ + w(p,q)F_q(p,q), \tag{15}$$

где c – константа, а функции $v(p,q)$, $w(p,q)$ удовлетворяют условиям Коши – Римана

$$v_p = w_q,\ v_q = -w_p,$$

т. е. являются вещественной и мнимой частями аналитической функции комплексного переменного

$$u(p + iq) = v(p,q) + iw(p,q).$$

Физический смысл уравнения (15) достаточно прост: умножение на константу превращает решение двумерного уравнения Лапласа в решение двумерного уравнения Лапласа, а произведение двух аналитических функций комплексного переменного

$$v(p,q) + iw(p,q),\ F_p(p,q) - iF_q(p,q)$$

снова дает аналитическую функцию комплексного переменного, вещественная и мнимая части которой обязаны удовлетворять двумерному уравнению Лапласа [24 – 27, 36].

Однако это любопытное вырожденное решение не слишком интересно в качестве генератора новых однородных гармонических функций, поскольку вещественные и мнимые части аналитических функций комплексного переменного обеспечивают вполне достаточный ресурс для решений двумерного уравнения Лапласа. При этом все трехмерные однородные гармонические функции со степенями однородности 0 и –1 можно получить с помощью формул Донкина [7 – 10, 30 – 34]:

$$V(x,y,z) = H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right),$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r}H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right),$$

где H – решение двумерного уравнения Лапласа.

В конечном итоге получаются следующие трансформирующие выражения вида (8):

$$V(x,y,z) = U(x,y,z), \tag{16}$$

$$V(x,y,z) = U_x(x,y,z), \tag{17}$$

$$V(x,y,z) = U_y(x,y,z), \tag{18}$$

$$V(x,y,z) = \frac{m}{z}U(x,y,z) - \\ -\frac{x}{z}U_x(x,y,z) - \frac{y}{z}U_y(x,y,z), \tag{19}$$

$$V(x,y,z) = (2m+1)xU(x,y,z) - \\ -r^2U_x(x,y,z), \tag{20}$$

$$V(x,y,z) = (2m+1)yU(x,y,z) - \\ -r^2U_y(x,y,z), \tag{21}$$

$$V(x,y,z) = \frac{-mr^2 + (2m+1)z^2}{z}U(x,y,z) + \\ + \frac{xr^2}{z}U_x(x,y,z) + \frac{yr^2}{z}U_y(x,y,z), \tag{22}$$

$$V(x,y,z) = yU_x(x,y,z) - xU_y(x,y,z), \tag{23}$$

$$V(x,y,z) = -\frac{mx}{z}U(x,y,z) + \\ + \frac{x^2+z^2}{z}U_x(x,y,z) + \frac{xy}{z}U_y(x,y,z), \tag{24}$$

$$V(x,y,z) = -\frac{my}{z}U(x,y,z) + \\ + \frac{xy}{z}U_x(x,y,z) + \frac{y^2+z^2}{z}U_y(x,y,z), \tag{25}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r^{2m+1}}U(x,y,z), \tag{26}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r^{2m-1}}U_x(x,y,z), \tag{27}$$

$$V(x,y,z)=\frac{1}{r^{2m-1}}U_y(x,y,z), \tag{28}$$

$$V(x,y,z)=\frac{m}{zr^{2m-1}}U(x,y,z)- \tag{29}$$
$$-\frac{x}{zr^{2m-1}}U_x(x,y,z)-\frac{y}{zr^{2m-1}}U_y(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{(2m+1)x}{r^{2m+3}}U(x,y,z)- \tag{30}$$
$$-\frac{1}{r^{2m+1}}U_x(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{(2m+1)y}{r^{2m+3}}U(x,y,z)- \tag{31}$$
$$-\frac{1}{r^{2m+1}}U_y(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{(2m+1)z^2-mr^2}{zr^{2m+3}}U(x,y,z)+ \tag{32}$$
$$+\frac{x}{zr^{2m+1}}U_x(x,y,z)+\frac{y}{zr^{2m+1}}U_y(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{y}{r^{2m+1}}U_x(x,y,z)- \tag{33}$$
$$-\frac{x}{r^{2m+1}}U_y(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=-\frac{mx}{zr^{2m+1}}U(x,y,z)+ \tag{34}$$
$$+\frac{x^2+z^2}{zr^{2m+1}}U_x(x,y,z)+\frac{xy}{zr^{2m+1}}U_y(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=-\frac{my}{zr^{2m+1}}U(x,y,z)+ \tag{35}$$
$$+\frac{xy}{zr^{2m+1}}U_x(x,y,z)+\frac{y^2+z^2}{zr^{2m+1}}U_y(x,y,z),$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Наличие в знаменателе переменной z обычно свидетельствует о том, что в формуле неявным образом присутствует производная U_z с некоторым ненулевым множителем, которая впоследствии, из-за использования соотношения Эйлера (3) для исключения зависимой производной U_z, превратилась в линейную комбинацию функций U, U_x и U_y. В результате некоторые выражения можно упростить, избавившись от переменной z в знаменателе:

$$V(x,y,z)=U_z(x,y,z), \tag{19a}$$

$$V(x,y,z)=(2m+1)zU(x,y,z)- \tag{22a}$$
$$-r^2U_z(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=zU_x(x,y,z)-xU_z(x,y,z), \tag{24a}$$

$$V(x,y,z)=zU_y(x,y,z)-yU_z(x,y,z), \tag{25a}$$

$$V(x,y,z)=\frac{1}{r^{2m-1}}U_z(x,y,z), \tag{29a}$$

$$V(x,y,z)=\frac{(2m+1)z}{r^{2m+3}}U(x,y,z)- \tag{32a}$$
$$-\frac{1}{r^{2m+1}}U_z(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{z}{r^{2m+1}}U_x(x,y,z)- \tag{34a}$$
$$-\frac{x}{r^{2m+1}}U_z(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{z}{r^{2m+1}}U_y(x,y,z)- \tag{35a}$$
$$-\frac{y}{r^{2m+1}}U_z(x,y,z).$$

Заключение

В работе показано, что формулу Томсона для трехмерных гармонических функций, однородных по Эйлеру, можно обобщить, если вместо чисто алгебраических линейных выражений использовать линейную алгебраическую форму (5) с участием частных производных первого порядка от исходной функции. Приводится исчерпывающий список полученных выражений первого порядка, преобразующих произвольные трехмерные однородные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции, которые можно получить, не прибегая к замене переменных в аргументах функции U.

Аккуратная проверка, впрочем, показывает, что все полученные выражения фактически представляют собой трансформирующие формулы для трехмерных гармонических функций общего вида из работы [1], которые упрощены с помощью предположения об однородности функции U и дифференциального соотношения Эйлера (3) для однородных функций [21, 22].

Можно получить и другие соотношения, если рассматривать линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базовых соотношений (16) – (35),

которые соответствуют одной и той же степени однородности трансформированной функции. Кроме того, если прибавить к любой из формул (16) – (35) соотношение Эйлера (3), умноженное на произвольную однородную функцию соответствующей степени, то получится новая трансформирующая формула.

Например, такой линейной комбинацией является трансформирующая формула (7), которая с формальной точки зрения кардинальным образом отличается от полученных ранее базовых формул (16) – (35):

$$L[U]=\Big(a(2m+1)xz+b(2m+1)yz+$$
$$+c\big(-mx^2-my^2+(m+1)z^2\big)\Big)U_x+$$
$$+\Big(a(2m+1)xy+b\big(-mx^2+(m+1)y^2-mz^2\big)+$$
$$+c(2m+1)yz\Big)U_y+\Big(a\big((m+1)x^2-my^2-mz^2\big)+$$
$$+b(2m+1)xy+c(2m+1)xz\Big)U_z=$$
$$=(2m+1)(cx+by+az)\big(xU_x+yU_y+zU_z-mU\big)+$$
$$+mc\Big((2m+1)xU-\big(x^2+y^2+z^2\big)U_x\Big)+$$
$$+mb\Big((2m+1)yU-\big(x^2+y^2+z^2\big)U_y\Big)+$$
$$+ma\Big((2m+1)xU-\big(x^2+y^2+z^2\big)U_z\Big).$$

Однако, хотя подобные формулы визуально могут весьма заметно отличаться (в алгебраическом смысле) от полученного ранее списка, по своему действию в качестве генераторов новых аналитических выражений для трехмерных однородных гармонических функций эти формулы будут полностью эквивалентны базовым формулам (16) – (35). Аналогичные проблемы с фактической идентичностью математических выражений, не равных друг другу тождественно в алгебраическом смысле, описываются, например, в работах [47 – 50].

Вычисления, приводимые в данной работе, выполнены с помощью программы Wolfram Mathematica [51].

Данная работа частично выполнена в рамках гос. задания № 075-00780-19-00 Института аналитического приборостроения РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С.32–48.

2. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.

3. **Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.** Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.

4. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 409 с.

5. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, № 2. С. 9–15.

6. **Краснова Н.К.** Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. 01.04.04. СПб.: СПбГПУ, 2013. 259 с.

7. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 2. С. 91–94.

8. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44–47.

9. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К**. Аналитические структуры электрических обобщенно-однородныхспектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. № 1. С. 50–58.

10. **Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В**. Применение формулы Донкина в теории электростатических призм // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 11. С. 1711–1719.

11. **Thomson W.** Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de

Mathématiques Pures et Appliquées. 1847. Tome XII. Pp. 256–264.

12. **Сретенский Л.Н.** Теория ньютоновского потенциала. Москва, Ленинград: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946. 318 с.

13. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.

14. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

15. **Kellogg O.D.** Foundations of potential theory. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1967. 386 p.

16. **Уэрмлер Дж.** Теория потенциала. М.: Мир, 1980. 134 с.

17. **Helms L.L.** Potential theory. 2nd Ed. London, Heidelberg, New-York, Dordrecht: Springer, 2014. 485 p.

18. **Голиков Ю.К.** Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2 (44). С. 165–181.

19. **Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В.** Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Ленинград: Изд-во ЛПИ, 1984. 79 с.

20. **Голиков Ю.К., Соловьёв К.В.** Электростатические ионные ловушки. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2008. 152 с.

21. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

22. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.

23. **Коппенфельс В., Штальман Ф.** Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 406 с.

24. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

25. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. В 2 тт. М.: Наука, 1968. Т. 1. – 486 с., Т. 2 – 624 с.

26. **Евграфов М.А.** Аналитические функции. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 448 с.

27. **Гурвиц А., Курант Р.** Теория функций. М.: Наука, 1968. 646 с.

28. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Ч. I. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 572 с.

29. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Ч. II. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 560 с.

30. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. Pp. 43–57.

31. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c. // Proceedings of the Royal Society of London. 1856 –1857. Vol. 8. Pp. 307–310.

32. **Гобсон Е.В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952. 476 с.

33. **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.** Курс современного анализа. Ч. 2: Трансцендентные функции. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. 516 с.

34. **Бердников А.С., Аверин И.А.** Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 5–8.

35. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 4. С. 13–30.

36. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Анализ интегральной формулы Уиттекера общего вида для электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 4. С. 63–71.

37. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Интегральная формула Уиттекера для электрических и магнитных потенциалов с нулевым порядком однородности и ее следствия // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 4. С. 72–79.

38. **Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Синтез электродных конфигураций, сохраняющих для краевых электрических полей свойство однородности по Эйлеру // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 4. С. 609–613.

39. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Антонов А.С., Соловьев К.В.** Синтез краевых магнитных полей для статических масс-анализаторов спектрографического типа // Масс-спектрометрия. 2018. Т. 15. № 1. С. 26–43.

40. **Гюнтер Н.М.** Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. Ленинград, Москва: ОНТИ, 1934. 368 с.

41. **Трикоми Ф.** Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957. 443 с.

42. **Рашевский П.К.** Геометрическая теория уравнений с частными производными. Москва, Ленинград: ГИТТЛ, 1947. 362 с.

43. **Фиников С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва, Ленинград: ОГИЗ, 1948. 432 с.

44. **Картан Э.** Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во Московского ун-та, 1962. 237 с.

45. **Щербаков Р.Н.** Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во ТГУ, 1973. 236 с.

46. **Капцов О.В.** Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009. 184 с.

47. **Буляница А.Л., Курочкин В.Е.** Исследование процессов упорядочивания в открытых системах // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 2. С. 43–49.

48. **Буляница А.Л., Евстрапов А.А., Рудницкая Г.Е.** Метод моментов при расчете параметров каналов в микроразмерных системах // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 4. С. 28–40.

49. **Евстрапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Беленький Б.Г., Петряков А.О., Курочкин В.Е.** Особенности применения алгоритмов цифровой фильтрации электрофореграмм при анализе веществ на микрочипе // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 2. С. 57–63.

50. **Буляница А.Л.** Математическое моделирование в микрофлюидике: основные положения // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 2. С. 51–66.

51. Wolfram Mathematica. URL : http://wolfram.com/mathematica/

Статья поступила в редакцию 21.03.2019, принята к публикации 22.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

ГАЛЛЬ Лидия Николаевна – *доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
lngall@yandex.ru

ГАЛЛЬ Николай Ростиславович – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
gall@ms.ioffe.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

REFERENCES

1. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., et al.,** Generalization of the Thomson formula for general harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48.

2. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Generalized similarity principle of similarity in electron spectrography, Prikladnaya fizika (Applied Physics). (2) (2007) 5–11.

3. **Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R.,** The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different

masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Technical Physics Letters. 43 (2) (2017) 156–158.

4. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Teoriya synteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, St. Petersburg, 2010 (in Russian).

5. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 56 (2) (2011) 164–170.

6. **Krasnova N.K.,** Theory and synthesis of disperging and focusing electron optical media, Dr. Sci. Thesis. St. Petersburg, 2013 (in Russian).

7. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, I, Technical Physics. 45 (2) (2000) 232–235.

8. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, II, Technical Physics. 45 (3) (2000) 330–333.

9. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Analytical structures of generalized homogeneous electrical spectrographic media, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 24 (1) (2014) 50–58.

10. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.,** Application of the Donkin formula in the theory of electrostatic prisms, Technical Physics. 63 (11) (2018) 1659–1666.

11. **Thomson W.,** Extraits de deux Lettres adressées a M. Liouville, Journal de Mathématiques Pures et Appliqués. 12 (1847) 256–264.

12. **Sretensky L.N.,** Teoriya niyutonovskogo potentsiala [Theory of the Newtonian potential], Moscow, Leningrad, OGIZ-GITTL, 1946.

13. **Smirnov V.I.,** A course of higher mathematics, Vol. 4: Integral equations and partial differential equations, Pergamon Press, Oxford, 1964.

14. **Vladimirov V.S.,** Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics], Mir Publishers, Moscow, 1984.

15. **Kellogg O.D.,** Foundations of potential theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.

16. **Wermer J.,** Potential theory, 2nd Ed., Ser. "Lecture Notes in Mathematics", Vol. 408, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1981.

17. **Helms L.L.** Potential Theory, 2nd Ed., Springer, London, Heidelberg, New-York, Dordrecht, 2014.

18. **Golikov Yu.K.,** Analytical ways of describing harmonic functions, Vestnik of Aktobe's K. Zhubanov Regional State University, Physics and Mathematics. (2(44)) (2016) 165–181.

19. **Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuhin V.V.,** Raschet elementov elektrostaticheskikh elektronno-opticheslikh sistem [Design of elements of electron optical systems], Leningrad Polytechnic Inst. Publishing, Leningrad, 1984.

20. **Golikov Yu.K., Solovyev K.V.,** Elektrostaticheskiye ionnyye lovushki [Electrostatic ion traps], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, St. Petersburg, 2008.

21. **Fichtenholz G.M.,** Differential- und Integralrechnung, I, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 1968.

22. **Smirnov V.I.,** A course of higher mathematics, Vol. I: Elementary Calculus, Pergamon Press, Oxford, 1964.

23. **Koppenfels W., Stallmann F.,** Praxis der Konformen Abbildung, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959.

24. **Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.,** Methoden der komplexen Funktionen-theorie, Verlag Wissenshaft, 1969.

25. **Markushevich A.I.,** Theory of functions of a complex variable, Vol. 1–3, Providence, US, Amer. Math. Society Publ., 2005.

26. **Evgrafov M.A.,** Analytic functions, Dover Publ., 1978.

27. **Hurwitz A., Courant R.,** Vorlesungen über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen, Springer, Berlin. 1964.

28. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 1, University Press, Cambridge, 1912.

29. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 2, University Press, Cambridge, 1912.

30. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 147 (1857) 43–57.

31. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Proceedings of the Royal Society of London. 8 (1856–1857) 307–310.

32. **Hobson E.W.,** The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, University Press, Cambridge, 2012.

33. **Whittaker E.T., Watson G.N.,** A course of modern analysis, University Press, Cambridge, 1950.

34. **Berdnikov A.S., Averin I.A.,** Fringe fields of gridless electronic spectrographs with Euler's homogeneous electrostatic fields, Uspekhi prikladnoy fiziki (Advances in Applied Physics).

4 (1) (2016) 5–8.

35. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Universal expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 26 (4) (2016) 13–30.

36. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Analysis of the general Whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials homogeneous in Euler terms, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 27 (4) (2017) 63–71.

37. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials with a zero order of homogeneity and its consequencies // Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 27 (4) (2017) 72–79.

38. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.,** Synthesis of electrode configurations that conserve fringing electric field homogeneity in Euler terms, Technical Physics. 63 (4) (2018) 593–597.

39. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Antonov A.S., Solovyev K.V.,** Synthesis of fringing magnetic fields for static mass analyzers of the spectrographic type, Journal of Analytical Chemistry. 73 (14) (2018) 1301–1316.

40. **Günther N.M.,** Integrirovaniye uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka [Integration of first-order partial differential equations], ONTI, Leningrad, Moscow, 1934.

41. **Tricomi F.G.,** Lezioni sulle equazioni a derivative parziali, Editrice Gherono, Torino, 1954.

42. **Rashevsky P.K.,** Geometricheskaya teoriya uravneniy s chastnymy proizvodnymy [Geometric theory of partial differential equations], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1947.

43. **Finikov S.P.,** Metod vneshnikh form Kartana v differentsialnoy geometriy [Cartan's method of exterior forms in differential geometry], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1948.

44. **Cartan É.,** Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Ser. "Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 994, Hermann, Paris, 1945.

45. **Shcherbakov R.N.,** Osnovy metoda vneshnikh form i lineuchatoy differentsialnoy geometriy [Fundamentals of the method of external forms and differential line geometry], Tomsk State University Publishing House, Tomsk, 1973.

46. **Kaptsov O.V.,** Metody integrirovaniya uravneniy s chastnymy proizvodnymy [Methods for integrating partial differential equations], Fizmatlit, Moscow, 2009.

47. **Bulyanitsa A.L., Kurochkin V.E.,** Studying ordering processes in open systems (on the example of pattern evolution in colonies of imperfect mycelial fungi), Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 10 (2) (2000) 43–49.

48. **Bulyanitsa A.L., Evstrapov A.A., Rudnitskaya G.E.,** Calculation of microscale system channel parameters by the method of moments, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (4) (2003) 28–40.

49. **Evstrapov A.A., Bulyanitsa A.L., Rudnitskaya G.E., et al.,** Characteristic features of digital signal filtering algorithms as applied to electrophoresis on a microchip, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (2) (2003) 57–63.

50. **Bulyanitsa A.L.,** Mathematical modeling in microfluidics: basic concepts, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 15 (2) (2005) 51–66.

51. Wolfram Mathematica, URL : http://wolfram.com/mathematica/

Received 21.03.2019, accepted 22.04.2019.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

GALL Lidia N.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
lngall@yandex.ru

GALL Nikolaj R.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
gall@ms.ioffe.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

DOI: 10.18721/JPM.12205
УДК 531

ЧИСЛЕННАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ТИПИЧНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КРОККО С ПОМОЩЬЮ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.Р. Петриченко, Е.В. Котов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Для верификации решения типичной предельной задачи Крокко проведен численный эксперимент с использованием неявной разностной схемы второго порядка. Вычислительный эксперимент показал равномерную на промежутке $0 \le x \le 1$ сходимость численной аппроксимации решения к слабому решению при небольшой плотности дискретизации промежутка (порядка $N = 10^4$ узлов). Показано, что численное решение аппроксимирует слабое решение типичной предельной задачи Крокко, кроме правого конца промежутка интегрирования – точки $x = 1$. Решение предельной задачи Крокко может быть продолжено левее точки $x = 0$ с сохранением непрерывности и гладкости решения в этой точке. Точка $x = 1$ представляет естественную верхнюю границу области определения решения.

Ключевые слова: типичная предельная задача Крокко, неявная разностная схема, слабое решение, гомотопия

Ссылка при цитировании: Петриченко М.Р., Котов Е.В. Численная верификация слабых решений типичной предельной задачи Крокко с помощью неявной разностной схемы второго порядка // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 63–72. DOI: 10.18721/JPM.12205

NUMERICAL VERIFICATION OF WEAK SOLUTIONS OF THE CROCCO TYPICAL BOUNDARY PROBLEM USING AN IMPLICIT SECOND ORDER DIFFERENCE SCHEME

M.R. Petrichenko, E.V. Kotov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

To verify the solution of a typical Crocco boundary problem, a numerical experiment has been performed using an implicit second-order difference scheme. The computational experiment showed uniform convergence in the $0 \le x \le 1$ interval for the numerical approximation of the solution to a weak solution with a small interval discrete sampling (of the order of $N = 10^4$ nodes). It was shown that a numerical solution approximated a weak solution of the typical Crocco limit problem, except for the right end of the integration interval. The solution of the Crocco boundary problem could be continued to the left of the point $x = x_0$ while preserving the continuity and smoothness of the solution at this point. The point $x = 1$ represents the natural upper bound of the solution domain.

Keywords: Crocco's typical boundary problem, implicit difference scheme, weak solution, homotopy

Citation: Petrichenko M.R., Kotov E.V. Numerical verification of weak solutions of the Crocco typical boundary problem using an implicit second order difference scheme, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 63–72. DOI: 10.18721/JPM.12205

Введение

Как известно, типичная предельная задача Крокко ставится следующим образом [1]:

$$yy'' + \gamma x = 0, D(y) = (x : 0 \le x_0 < x < 1);$$
$$\mathrm{Im}(y) = (y : y_0 > y > 0); \qquad (1)$$
$$y'(x_0) = y(1) = 0,$$

где $y_0 := y(x_0) > 0$.

В классическом случае типичной предельной задачи

$$\gamma = 1/2, x_0 = 0, y_0 := y(0).$$

В настоящей статье рассматривается именно этот классический случай.

Можно доказать, что двухточечные предельные условия (1) равносильны условию Коши:

$$y(0) - a = y'(0) = 0.$$

Пусть $a = 0$. Тогда $y(x) = \pm\sqrt{2/3(-x)^3}$ есть решение однородной одноточечной задачи для уравнения Крокко на отрицательной полуоси $x < 0$.

В гидродинамических приложениях $y(x)$ – обезразмеренное трение, x – обезразмеренная продольная компонента скорости в пограничном слое на пластине, обдуваемой плоским потоком в продольном направлении.

Тогда $y(0) = a$ представляет собой касательное напряжение трения на стенке (константа Блазиуса) [2]. В гидравлической теории фильтрации x – обезразмеренная глубина фильтрационного потока сквозь скалярную (однородную и изотропную) пористую среду, y – потенциал Крокко, определяемый как

$$y(x) = \int_x^1 s dx', \quad y(1) = y'(0) = 0,$$

где s – продольная координата, отсчитываемая вдоль фильтрационного потока.

В задачах фильтрации постоянная $y_0 = y(x_0)$ пропорциональна фильтрационному расходу в сечении выхода потока на границу среды [3].

Стационарные решения для безнапорной фильтрации в скалярной среде выполнены в терминах аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. Современные результаты таких решений приводятся в работах [4 – 6].

Для типичной задачи Крокко (1) справедливы следующие утверждения.

1. Уравнение Крокко имеет две ветви решения: положительную $y_+(x)$ и отрицательную $y_-(x)$. Отрицательная ветвь определяется как решение предельной задачи:

$$2y_- y_-'' + \gamma x = 0, \quad D(y_-) = (x : x_0 < x < 1),$$
$$y_-'(0) = y(1) = 0, \quad \mathrm{Im}(y_-) = (y_- : -y_0 > y_- > 0);$$

при этом

$$y_+(x) + y_-(x) = 0, \quad \forall x \in (0,1).$$

Доказательство тривиальное.

Далее будет рассматриваться только положительная ветвь решения уравнения Крокко, т. е. $y(x) := y_+(x)$.

2. Решение типичной предельной задачи Крокко (1) обладает следующими свойствами:

$$y'(x) < 0, \; y''(x) < 0;$$
$$y'(x) \xrightarrow[x \to 1-0]{} -\infty,$$

поэтому $y_0 = a > y(x)$, $0 < x < 1$.

Для доказательства утверждения 2 формально понизим порядок уравнения Крокко и сведем его к интегральному уравнению:

$$2y' = -\int_0^x \frac{tdt}{y(t)} \to y' \le 0, \quad 0 \le x < 1.$$

Интеграл в правой части можно рассчитать, если использовать теорему Бонне о среднем значении. Получим:

$$2yy' = -1/2x^2(1 - \theta^2), \qquad (2)$$

где θ – правильная дробь, $0 < \theta < 1$.

Остается перейти к пределу при $x \to 1-0$, что и требовалось доказать.

Решение уравнения (2), такое, чтобы значение $y(1)$ было равно нулю, $y(1) = 0$, имеет следующий вид:

$$y^2(x, \theta) = 1/6(1 - \theta^2)(1 - x^3). \qquad (3)$$

Это решение (3) непрерывно зависит от величины дроби θ. Его среднее по θ значение представляет собой так называемое слабое решение типичной предельной задачи Крокко, трактуемое как распределение по θ с плотностью распределения $y(x; \theta)$ [7].

С учетом выражения (3), слабое решение типичной предельной задачи Крокко имеет вид:

$$y(x) = 1/3\sqrt{1 - x^3}, \qquad (4)$$

и тогда $y_0 = y(0) = 1/3$, что является неплохим рациональным приближением для постоянной Блазиуса.

Точное значение постоянной Блазиуса вычислено в работе В.П. Варина [8]. Как видно из формулы (4), слабое решение можно продолжить на отрицательные значения x с сохранением непрерывности и гладкости решения в точке $x = 0$.

Решение типичной предельной задачи Крокко связано с решением нелинейного интегрального уравнения:

$$y(x) = (1/2)\left\{\int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y(s)} - \int_0^x \frac{(x-s)sds}{y(s)}\right\}, \quad (5)$$

которое дает следующее выражение для постоянной Блазиуса:

$$y_0 := y(0) = (1/2)\int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y(s)}.$$

Решение уравнения (5) можно также получить в виде ряда Лагранжа [9]. В указанной работе доказано, что радиус сходимости ряда Лагранжа меньше единицы и ряд расходится при $x \to 1-0$.

Альтернативой решению в виде ряда Лагранжа может служить формирование итерационного процесса:

$$y_k(x) = (1/2)\left\{\int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y_{k-1}(s)} - \int_0^x \frac{(x-s)sds}{y_{k-1}(s)}\right\},$$
$$k = 1(1)\infty,$$

где нижний индекс k указывает номер итерации.

Значения постоянной Блазиуса, полученные в процессе итерации, определяются из последовательности

$$y_k(0) = (1/2)\int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y_{k-1}(s)}.$$

Для разных k последовательно находим следующие значения.

$$k = 1: y_0(x) = y_0 = \sqrt{1/12} = 0,2887;$$
$$k = 2: y_1(x)\cdot y_0 = (1/12)(1-x^3),$$
$$y_1(x) = (1-x^3)/\sqrt{12},\ y_1(0) = 1/\sqrt{12};$$

$$k = 3:$$
$$y_2(x) = \sqrt{3}\left(\int_0^1 \frac{(1-s)sds}{1-s^3} - \int_0^x \frac{(x-s)sds}{1-s^2}\right) -$$
$$-\sqrt{3}\left\{\begin{array}{l} \ln\sqrt{3}\,\dfrac{x+2}{3}\ln\sqrt{1+x+x^2} + \\ +(1/3)(1-x)\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right) - \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}} + \\ +\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} - \dfrac{\pi}{6}\right) \end{array}\right\},$$
$$y_2(0) = \sqrt{3}\left(\ln\sqrt{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)$$

и т. д.

Соответственно первые три итерированных значения постоянной Блазиуса образуют последовательность

$$y_0(0) = 1/\sqrt{12} = 0,2887...,$$
$$y_1(0) = 0,2887...,$$
$$y_3(0) = 0,4278...,$$

и, в среднем, за первые три итерации $y(0)$ лежит в диапазоне

$$0,3299 < y(0) < 0,3344.$$

Итерационный процесс приводит к тривиальным и длительным вычислениям, что становится ясным уже на третьей итерации. Очевидно, любое итерированное решение обладает всеми основными свойствами решения предельной задачи (1):

$$\forall x \in (0,1),\ \forall k = 1(1)\infty,$$
$$y_k'(x) < 0,\ \ y_k''(x) < 0,$$
$$y'(x) \xrightarrow[x\to 1-0]{} -\infty.$$

Неудобство итерационного процесса состоит в громоздкости выражений для итерированных решений и в отсутствии доказательства его сходимости. Оба этих препятствия можно обойти, если использовать разностную аппроксимацию предельной задачи (1).

Интерес к численным решениям уравнения Блазиуса появился сразу же после публикации его работы в 1908 году [2] и связан с разочарованием в методе интегрирования с помощью степенных рядов (см. работу [8] и ее препринт, содержащий историю вопроса). Современные исследования [10, 11, 13 – 21] посвящены, в основном, улуч-

шению сходимости предикт-коррекшн-методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений пограничного слоя. Исключение составляет работа [22], содержащая развитие метода С. Каплуна, трактуемого в терминах гомотопических отображений промежутка интегрирования на компакт. В случае предельной задачи (1) отображения компактны.

Пусть линейная гомотопия

$$F(t,x): ((0 < t < 1) \times (0 < x < 1)) \to (0, a)$$

изображает решение предельной задачи (1).

Тогда $F(0, x)$ изображает решение в окрестности точки $x = 0$, а $F(1, x)$ – в окрестности точки $x = 1$. Например, для слабого решения

$$F(0,x) = (1/3)\left(1 - x^3/2 - x^6/8\right),$$

$$F(1,x) = \left(1/\sqrt{3}\right)\sqrt{1-x}.$$

Линейное гомотопическое отображение имеет вид:

$$y(x) = F(t,x) = (1-t)F(0,x) + tF(1,x) =$$

$$= (1-t)/3\left(1 - x^3/3 - x^6/8\right) + t\sqrt{\frac{1-x}{3}}.$$

Слабое решение также представляет некоторую гомотопию с параметром $\theta \in (0,1)$. Действительно:

$$y^2(x,\theta) = (1/6)\left(1-\theta^2\right)\left(1-x^3\right),$$

$$y^2(x,1) = 0,\ y^2(x,0) = (1/6)\left(1-x^3\right).$$

Наконец, работа [12] посвящена возрождению метода степенных разложений. Но ее результаты перекрываются данными работы [8] по плоским рядам, а также препринтами этой публикации в трудах Института прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша, которые были опубликованы ранее.

При численном решении задачи (1) на интервале $x \in (0, 1)$ расчетная область состоит из N участков с постоянным шагом $h = 1/N$ ($x_j = jh, j = 0, 1, \ldots, N$). При дискретизации уравнения (1) используется разностная схема второго порядка:

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + \gamma\frac{x_j}{y_j} = 0. \qquad (6)$$

Равенство (6) представляет собой дискретный аналог точного равенства

$$y'' = -\gamma\frac{x}{y}.$$

Это выражение линейно относительно компоненты y_{j+1}, и поэтому, если известны компоненты y_{j-1}, y_j (где $j = 1(1)$) вектора $\mathbf{y}$, то для вычисления y_{j+1} получается линейная система алгебраических уравнений.

Граничные условия в предельной задаче (1) при дискретизации принимают следующий вид:

$$\frac{3y_0 - 4y_1 + y_2}{2h} = 0,\ \ y_N = 0. \qquad (7)$$

Если для разностей в равенствах (6), (7) ввести обозначения

$$\begin{cases} f_0 = 3y_0 - 4y_1 + y_2, \\ f_j = y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1} + \gamma h^2\dfrac{x_j}{y_j}, \\ f_N = y_N, \end{cases} \qquad (8)$$

то задачу (6) – (8) можно записать в эквивалентной форме линейной алгебраической системы

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{y}$ – векторы, имеющие вид

$$F = [f_0 f_1 \ldots f_N]^T,$$

$$y = [y_0 y_1 \ldots y_N]^T.$$

Для решения полученной нелинейной системы используется итеративный метод Ньютона:

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \Delta y^{(k)},$$

где $\Delta y^{(k)}$ – вектор невязок,

$$\Delta y^{(k)} = [\Delta y_0^{(k)}\ \Delta y_1^{(k)} \ldots\ \Delta y_N^{(k)}]^T.$$

Он получается как решение линеаризованного матричного уравнения с матрицей Якоби $\mathbf{J}_F(\mathbf{y})$ порядка $N + 1$:

$$J_F(y^{(k)})\Delta y^{(k)} = -F(y^{(k)}), \qquad (9)$$

$$J_F(\mathbf{y}^{(k)}) = \frac{\partial(f_0,\ldots,f_N)}{\partial(y_0,\ldots,y_N)}. \qquad (10)$$

Предполагается, что матрица $\mathbf{J}_F(\mathbf{y})$ хорошо обусловлена. Тогда система (10) корректна и однозначно разрешима:

$$\Delta\mathbf{y}^{(k)} = -\mathbf{J}_F^{-1}\left(\mathbf{y}^{(k)}\right)\mathbf{F}\left(\mathbf{y}^{(k)}\right).$$

Подставляем равенство (8) в уравнение (9), и тогда с учетом равенства (10) получаем следующие выражения:

$$3\Delta y_0^{(k)} - 4\Delta y_1^{(k)} + \Delta y_2^{(k)} = -f_0^{(k)}, \quad f_0^{(k)} = 3y_0^{(k)} - 4\Delta y_1^{(k)} + y_2^{(k)}, \tag{11}$$

$$f_j^{(k)} = y_{j-1}^{(k)} - 2y_j^{(k)} + y_{j+1}^{(k)} + \gamma h^2 \frac{x_j}{y_j^{(k)}}, \tag{12}$$

$$a_j \Delta y_{j-1}^{(k)} + b_j \Delta y_j^{(k)} + c_j \Delta y_{j+1}^{(k)} = -f_j^{(k)}, \tag{13}$$

$$a_j = 1,\ b_j = -2 - \gamma h^2 \frac{x_j}{\left(y_j^{(k)}\right)^2},\ c_j = 1, \quad \Delta y_N^{(k)} = -y_N^{(k)}. \tag{14}$$

Очевидно, что система уравнений (11) – (14) содержит три неизвестных в каждом из уравнений и похожа на тридиагональную систему. Обычно в подобных системах первое и последнее уравнения содержат лишь два неизвестных. Однако в данной системе первое уравнение содержит три неизвестных: $\Delta y_0^{(k)}, \Delta y_1^{(k)}, \Delta y_2^{(k)}$.

Для исключения неизвестного $\Delta y_0^{(k)}$ уравнение (11) можно представить в следующем виде:

$$\Delta y_0^{(k)} = \frac{1}{3}\left[4\Delta y_1^{(k)} - \Delta y_2^{(k)} - f_0^{(k)}\right]. \tag{15}$$

Далее, подставляя выражения (13) и (14) в уравнение (15) при $j = 1$, получаем выражение:

$$\hat{b}_1 \Delta y_1^{(k)} + \hat{c}_1 \Delta y_2^{(k)} = -\hat{f}_1^{(k)}, \tag{16}$$

где

$$\hat{b}_1 = b_1 + 4/3a_1, \quad \hat{c}_1 = c_1 - 1/3a_1, \quad \hat{f}_1^{(k)} = f_1^{(k)} - 1/3 f_0^{(k)}. \tag{17}$$

Матрица системы уравнений (11), (15), (16) является тридиагональной. Эту систему можно решить с прогонкой по индексам j:

$$\Delta y_j^{(k)} = p_j - q_j \Delta y_{j+1}^{(k)}. \tag{18}$$

Из равенства (16) следует, что

$$p_1 = -\hat{f}_1^{(k)} / \hat{b}_1, q_1 = \hat{c}_1 / \hat{b}_1. \tag{19}$$

Из уравнений (15), (19) вытекает равенство:

$$a_j\left(p_{j-1} - q_{j-1}\Delta y_j^{(k)}\right) + b_j \Delta y_j^{(k)} + c_j \Delta y_{j+1}^{(k)} + f_j^{(k)} = 0. \tag{20}$$

С учетом граничного условия $y_N = 0$, для всех k получаются равенства

$$y_N^{(k)} = \Delta y_N^{(k)} = 0.$$

После вычисления p_j и q_j для $j = 1, 2, ..., N - 1$ при помощи выражений (18) и (19), можно вычислить $\Delta y_j^{(k)}$ для $j = N - 1, N - 2, ..., 0$ при помощи выражения (18).

Вычисления проводятся до тех пор, пока не будет достигнута заранее заданная точность ε:

$$\left\|\Delta\mathbf{y}^{(k)}\right\| \le \varepsilon,$$

где ‖*‖ означает, например, sup – норму вектора невязки или любую эквивалентную норму матрицы.

На рис. 1 представлено численное решение задачи (4), (5) на интервале $x \in [0, 1]$ при $\gamma = 1$ с различным количеством шагов N при $\varepsilon = 10^{-6}$. В масштабе рисунка расслоение численных решений невелико даже при изменении числа N узлов дробления промежутка интегрирования $0 < x < 1$ на 4(!) порядка, $10^2 \le N \le 10^6$. В качестве начального приближения рассматривается следующее выражение:

$$y_0 = (1/2)\,(1 - x^2)^{1/2}.$$

Сплошной жирной линией на этом рисунке показано слабое решение (4) с постоянной Блазиуса 0,4714 (точное значение равно 0,4696).

Таблица содержит результаты вычисления постоянной Блазиуса $y(0)$ при $\gamma = 1$ и различных количествах шагов N, а также значения, полученные другими авторами [12 – 16].

Из данных таблицы следует, что три первые точные значащие цифры постоянной Блазиуса вычисляются уже при небольшом числе узлов, при $N > 10000$. На правом конце промежутка интегрирования, т. е. при $x = 1 - 0$, производная численного решения ограничена снизу и график ни одного численного решения не обладает вертикальной касательной (см. рис. 1). Ограниченность значений численных производных ожидаема, так как используются односторонние разности.

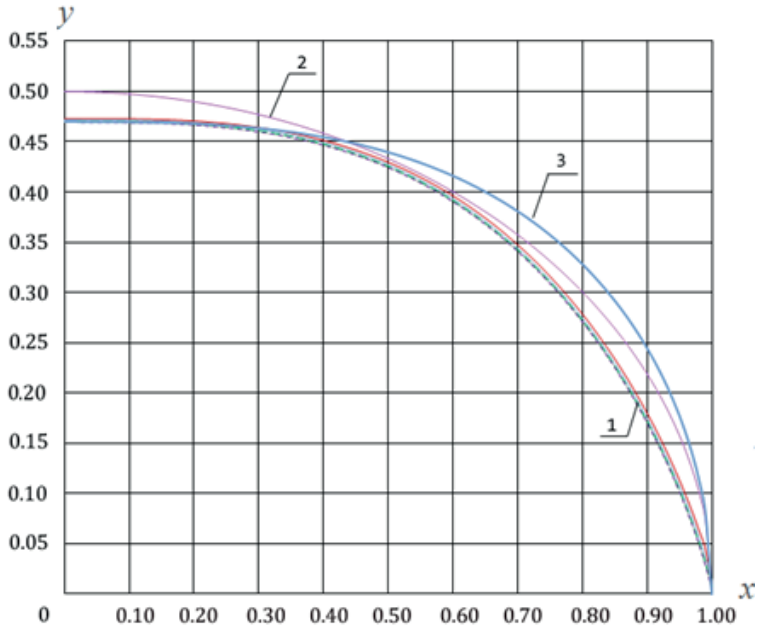


Рис. 1. Численное решение задачи Крокко на интервале $x \in [0, 1]$ при $\gamma = 1$ с различным количеством шагов N: 100, 1000, 10 000, 100 000, 10^6 (расслоенный пучок линий *1*); линия *2* – начальное приближение $y_0 = 1/2$, линия *3* – слабое решение (4) с постоянной Блазиуса $y_0 = 0{,}4714$

Таблица

Расчетные значения постоянной Блазиуса *y*(0) при варьировании параметров и числа разбиений промежутка интегрирования

Источник	Число шагов N	Значение $y(0)$	
		$\gamma = 0{,}5$	$\gamma = 1{,}0$
Настоящая статья	100	0,339566	0,472865
	1000	0,335198	0,471984
	10000	0,332051	0,470430
	100000	0,332053	0,469855
	1000000	0,332053	0,469676
[13]	–	0,332057	0,469600
[14]		0,3320573362	0,4695999889
[15]		0,332057	0,469599

Для продолжения решения задачи (1) в область $x < 0$ используется разностная схема второго порядка (6) со следующими предельными условиями:

$$y(0) - \tilde{y}_0 = y'(0) = 0, \qquad (21)$$

где $\tilde{y}_0$ – значение $y(0)$ из решения, полученного на интервале $x \in [0, 1]$, т. е. постоянная Блазиуса численного решения.

При дискретизации граничные условия (21) принимают вид

$$y_0 - \tilde{y}_0 = (y_0 - y_{-1}) / h = 0,$$

откуда следует $y_0 = \tilde{y}_0 = y_{-1}$.

Таким образом,

$$y_j = 2y_{j+1} - y_{j+2} - \gamma h^2 x_{j+1} / y_{j+1},$$
$$j = -2, -3, \ldots, -M,$$

где M – количество расчетных шагов в области $x < 0$ (натуральное число).

На рис. 2 представлено положительное численное решение предельной задачи (1), продолженной на отрицательную полуось. В точке контакта $x = -0$ сохраняется непрерывность и гладкость продолженного решения.

Продолжение положительной и отрицательной ветвей слабого решения на отрицательную полуось имеет следующий вид:

$$y(x) = \pm a\sqrt{1-(-x)^3}, \; a = 1/\left(3\sqrt{\gamma}\right)$$

Очевидно, что при $-x >> 1$ слабое решение имеет порядок, совпадающий с порядком точного решения предельной задачи (1):

$$y(x) \sim (-x)^{3/2}.$$

Выводы

Проведенное исследование привело нас к следующим выводам.

1. Слабое решение предельной задачи Крокко обладает всеми свойствами точного решения: нулевой производной в точке $x = 0$, неограниченной производной в точке $x = 1$, возможностью продолжения решения на отрицательную полуось $x < 0$ с сохранением непрерывности и гладкости в точке $x = 0$.

2. Полученные нами значения постоянной Блазиуса в слабом решении составили: $y(0) = 1/3$ при $\gamma = 1/2$ и $y(0) = 0{,}4717$ при $\gamma = 1$; приближенное значение постоянной Блазиуса отличается от точного значения

$$(y(0) = 0{,}332059, \gamma = 1/2 \text{ и}$$
$$y(0) = 0{,}4696, \gamma = 1)$$

меньше, чем на 0,4%.

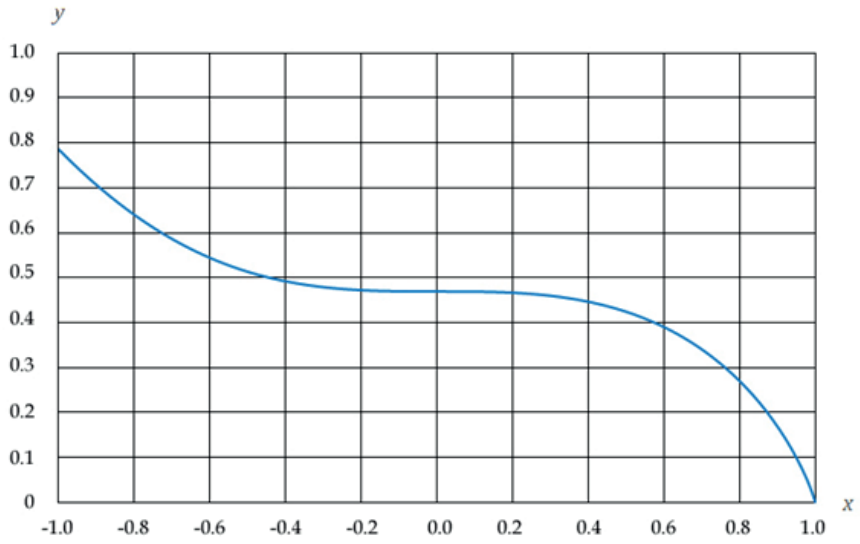


Рис. 2. Решение задачи Крокко на интервале $x \in [-1, 1]$ при $\gamma = 1$

3. Вычислительный эксперимент показал равномерную на промежутке $0 \le x \le 1$ сходимость численной аппроксимации решения к слабому решению при небольшой плотности дискретизации промежутка (порядка $N = 10^4$ узлов).

4. На правом конце промежутка интегрирования, $x = 1 - 0$, производная численного решения ограничена снизу и график численного решения не обладает вертикальной касательной. Ограниченность значений численных производных ожидаема, так как используются односторонние разности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Crocco L.** Sull strato limite laminare nei gas lungo una lamina plana // Rend. Math. Appl. Ser. 5. 1941. Vol. 21. No. 2. Pp. 138–152.

2. **Blasius H.** Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung // Zeitschrift fьr Mathematik und Physik. 1908. Band 56. S. 1–37.

3. **Muskat M.** Seepage of water through dams with vertical faces // Journal of General and Applied Physics. 1935. Vol. 6. Pp. 402–415.

4. **Анахаев К.Н.** Расчет фильтрации через перемычку на непроницаемом основании // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. 1990. № 7. С. 78–82.

5. **Анахаев К.Н.** О фильтрационном расчете перемычки // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 2. С. 148–158.

6. **Анахаев К.Н.** О развитии аналитических методов расчета фильтрации // Природообустройство. 2014. № 1. С. 72–75.

7. **Петриченко М.Р., Котов Е.В., Заборова Д.Д., Мусорина Т.А.** Слабые решения предельных задач Крокко // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 27–38.

8. **Варин В.П.** Асимптотические разложения решения Крокко и ряд Блазиуса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 4. С. 530–540.

9. **Петриченко М.Р.** Интегральное уравнение предельной задачи Крокко // Вестник Кыргызско-Российского славянского университета. Естественные и физико-математические науки. 2017. Т. 17. № 12. С. 8–11.

10. **Azizi A., Latifizadeh H.** On the efficiency of collocation method for solution of the Falkner – Skan boundary layer equation // Journal of Mathematical and Computational Science. 2014. Vol. 4. No. 2. Pp. 128–147.

11. **Kuo B-L.** Heat transfer analysis for the Falkner – Skan wedge flow by the differential transformation method // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2005. Vol. 48. No. 23–24. Pp. 5036–5046.

12. **Paul M.** An accurate Taylor's series solution with high radius of convergence for the Blasius function and parameters of asymptotic variation // Journal of Applied Fluid Mechanics. 2014. Vol. 7. No. 4. Pp. 557–564.

13. **Liao S-J.** An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1999. Vol. 34. No. 4. Pp. 759–778.

14. **Liu C-S.** An SL(3,R) shooting method for solving the Falkner – Skan boundary layer equation // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2013. Vol. 49. March. Pp. 145–151.

15. **Ding Xu, Xin Guo**. Fixed point analytical method for nonlinear differential equations // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 8. No. 1. P. 011005 (9 p.)

16. **Aminikhah H.** Analytical approximation to the solution of nonlinear Blasius viscous flow equation by LTNHPM // International Scholarly Research Network. ISRN Mathematical Analysis. 2012. Vol. 2012. Article ID 957473 (10 p.).

17. **Asaithambi A.** Numerical solution of the Falkner – Skan equation using piecewise linear functions // Applied Mathematics and Computation. 2004. Vol. 159. No. 1. Pp. 267–273.

18. **Asaithambi A.** Solution of the Falkner – Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. Vol. 176. No.1. Pp. 203–214.

19. **Boyd J.P.** The Blasius function in the complex plane // Experimental Mathematics. 1999. Vol. 8. No. 4. Pp. 381–394.

20. **Варин В.П.,** Асимптотическое разложение решения Крокко и константа Блазиуса. Препринты ИПМ им. Келдыша РАН. № 106, 20 с. http://keldysh.ru/papers/2016/prep2016_106.pdf.

21. **Zhang J., Chen B.** An iterative method for solving the Falkner – Skan equation //Applied Mathematics and Computation. 2009. Vol. 210. No. 1. Pp. 215–222.

22. **Asaithambi A.** Numerical solution of the Blassius equation with Crocco – Wang transformation // Journal of Applied Fluid Mechanics. 2014. Vol. 9. No. 5. Pp. 2595–2603.

23. **Zhao Y., Lin Z., Liao S.** A modified homotopy analysis method for solving boundary layer equations // Applied Mathematics. 2013. Vol. 4. No. 1. Pp. 11–15.

Статья поступила в редакцию 20.03.2019, принята к публикации 20.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – *доктор технических наук, заведующий кафедрой гидравлики и прочности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
fonpetrich@mail.ru

КОТОВ Евгений Владимирович – *ассистент кафедры гидравлики и прочности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
ekotov.cfd@gmail.com

REFERENCES

1. **Crocco L.,** Sull strato limite laminare nei gas lungo una lamina plana, Rend. Math. Appl., Ser. 5. 21 (2) (1941) 138–152.

2. **Blasius H**., Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 56 (1908) 1–37.

3. **Muskat M.,** Seepage of water through dams with vertical faces, Journal of General and Applied Physics. 6 (1935) 402–415.

4. **Anakhayev K.N.,** Raschet filtratsii cherez peremychku na nepronitsayemom osnovanii [The design of an impenetrable-based crosspiece filtration], News of Higher Educational Institutions. Construction. (7) (1990) 78–82.

5. **Anakhayev K.N.,** About filtration account the crosspiece, Matem. Mod. 23 (2) (2011) 148–158.

6. **Anakhayev K.N.,** About development of analytical methods of filtration calculation, Prirodoobustroystvo. (1) (2014) 72–75.

7. **Petrichenko M.R., Kotov E.V., Zaborova D.D., Musorina T.A.,** Weak solutions of the Crocco boundary problems, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 11(3) (2018) 27–38.

8. **Varin V.P**., Asymptotic expansion of Crocco solution and the Blasius constant, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 58 (4) (2018) 517–528.

9. **Petrichenko M.R**., The integral equation of the Crocco boundary problem, Vestnik KRSU, Natural, Physical and Mathematical Sciences. 17 (12) (2017) 8–11.

10. **Azizi A., Latifizadeh H.,** On the efficiency of collocation method for solution of the Falkner – Skan boundary layer equation, Journal of Mathematical and Computational Science. 4 (2) (2014) 128–147.

11. **Kuo B-L.,** Heat transfer analysis for the Falkner – Skan wedge flow by the differential transformation method, International Journal of Heat and Mass Transfer. 48 (23–24) (2005) 5036–5046.

12. **Paul M.,** An accurate Taylor's series solution with high radius of convergence for the Blasius function and parameters of asymptotic variation, Journal of Applied Fluid Mechanics. 7 (4) (2014) 557–564.

13. **Liao S-J.,** An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems, International Journal of Non-Linear Mechanics. 34 (4) (1999) 759–778.

14. **Liu C-S.,** An SL(3,R) shooting method for solving the Falkner – Skan boundary layer equation, International Journal of Non-Linear Mechanics. 49 (March) (2013) 145–151.

15. **Ding Xu, Xin Guo**, Fixed point analytical method for nonlinear differential equations, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 8 (1) (2013) 011005.

16. **Aminikhah H.,** Analytical approximation to the solution of nonlinear Blasius viscous flow equation by LTNHPM, International Scholarly Research Network, ISRN Mathematical Analysis. 2012 (2012) ID 957473.

17. **Asaithambi A.,** Numerical solution of the Falkner – Skan equation using piecewise linear functions, Applied Mathematics and Computation. 159 (1) (2004) 267–273.

18. **Asaithambi A.,** Solution of the Falkner – Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients, Journal of Computational and Applied Mathematics. 176 (1) (2005) 203–214.

19. **Boyd J.P.,** The Blasius function in the complex plane, Experimental Mathematics. 8 (4) (1999) 381–394.

20. **Varin V.P.,** Asymptotic expansion of Crocco solution and Blasius constant, Keldysh Institute preprints, Moscow, 106 (2016) 20 p.

21. **Zhang J., Chen B.,** An iterative method for solving the Falkner – Skan equation, Applied Mathematics and Computation. 2009. Vol. 210 (1) (2009) 215–222.

22. **Asaithambi A.,** Numerical solution of the Blassius equation with Crocco – Wang transformation, Journal of Applied Fluid Mechanics. 9 (5) (2014) 2595–2603.

23. **Zhao Y., Lin Z., Liao S.,** A modified homotopy analysis method for solving boundary layer equations, Applied Mathematics. 4 (1) (2013) 11–15.

Received 20.03.2019, accepted 20.04.2019.

THE AUTHORS

PETRICHENKO Mikhail R.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
fonpetrich@mail.ru

KOTOV Eugeniy V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
ekotov.cfd@gmail.com

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

DOI: 10.18721/JPM.12206
УДК 535.36, 535.4, 57.088

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЛАЗЕРНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ПОЛИДИСПЕРСНЫХ СУСПЕНЗИЙ НАНОЧАСТИЦ

Э.К. Непомнящая, Е.Н. Величко

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе предлагается модификация метода лазерной корреляционной спектроскопии для повышения точности определения размеров полидисперсных наночастиц в составе суспензий. Суть модификации состоит в создании оригинальной схемы и алгоритма обработки экспериментальных данных и позволяет определять размеры сильно полидисперсных, а также несферических наночастиц. Приводится теория для расчета размеров и формы наночастиц, а также алгоритм для решения обратной некорректной задачи лазерной корреляционной спектроскопии. Апробация разработанного программно-аппаратного комплекса производится с использованием модельных сигналов с различным уровнем шума, а также при исследовании монодисперсных и полидисперсных суспензий сферических и эллипсоидальных частиц с известными размерами.

Ключевые слова: лазерная корреляционная спектроскопия, наночастица, размер, программно-аппаратный комплекс

Ссылка при цитировании: Непомнящая Э.К., Величко Е.Н. Модификация метода лазерной корреляционной спектроскопии для анализа полидисперсных суспензий наночастиц // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 73–87. DOI: 10.18721/JPM.12206

MODIFICATION OF LASER CORRELATION SPECTROSCOPY METHOD FOR ANALYZING POLYDISPERSE NANOPARTICLE SUSPENSIONS

E.K. Nepomnyashchaya, E.N. Velichko

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The paper proposes a modification of the laser correlation spectroscopy method to improve the accuracy of determining the size of polydisperse nanoparticles in suspensions. The essence of the modification is to create an original scheme and an experimental data processing algorithm, which makes it possible to determine the size of highly polydisperse as well as nonspherical nanoparticles. A theory is given for calculating the size and shape of nanoparticles, as well as an algorithm for solving the inverse ill-posed problem of laser correlation spectroscopy. The approbation of the developed software and hardware complex is performed using model signals with different noise levels, as well as in the study of monodisperse and polydisperse suspensions of spherical and ellipsoidal particles with known sizes.

Keywords: laser correlation spectroscopy, nanoparticle, dimension, software and hardware complex

Citation: Nepomnyashchaya E.K., Velichko E.N., Modification of laser correlation spectroscopy method for analyzing polydisperse nanoparticle suspensions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 73–87. DOI: 10.18721/JPM.12206

Введение

В настоящее время повышается интерес к созданию и исследованию наночастиц, в том числе и в составе суспензий. Существующие методы, признанные наиболее эффективными для определения размеров наночастиц, такие как электронная и атомно-силовая микроскопия, не позволяют наблюдать изменения размеров и динамику агрегации частиц в реальном времени [1, 2]. К тому же их применение крайне ограничено при исследовании биологических суспензий.

В такой ситуации оказались эффективными методы, основанные на динамическом рассеянии света, в том числе метод лазерной корреляционной спектроскопии (ЛКС) [1, 3]. Он широко применяется для экспресс-анализа размеров как наночастиц при их производстве, так и биомолекул. Однако коммерческие варианты реализации лазерных корреляционных спектрометров не позволяют с достаточной достоверностью исследовать многокомпонентные полидисперсные растворы [4]. Кроме того, все размеры рассчитываются в приближении сферичности рассеивателей, в то время как нередко встречаются наночастицы иных форм, а биомолекулы зачастую образуют кластеры несферической формы [5, 6]. С учетом перечисленных ограничений актуальным является развитие существующего метода лазерной корреляционной спектроскопии и алгоритмов обработки данных, для того чтобы повысить точность определения размеров частиц в полидисперсных суспензиях, а также определять их продольные и поперечные размеры при условии их несферичности.

В данной статье представлено описание программно-аппаратного комплекса, разработанного авторами на основе метода лазерной корреляционной спектроскопии. Такой комплекс позволяет решать поставленные задачи и получать размерные распределения и динамику их изменения для несферических частиц в полидисперсных суспензиях.

Схема реализации модифицированного метода ЛКС

Метод ЛКС основан на регистрации и анализе рассеянного светового излучения на частицах, совершающих броуновское движение в жидкости. Рассеянный свет в плоскости наблюдения образует динамическую спекл-картину [7]. Интенсивность такой картины в точке будет изменяться во времени вследствие движения рассеивателей в жидкости. Если регистрировать динамику изменения интенсивности спекл-картины в малой области, то можно сделать выводы о характере движения частиц и их размерах [8]. Движение частиц в данном случае характеризуется коэффициентом диффузии.

Схема разработанного программно-аппаратного комплекса представлена на рис. 1. В качестве источника излучения выбран одномодовый лазерный модуль *1* с мощностью непрерывного излучения до 5 мВт и рабочей длиной волны 650 нм. Питание лазерного модуля осуществляется через аккумуляторную батарею, что позволяет создать высокостабильное по мощности излучение. Для фокусировки излучения используется асферическая короткофокусная линза *3*, позволяющая получать диаметр пучка в фокусе линзы, равный 500 мкм, и протяженность каустики в растворе, равную 5 мм. В схеме реализована возможность детектирования рассеянного излучения под углами от 5 до 175°. Диафрагма и многомодовое оптоволокно применяются для ограничения области рассеяния (задания эффективного рассеивающего объема), с которой принимается излучение. Длина эффективного рассеивающего объема, рассчитанная для угла рассеяния в 90°, составляет 4,8 мм. Сигнал с фотоэлектронного умножителя *9* оцифровывается АЦП-модулем *10* на частотах 50 кГц – 50 МГц и обрабатывается на компьютере.

Представленная модификация метода ЛКС позволила реализовать аппаратную часть в малогабаритном корпусе (размер составляет 25×15×5 см) и создать переносной лазерный корреляционный спектрометр (вес – до 2 кг) [9].

Для анализа несферических наночастиц в описанную схему были добавлены поляризационные пластины *4* [10].

Рассеянное излучение регистрировалось при двух ортогональных положениях поляризатора-анализатора, что позволяло вычислять отдельно коэффициенты трансляционной и ротационной диффузии. В совокупности два этих параметра позволяли оценивать продольные и поперечные размеры несферических частиц.

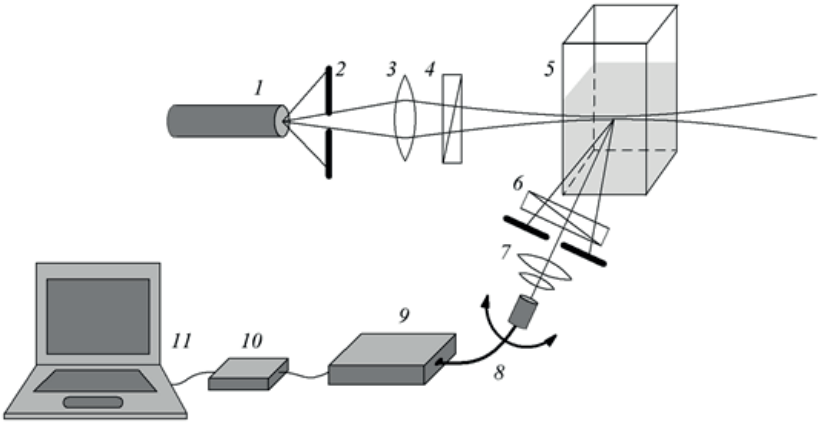


Рис. 1. Схема лазерного корреляционного спектрометра:
1 – лазер, *2* – экран с отверстием, *3* – собирающая линза, *4* – поляризатор,
5 – кювета с исследуемым раствором, *6* – выходной поворотный поляризатор-анализатор,
7 – коллимирующая система, *8* – входной разъем одномодового оптоволокна,
9 – фотоэлектронный умножитель, *10* – аналого-цифровой преобразующий модуль,
11 – персональный компьютер с программой обработки

Анализ размеров наночастиц с использованием автокорреляционных функций

Сигнал, регистрируемый при помощи предложенной схемы, представляет собой псевдослучайную зависимость интенсивности рассеянного излучения от времени. Частота этого сигнала определяется скоростью флуктуаций интенсивности светового излучения в плоскости наблюдения, а эта скорость, в свою очередь, – скоростью броуновской диффузии частиц в растворе. Для нахождения характерных частот можно было бы воспользоваться преобразованием Фурье, но из-за того, что одновременно регистрируются сигналы рассеяния от нескольких частиц, а также из-за наличия шумов, такой подход не дает точных результатов. Как правило, в таких случаях используется не частотное, а временно́е представление спектра сигнала, т. е. вычисление его автокорреляционной функции.

Рассмотрим диффузию частиц в растворе более подробно. Броуновское движение – это случайный процесс, поэтому при освещении кюветы с раствором лазерным лучом количество рассеивателей в измерительном объеме – случайная величина, как и интенсивность рассеянного света.

В ЛКС для обработки сигнала рассеяния вычисляют автокорреляционную функцию сигнала:

$$G^{(1)}(\tau) = \langle E_S^*(t) E_S(t+\tau) \rangle, \qquad (1)$$

где $E_s(t)$ – величина светового поля в области регистрации; $G^{(1)}(\tau)$ называют автокорреляционной функцией первого рода; τ – время корреляции.

В реальных экспериментах, как правило, используются квадратичные детекторы (фотоэлектронные умножители), которые регистрируют флуктуации не поля, а интенсивности рассеянного излучения. В этом случае вычисляется автокорреляционная функция второго рода, имеющая следующий вид:

$$G^{(2)}(\tau) = \langle E_S^*(t) E_S(t) E_S^*(t+\tau) E_S(t+\tau) \rangle. \qquad (2)$$

В случае, если рассеянный свет представляет собой стационарный Гауссов случайный процесс, автокорреляционная функция второго рода будет связана с автокорреляционной функцией первого рода соотношением Зигерта [11]:

$$G^{(2)}(\tau) = \left| G^{(1)}(\tau) \right|^2 + 1. \qquad (3)$$

Данное соотношение позволяет перейти от измеренной функции $G^{(2)}(\tau)$ к функции $G^{(1)}(\tau)$. Для идентичных сферических рассеивателей, положение которых не коррелировано, можно переписать автокорреляционную функцию в следующем виде [11]:

$$G^{(1)}(\tau) = S(\mathbf{q}, d) \langle e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}(0))} \rangle e^{-i\omega_0 \tau}. \qquad (4)$$

В данном уравнении $S(\mathbf{q},d)$ – амплитуда рассеянного излучения; $\mathbf{q}$ – вектор рассеяния, модуль которого вычисляется следующим образом:

$$|\mathbf{q}| = \frac{4\pi n_0}{\lambda_0}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (5)$$

Для свободной и изотропной диффузии данное выражение еще больше упрощается:

$$G^{(1)}(\tau) = S(\mathbf{q},d)\langle e^{-\mathbf{q}^2 D_T \tau}\rangle e^{-i\omega_0\tau}. \quad (6)$$

Здесь D_T – коэффициент трансляционной диффузии, который, согласно формуле Стокса – Эйнштейна, задается следующим образом [11]:

$$D_T = 2k_{\text{B}}T / 6\pi\eta d, \quad (7)$$

где η, Па·с, – вязкость жидкости; k_{B}, Дж/К, – постоянная Больцмана; T, К, – температура; d, м, – гидродинамический диаметр рассеивателей.

Приведенного математического аппарата достаточно для определения коэффициентов диффузии и размеров молекул, находящихся в равновесном состоянии. Кроме того, можно наблюдать агломерацию биологических молекул или, например, металлов. Это позволяет качественно охарактеризовать активность тех или иных молекул, оценить состав раствора.

Представленная теория действительна исключительно при условии сферичности рассеивателей и отсутствия анизотропии поляризуемости излучения. Для более детального исследования необходимо учитывать также вращательную диффузию. Если отойти от сферического приближения и предположить, что амплитуды рассеянного светового поля зависят от ориентации частиц в пространстве, то выражение для автокорреляционной функции для объектов с вращательной симметрией (цилиндры, эллипсоиды) переписывается в следующем виде [10, 12]:

$$G^{(1)}(\tau) = S_1(\mathbf{q},d_1,d_2)e^{-q^2 D_T \tau} + \\ + S_2(\mathbf{q},d_1,d_2)e^{-(q^2 D_T + 6D_R)\tau}, \quad (8)$$

где $S_0(\mathbf{q},d)$, $S_1(\mathbf{q},d)$ – постоянная и переменная амплитуды рассеянного излучения соответственно, причем вторая зависит от вращения частиц; d_1, d_2 – условные величины диаметра и длины частиц, D_R – коэффициент трансляционной диффузии.

В данном выражении первое слагаемое отвечает за обычную трансляционную диффузию, второе обычно определяется вращательной диффузией.

Угловые зависимости величин $S_0(q,d)$ и $S_1(q,d)$ приводят к следующему: при малых углах (в нашем случае $\theta < 60°$) только трансляционная диффузия вносит существенный вклад в сигнал рассеяния [12]. При увеличении угла наблюдения вклад ротационного движения увеличивается, однако чтобы отделить его от трансляционного движения, необходимо измерять угловые зависимости рассеяния.

При наличии анизотропии поляризуемости рассеивателей (или в случае исследования несферических частиц) можно измерять также автокорреляционную функцию деполяризованной компоненты рассеяния:

$$G^{(1)}_{Dep}(\tau) = S_{Dep}(\mathbf{q},d)e^{-(q^2 D_T + 6D_R)\tau}. \quad (9)$$

Видно, что компонента, отвечающая исключительно за трансляционное движение, отсутствует, что позволяет избежать измерения угловых зависимостей и ограничиться измерением поляризованной и деполяризованной компонент при малых (в диапазоне 20 – 50°) углах.

Значения для коэффициентов диффузии будут зависеть от формы рассеивателя. Для эллипсоидов вращения, которые являются основной формой наночастиц, наблюдаемой в экспериментах, коэффициенты диффузии можно записать следующим образом [12]:

$$D_T = \frac{k_{\text{B}}T}{3\pi\eta d_a}F(d_a,d_b),$$

$$D_R = \frac{k_{\text{B}}T}{\pi\eta d_a^3}\frac{\left(2-\left(\frac{d_b}{d_a}\right)^2\right)F(d_a,d_b)-1}{1-\left(\frac{d_b}{d_a}\right)^4},$$

$$F(d_a,d_b) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{d_b}{d_a}\right)^2}}\times \\ \times\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{d_b}{d_a}\right)^2}}{\frac{d_b}{d_a}}\right), \quad (10)$$

где d_a, d_b – полуоси эллипсоидов.

На основе данных измерения коэффициентов трансляционной и ротационной диффузии можно отдельно рассчитать размеры несферических частиц.

Таким образом, для определения размеров наночастиц необходимо построить автокорреляционную функцию сигнала рассеяния, решить обратную некорректную задачу для определения коэффициентов диффузии и с помощью формулы (7) или (10) вычислить размеры частиц.

Методы решения обратной задачи ЛКС

Как уже было отмечено, проблема аппроксимации экспериментальных данных проста для рассмотренного случая рассеяния света монодисперсными сферическими частицами. Если образцы полидисперсные, то интерпретация экспериментальных данных усложняется. Для реально достижимой точности измерений можно получить только два-три параметра полидисперсного распределения: средний размер частиц, ширину распределения и его асимметрию.

Вид корреляционной кривой функции поля, которая в случае монодисперсных сфер является экспоненциальной функцией, а именно –

$$|g^{(1)}|(\tau) = e^{-\Gamma\tau}$$

(где $\Gamma = D_T q^2$), меняется при наличии полидисперсности и в общем случае записывается как суперпозиция экспоненциальных функций:

$$\left|g^{(1)}(\tau)\right| = \int_0^\infty F(\Gamma) e^{-\Gamma\tau} d\Gamma, \qquad (11)$$

где $F(\Gamma)$ – вклад в суммарную интенсивность компоненты излучения, рассеянного на частицах одного размера.

При решении уравнения (11) ищется набор коэффициентов диффузии для каждого размера частиц. При этом выражение для функции содержит экспериментальные ошибки, что приводит к систематической погрешности в искомом распределении $F(\Gamma)$.

В настоящее время существует множество методов нахождения решений уравнений типа (11) [13]. Все эти методы можно разделить на несколько основных видов: статистические, вариационные, итерационные и проекционные. Выбор подходящего метода для решения конкретной задачи ЛКС зависит от весомости его преимуществ и недостатков для каждого конкретного случая.

Проекционные методы. Используются для повышения устойчивости задачи и основаны на проецировании неустойчивого функционала на компакт. Однако в реальных задачах слишком сложно определить компакт для решения правой части уравнения. Таким образом, указанные методы обычно используются в качестве инструмента для применения предварительного ограничения к требуемому решению. Метод, который можно использовать для интегральных уравнений, – это преобразование Фурье. Если нам известна правая часть уравнения только приблизительно, то преобразование Фурье с использованием функции фильтрации может подавить влияние высокой частоты.

Статистические методы. Основаны на статистической априорной информации о свойствах матрицы, которая используется в приближении интегрального оператора. В этих методах мы рассматриваем дискретный аналог интегральных уравнений:

$$Ax + \xi = y.$$

Распространенным методом в промышленной эксплуатации является метод кумулянтов [14]. Его легко и быстро реализовать, поэтому этот метод описан в международном стандарте ISO 13321. Однако без предварительной информации, с помощью этого метода можно найти только средний коэффициент диффузии и его моменты. Кроме того, метод кумулянтов поддается проверке при унимодальном распределении, а в случае полидисперсных растворов возникают искаженные результаты [9].

Распределение скоростей затухания $F(\Gamma)$ определяется из условия, что величина $F(\Gamma)d\Gamma$ есть доля полной интенсивности рассеяния, обусловленная молекулами, для которых значения $D_T q^2$ лежат в интервале между Γ и $\Gamma + d\Gamma$, и

$$\int_0^\infty F(\Gamma) d\Gamma = 1.$$

Согласно подходу Коппела [15], по данным эксперимента вычисляются $K_m(\Gamma)$ – кумулянты распределения $F(\Gamma)$. Первый кумулянт ($m = 1$) дает «Z-среднее» значение коэффициента диффузии, второй ($m = 2$) характеризует ширину распределения, третий ($m = 3$) – асимметрию и т. п. Кумулянты используют еще и как чувствительный

метод определения отклонений от монодисперсности.

Рассмотренный метод до сих пор наиболее применим в коммерческом производстве, однако он не позволяет получать точные результаты измерений в случаях, когда не известны ожидаемые размеры частиц. Кроме того, при исследовании полидисперсных многокомпонентных смесей коммерческие спектрометры часто дают неверные результаты.

В байесовских методах используется апостериорная плотность вероятности в качестве функции неопределенности $P(x|y)$ для вектора решения x и экспериментальных данных y. Этот метод очень эффективен и может дать необходимое решение с любым фоновым шумом в матрице и в правой части уравнения. Единственная проблема заключается в том, что для его применения нам нужна самая полная априорная информация об искомом решении, что в экспериментах с биологическими жидкостями пока что неприменимо.

Итерационные методы. Основная идея этих методов заключается в формулировке итерационной схемы, сходящейся к точному решению, если в правой части уравнения $\delta = 0$ или в операторе нет ошибок, или если $\delta \neq 0$ при прерывании расходящегося итерационного процесса для ряда итераций. При решении обратной задачи в полидисперсных решениях можно использовать метод нелинейной оптимизации (метод Левенберга – Маркварта). К сожалению, этот метод требует точной априорной информации о форме и количестве компонентов в распределении, поэтому он не очень полезен в реальной обработке.

Неотрицательный метод наименьших квадратов также является частью итерационных методов. Он хорош как часть других алгоритмов, но может давать слишком расщепленные данные [15]. Простейшим и наиболее эффективным из итерационных методов является метод Фридмана [16]. Использование этого метода позволяет учесть практически любую априорную информацию о требуемом решении. С другой стороны, этот метод имеет низкую устойчивость по отношению к шумам в исходных данных. Кроме того, данный метод не совсем подходит для решения уравнений с экспоненциальным ядром.

Вариационные методы. Значительное развитие в решении плохо обусловленных задач было сделано благодаря созданию общей теории регуляризации Тихонова [17]. Суть метода заключается в поиске решения не в классе всех интегрируемых функций, а в более узком классе, удовлетворяющем некоторым дополнительным условиям. До недавнего времени одним из самых популярных методов был CONTIN. Однако этот метод слишком специфичен для параметра регуляризации и не позволяет разрешать узкие пики. Сравнение регуляризации Тихонова и CONTIN представлено в нашей предыдущей работе [4].

Регуляризация Тихонова стабилизирует значения отклонения теоретической кривой от экспериментальной за счет дополнительной составной функции устойчивости $\Omega(x)$ – стабилизирующего функционала. Основным преимуществом является кросс-функциональность метода, он использует минимум априорной информации. Имеется еще один вариационный метод, помимо регуляризации Тихонова, – метод усеченного сингулярного разложения [18]. Его алгоритм близок к методу Тихонова, но с его помощью можно уменьшать ошибки округления.

Сравнение методов. В табл. 1 сведены все вышеописанные методы и выполнено их сравнение. Из представленных данных видно, что при условии отсутствия априорной информации о рассеивателях, оптимальными для применения в задачах ЛКС являются вариационные методы. Существующие недостатки этих методов можно обойти путем введения ряда модификаций в общепринятые алгоритмы и проведения модельных экспериментов для уточнения параметра регуляризации.

Разработанный алгоритм решения обратной задачи ЛКС

Как уже было отмечено, если в жидкости присутствуют взвешенные частицы разных размеров, определение их размеров требует решения обратной задачи ЛКС (11), т. е. восстановления функции $F(\Gamma)$ по известной функции $g^{(1)}(\tau)$. Эта обратная задача является некорректной в том смысле, что малая погрешность экспериментальных данных влечет за собой большую погрешность в вычисляемой зависимости $F(\Gamma)$.

В связи с тем, что измерение зависимости $F(\Gamma)$ производится в дискретном и конечном наборе точек, а также в связи с необходимостью численного решения (11),

Таблица 1

Сравнение преимуществ и недостатков различных методов решения обратных некорректных задач

Методы	Преимущества	Недостатки
Проекционные (например, Фурье-фильтрация)	1. Нет необходимости в априорной информации 2. Нет надобности использовать процедуру подгонки в соответствии с критериями наименьших квадратов	1. Наличие осцилляций 2. Необходимость выбора функции фильтрации 3. Трудно восстановить близкие линии с различной интенсивностью 4. Присутствие отрицательных значений в решении
Статистические (например, байесовские)	1. Дают необходимое решение с любым фоновым шумом 2. Уровень по умолчанию можно установить индивидуально для каждого элемента матрицы	Необходимость наибольшего количества априорной информации
Итерационные (например, метод Фридмана)	Практически любая априорная информация принимается во внимание	1. Наличие большого числа итераций 2. Необходимость задания значений ожидаемых результатов 3. Накопление возможных ошибок
Вариационные (например, метод Тихонова)	1. Кросс-функциональность 2. Требование минимума предварительной информации 3. Гладкое решение	1. Необходимость выбора параметра регуляризации 2. Трудность восстановить узкие линии

задача сводится к системе уравнений, которую в матричном виде записывают следующим образом:

$$A\mathbf{f} = \mathbf{g}. \qquad (12)$$

На решение этой системы при использовании регуляризации накладываются определенные априорные условия, различные в зависимости от решаемой задачи. Общепринятыми считаются условия неотрицательности решения (ограничение решения в компактном множестве $M \geq 0$), а также его гладкости, т. е. отсутствия выбросов.

Для нахождения приближенного решения системы линейных алгебраических уравнений (12), устойчивого к малым изменениям в правой части, в методе Тихонова систему (12) заменяют задачей минимизации с добавлением регуляризирующего слагаемого:

$$\left\| A\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{g}} \right\|^2 + \alpha\Omega(\mathbf{f}) \to \min, \qquad (13)$$

где α – параметр сглаживания ($\alpha > 0$); $\Omega(\mathbf{f})$ – стабилизирующий функционал, который для каждой задачи выбирается отдельно; $\tilde{\mathbf{g}} \to \mathbf{g}$.

В лазерной корреляционной спектроскопии, для получения гладких решений стабилизирующий функционал выбирают так, чтобы уменьшить скачки нулевой производной:

$$\Omega(\mathbf{f}) = \left\| \mathbf{f} \right\|^2.$$

Минимизация такого рода стабилизирует решение системы, улучшая ее обусловленность; кроме того, повышается согласованность реального и искомого решений. Однако данный выбор часто приводит к излишней сглаженности решений, и в случае, когда решение представляет собой совокупность нескольких узких пиков, их разделение затрудняется.

Регуляризирующий параметр α выбирается на основе входных данных, а именно: слишком большое значение α приводит к появлению «переглаженных» решений, а слишком малое делает задачу неустойчивой.

В нашем алгоритме стартовое значения параметра α выбиралось равным 1 % от максимального диагонального элемента матрицы A. После первого решения системы (13) высчитывалась невязка $\left\| A\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{g}} \right\|^2$, параметр α уменьшался на 90 % от первоначального значения, и система решалась заново. После второй итерации снова высчитывалась невязка и сравнивалась со значением невязки, полученным на предыдущей итерации. При их различии более чем на 10 %, параметр α снова уменьшался

на 90 %, и производилась следующая итерация. В предлагаемом алгоритме, ввиду использования сравнения невязок, нет необходимости задавать уровень шума в эксперименте, который зачастую точно неизвестен [19].

Система уравнений (13) решается по модернизированному методу Гаусса, в котором собственные числа матрицы сдвигаются в сторону бóльших значений за счет введения регуляризирующего слагаемого; это делает решение более устойчивым к шумам.

После окончания цикла решений и получения конечного распределения **f** производится проверка на наличие отрицательных компонент решения. В программе задана возможность использовать два различных метода исключения отрицательных решений.

В первом случае, при $f_j < 0$, полагаем $f_j = 0$ для всех крайних значений j в данном гауссиане и исключаем эти точки из дальнейших расчетов. После этого возвращаемся к заданию начального значения α.

Во втором методе из расчетов исключаются не крайние точки, а f_j со значениями свыше 60% от минимального. Этот расчет работает быстрее, но дает менее точные результаты, поэтому подходит для предварительного анализа распределений частиц по размерам. Пересчет системы (13) продолжается до полного исключения всех отрицательных компонент.

Задание довольно большого начального значения α могло бы приводить к излишне сглаженным решениям, однако в алгоритм регуляризации, помимо отбрасывания отрицательных значений, введен процесс исключения положительных значений. Из решения исключаются по одной крайние точки в гауссиане до достижения заданной ширины, что позволяет вычислять размеры в сильно полидисперсных смесях с разрешением до 0,5 нм.

В реальных экспериментах, помимо переменной составляющей, существует постоянная фоновая засветка. Она приводит к тому, что автокорреляционная функция не спадает до нуля на бесконечности, а располагается на пьедестале, высота которого пропорциональна интенсивности фонового шума. Для избавления от фона в алгоритм программы был добавлен цикл, удаляющий постоянную составляющую.

Используемый алгоритм можно расписать следующим образом:

Шаг 1. Задание начального (достаточно большого) значения α.

Шаг 2. Решение системы уравнений (13) и нахождение решения **f**;

Шаг 3. Вычисление невязки

$$\left\| A\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{g}} \right\|^2$$

(после первой итерации уменьшение α на 90% и возврат к Шагу 1).

Шаг 4. Сравнение невязок по неравенству

$$\left\| A\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{g}} \right\|_i^2 < 0{,}1 \cdot \left\| A\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{g}} \right\|_{i-1}^2;$$

если оно выполняется, то α уменьшаем на 90% и возвращаемся к Шагу 1, если нет, то переходим к Шагу 5.

Шаг 5. Проверка наличия отрицательных компонент решения **f**. При существовании $f_i < 0$ полагаем $f_j = 0$ и возвращаемся к Шагу 1. Соответствующая компонента из дальнейших расчетов исключается.

Шаг 6. При отсутствии $f_i < 0$ проверяется количество точек распределении $n > N$ (задано до начала решения); если да, то задаем $f_{\min} = 0$ и возвращаемся к Шагу 1; если нет, то конец расчета.

Перед началом вычислений для ускорения расчетов в программе необходимо задать область ожидаемых решений и желаемую точность. Решение во всей области допустимых значений также возможно, но требует значительно большего времени ввиду кубической зависимости длительности решения системы методом Гаусса от количества точек. Также необходимо выбрать метод исключения отрицательных значений, как было описано выше, и количество оставляемых в пике точек (берется больше при наличии слабых компонент). Для большей точности предусмотрена возможность проводить усреднение корреляций, полученных из экспериментальных данных.

Апробация метода

В работе проводилась апробация разработанного программно-аппаратного комплекса при помощи компьютерного моделирования и экспериментального исследования объектов известных диаметров, полидисперсных биологических суспензий, а также суспензий, содержащих несферические кластеры частиц.

На первом этапе апробации анализировались модельные сигналы с различным

уровнем шума (от 0 до 10% от полезного сигнала) и с различным числом компонент. Результаты показали, что для одномодальных распределений точность восстановления центра гауссиана близка к 100 % при любых значениях уровня шума. Значение шума в 10 % для модельных сигналов соответствует отношению сигнал/шум 21,6 дБ в реальных экспериментах (для однократного измерения). Для повышения отношения сигнал/шум нами регистрировалось от 50 до 100 сигналов, автокорреляционные функции которых усреднялись. Это существенно уменьшало вклад шумовой составляющей в полезный сигнал.

Поскольку основной целью разработки и создания данного программно-аппаратного комплекса являлось исследование динамики образования кластеров в полидисперсных биологических жидкостях, представляло интерес вычислить точность восстановления модельных сигналов, содержащих информацию о полидисперсных частицах с размерами 1 – 100 нм. На рис. 2 показаны результаты восстановления размерных распределений (расчет) для сигнала с заданными размерами частиц, нм: 4, 10 и 21 (модель).

Видно, что относительные концентрации восстанавливаются не всегда верно, однако положение центрального пика и его ширина рассчитана с погрешностью, не превышающей 5,7 %.

Реальные эксперименты проводились с использованием квазимонодисперсной суспензии белка яичного альбумина в воде. Согласно теоретическим данным, молекула альбумина имеет диаметр $d = 6$ нм в равновесном состоянии (при нейтральном значении pH) [20]. На рис. 3 представлено распределение белка альбумина по размерам в водной суспензии. Видно, что центральное положение пика соответствует теоретическому значению, а форма описывается кривой Гаусса.

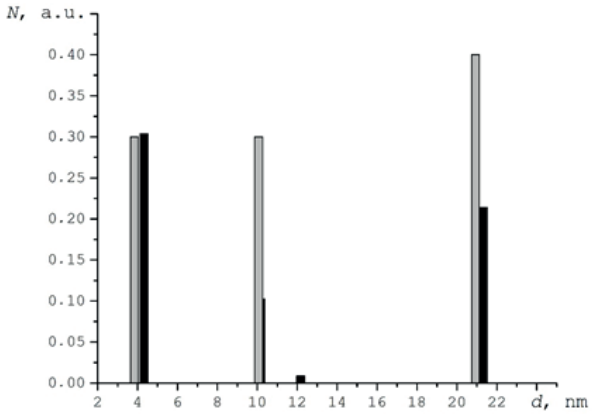


Рис. 2. Результат восстановления модельных концентрационных распределений для частиц с размерами 4, 10 и 21 нм.
Черные столбцы относятся к расчетным значениям, серые – к модельным

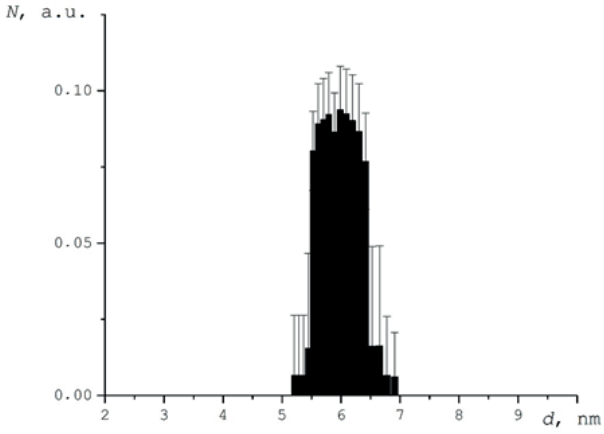


Рис. 3. Рассчитанное распределение частиц по размерам в водной суспензии белка альбумина при нейтральном значении pH

Для подтверждения возможности исследования динамики агрегации частиц в растворах мы провели измерение размеров агрегатов белка альбумина в растворах с изменяющимся водородным показателем pH. Известно, что при приближении к изоэлектрической точке (pH = 4,8), альбумин склонен к агрегации с образованием крупных кластеров [21]. При дальнейшем понижении значения pH раствора агрегаты белка распадаются и белок денатурирует [22]. В наших экспериментах значение pH изменялось от 8,0 до 1,6 [23]. Результаты вычисления среднего размера агрегатов представлены в табл. 2.

Таблица 2

Средние размеры частиц в растворах альбумина с различными значениями водородного показателя

pH	*R*, нм
8,0	6,0 ± 0,4
7,0	6,0 ± 0,4
6,0	9,0 ± 0,5
5,0	29,0 ± 2,3
4,2	30,0 ± 2,4
3,6	20,0 ± 2,2
2,5	16,0 ± 1,8
1,6	5,0 ± 0,4

Из данных табл. 2 следует, что при изменении pH раствора от щелочного к кислому наблюдается агрегация альбумина вблизи изоэлектрической точки с последующей деагрегацией при дальнейшем повышении кислотности. Таким образом, предлагаемый программно-аппаратный комплекс позволяет не только регистрировать размеры частиц, но и наблюдать за их изменением.

Для подтверждения применимости данного метода для исследования состава реальных биологических жидкостей, в работе было измерено распределение частиц по размерам в сыворотке крови [24]. Результат представлен на рис. 4.

Известно, что размеры частиц в сыворотке различны у различных типов белков. Так, альбумины и аминокислоты имеют размеры частиц от 1 до 10 нм, глобулины – от 11 до 30 нм; липопротеиды высокой плотности и низкомолекулярные циркулирующие иммунные комплексы имеют размеры от 31 до 70 нм; размерами свыше 150 нм обладают высокомолекулярные циркулирующие иммунные комплексы [25].

Таким образом, в полученном размерном распределении можно выделить отдельные группы белков, проанализировать их относительные концентрации и проследить динамику образования кластеров в случае некоторых воздействий, а также определить некоторые важные диагностические параметры [26, 27]. Сильное отличие размеров белков в циркулирующих иммунных комплексах от размеров других компонент позволяет даже сделать вывод о состоянии иммунной системы человека по размерному составу и относительной концентрации циркулирующих иммунных комплексов [24].

Все представленные выше результаты были получены в приближении сферичности рассеивателей. Для оценки несферических частиц в работе использовался раствор магнитной жидкости Fe_3O_4. В равновесном состоянии магнитная жидкость состоит из водной суспензии частиц с диаметрами около 10 нм [28], однако было установлено, что при разбавлении магнитные частицы выходят из равновесия и образуют кластеры вытянутой эллипсоидальной формы. В наших опытах магнитная жидкость разбавлялась до концентрации 0,15 мг/мл и исследовалась при помощи предлагаемого программно-аппаратного комплекса.

По полученным значениям показателей Г для поляризованной и деполяризованной компонент рассеянного света были вычислены коэффициенты трансляционной и вращательной диффузии для агломератов магнитных частиц и для единичных наночастиц. Диаметры эллипсоидов в двух ортогональных сечениях d_b и d_a вычислялись с помощью уравнений (10). Окончательное заключение о несферичности наночастиц было сделано по результатам вычисления аспектного отношения $\varepsilon = d_b/d_a$ (табл. 3). Полученные данные показывают, что единичные наночастицы преимущественно обладают формой, близкой к сферической; это подтверждено результатами сканирующей электронной микроскопии [29], тогда как их агрегаты имеют более вытянутую эллипсоидальную форму. Аналогичные данные были получены и при помощи других методов, однако точные размеры не вы-

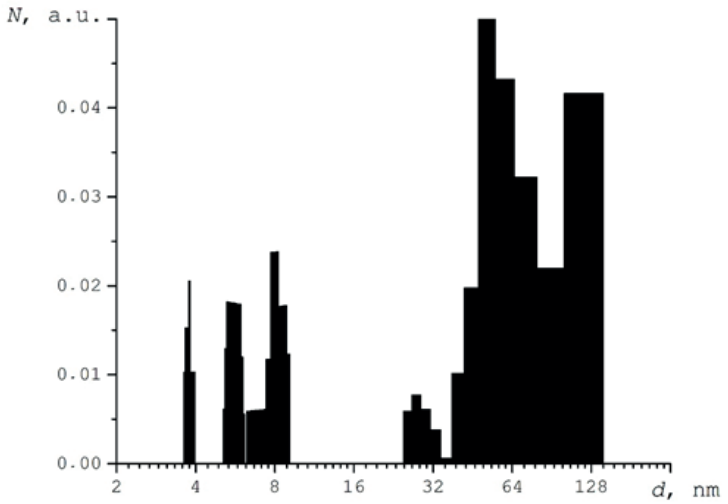


Рис. 4. Экспериментально полученное распределение частиц по размерам в сыворотке крови

числялись. Указанные в табл. 3 диапазоны размеров свидетельствуют о полидисперсности исследуемой магнитной жидкости и о размерах и формах образующихся кластеров, что затрудняет анализ, относящийся к определению формы наночастиц. В то же время полученный результат указывает на неприменимость классического сферического приближения для исследования агрегатов магнитных жидкостей.

Таблица 3

Рассчитанные значения размеров магнитных частиц и их агрегатов

Параметр	Значение	
	Агрегаты	Единичные частицы
D_T, (мкм)^2/с	2,8 – 3,5	58 – 80
D_R, с$^{-1}$	700 – 1060	$(4 – 6)\cdot 10^5$
d_a, нм	73 – 94	4,1 – 5,0
d_b, нм	48 – 70	3,5 – 4,7
ε	0,50 – 0,96	0,85 – 1,00

Обозначения: d_a, d_b – диаметры эллипсоидов в двух ортогональных сечениях, D_T – коэффициент трансляционной диффузии; D_R – коэффициент ротационной диффузии; $\varepsilon = d_b/d_a$

Заключение

В работе представлен модифицированный метод лазерной корреляционной спектроскопии и разработанный на его основе программно-аппаратный комплекс, позволяющий детектировать размеры отдельных молекул и наночастиц, а также динамику их кластеризации в жидких средах, в том числе в сыворотке крови [30]. Описанный в работе алгоритм решения обратной задачи лазерной корреляционной спектроскопии позволяет вычислять размеры полидисперсных частиц с погрешностью, не превышающей 6 %. Предложенная модификация схемы лазерного корреляционного спектрометра и используемые подходы к анализу экспериментальных данных позволили определять продольные и поперечные размеры несферических наночастиц в полидисперсных растворах, что в рамках данной работы предложено впервые.

Апробация разработанного программно-аппаратного комплекса показала, что для однокомпонентных растворов точность вычисления размеров не уступает известным аналогам, используемым в коммерческих спектрометрах (Zetasizer Nano ZS и Photocor) [4], а для многокомпонентных растворов и значительно превышает известные авторам аналоги.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия инновациям (договор № 13463ГУ/2018 от 20.07.2018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марахова А., Жилкина В., Блынская Е., Алексеев К., Станишевский Я.** Определение размеров наночастиц в коллоидных растворах методом динамического рассеяния света // Наноиндустрия. 2016. Т. 63. № 1. С. 88–93.

2. **Xu R.** Light scattering: a review of particle characterization applications. Particuology. 2014. Vol. 18. Pp. 11–21.

3. **Сергеева И.А., Хитрина К.А., Крот А.Р., Сукнева А.В., Петрова Г.П.** Исследование взаимодействия и динамики молекул в растворах коллагена и коллагеназы методом динамического рассеяния света // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2017. Т. 17. № 3. С. 171–178.

4. **Nepomnyashchaya E., Velichko E., Aksenov E.,** Inverse problem of laser correlation spectroscopy for analysis of polydisperse solutions of nanoparticles // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 769. No. 1. P. 012025.

5. **Юдин И.К., Дешабо В.А., Шалаев П.В., Терещенко С.А.** Деполяризация рассеянного света в водных дисперсиях наночастиц различной формы // Медицинская техника. 2015. Т. 6. № 294. С. 52–55.

6. **Власова И.М., Журавлева В.В., Салецкий А.М.** Вращательная диффузия бычьего сывороточного альбумина, денатурированного додецилсульфатом натрия, по данным флуоресценции триптофана // Журнал физической химии. 2014. Т. 88. № 3. С. 538–544.

7. **Рябухо В.П.** Спекл-интерферометрия // Соросовский образовательный журнал. 2001. Т. 7. № 5. С. 102–109.

8. **Величко Е.Н., Непомнящая Э.К., Аксенов Е.Т.** Модификация лазерного корреляционного спектрометра для анализа биологических жидкостей // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 160. № 1. С. 51–60.

9. **Nepomnyashchaya E., Zabalueva Z., Velichko E., Aksenov E.** Modifications of laser correlation spectrometer for investigation of biological fluids // EPJ Web of Conferences. 2017. Vol. 161. P. 02017.

10. **Терещенко С.А., Бурнаевский И.С., Долгушин С.А., Шалаев П.В., Юдин И.К., Дешабо В.А.** Определение состава жидких полидисперсий цилиндроподобных микроорганизмов по степени деполяризации лазерного излучения // Медицинская техника. 2016. Т. 300. № 6. С. 17–20.

11. **Stetefeld J., McKenna S.A., Patel T.R.** Dynamic light scattering: a practical guide and applications in biomedical sciences // Biophys. Rev. 2016. Vol. 8. No. 4. Pp. 409–427.

12. **Nepomnyashchaya E., Aksenov E., Velichko E.** Molecular dynamics as studied by laser correlation spectroscopy // Progress in Electromagnetics Research. Symposium-Spring (PIERS). St. Petersburg, 2017. Pp. 3556–3562.

13. **Немцова О.М.** Методы решения обратных задач, выраженных интегральными уравнениями Фредгольма первого рода // Вестник Удмуртского университета. Серия 4. Физика и химия. 2005. № 4. С. 23–34.

14. **Koppel D.E.** Analysis of macromolecular polydispersity in intensity correlation spectroscopy: the method of cumulants // J. Chem. Phys. 1972. Vol. 57. No. 11. Pp. 4814–4820.

15. **Mailer A.G., Clegg P.S., Pusey P.N.** Particle sizing by dynamic light scattering: nonlinear cumulant analysis // Journal of Physics.: Condense Matter. 2015. Vol. 27. No. 14. P. 145102.

16. **Bro R., de Jong S.** A fast non-negativity-constrained least squares algorithm // Journal of Chemometrics. 1997. Vol. 11. No. 5. Pp. 393–401.

17. **Янковский Г.М., Кузнецов Д.В., Кондаков С.Э., Мельников М.Я.** Особенности решения обратной задачи оптического смешения методом регуляризации Тихонова для анализа состава полидисперсных взвесей наночастиц // Вестник Московского университета. Сер. 2. Химия. 2013. Т. 54. № 5. С. 278–287.

18. **Янковский Г.М., Кузнецов Д.В., Кондаков С.Э., Мельников М.Я.** Особенности решения обратной задачи оптического смешения методом сингулярного разложения матрицы для анализа состава полидисперсных взвесей наноразмерных частиц // Вестник Московского университета. Сер. 2. Химия. 2013. Т. 54. № 6. С. 312–320.

19. **Непомнящая Э.К., Величко Е.Н., Аксенов Е.Т.** Решение обратной задачи лазерной корреляционной спектроскопии методом регуляризации // Университетский научный журнал. 2015. Т. 13. № 13. С. 13–21.

20. **Власова О.Л.** Многопараметрический подход к оптическому анализу модельных дисперсий бычьего сывороточного альбумина // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2009. Т. 77. № 2. С. 39–44.

21. **Баранов А.Н., Власова И.М., Салецкий А.М.** Исследование процессов агрегации сывороточного альбумина // Журнал прикладной спектроскопии. 2004. Т. 71. № 2. С. 204–207.

22. **Баранов А.Н., Власова И.М., Микрин В.Е., Салецкий А.М.** Лазерная корреляционная спектроскопия процессов денатурации сывороточного альбумина // Журнал прикладной спектроскопии. 2004. Т. 71. № 6. С. 831–835.

23. **Непомнящая Э.К., Величко Е.Н., Аксенов Е.Т., Богомаз Т.А.** Применение лазерной корреляционной спектроскопии для исследования биологических суспензий // Оптический журнал. 2015. Т. 82. № 3. С. 43–45.

24. **Nepomnyashchaya E., Velichko E., Bogomaz T.** Diagnostic possibilities of dynamic light scattering technique // Proceedings of SPIE. Nanoscale Imaging, Sensing, and Actuation for Biomedical Applications XVI. D.V. Nicolau, D. Fixler, E.M. Goldys (Eds.). 2019. Vol. 10891. P. 108910J.

25. **Плужников М.С., Говорун М.И., Мигманова К.Л.** Возможности лазерной корреляционной спектроскопии сыворотки крови в диагностике опухолей головы и шеи // Российская оториноларингология. 2007. Т. 27. № 2. С. 77–83.

26. **Гибизова В.В., Аненкова К.А., Масленникова А.Д., Федорова К.В., Сергеева И.А., Петрова Г.П.** Определение фундаментальных физических параметров белков сыворотки крови для развития методов диагностики злокачественных новообразований // Альманах клинической медицины. 2016. Т. 44. № 2. С. 158–164.

27. **Капралова В.М., Назарова Е.А., Иванова Н.Е., Шадрин Е.Б.** Конформационные изменения альбумина как диагностический параметр // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2012. № 3 (153) С. 83–91.

28. **Nepomnyashchaya E.K., Prokofiev A.V., Velichko E.N., Pleshakov I.V., Kuzmin Yu.I.** Investigation of magneto-optical properties of ferrofluids by laser light scattering techniques // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2017. Vol. 431. 1 June. Pp. 24–26.

29. **Прокофьев А.В., Плешаков И.В., Бибик Е.Е., Кузьмин Ю.И.** Оптическое исследование геометрических характеристик агрегатов, образованных частицами магнитной жидкости // Письма в Журнал технической физики. 2017. № 4. С. 26–31.

30. **Карганов М.Ю., Алчинова И.Б., Яковенко Е.Н., Ковалева О.И., Медведева Ю.С., Вялкина М.В.** Применение метода лазерной корреляционной спектроскопии в лабораторной медицине // Клиническая лабораторная диагностика. 2016. Т. 61. № 9. С. 533–534.

Статья поступила в редакцию 31.03.2019, принята к публикации 24.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

НЕПОМНЯЩАЯ Элина Константиновна – *инженер Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
elina.nep@gmail.com

ВЕЛИЧКО Елена Николаевна – *кандидат технических наук, директор Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
velichko-spbstu@yandex.ru

REFERENCES

1. **Marakhova A., Zhilkina V., Blynskaya E., et al.,** Determination of nanoparticle size in colloidal solutions by dynamic light scattering, Nanoindustry. 63 (1) (2016) 88–93.

2. **Xu R.,** Light scattering: a review of particle characterization applications, Particuology. 18

(2014) 11–21.

3. **Sergeeva I.A., Khitrina K.A., Krot A.R., et al.,** Investigation of the interaction and dynamics of collagen and collagenase molecules in solutions by dynamic light scattering, Izvestiya of Saratov University, New series. Series Physics. 17 (3) (2017) 171–178.

4. **Nepomnyashchaya E., Velichko E., Aksenov E.,** Inverse problem of laser correlation spectroscopy for analysis of polydisperse solutions of nanoparticles, Journal of Physics: Conference Series. 769 (1) (2016) 012025.

5. **Yudin I.K., Deshabo V.A., Shalayev P.V., Tereshchenko S.A.**, Depolarization of light scattered in water dispersions of nanoparticles of different shapes, Biomedical Engineering. 49 (6) (2016) 394–397.

6. **Vlasova I.M., Zhuravleva V.V., Saletskiy A.M.,** Rotational diffusion of bovine serum albumin, denaturated with sodium dodecyl sulfate, according to tryptophan fluorescence, Russian Journal of Physical Chemistry A. 88 (3) (2014) 538–544.

7. **Ryabukho V.P.,** Speckle interferometry, Sorosovskiy Obrazovatelnyy Zhurnal. 7 (5) (2001) 102–109.

8. **Velichko E.N., Nepomnyashchaya E.K., Aksenov E.T.,** Modification of the laser correlation spectrometer for analysis of biological fluids, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 160 (1) (2018) 51–60.

9. **Nepomnyashchaya E., Zabalueva Z., Velichko E., Aksenov E.,** Modifications of laser correlation spectrometer for investigation of biological fluids // EPJ Web of Conf. 161 (2017) 02017.

10. **Tereshchenko S.A., Burnayevskiy I.S., Dolgushin S.A., Shalaev P.V., Yudin I.K., Deshabo V.A.,** Determination of the composition of liquid polydispersions of cylinder-like microorganisms from the laser depolarization degree, Biomedical Engineering. 50 (6) (2017) 385–389.

11. **Stetefeld J., McKenna S.A., Patel T.R.,** Dynamic light scattering: a practical guide and applications in biomedical sciences, Biophys. Rev. 8 (4) (2016) 409–427.

12. **Nepomnyashchaya E., Aksenov E., Velichko E.,** Molecular dynamics as studied by laser correlation spectroscopy, Progress in Electromagnetics Research Symposium-Spring (PIERS). St. Petersburg (2017) 3556–3562.

13. **Nemtsova O.M.,** Methods for solving inverse problems involving by the Fredholm equation of the first kind, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Fizika. 4 (2005) 23–34.

14. **Koppel D.E.,** Analysis of macromolecular polydispersity in intensity correlation spectroscopy: the method of cumulants, J. Chem. Phys. 57 (11) (1972) 4814–4820.

15. **Mailer A.G., Clegg P.S., Pusey P.N.,** Particle sizing by dynamic light scattering: non-linear cumulant analysis, Journal of Physics.: Condense Matter. 27 (14) (2015) 145102.

16. **Bro R., de Jong S.,** A fast non-negativity-constrained least squares algorithm, Journal of Chemometrics. 11 (5) (1997) 393–401.

17. **Yankovskiy G.M., Kuznetsov D.V., Kondakov S.E., Melnikov M.Ya.,** Solution of the inverse problem of light beating spectroscopy using singular value decomposition for analyzing the composition of polydisperse suspensions of nanoparticles, Moscow University Chemistry Bulletin. 54 (5) (2013) 278–287.

18. **Yankovskiy G.M., Kuznetsov D.V., Kondakov S.E., Melnikov M.Ya,** Solution of the inverse problem of light beating spectroscopy using singular value decomposition (SVD) method for the analysis of polydisperse suspensions of nanoparticles, Moscow University Chemistry Bulletin. 54 (6) (2013) 312–320.

19. **Nepomnyashchaya E.K., Velichko E.N., Aksenov E.T.,** Solution of the laser correlation spectroscopy inverse problem by the regularization method, Humanities and Science University Journal. 13 (13) (2015) 13–21.

20. **Vlasova O.L.**, The multiple parameter approach to the optical analysis of model dispersions of bovine serum albumin, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 2(77) (2009) 39–44.

21. **Baranov A.N., Vlasova I.M., Saletskiy A.M.**, Investigation of serum-albumin aggregation, Journal of Applied Spectroscopy. 71 (2) (2004) 222–226.

22. **Baranov A.N., Vlasova I.M., Mikrin V.E., Saletskiy A.M.,** Laser correlation spectroscopy of the processes of serum albumin denaturation, Journal of Applied Spectroscopy. 71 (6) (2004) 911–915.

23. **Nepomniashchaya E.K., Aksenov E.T., Bogomaz, Velichko E.N.,** Use of laser correlation spectroscopy to investigate the parameters of biological suspensions, Journal of Optical Technology. 82 (3) (2015) 162–165.

24. **Nepomnyashchaya E., Velichko E., Bogomaz T.,** Diagnostic possibilities of dynamic light scattering technique, Proceedings of SPIE, Nanoscale Imaging, Sensing, and Actuation for Biomedical Applications, 16th. 10891 (2019) 108910J.

25. **Pluzhnikov M.S., Govorun M.I., Migmanova K.L.,** Vozmozhnosti lazernoy

korrelyatsionnoy spektroskopii syvorotki krovi v diagnostike opukholey golovy i shei [Possibilities of laser serum correlation spectroscopy in the diagnosis of head and neck tumors], Russian Otorhinolaryngology. 27(2) (2007) 77–83.

26. **Gibizova V.V., Anenkova K.A., Maslennikova A.D., et al.,** Determination of fundamental physical parameters of blood serum proteins for development the methods for cancer diagnosis, Almanac of Clinical Medicine. 44 (2) (2016) 158–164.

27. **Kapralova V.M., Nazarova E.A., Ivanova N.E., Shadrin E.B.,** Albumin conformational changes as a diagnostic parameter, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 3 (153) (2012) 83–91.

28. **Nepomnyashchaya E.K., Prokofiev A.V., Velichko E.N., et al.,** Investigation of magneto-optical properties of ferrofluids by laser light scattering techniques, Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 431 (2017) 24–26.

29. **Prokofiev A.V., Pleshakov I.V., Kuzmin Y.I., Bibik E.E.,** An optical investigation of the geometric characteristics of aggregates formed by particles of magnetic fluid, Technical Physics Letters. 43(2) (2017) 194–196.

30. **Karganov M.Yu., Alchinova I.B., Yakovenko E.N., et al.,** Primeneniye metoda lazernoy korrelyatsionnoy spektroskopii v laboratornoy meditsine [An application of laser correlation spectroscopy in laboratory medicine], Russian Clinical Laboratory Diagnostics. 61(9) (2016) 533–534.

Received 31.03.2019, accepted 24.04.2019.

THE AUTHORS

NEPOMNYASHCHAYA Elina K.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
elina.nep@gmail.com

VELICHKO Elena N.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
velichko-spbstu@yandex.ru

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

DOI: 10.18721/JPM.12207
УДК 577.35, 57.087, 57.087.2, 57.87.1

ПЕРЕХОД ОТ КЛАССИЧЕСКОГО ДЕЛЕНИЯ ДЕНДРИТНЫХ ШИПИКОВ НЕЙРОНОВ НА ТИПЫ К АЛЬТЕРНАТИВНЫМ МЕТОДАМ АНАЛИЗА

Е.И. Пчицкая, И.С. Крылов, О.Л. Власова, М.В. Болсуновская, И.Б. Безпрозванный

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье представлен краткий обзор существующих методов и подходов к анализу морфологии дендритных шипиков, которые играют важную роль в функционировании механизмов синаптической пластичности и формировании памяти. Рассмотрены как различные математические алгоритмы, подразделяющие шипики на классы по признаку их формы (тонкие, грибовидные и пеньковые), так и новые альтернативные подходы. Результаты опубликованных исследований указывают на нормальный характер распределения основных морфологических параметров дендритных шипиков, ряд авторов ставят под сомнение часто используемое разделение шипиков на типы и свидетельствуют в пользу существования континуума форм. На этом основании в статье предложен новый подход к анализу морфологии дендритных шипиков и представлению данных. Он объединяет классификацию с изучением распределения дендритных шипиков по ключевым морфологическим параметрам.

Ключевые слова: морфология нейрона, грибовидный шипик, тонкий шипик, пеньковый шипик, филоподия

Ссылка при цитировании: Пчицкая Е.И., Крылов И.С., Власова О.Л., Болсуновская М.В., Безпрозванный И.Б. Переход от классического деления дендритных шипиков нейронов на типы к альтернативным методам анализа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 88–100. DOI: 10.18721/JPM.12207

ANALYSIS OF DENDRITIC SPINES MORPHOLOGY: FROM CLASSICAL DIVISION TO TYPES TOWARD ALTERNATIVE APPROACHES

E.I. Pchitskaya, I.S. Krylov, O.L. Vlasova, M.V. Bolsunovskaya, I.B. Bezprozvanny

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

This article provides a brief overview of the existing methods and approaches to analyzing the dendritic spines morphology playing an important role in the functioning of synaptic plasticity and memory formation mechanisms. Both various mathematical algorithms that classify spines according to their shape (thin, mushroom and stubby) and emerging alternative approaches have been considered. The reported scientific results point to uniform distribution of the main morphological parameters of dendritic spines; a number of authors cast some doubt on the often used division of spines into types and argue in favor of the existence of a shape continuum. Relying on this, a new approach to an analysis of dendritic spines morphology and to data presentation was advanced. It combines classification with the study of the distribution of dendritic spines by key morphological parameters.

Keywords: neuronal morphology, mushroom spine, thin spine, stubby spine, headed spine

Citation: Pchitskaya E.I., Krylov I.S., Vlasova O.L., Bolsunovskaya M.V., Bezprozvanny I.B., Analysis of dendritic spines morphology: from classical division to types toward alternative approaches, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 88–100. DOI: 10.18721/JPM.12207

Введение

Согласно общепринятой терминологии, синапс – это зона специализированного контакта между двумя нейронами, через который осуществляется передача информации от одной клетки к другой. Формирование синаптических контактов и передача через них сигналов посредством электрических импульсов, вызывающих выброс нейромедиатора, есть фундаментальная особенность нейронов. Большинство синапсов формируется со стороны аксона аксональным бутоном, а со стороны дендрита – дендритным шипиком, который представляет собой специализированный вырост дендритной мембраны.

Дендритные шипики характеризуются многообразием форм и размеров, и они в сильной степени различаются между разными отделами мозга, типами клеток и видами животных [1]. Дендритный шипик является активным элементом синаптической передачи, способным к функциональным и морфологическим перестройкам в ответ на изменения входящего сигнала. Предполагается, что, благодаря способности модулировать эффективность передачи информации, синапсы служат сайтами формирования и хранения памяти, где ее консолидация инициируется через механизмы потенциации и депрессии синаптической активности [2 – 5]. Морфология синапсов отражает функциональное состояние нейрона, и ее детальное рассмотрение является важной задачей нейробиологии.

Традиционно дендритные отростки группируют в четыре больших класса в соответствии с их морфологическими особенностями: грибовидные, тонкие, пеньковые и филоподии (рис. 1).

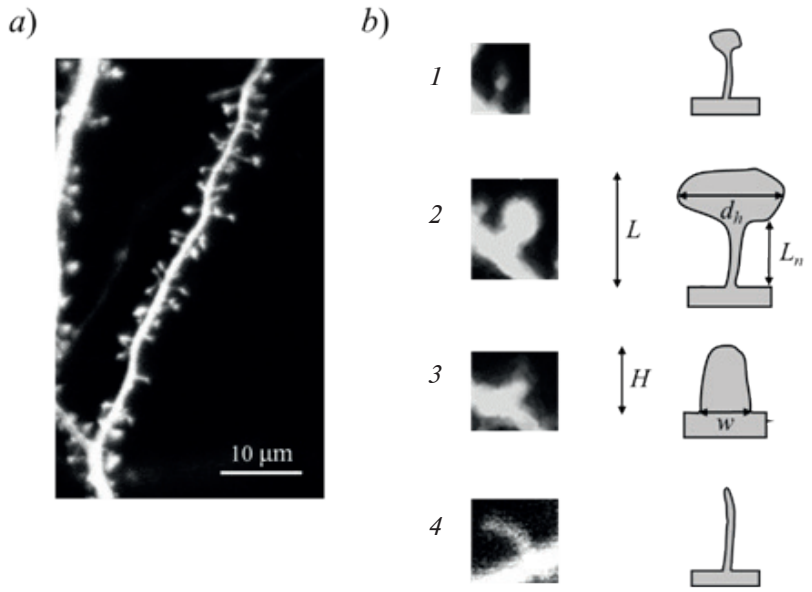


Рис. 1. Морфология дендритных шипиков: *a* – микрофотография гиппокампального нейрона *in vitro* (конфокальная микроскопия, ×60); *b* – схематические изображения основных типов дендритных шипиков с ключевыми параметрами их морфологии.

Типы шипиков: тонкий (*1*), грибовидный (*2*), пеньковый (*3*), филоподия (*4*); L, L_n – длины шипика и его шейки соответственно; d_h – ширина головки; H, w – высота и ширина основания пенькового шипика

Грибовидные шипики имеют большую головку и маленькую шейку, являются относительно стабильными, формируют сильную синаптическую связь и предположительно выступают в роли сайтов хранения памяти [3, 6].

Тонкие шипики имеют маленькую головку и длинную тонкую шейку, более динамичны и рассматриваются как «шипики обучения», которые отвечают за формирование новых воспоминаний [3].

Пеньковые шипики характеризуются отсутствием шейки. Известно, что они являются доминирующим типом на ранних стадиях постнатального развития, но также присутствуют в небольшом количестве и во взрослом состоянии, где они, вероятно, формируются в результате процесса исчезновения грибовидных шипиков [7].

Филоподии – это длинные тонкие отростки без четко обозначенной головки, повсеместно наблюдаемые в развивающихся нейронах. Эти отростки также могут присутствовать и в зрелых нейронах, но под влиянием определенных условий, например, при индукции пластичности после повреждений мозга, вызванных разными причинами [8]. По сравнению с другими типами дендритных отростков, филоподии – это очень подвижные и гибкие структуры с коротким временем жизни. На микрофотографиях, полученных с использованием электронной микроскопии, они, в большинстве своем, лишены постсинаптической плотности, а прилегающее к ним окончание аксона содержит лишь несколько синаптических везикул. В связи с этим было предложено исключать их при оценке плотности шипиков [9].

Морфология дендритного шипика соответствует его функциональной роли и стадии развития в данный момент времени, а происходящие изменения в его форме и размере отражают изменения в активности данного синаптического контакта, условий среды, окружающей нейрон, и происходящих в нем физиологических процессов.

Разнообразные психиатрические и нейродегенеративные заболевания, такие как болезни Альцгеймера (БА) [10, 11], Паркинсона [12], Хантингтона [13], шизофрения [14], аутизм [15], депрессия [16] и т. п. характеризуются изменениями в плотности и форме дендритных шипиков нейронов в отделах головного мозга, пораженных данными заболеваниями. Например, считается, что развитие хореи при болезни Хантингтона происходит в результате кортико-стриатной синаптической дисфункции [17]. Прогрессирующую потерю памяти при болезни Альцгеймера связывают со снижением числа грибовидных шипиков в областях мозга, связанных с ее формированием, таких как гиппокамп и кортекс [18].

Следует отметить, что дегенерация синапсов – это начальный этап необратимых изменений в пораженном нейроне, за которым следует атрофия нейритов и последующая гибель клетки. Недавнее исследование показало, что число грибовидных и тонких шипиков в пирамидных нейронах префронтальной коры у пациентов с деменцией, вызванной БА, значительно ниже, чем у людей из контрольной группы с характерной для БА гистологической патологией, но сохранивших нормальную когнитивную функцию [19]. Было сделано предположение, что подобная организация морфологии дендритных шипиков у людей контрольной группы помогает им противостоять наступлению деменции, несмотря на наличие характерных для БА патологических изменений в головном мозге. Эти данные служат еще одним аргументом в пользу мнения, что своевременное восстановление или стабилизация дендритных шипиков при БА с помощью фармакологических агентов сможет уберечь человеческую память от нарушений [18, 20 – 22].

Анализ числа и формы дендритных шипиков используется для исследования молекулярных механизмов и сигнальных путей, участвующих в образовании и функционировании синапсов, оценки функционального состояния нейрона, изучения механизмов развития нейродегенеративных заболеваний и оценки эффективности фармакологических агентов, направленных на их лечение [23 – 27]. Разработка методов, позволяющих точно и быстро провести данный анализ, является очень актуальной.

В данной статье представлен краткий обзор существующих методов и подходов к изучению морфологии дендритных шипиков, а также предложен новый подход к классификации шипиков и представлению полученных в ходе работы данных.

Обзор существующих методов анализа морфологии синапсов

Анализ морфологии дендритных шипиков важен для нейробиологических иссле-

дований, так как сможет пролить свет на взаимосвязь между структурой синаптических контактов и их функцией. Отсутствие надежных автоматизированных программных средств, позволяющих получать точный результат, вынуждает экспериментаторов прибегать к ручному анализу изображений нейронов. Данный метод является исключительно времязатратным, а также полностью зависит от мнения выполняющего анализ эксперта, и тем самым лишен объективности. В связи с этим были предприняты попытки разработать полуавтоматические и автоматические алгоритмы анализа и последующей классификации дендритных шипиков на изображениях, полученных как с помощью конфокальной, так и мультифотонной лазерной сканирующей микроскопии [28 – 34].

Одна из первых попыток автоматической классификации шпиков программными методами была предпринята в 2002 году, когда технология лазерной сканирующей микроскопии достигла уровня, достаточного для того чтобы получать изображения нейронов высокого разрешения в пространственных масштабах, достаточных для того, чтобы визуализировать такие мелкие клеточные структуры, как дендритные шипики [28]. В основу предлагаемого подхода к классификации шипиков [28] легли результаты, изложенные в статье [35], где был выполнен ручной анализ морфологии синапсов на серии срезов изображений шипиков, полученных с применением электронной микроскопии. Авторы выделили диаметр шейки d_n, ширину головки d_h и длину шипика L (см. рис. 1) как наиболее важные морфологические характеристики, определяющие их принадлежность к тому или иному классу. В основе классификации лежало предположение, что длина тонких шипиков должна быть много больше диаметра их шейки ($L >> d_n$), в то время как ширина головки не должна значительно превышать диаметр шейки. Для грибовидных шипиков ширина головки должна быть значительно больше диаметра шейки ($d_h >> d_n$), а для пеньковых шипиков диаметр шейки сопоставим с длиной шипика ($d_n \approx L$). В представленном авторами алгоритме распределения шипиков по типам были использованы в качестве критериев значения отношений L/d_n и L/d_h [28].

Позднее другая исследовательская группа разработала программное обеспечение NeuronStudio, где классификации шипиков проводилась с применением древа решений на основе таких параметров, как коэффициент пропорциональности (aspect ratio), соотношение размера головки и шейки и диаметр головки [29]. Впоследствии данный программный модуль вошел в состав комплексного коммерческого продукта для анализа морфологии нейрональных клеток Neurolucida 360 [30]. В еще одном варианте классификации с использованием древа решений предлагалось использовать такие параметры шипика, как диаметр шейки, диаметр головки, критерий формы, площадь, длина дендритного шипика и его периметр [31]. В программном обеспечении 2dSpAn [32], также использующим для классификации набор правил, инкорпорированный в древо решений, ключевыми параметрами выступали длина шейки, отношение локальной глубочайшей точки к длине шипика и отношение расстояния от основания до головки к длине шипика – L_n/L. Необходимо отметить, что авторы исключили из рассмотрения тонкий тип шипиков, так как сочли его промежуточным типом, но включили в рассмотрение такой тип, как шипико-головые (spine-head) отростки, которые в дальнейшем анализе могли быть объединены с филоподиями. Позднее программное обеспечение было улучшено с помощью нового алгоритма сегментации шипиков и экстракции морфометрических данных, но принцип классификации остался неизменным [33].

В 2014 году был предложен алгоритм анализа шипиков, основанный на методе полуавтоматического обучения (semi-supervised learning, SSL) [34]. В этом подходе сначала осуществляется сегментация шипиков в трехмерном пространстве с применением вейвлетных функций, когда граница объекта определяется как позиция, где ответ вейвлета на секции шипика претерпевает быстрое изменение. После сегментирования производится вычисление таких параметров шипика, как длина, объем, диаметры шейки и головки и т. п., которые составляют матрицу параметров. Для формирования обучающей выборки эксперт-нейробиолог определяет, к какому классу относится небольшая часть из общего числа детектированных шипиков, и на заключительном этапе после обучения система сортирует по заданным классам каждый из оставшихся шипиков. Из по-

ложительных моментов данного подхода можно назвать минимизацию вмешательства оператора, которая требуется только на этапе обучения, и соответственно нивелирует внутрииндивидуальную вариабельность в оценке типов шипиков экспериментатором, которая была упомянута ранее. Тем не менее, негативной стороной такого подхода следует считать сильную зависимость точности и производительности метода от размера обучающей выборки и от параметров, включенных в тренировочный вектор.

Еще одним новым подходом относительно описанных выше классических методов оценки морфологии стала классификация дендритных шипиков по параметрам внешнего вида и формы объекта [1]. Форма шипика представлялась в параметрическом виде в результате сегментации изображения дендрита с применением недавно предложенной модели дизъюнктивной нормальной формы (disjunctive normal shape models, DNSM). Для задания параметров внешнего вида (appearance features) применялась гистограмма направленных градиентов (histogram of oriented gradients, HOG). Для классификации на основе выделенных параметров авторы предложили использовать метод ядерной оценки плотности, с применением которого были вычислены три непараметрические оценки плотности для трех классов шипиков на основе заданной экспертом тренировочной выборки. Точность классификации с применением подобной комбинация методов значительно превзошла упомянутые ранее классические подходы [28, 29, 32]. Наиболее высокую точность, которая составила 87 %, показало сочетание сегментации DNSM и HOG с классификацией, использующей нейронную сеть.

Для валидации точности работы своего подхода в перечисленных исследованиях, авторы сравнивали тип шипика, определенный программой, с меткою типа шипика, проставляемой либо одним, либо несколькими экспертами вручную [1, 29, 31, 32]. Следует отметить, что наблюдается значительный разброс в классификации шипиков, выполненной разными экспертами. В некоторых случаях у эксперта возникают затруднения, к какому типу отнести шипик, и, более того, один и тот же эксперт в разные дни по-разному оценивает предлагаемую выборку (процент совпадений составляет 82,9%) [29]. Таким образом, из-за отсутствия объективного референса оценка точности работы алгоритмов классификации затруднена.

Непрерывный континуум форм шипиков

Распространенный подход к анализу морфологии дендритных шипиков – это разделение дендритных отростков на описанные выше подгруппы: пеньковые, тонкие, грибовидные и филоподии. Несмотря на то, что подобная классификация используется во многих исследованиях, вопрос о том, существуют ли различные классы шипиков или их следует моделировать с помощью континуума вариаций формы, остается открытым. Также важно отметить, что существующая категоризация форм шипиков не предоставляет четкое стандартизованное определение каждой группы. Любой исследователь может выбрать свой критерий, что вносит существенную неопределенность в интерпретацию данных, полученных разными научными группами.

Исследование, выполненное под руководством Р. Юсте (R. Yuste [36]), где производился анализ морфологии нейронов второго и третьего слоев визуального кортекса мыши, показало следующее: для каждого из рассмотренных морфологических параметров шипиков наблюдалось непрерывное распределение, скорее чем наличие нескольких дискретных пиков, которое могло бы послужить индикатором существования отдельных классов шипиков. В другой работе по анализу морфологии нейронов третьего слоя кортекса [37] также обнаружили непрерывное и гладкое распределение длины шипика и диаметра его головки среди своей выборки.

Авторы еще одной статьи [38], в которой (аналогично упомянутым выше) не была детектирована группировка распределения данных по каким-либо параметрам или их комбинациям, высказали мнение, что классические типы шипиков – это всего лишь типичные примеры из существующего в реальности континуума форм. В недавно опубликованном обзоре [9], на основе данных о динамике дендритных шипиков также было сделано заключение, что формы синаптических контактов представляют собой континуум, где с увеличением размера шипика возрастает его стабильность и сила синаптической связи, им формируемой. Мультиметодическое изучение связи

формы шипика с компартментализацией синапсов [39] также обнаружило большое разнообразие в морфологии шипиков, что дополнительно свидетельствует против использования обычных систем категоризации.

В соответствии с этими данными, кардинально новый подход к изучению формы шипиков был предложен в 2016 году. Для изучения субпопуляций шипиков авторы применили метод кластеризации, в котором не разделяли шипики на предварительно определенные типы, а определяли группы шипиков со сходными признаками (их кластеры) математическими методами, проводя анализ распределения их морфологических параметров.

Для полного описания картины авторы работы [40], основываясь на литературных данных, взяли набор из одиннадцати наиболее часто используемых морфологических параметров, который свели, с использованием метода главных компонент, к двум параметрам, представляющим собой линейную комбинацию исходных. В первый параметр вошли компоненты, определяющие размер шипика, и соответственно, он был интерпретирован как обобщенный дескриптор размера, а второй, по аналогии, – как дескриптор контура. После распределения всех шипиков из выборки по двухмерному ортогональному пространству, сформированному дескрипторами, авторы исследования провели иерархическую кластеризацию. В результате было получено десять кластеров, среди которых были как малочисленные периферические кластеры, так и многочисленные с недостаточным разделением. Для наглядности результатов произведенной кластеризации авторы предоставили по три изображения шипика из каждого кластера, наиболее подробно отражающие эмпирические морфологические особенности данной группы. Как и следовало предполагать, наиболее плотными и плохо разделенными оказались кластеры, соответствующие тонким и грибовидным классическим типам, а пеньковые шипики были представлены единственным и малочисленным кластером. Важно отметить, что количество и состав полученных кластеров сильно зависят от выбранного алгоритма кластеризации и свойств исходных данных. Авторы также предложили модель анализа межкластерного перехода при химически стимулированной долговременной потенциации. Таким образом, математическим способом было доказано, что сходных по морфологическому строению групп шипиков может быть гораздо больше, чем четыре классических типа. Предложенный в работе [40] подход может быть крайне полезен для фундаментального изучения функционирования синапсов, но, тем не менее, он не подходит для широкого практического использования, когда анализ морфологии синапсов выполняется как часть общего анализа функционального состояния нейрона, ввиду сложности представления данных и их интерпретации. Исходя из всего вышеизложенного, можно заключить, что разработка альтернативных автоматизированных методов классификации является актуальной задачей.

Новый подход к сбору и представлению численных данных морфологии дендритных шипиков

В связи с тем, что все большее число исследований указывает на существование непрерывного спектра форм шипиков, для практического использования требуется новый простой метод анализа, благодаря которому экспериментальные данные будут представлены наиболее полно и достоверно, а также наглядно.

Основные ошибки при классификации шипиков допускаются в процессе разделения на тонкие и грибовидные, так как эти два типа обладают одинаковой формой, и лишь размер головки выступает критическим параметром, определяющим принадлежность шипика к одному из них. Как показывают исследования, размер головки прямо пропорционален площади постсинаптической плотности и коррелирует с числом постсинаптических рецепторов и силой синапса [36, 41 – 43], а длина и ширина шейки дендритного шипика прямо связаны с величиной постсинаптического потенциала [39]. Морфология синапсов изменяется в зависимости от активности синаптического контакта. Изменения в силе синапса во время долговременной потенциации и долговременной депрессии связывают соответственно с увеличением или сокращением головки дендритного шипика [44, 45]. Таким образом, форма дендритного шипика определяет силу синаптических связей и, как предполагается, ее изменение вовлечено в процесс кодирования информации и хранения памяти в

головном мозге.

Как было показано ранее, распределение головки по размерам имеет непрерывную форму [9, 36 – 39], что ставит под сомнение наличие таких классов, как тонкие и грибовидные шипики. Поэтому мы предлагаем отнести все шипики, обладающие выраженной головкой, в отдельную группу с названием “headed spines” (шипики, обладающие головкой). Согласно нашим наблюдениям, которые подтверждены другой исследовательской группой [32], одним из потенциальных критических параметров для такого типа шипиков является отношение L_n/L – длины шейки шипика к его общей длине. Этот параметр представляет интерес в связи с тем, что у шипиков, обладающих крупной головкой, доля шейки от общей длины шипика чаще оказывается меньше, чем у шипиков с головкой меньшего размера.

Пеньковые шипики обладают ярко выраженной формой, связанной с полным отсутствием шейки, и таким образом четко выделяются среди многообразия морфологии синапсов. Этот факт подтверждается результатами кластерного анализа, проведенного ранее в работе [40], где пеньковые шипики однозначно были выделены в отдельную группу. Ввиду указанной формы, определение ширины головки пенькового шипика затруднено, так как в большинстве случаев его наиболее широкое место совпадает с основанием. Мы предполагаем, что для пенькового шипика критическими параметрам могут служить длина шипика L и ширина его основания b_w, и мы планируем проверить эту гипотезу в будущих исследованиях. Еще одной структурой являются, согласно данным электронной микроскопии синапсов, тонкие волосоподобные выросты дендритной мембраны – филоподии [9]. Ввиду того, что филоподии характеризуются очень быстрыми изменениями формы и не формируют активных синаптических контактов, какие-либо критические параметры их морфологии, вероятно, отсутствуют. В связи с этим для узконаправленного анализа морфологии данного типа дендритных выростов следует использовать методы прижизненной микроскопии, позволяющие анализировать их поведение в динамике. Следует отметить, что общее содержание пеньковых шипиков и филоподий в зрелых нейронах, согласно проведенным оценкам, не превышает 10 % [9] и, следовательно, синаптические контакты такой формы являются малочисленными.

При делении шипиков по классическим группам получают гистограмму, в которой отражены либо процентное содержание шипиков определенного типа, либо их плотность, и для выявления статистически достоверных различий между данными контрольной и экспериментальной групп используются такие стандартные методы как t-тест или ANOVA. Соответственно, возникает резонный вопрос, как наглядно представлять данные, если известно, что они характеризуются непрерывным распределением.

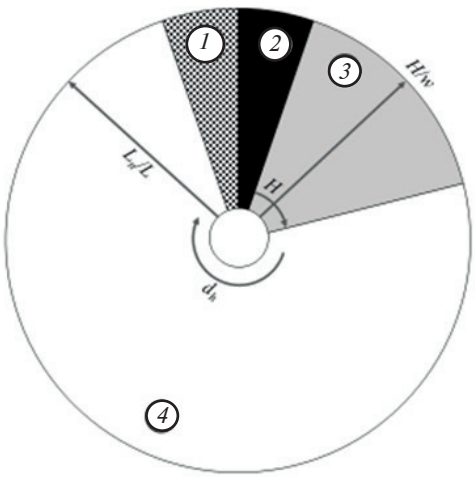


Рис. 2. Предлагаемая модель представления экспериментальных данных, отражающая как процентное содержание разных типов дендритных шипиков, так и их распределение по ключевым морфологическим параметрам (см. пояснения в тексте).
Типы шипиков: филоподии (*1*), пеньковые (*2*), обладающие головкой (*3*), аномальной формы (*4*)

Мы предлагаем создать гибрид круговой диаграммы (рис. 2), в которой размер сектора соответствует проценту отраженной в нем группы, и графика распределения по параметрам, который дает возможность отразить непрерывность изменения размера головки шипиков как наиболее важного параметра. Для шипиков с выраженной головкой предлагается откладывать по внутренней окружности ширину головки d_h, нормированную на среднее значение, а по радиусу – точку, соответствующую отношению L_n/L (длины шейки шипика к его длине) в диапазоне от 0 до 1. При достаточном количестве шипиков, у которых отсутствует шейка (пеньковые), можно также отразить их распределение следующим образом: по внутренней окружности откладывать высоту шипика H, а по радиусу отмечать точку, соответствующую отношению H/w – высоты шипика к ширине его основания. Еще один сектор должен соответствовать филоподиям (при их наличии). Кроме того, предлагается также ввести сектор, который бы отражал процент шипиков, имеющих аномальную форму и поэтому не классифицируемых алгоритмом в какой-либо из типов.

Для проведения эксперимента мы предлагаем собственный программный инструмент для детектирования и снятия метрики дендритных шипиков. На первом этапе его работы выполняется обработка изображения с помощью фильтра Отсу для исключения помех и зашумленных областей. На втором этапе строится модель ствола нейрона с помощью бинаризации и последующей скелетизации изображения, в то время как детектирование шипиков будет осуществляться путем вычитания полученной модели ствола из отфильтрованного изображения с внесением необходимой коррекции, определяемой алгоритмически. На основании полученных данных о морфологии дендритных шипиков будет произведена классификация с применением предварительно обученной нейронной сети. Для создания обучающей выборки и контроля производительности и точности алгоритма планируется использовать мнение, сформулированное на консилиуме группы специалистов-нейробиологов. Измерение таких критических морфологических параметров, как размер головки, длина шейки и ее высота будет выполнено уже после классификации с применением математических алгоритмов, специально адаптированных к определенному типу шипиков, что должно снизить возможные ошибки. Последующий ручной анализ исследователем формы аномальных шипиков, зарегистрированной в опытах с контрольной и экспериментальной группами, возможно, позволит выявить новые процессы и изменения в морфологии синапсов, которые не могли быть обнаружены в исследованиях с использованием метода жесткой классификации. Диаграмма на рис. 2 демонстрирует идею представления экспериментальных данных; целесообразность и практическая значимость ее использования будет оценена в предстоящих исследованиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-34-00183 (Пчицкая Е.И.). Пчицкая Е.И. является получателем стипендии Президента Российской Федерации № СП–1929.2018.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ghani M.U., Mesadi F., Kanik S.D., Argunsah A.O., Hobbiss A.F., Israely I., Unay D., Tasdizen T., Cetin M.** Dendritic spine classification using shape and appearance features based on two-photon microscopy // J. Neurosci. Methods. 2017. Vol. 279. Pp. 13–21. https://www.sciencedirect.com/science/ article/pii/S0165027016302928?via%3Dihub.

2. **Kasai H., Hayama T., Ishikawa M., Watanabe S., Yagishita S., Noguchi J.** Learning rules and persistence of dendritic spines // Eur. J. Neurosci. 2010. Vol. 32. No. 2. Pp. 241–249.

3. **Bourne J., Harris K.M.** Do thin spines learn to be mushroom spines that remember?// Curr. Opin. Neurobiol. 2007. Vol. 17. No. 3. Pp. 381–386.

4. **Bailey C.H., Kandel E.R., Harris K.M.** Structural components of synaptic plasticity and memory consolidation // Cold Spring Harb Perspect Biol. 2015. Vol. 7. No. 7. P. a021758; https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/26134321.

5. **Zhou Q., Homma K.J., Poo M.M.** Shrinkage of dendritic spines associated with long-term depression of hippocampal synapses // Neuron. 2004. Vol. 44. No. 5. Pp. 749–757.

6. **Hayashi Y., Majewska A.K.** Dendritic spine geometry: functional implication and regulation

// Neuron. 2005. Vol. 46. No. 4. Pp. 529–532.

7. **Hering H., Sheng M.** Dentritic spines : structure, dynamics and regulation // Nat. Rev. Neurosci. 2001. Vol. 2. No. 12. Pp. 880–888.

8. **Yoshihara Y., de Roo M., Muller D.** Dendritic spine formation and stabilization // Current Opinion in Neurobiology. 2009. Vol. 19. No. 2. Pp. 146–153.

9. **Berry K.P., Nedivi E.** Spine dynamics: are they all the same? // Neuron. 2017. Vol. 96. No. 1. Pp. 43–55.

10. **Koffie R.M., Hyman B.T., Spires-Jones T.L.** Alzheimer's disease: synapses gone cold // Mol. Neurodegener. 2011. Vol. 6. P. 63.

11. **Tu S., Okamoto S.-I., Lipton S.A., Xu H.** Oligomeric Aβ-induced synaptic dysfunction in Alzheimer's disease // Mol. Neurodegener. 2014. Vol. 9. P. 48.

12. **Villalba R.M., Smith Y.** Differential striatal spine pathology in Parkinson's disease and cocaine addiction: a key role of dopamine? // Neuroscience. 2013. Vol. 251. Pp. 2–20; https://www.sciencedirect.com/science/ article/abs/pii/S0306452213005861?via%3Dihub.

13. **Nithianantharajah J., Hannan A.J.** Dysregulation of synaptic proteins, dendritic spine abnormalities and pathological plasticity of synapses as experience-dependent mediators of cognitive and psychiatric symptoms in Huntington's disease // Neuroscience. 2013. Vol. 251. Pp. 66–74; https://www.sciencedirect. com/science/article/abs/pii/S0306452212005118?via%3Dihub.

14. **Herms J., Dorostkar M.M.** Dendritic spine pathology in neurodegenerative diseases // Annu. Rev. Pathol. 2016. Vol. 11. Pp. 221–250. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/26907528.

15. **Phillips M., Pozzo-Miller L.** Dendritic spine dysgenesis in autism related disorders // Neuroscience Letters. 2015. Vol. 601. Pp. 30–40; https://www.ncbi. nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4496332/.

16. **Qiao H., Li M.-X., Xu C., Chen H.-B., An S.-C., Ma X.-M.** Dendritic spines in depression: what we learned from animal models // Neural Plasticity. 2016. Vol. 2016. P. 8056370. https://www.ncbi.nlm.nih. gov/pmc/articles /PMC 4736982/.

17. **Cepeda C., Wu N., Andre V.M., Cummings D.M., Levine M.S.** The corticostriatal pathway in Huntington's disease // Prog. Neurobiol. 2007. Vol. 81. No. 5–6. Pp. 253–271.

18. **Tackenberg C., Ghori A., Brandt R.** Thin, stubby or mushroom: spine pathology in Alzheimer's disease // Curr. Alzheimer Res. 2009. Vol. 6. No. 3. Pp. 261–268.

19. **Boros B.D., Greathouse K.M., Gentry E.G., Curtis K.A., Birchall E.L., Gearing M., Herskowitz J.H.** Dendritic spines provide cognitive resilience against Alzheimer's disease // Ann. Neurol. 2017. Vol. 82. No. 4. Pp. 602–614.

20. **Popugaeva E., Pchitskaya E., Bezprozvanny I.** Dysregulation of neuronal calcium homeostasis in Alzheimer's disease – A therapeutic opportunity?// Biochemical and Biophysical Research Communications. 2017. Vol. 483. No. 4. Pp. 998–1004.

21. **Pchitskaya E., Popugaeva E., Bezprozvanny I.** Calcium signaling and molecular mechanisms underlying neurodegenerative diseases // Cell Calcium. 2018. Vol. 70. Pp. 87–94. https://www.sciencedirect.com/science /article/pii/S0143416017300660?via%3Dihub.

22. **Popugaeva E., Supnet C., Bezprozvanny I.** Presenilins, deranged calcium homeostasis, synaptic loss and dysfunction in Alzheimer's disease // Messenger. 2012. Vol. 1. No. 1. Pp. 53–62.

23. **Zhang H., Sun S., Wu L., Pchitskaya E., Zakharova O., fon Tacer K., Bezprozvanny I.** Store-operated calcium channel complex in postsynaptic spines: a new therapeutic target for Alzheimer's disease treatment //The Journal of Neuroscience. 2016. Vol. 36. No. 47. Pp. 11837–11850.

24. **Пчицкая Е.И., Жемков В.А., Безпрозванный И.Б.** Динамические микротрубочки при болезни Альцгеймера: связь с патологией дендритных шипиков // Биохимия. 2018. Т. 83. № 9. С. 1343–1350.

25. **Краснов И.Б., Дьячкова Л.Н., Бурцева Т.Д., Красникова И.В.** Ультраструктура дендритных шипиков в соматосенсорной коре мозга крыс после 5- и 33-суточного воздействия гипергравитации // Авиакосмическая и экологическая медицина. 2012. Т. 46. № 5. С. 46–51.

26. **Журавлева Н.З., Журавлев Г.И., Хуцян С.С.** Индуктивная роль мшистых волокон гиппокампа в развитии дендритных шипиков при аберрантном синаптогенезе в условиях нейротрансплантации // Онтогенез. 2014. Т. 45. № 1. С. 42–49.

27. **Попов В.И, Деев А.А., Клименко О.А., Краев И.В., Кузьминых С.Б., Медведев Н.И., Патрушев И.В., Попов Р.В., Рогачевский В.В., Хуцян С.С., Стьюарт М.Г., Фесенко Е.Е.** Трехмерные реконструкции синапсов и дендритных шипиков в гиппокампе крыс и сусликов: новые структурно-функциональные парадигмы работы синапса // Журнал высшей нервной деятельности им. И.П. Пав-

лова. 2004. Т. 54. № 1. С. 120–129.

28. **Koh I.Y.Y., Lindquist W.B., Zito K., Nimchinsky E.A., Svoboda K.** An image analysis algorithm for dendritic spines // Neural Computation. 2002. Vol. 14. No. 6. Pp. 1283–1310.

29. **Rodriguez A., Ehlenberger D.B., Dickstein D.L., Hof P.R., Wearne S.L.** Automated three-dimensional detection and shape classification of dendritic spines from fluorescence microscopy images // PLoS One. 2008. Vol. 3. No. 4. P. e1997.

30. **Dickstein D.L., Dickstein D.R., Janssen W.G., Hof P.R., Glaser J.R., Rodriguez A., O'Connor N., Angstman P., Tappan S.J.** Automatic dendritic spine quantification from confocal data with Neurolucida 360 // Curr. Protoc. Neurosci. 2016. Vol. 77. No. 1. Pp. 1–1.

31. **Son J., Song S., Lee S., Chang S., Kim M.** Morphological change tracking of dendritic spines based on structural features // Journal of Microscopy. 2011. Vol. 241. No. 3. Pp. 261–272.

32. **Basu S., Plewczynski D., Saha S., Roszkowska M., Magnowska M., Baczynska E., Wlodarczyk J.** 2dSpAn: semiautomated 2-D segmentation, classification and analysis of hippocampal dendritic spine plasticity // Bioinformatics. 2016. Vol. 32. No. 16. Pp. 2490–2498.

33. **Basu S., Saha P.K., Roszkowska M., Magnowska M., Baczynska E., Das N., Plewczynski D., Wlodarczyk J.** Quantitative 3-D morphometric analysis of individual dendritic spines // Scientific Reports. 2018. Vol. 8. P. 3545.

34. **Shi P., Huang Y., Hong J.** Automated three-dimensional reconstruction and morphological analysis of dendritic spines based on semi-supervised learning // Biomed. Opt. Express. 2014. Vol. 5. No. 5. Pp. 1541–1553.

35. **Harris K.M., Jensen F.E., Tsao B.** Three-dimensional structure of dendritic spines and synapses in rat hippocampus (CA1) at postnatal day 15 and adult ages: implications for the maturation of synaptic physiology and long-term potentiation // J. Neurosci. 1992. Vol. 12. No. 7. Pp. 2685–2705.

36. **Arellano J.I., Benavides-Piccione R., Defelipe J., Yuste R.** Ultrastructure of dendritic spines: correlation between synaptic and spine morphologies // Front. Neurosci. 2007. Vol. 1. No. 1. Pp. 131–143.

37. **Wallace W., Bear M.F.** A morphological correlate of synaptic scaling in visual cortex // The Journal of Neuroscience. 2004. Vol. 24. No. 31. Pp. 6928–6938.

38. **Loewenstein Y., Yanover U., Rumpel S.** Predicting the dynamics of network connectivity in the neocortex //The Journal of Neuroscience. 2015. Vol. 35. No. 36. Pp. 12535–12544.

39. **Tonnesen J., Katona G., Rozsa B., Nagerl U.V.** Spine neck plasticity regulates compartmentalization of synapses // Nat. Neurosci. 2014. Vol. 17. No. 5. Pp. 678–685.

40. **Bokota G., Magnowska M., Kuśmierczyk T., Łukasik M., Roszkowska M., Plewczynski D.** Computational approach to dendritic spine taxonomy and shape transition analysis // Frontiers in Computational Neuroscience. 2016. Vol. 10. P. 140. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5180374/.

41. **Kharazia V.N., Weinberg R.J.** Immunogold localization of AMPA and NMDA receptors in somatic sensory cortex of albino rat // J. Comp. Neurol. 1999. Vol. 412. No. 2. Pp. 292–302.

42. **Takumi Y., Ramirez-Leon V., Laake P., Rinvik E., Ottersen O.P.** Different modes of expression of AMPA and NMDA receptors in hippocampal synapses // Nat. Neurosci. 1999. Vol. 2. No. 7. Pp. 618–624.

43. **Ganeshina O., Berry R.W., Petralia R.S., Nicholson D.A., Geinisman Y.** Differences in the expression of AMPA and NMDA receptors between axospinous perforated and nonperforated synapses are related to the configuration and size of postsynaptic densities //J. Comp. Neurol. 2004. Vol. 468. No. 1. Pp. 86 –95.

44. **Yuste R., Bonhoeffer T.** Morphological changes in dendritic spines associated with long-term synaptic plasticity // Annu. Rev. Neurosci. 2001. Vol. 24. Pp. 1071–1089; http://www.biomedsearch.com/nih/Morphological-changes-in-dendritic-spines/11520928.html.

45. **Holtmaat A., Svoboda K.** Experience-dependent structural synaptic plasticity in the mammalian brain // Nat. Rev. Neurosci. 2009. Vol. 10. No. 9. Pp. 647–658.

Статья поступила в редакцию 19.02.2019, принята к публикации 06.05.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПЧИЦКАЯ Екатерина Игоревна – *лаборантка лаборатории молекулярной нейродегенерации Высшей школы биомедицинских систем и технологии Санкт-Петербургского политехнического*

университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
katrincreative@yandex.ru

КРЫЛОВ Иван Сергеевич – *студент Высшей школы биомедицинских систем и технологии Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
ivan.krylov@spbpu.com

ВЛАСОВА Ольга Леонардовна – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы биомедицинских систем и технологии Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
olvlasova@yandex.ru

БОЛСУНОВСКАЯ Марина Владимировна – *кандидат технических наук, доцент Высшей школы биомедицинских систем и технологии Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
bolsun_hht@mail.ru

БЕЗПРОЗВАННЫЙ Илья Борисович – *доктор биологических наук, заведующий лабораторией молекулярной нейродегенерации Высшей школы биомедицинских систем и технологии, профессор той же Высшей школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация; именной профессор отдела физиологии Юго-западного медицинского центра Университета штата Техас, г. Даллас, Соединенные штаты Америки; именной профессор Карла и Хортензия Томпсен в исследованиях болезни Альцгеймера.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
mnlabspb@gmail.com

REFERENCES

1. **Ghani M.U., Mesadi F., Kanik S.D., et al.,** Dendritic spine classification using shape and appearance features based on two-photon microscopy, J. Neurosci. Methods. 279 (2017) 13–21.

2. **Kasai H., Hayama T., Ishikawa M., et al.,** Learning rules and persistence of dendritic spines, Eur. J. Neurosci. 32 (2) (2010) 241–249.

3. **Bourne J., Harris K.M.,** Do thin spines learn to be mushroom spines that remember? Curr. Opin. Neurobiol. 17 (3) (2007) 381–386.

4. **Bailey C.H., Kandel E.R., Harris K.M.,** Structural components of synaptic plasticity and memory consolidation, Cold Spring Harb. Perspect Biol. 7 (7) (2015) a021758.

5. **Zhou Q., Homma K.J., Poo M.M.,** Shrinkage of dendritic spines associated with long-term depression of hippocampal synapses, Neuron. 44 (5) (2004) 749–757.

6. **Hayashi Y., Majewska A.K.,** Dendritic spine geometry: functional implication and regulation, Neuron. 46 (4) (2005) 529–532.

7. **Hering H., Sheng M.,** Dentritic spines: structure, dynamics and regulation, Nat. Rev. Neurosci. 2 (12) (2001) 880–888.

8. **Yoshihara Y., de Roo M., Muller D.,** Dendritic spine formation and stabilization, Current Opinion in Neurobiology. 19 (2) (2009) 146–153.

9. **Berry K.P., Nedivi E.,** Spine dynamics: are they all the same? Neuron. 96 (1) (2017) 43–55.

10. **Koffie R.M., Hyman B.T., Spires-Jones T.L.,** Alzheimer's disease: synapses gone cold, Mol. Neurodegener. 6 (2011) 63.

11. **Tu S., Okamoto S.-I., Lipton S.A., Xu H.,** Oligomeric Aβ-induced synaptic dysfunction in Alzheimer's disease, Mol. Neurodegener. 9 (2014) 48.

12. **Villalba R.M., Smith Y.,** Differential striatal spine pathology in Parkinson's disease and cocaine addiction: a key role of dopamine? Neuroscience. 251 (2013) 2–20.

13. **Nithianantharajah J., Hannan A.J.,** Dysregulation of synaptic proteins, dendritic

spine abnormalities and pathological plasticity of synapses as experience-dependent mediators of cognitive and psychiatric symptoms in Huntington's disease, Neuroscience. 251 (2013) 66–74.

14. **Herms J., Dorostkar M.M.,** Dendritic spine pathology in neurodegenerative diseases, Annu. Rev. Pathol. 11 (2016) 221–250.

15. **Phillips M., Pozzo-Miller L.,** Dendritic spine dysgenesis in autism related disorders, Neuroscience Letters. 601 (2015) 30–40.

16. **Qiao H., Li M.-X., Xu C., et al.,** Dendritic spines in depression: what we learned from animal models, Neural Plasticity. 2016 (2016) 8056370.

17. **Cepeda C., Wu N., Andre V.M., et al.,** The corticostriatal pathway in Huntington's disease, Prog. Neurobiol. 81 (5–6) (2007) 253–271.

18. **Tackenberg C., Ghori A., Brandt R.,** Thin, stubby or mushroom: spine pathology in Alzheimer's disease, Curr. Alzheimer Res. 6 (3) (2009) 261–268.

19. **Boros B.D., Greathouse K.M., Gentry E.G., et al.,** Dendritic spines provide cognitive resilience against Alzheimer's disease, Ann. Neurol. 82 (4) (2017) 602–614.

20. **Popugaeva E., Pchitskaya E., Bezprozvanny I.,** Dysregulation of neuronal calcium homeostasis in Alzheimer's disease – a therapeutic opportunity? Biochemical and Biophysical Research Communications. 483 (4) (2017) 998–1004.

21. **Pchitskaya E., Popugaeva E., Bezprozvanny I.,** Calcium signaling and molecular mechanisms underlying neurodegenerative diseases, Cell Calcium. 70 (2018) 87–94.

22. **Popugaeva E., Supnet C., Bezprozvanny I.,** Presenilins, deranged calcium homeostasis, synaptic loss and dysfunction in Alzheimer's disease, Messenger. 1 (1) (2012) 53–62.

23. **Zhang H., Sun S., Wu L., et al.,** Store-operated calcium channel complex in postsynaptic spines: a new therapeutic target for Alzheimer's disease treatment, The Journal of Neuroscience. 36 (47) (2016) 11837–11850.

24. **Pchitskaya E.I., Zhemkov V.A., Bezprozvanny I.B.,** Dynamic microtubules in Alzheimer's disease: association with dendritic spine pathology, Biochemistry (Moscow). 83 (9) (2018) 1068–1074.

25. **Krasnov I.B., D'iachkova N.L., Burtseva T.D., Krasnikova I.V.,** Ultrastructure of dendritic spines in the somatosensory cortex of rat's brain following 5- and 33-day hypergravity, Aerospace and Environmental Medicine. 46 (5) (2012) 46–51.

26. **Zhuravleva Z.N., Zhuravlev G.I., Khutsian S.S.,** Inductive role of mossy fibers of hippocampus in the development of dendritic spines in aberrant synaptogenesis at neurotransplantation, Russian Journal of Developmental Biology. 45 (1) (2014) 42–49.

27. **Popov V.I., Deev A.A., Klimenko O.A., et al.,** Three-dimensional reconstruction of synapse and dendritic spines in the hippocampus of rats and ground squirrels: new paradigms of the structure and function of a synapse, The I.P. Pavlov Journal of Higher Nervous Activity. 54(1) (2004) 120–129.

28. **Koh I.Y.Y., Lindquist W.B., Zito K., et al.,** An image analysis algorithm for dendritic spines, Neural Computation. 14 (6) (2002) 1283–1310.

29. **Rodriguez A., Ehlenberger D.B., Dickstein D.L., et al.,** Automated three-dimensional detection and shape classification of dendritic spines from fluorescence microscopy images, PLoS One. 3(4) (2008) e1997.

30. **Dickstein D.L., Dickstein D.R., Janssen W.G., et al.,** Automatic dendritic spine quantification from confocal data with Neurolucida 360, Curr. Protoc. Neurosci. 77 (1) (2016) 1–1.

31. **Son J., Song S., Lee S., et al.,** Morphological change tracking of dendritic spines based on structural features, Journal of Microscopy. 241 (3) (2011) 261–272.

32. **Basu S., Plewczynski D., Saha S., et al.,** 2dSpAn: semiautomated 2-D segmentation, classification and analysis of hippocampal dendritic spine plasticity, Bioinformatics. 32 (16) (2016) 2490–2498.

33. **Basu S., Saha P.K., Roszkowska M., et al.,** Quantitative 3-D morphometric analysis of individual dendritic spines, Scientific Reports. 8 (2018) 3545.

34. **Shi P., Huang Y., Hong J.,** Automated three-dimensional reconstruction and morphological analysis of dendritic spines based on semi-supervised learning, Biome. Opt. Express. 5 (5) (2014) 1541–1553.

35. **Harris K.M., Jensen F.E., Tsao B.,** Three-dimensional structure of dendritic spines and synapses in rat hippocampus (CA1) at postnatal day 15 and adult ages: implications for the maturation of synaptic physiology and long-term potentiation, J. Neurosci. 12 (7) (1992) 2685–2705.

36. **Arellano J.I., Benavides-Piccione R., Defelipe J., Yuste R.,** Ultrastructure of dendritic spines: correlation between synaptic and spine morphologies, Front. Neurosci. 1 (1) (2007) 131–143.

37. **Wallace W., Bear M.F.,** A morphological

correlate of synaptic scaling in visual cortex, The Journal of Neuroscience. 24 (31) (2004) 6928–6938.

38. **Loewenstein Y., Yanover U., Rumpel S.,** Predicting the dynamics of network connectivity in the neocortex, The Journal of Neuroscience. 35 (36) (2015) 12535–12544.

39. **Tonnesen J., Katona G., Rozsa B., Nagerl V.V.,** Spine neck plasticity regulates compartmentalization of synapses, Nat. Neurosci. 17 (5) (2014) 678–685.

40. **Bokota G., Magnowska M., Kuśmierczyk T., et al.,** Computational approach to dendritic spine taxonomy and shape transition analysis, Frontiers in Computational Neuroscience. 10 (2016) 140.

41. **Kharazia V.N., Weinberg R.J.,** Immunogold localization of AMPA and NMDA receptors in somatic sensory cortex of albino rat, J. Comp. Neurol. 412 (2) (1999) 292–302.

42. **Takumi Y., Ramirez-Leon V., Laake P., et al.,** Different modes of expression of AMPA and NMDA receptors in hippocampal synapses, Nat. Neurosci. 2 (7) (1999) 618–624.

43. **Ganeshina O., Berry R.W., Petralia R.S., et al.,** Differences in the expression of AMPA and NMDA receptors between axospinous perforated and nonperforated synapses are related to the configuration and size of postsynaptic densities, J. Comp. Neurol. 468 (1) (2004) 86–95.

44. **Yuste R., Bonhoeffer T.,** Morphological changes in dendritic spines associated with long-term synaptic plasticity, Annu. Rev. Neurosci. 24 (2001) 1071–1089.

45. **Holtmaat A., Svoboda K.,** Experience-dependent structural synaptic plasticity in the mammalian brain, Nat. Rev. Neurosci. 10 (9) (2009) 647–658.

Received 19.02.2019, accepted 06.05.2019.

THE AUTHORS

PCHITSKAYA Ekaterina I.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
katrincreative@yandex.ru

KRYLOV Ivan S.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
ivan.krylov@spbpu.com

VLASOVA Olga L.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
olvlasova@yandex.ru

BOLSUNOVSKAYA Marina V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
bolsun_hht@mail.ru

BEZPROZVANNY Ilya B.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
mnlabspb@gmail.com

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

DOI: 10.18721/JPM.12208
УДК 539.126.3

ИЗМЕРЕНИЕ ФАКТОРОВ ЯДЕРНОЙ МОДИФИКАЦИИ ЭТА-МЕЗОНОВ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ ЯДЕР УРАНА

П.В. Радзевич, А.Я. Бердников, Я.А. Бердников, Д.О. Котов, С.В. Жарко

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье представлены инвариантные спектры рождения η-мезонов и факторы ядерной модификации η- и π^0-мезонов, рожденных в столкновениях ядер урана при энергии 192 ГэВ. Эти данные получены на спектрометре PHENIX, расположенном на релятивистском коллайдере RHIC. Проведен анализ этих экспериментальных результатов, и они сопоставлены с аналогичными данными для столкновений ядер золота при энергии 200 ГэВ. Установлено, что выходы η- и π^0-мезонов в центральных столкновениях ядер как урана, так и золота (при указанных значениях энергии) подавлены в равной степени. В периферийных же столкновениях факторы ядерной модификации η- и π^0-мезонов, измеренные в столкновениях ядер урана, подавлены сильнее, чем данные факторы, полученные в столкновениях ядер золота. Анализ отношения спектров рождения η-мезонов к спектрам π^0-мезонов, рожденных в столкновениях ядер урана при энергии 192 ГэВ, показал, что оно не зависит ни от класса центральности, ни от поперечного импульса.

Ключевые слова: кварк-глюонная плазма, эта-мезон, эффект гашения струй, фактор ядерной модификации

Ссылка при цитировании: Радзевич П.В., Бердников А.Я., Бердников Я.А., Котов Д.О., Жарко С.В. Измерение факторов ядерной модификации эта-мезонов при столкновениях ядер урана // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 101–110. DOI: 10.18721/JPM.12208

THE MEASUREMENT OF ETA MESON NUCLEAR MODIFICTION FACTORS IN COLLISIONS OF URANIUM NUCLEI

P.V. Radzevich, A.Ya. Berdnikov, Ya.A. Berdnikov, D.O. Kotov, S.V. Zharko

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

Invariant spectra of η mesons production and nuclear modification factors of η и π^0 mesons produced in collisions of uranium nuclei at energy of 192 GeV have been presented in the paper. This data was obtained using the PHENIX spectrometer of RHIC. These experimental results were analyzed and compared with similar data on collisions of gold nuclei at 200 GeV. The η и π^0 mesons yields in central collisions of both uranium and gold nuclei (at energy values mentioned) were established to be suppressed equally. In the peripheral collisions, the nuclear modification factors of η и π^0 mesons measured in the uranium nuclei collisions were suppressed more than those obtained in the gold ones. An analysis of a ratio of the η meson to π^0 meson production spectra in the uranium nuclei collisions (at 192 GeV) revealed that the ratio was independent of the centrality class and the transverse momenta.

Keywords: quark-gluon plasma, eta meson, jet-quenching effect, nuclear modification factor

Citation: P.V. Radzevich, A.Ya. Berdnikov, Ya.A. Berdnikov, D.O. Kotov, S.V. Zharko, The measurement of eta meson nuclear modification factors in collisions of uranium nuclei, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 101–110. DOI: 10.18721/JPM.12208

Введение

В 1970 году с помощью вычислений квантовой хромодинамики (КХД) был предсказан переход ядерной материи в кварк-глюонную плазму (КГП) в условиях высоких значений энергетических плотностей и/или температур ($\varepsilon \approx 1$ ГэВ/фм^3, $T \approx 170$ МэВ) [1 – 5]. Изучение фазового перехода от бесцветной адронной материи к состоянию КГП проводится в экспериментах по столкновению ультрарелятивистских ядер. Исследование КГП вносит весомый вклад в современные представления об эволюции рождения Вселенной, так как на одном из этапов ее формирования температура Вселенной была эквивалента температуре КГП ($T \approx 1012$ K) [6]. Поведение же ядерной материи в условиях высоких температур и энергетических плотностей несет информацию о природе сил между кварками и глюонами, и такие исследования широко востребованы в космологии для выявления свойств нейтронных звезд [7, 8].

Свойства КГП при столкновении ультрарелятивистских ядер выявляют путем анализа эффектов начального и конечного состояния ядерной материи. Эффект гашения адронных струй относится к явлениям конечного состояния ядерной материи и проявляется при столкновении тяжелых ядер с большой энергией [9]. Гашение адронных струй происходит в результате жесткого рассеяния партонов, рождающихся при столкновении тяжелых ультрарелятивистских ядер. Данный эффект изучается через измерение спектров рождения и факторов ядерной модификации адронов, которые рождаются в результате взаимодействия ядер. Степень подавления выхода адронов в области больших поперечных импульсов удобно оценивать с помощью эта-мезонов (далее используется термин с греческой буквой «эта» – η-мезоны).

Измерение спектров рождения и факторов ядерной модификации η-мезонов направлено на исследование эффекта гашения адронных струй в определенной сталкивающейся системе ядер. Сравнение спектров рождения и факторов ядерной модификации η-мезонов с таковыми для π^0-мезонов позволяет получать зависимость гашения адронных струй от массы рождающихся частиц, а также от их кваркового состава.

Особый интерес представляет бинарная система из сталкивающихся ядер урана (U + U) при энергии $\sqrt{S_{NN}} = 192$ ГэВ. Ядра урана имеют несферическую форму, что позволяет изучать эффекты КГП при различных геометрических конфигурациях сталкивающихся ядер. В центральных столкновениях система сталкивающихся ядер U + U обладает максимальной энергетической плотностью, доступной на релятивистском коллайдере тяжелых ионов (*англ.* The Relativistic Heavy Ion Collider – RHIC) [10].

Постановка и описание задачи

Целью данной работы является изучение особенностей рождения η-мезонов в столкновениях ядер урана U + U при энергии $\sqrt{S_{NN}} = 192$ ГэВ.

Для установления механизмов образования частиц, возникающих в результате рассеяния жестких партонов, которые рождаются в столкновении ядер U + U при энергии $\sqrt{S_{NN}} = 192$ ГэВ, было необходимо измерить спектры рождения η-мезонов и вычислить их факторы ядерной модификации. Инвариантные спектры рождения и факторы ядерной модификации η-мезонов анализируются с учетом их класса по центральности и в зависимости от поперечного импульса.

Поперечный импульс p_T характеризует энергию взаимодействия в системе сталкивающихся ядер. Центральность, измеряемая в процентах, – это степень перекрытия налетающих друг на друга ядер с фиксированным прицельным параметром. Столкновения с максимальной степенью перекрытия соответствуют величине 0 – 20 % и называются центральными, а столкновения с минимальной степенью перекрытия называются периферическими и соответствуют величине центральности 60 – 80 %.

Методика исследования

Для изучения эффекта гашения адронных струй с помощью η-мезонов, которые рождаются в столкновениях ядер U + U при энергии $\sqrt{S_{NN}} = 192$ ГэВ, разработана

методика, которая включает в себя следующие этапы:

подготовка экспериментальных данных;

измерение выхода η-мезонов в различных диапазонах p_T и классах по центральности;

вычисление эффективности регистрации частиц в детектирующей установке;

измерение инвариантных спектров рождения η-мезонов в столкновениях ядер U + U при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ в различных диапазонах p_T и классах по центральности;

оценка систематических погрешностей измеренных величин;

измерение факторов ядерной модификации η-мезонов в столкновениях ядер U + U при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ в различных диапазонах p_T и классах по центральности.

Экспериментальные данные, используемые в работе, получены на спектрометре PHENIX, расположенном на релятивистском коллайдере тяжелых ионов (RHIC). Для регистрации продуктов распада η-мезонов в канале $\eta \to \gamma\gamma$ использовались электромагнитные калориметры. Такие устройства измеряют энергию и координаты фотонов, электронов и адронов, вылетающих из области взаимодействия ядер. Общий аксептанс системы электромагнитных калориметров на эксперименте PHENIX давал значения $\varphi = 2 \cdot \pi/2$ по полярному углу и $|\eta| < 0{,}35$ по псевдобыстроте.

Система электромагнитных калориметров в эксперименте PHENIX состояла из двух подсистем: сцинтилляционного сэмплинг-калориметра PbSc и калориметра Черенкова со свинцовым стеклом PbGl. Каждый из используемых приборов имел собственную сегментацию. Использование двух типов калориметров позволяло выполнять перекрестную проверку результатов, полученных отдельно для каждой подсистемы PbSc и PbGl, в рамках одного эксперимента.

Подготовка экспериментальных данных. Производилась путем определения критериев отбора нужных событий, зарегистрированных в электромагнитном калориметре.

Для разделения сигналов, зарегистрированных при взаимодействии адронов и фотонов с активной областью электромагнитного калориметра, используются ограничения на форму зарегистрированных электронных ливней. В подсистеме PbSc накладывается ограничение $\chi^2 < 3$, а в подсистеме PbGl – *photon_prob* > 0,02. Здесь χ^2 и *photon_prob* – статистические переменные, описанные в статье [11].

Средняя энергия, передаваемая заряженными адронами, составляет $E \approx 300$ МэВ. Поэтому для лучшего отделения сигналов, оставленных адронами, используется дополнительное ограничение на энергию восстановленных кластеров: $E\gamma > 400$ МэВ.

Для улучшения отношения уровня сигнала к фону используется ограничение на асимметрию энергии фотонов, комбинируемых при восстановлении η-мезона:

$$\frac{\left|E_{\gamma 1} - E_{\gamma 2}\right|}{E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2}} < 0{,}8.$$

Регистрация частиц во время столкновений ядер урана происходила в течение двадцати двух дней. За данный период времени могли произойти нежелательные отклонения в работе техники по множеству разных причин. Для учета данного обстоятельства производился анализ сегмента данных, в ходе которого отбрасывались сегменты данных с малым числом зарегистрированных событий.

Вершина взаимодействия (z_{coll}) является одним из основных параметров в сталкивающейся системе ядер. В эксперименте PHENIX этот параметр определялся с помощью счетчика ядро-ядерных столкновений. Для отбора данных использовалось ограничение на вершину

$$-20 < z_{coll} < +20,$$

так как в этом интервале эффективность счетчика ядро-ядерных столкновений, измеренная в столкновениях ядер U + U, является постоянной величиной.

Измерение выхода η-мезонов в различных диапазонах p_T и классах по центральности. Указанная процедура выполняется с помощью построения распределения по эффективной массе двух γ-квантов, отобранных после подготовки экспериментальных данных, в разных диапазонах по p_T и классах по центральности. Для определения выхода η-мезонов необходимо отделить полезный сигнал, который зарегистрирован в результате распада η-мезонов, от фона, который разделяется на коррелированную (пара γ-квантов является продуктом распада частиц) и некоррелированную (случайная комбинация γ-квантов) составляющие.

Для отделения некоррелированного фона производится комбинирование пар γ-квантов, взятых из двух разных событий, но обладающих сходными характеристиками (вершина и центральность). Строится распределение по эффективной массе скомбинированных γ-квантов (фон), нормируется в диапазоне

$$0{,}7 < M\gamma\gamma < 0{,}8 \text{ ГэВ}/c^2$$

на распределение по эффективной массе реальных событий (сигнал и фон) и вычитается из него.

Результат вычитания двух распределений аппроксимируется функцией Гаусса для описания сигнала от восстановленных η-мезонов и полиномом второй степени для описания остаточного коррелированного фона, в промежутке

$$0{,}40 < M\gamma\gamma < 0{,}75 \text{ ГэВ}/c^2$$

в диапазоне $p_T < 10$ ГэВ/c
и

$$0{,}35 < M\gamma\gamma < 0{,}75 \text{ ГэВ}/c^2$$

в диапазоне $p_T > 10$ ГэВ/c.

Определение выхода η-мезонов осуществляется подсчетом количества отсчетов и вычитанием интеграла под функцией полинома второй степени. Область подсчета выхода η-мезонов лежит в диапазоне

$$0{,}48 < M\gamma\gamma < 0{,}62 \text{ ГэВ}/c^2.$$

Вычисление эффективности регистрации частиц в детектирующей установке. Данная методика позволяет отделить количество η-мезонов, восстановленных в электромагнитном калориметре, от числа η-мезонов, попавших в активную область детектора.

Эффективность регистрации определяется с использованием моделирования прохождения η-мезонов в спектрометре PHENIX методом Монте-Карло. Для такого моделирования детекторной установки применяется специализированный пакет PISA, реализованный в GEANT 3 [11].

Эффективность регистрации вычисляется как отношение числа частиц, восстановленных в ходе моделирования, к первоначальному числу частиц.

Измерение инвариантных спектров рождения η-мезонов в столкновениях ядер U + U при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 192 ГэВ в различных диапазонах p_T и классах по центральности. Для указанного измерения используется следующая формула:

$$I_\eta(p_T) = dN_{AA}(p_T) = \\ = \frac{1}{2\pi p_T}\frac{N_\eta(p_T)}{N_{event}\Delta p_T \varepsilon_{rec.ef}(p_T)}, \quad (1)$$

где N_η – выход нейтральных η-мезонов; $\varepsilon_{rec.\,ef}$ – эффективность регистрации; N_{event} – количество анализируемых событий.

Инвариантные спектры рождения частиц измеряются в различных классах по центральности.

Оценка систематических погрешностей измеренных величин. Производится путем варьирования различных параметров (энергетическая шкала, энергетическое разрешение, взвешивающие коэффициенты, параметры при идентификации частиц, границы определения γ-кластеров, конверсия, геометрия экспериментальной установки и модели), используемых при измерении выходов η-мезонов.

Статистические и систематические ошибки факторов ядерной модификации вычисляются как сумма квадратов статистических и систематических ошибок числителя и знаменателя формулы (1).

Измерение факторов ядерной модификации η-мезонов в столкновениях ядер U + U при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 192 ГэВ в различных диапазонах p_T и классах по центральности. Для указанного измерения используется следующая формула:

$$R_{AA} = \frac{1}{\langle N_{coll}\rangle}\frac{dN_{AA}}{dN_{pp}},$$

где dN_{AA}, dN_{pp} – выходы адронов в столкновениях соответственно ядер ($A + A$) и протонов ($p + p$) в заданном интервале поперечных импульсов; $\langle N_{coll}\rangle$ – среднее число парных неупругих нуклон-нуклонных столкновений.

Величина $\langle N_{coll}\rangle$ определяется методом моделирования Монте-Карло с помощью теории Глаубера, которая учитывает геометрию сталкивающихся ядер. Нормировка на данное число применяется на основе предположения о том, что адроны рождаются в элементарных партон-партонных взаимодействиях.

Для изучения коллективных эффектов (эффекты конечного и начального состояния ядерной материи) в системе сталкивающихся ядер используют факторы ядерной модификации R_{AA}. Если значение фактора R_{AA} = 1, то коллективные эффекты в си-

стеме сталкивающихся ядер отсутствуют. Отличие значения R_{AA} от единицы говорит либо о подавлении, либо об избытке выхода частиц.

Результаты и их обсуждение

Инвариантные спектры рождения η-мезонов, измеренных в столкновении ядер урана (U + U) при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ, в зависимости от поперечного импульса для разных классов по центральности, представлены на рис. 1.

Спектры измерены в широком диапазоне значений поперечного импульса в центральных столкновениях (до 14 ГэВ/*c*). В области малых поперечных импульсов измерение спектров рождения ограничено из-за малой возможности детекторной установки. В области больших поперечных импульсов ограничение обусловлено недостаточным объемом статистических данных.

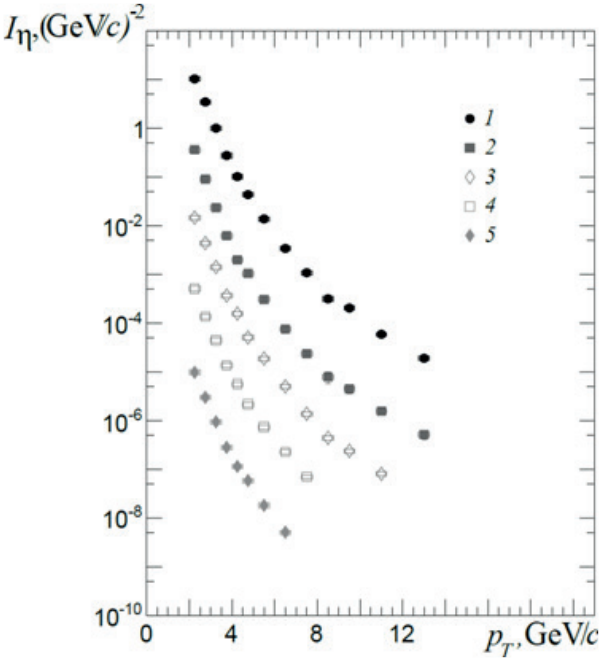


Рис. 1. Зависимости инвариантных спектров рождения η-мезонов, измеренных в столкновении ядер U + U, от поперечного импульса для различных классов по центральности, %: 0 – 80 (*1*), 0 – 20 (*2*), 20 – 40 (*3*), 40 – 60 (*4*), 60 – 80 (*5*); энергия $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ.

Здесь и далее условные обозначения на точках в виде вертикальных «усов» и серых горизонтальных прямоугольников отвечают статистическим и систематическим погрешностям измерений соответственно

На рис. 2 представлено сравнение факторов ядерной модификации η-мезонов, измеренных в столкновениях ядер урана (U + U) и золота (Au + Au) [12, 13] при энергиях $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 и 200 ГэВ, соответственно, при близких значениях величины N_{coll} (см. таблицу). Факторы ядерной модификации η-мезонов (см. рис. 2) вычислены по формуле (2) с использованием двух различных наборов среднего числа нуклон-нуклонных столкновений N_{coll} в различных классах по центральности в столкновении ядер U + U при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ.

Таблица

Значения числа столкновений N_{coll} в зависимости от их центральности для различных типов взаимодействий (см. рис. 2)

Центральность, %	N_{coll}	Рис.2
Au + Au (*набор 1*), 200 ГэВ		
0 – 5	1065,4 ± 105,3	*a*)
20 – 40	300,8 ± 32,6	*b*)
40 – 50	120,3 ± 13,7	*c*)
60 – 92	17,1 ± 3,9	*d*)
Au + Au (*набор 2*), 200 ГэВ		
0 – 10	967,3± 92,9	*a*)
60 – 92	17,2± 3,5	*d*)
U + U (*вариант I*), 192 ГэВ		
0 – 20	934,5 ± 97,5	*a*)
20 – 40	335,0 ± 33,0	*b*)
40 – 60	95,9 ± 13,0	*c*)
60 – 80	17,5 ± 3,8	*d*)
U + U (*вариант II*), 192 ГэВ		
0 – 20	999,0 ± 114,0	*a*)
20 – 40	375,0 ± 45,0	*b*)
40 – 60	110,0 ± 14,6	*c*)
60 – 80	19,7 ± 4,4	*d*)

Примечание. Наличие разных вариантов в столкновениях ядер урана обусловлено различной степенью деформации ядра урана при вычислении числа нуклонов N_{coll} в модели Глаубера [12, 13].

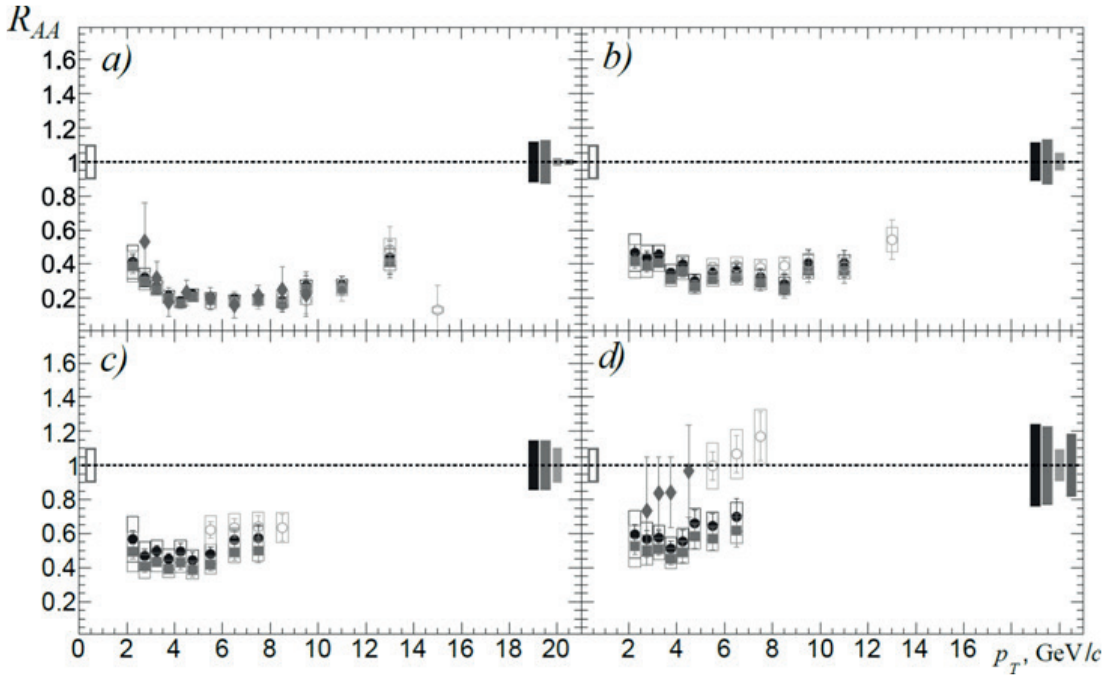


Рис. 2. Зависимости величины фактора ядерной модификации R_{AA} от поперечного импульса p_T для η-мезонов в (U+U)-взаимодействиях (закрашенные круглые и квадратные маркеры) и (Au+Au)-взаимодействиях (круглые и ромбовидные маркеры) [12, 13] при значениях энергии 192 и 200 ГэВ соответственно (см. таблицу)

Прямоугольники против пунктирных линий указывают величину систематической погрешности N_{coll}

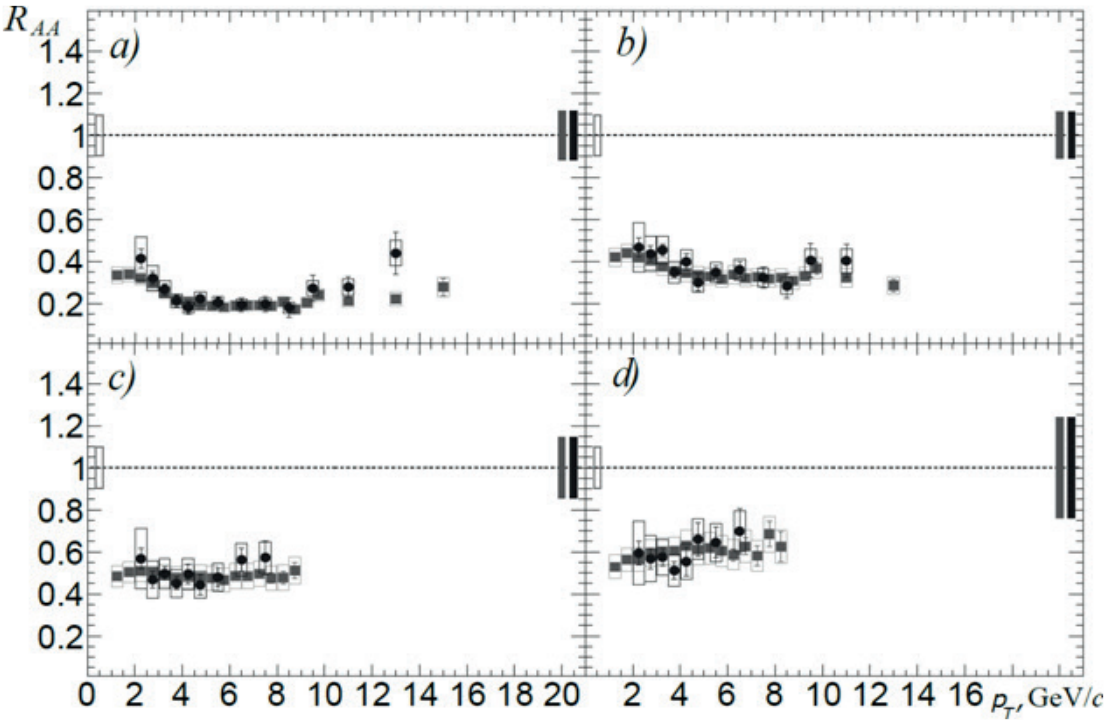


Рис. 3. Зависимости величины фактора ядерной модификации R_{AA} от поперечного импульса p_T для π^0-мезонов (квадратные маркеры) и η-мезонов (круглые маркеры) в (U+U)-взаимодействиях при значениях энергии для различных классов по центральности, %: 0 – 20 (*a*), 20 – 40 (*b*), 40 – 60 (*c*), 60 – 80 (*d*).

Прямоугольники против пунктирных линий указывают величину систематической погрешности N_{coll}

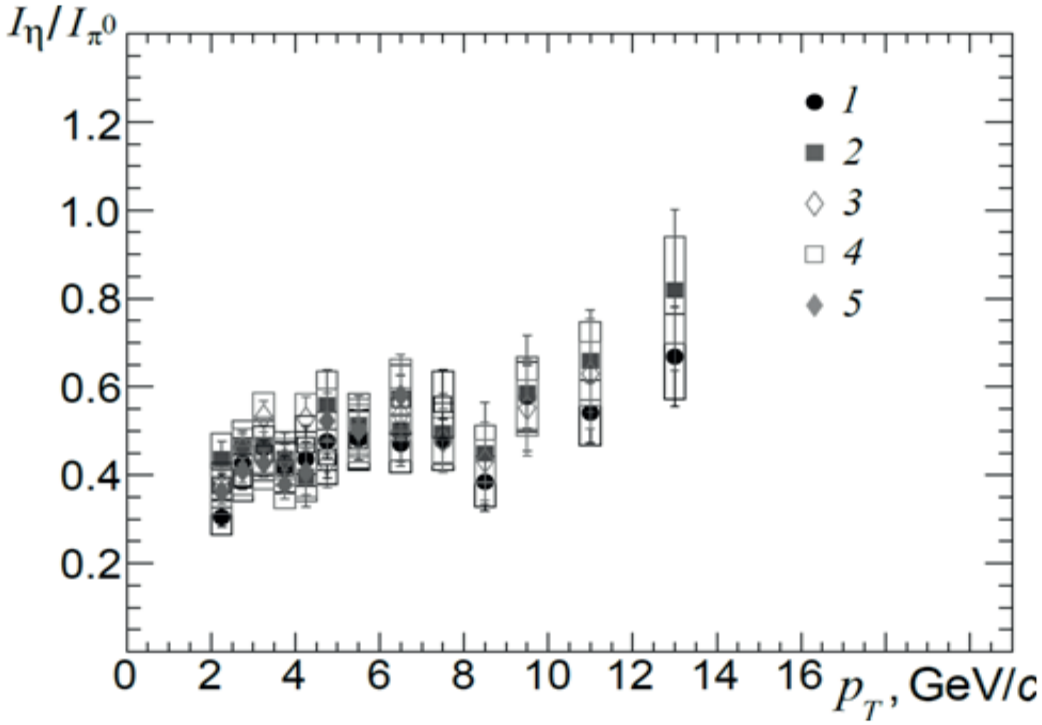


Рис. 4. Зависимость отношения интенсивности спектров рождения η-мезонов к интенсивности спектров рождения π^0-мезонов, измеренных в столкновении ядер U+U при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ, от поперечного импульса для различных классов по центральности, %: 0 – 80 (*1*), 0 – 20 (*2*), 20 – 40 (*3*), 40 – 60 (*4*), 60 – 80 (*5*)

Два набора переменных N_{coll} используются ввиду неравномерного распределения нуклонов в сферически несимметричных ядрах урана.

При больших значениях N_{coll} величины факторов ядерной модификации, измеренные в столкновениях ядер урана и золота при энергиях $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 и 200 ГэВ соответственно, совпадают, что свидетельствует о независимости проявления эффекта гашения струй от геометрической формы сталкивающихся ядер.

При малых значениях N_{coll} наблюдается некоторое различие в величинах факторов ядерной модификации, полученных в столкновениях ядер урана и золота при энергиях $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 и 200 ГэВ соответственно, однако вследствие больших систематических ошибок невозможно однозначно разделить исследуемые величины.

На рис. 3 представлено сравнение факторов ядерной модификации π^0- и η-мезонов, измеренных в столкновениях ядер урана U + U при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ, в различных классах по центральности. Видно, что указанные величины совпадают в пределах систематических и статистических погрешностей во всем диапазоне поперечного импульса и во всех классах по центральности.

Поведение отношения интенсивностей спектров η/π^0, измеренных в столкновениях ядер урана при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ (рис. 4), в итоге не зависит от центральности и поперечного импульса в пределах систематических погрешностей.

Заключение

В настоящей работе представлены результаты измерения инвариантных спектров η-мезонов в пяти классах по центральности и факторов ядерной модификации η-мезонов в четырех классах по центральности в зависимости от поперечного импульса при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ в столкновениях ядер урана (U + U).

Равное значение факторов ядерной модификации η-мезонов для сталкивающихся систем урана (U + U) и золота (Au + Au) при равном числе средних парных неупругих нуклон-нуклонных столкновений в области больших поперечных импульсов, в центральных и полуцентральных столкно-

вениях, говорит о независимости эффектов конечного состояния от геометрических свойств сталкивающихся ядер.

Установлено, что выход η-мезонов в периферических столкновениях ядер урана при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ подавлен в большей степени, чем в столкновениях золота (Au+Au) при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 200 ГэВ, но из-за больших систематических и статистических погрешностей оказалось невозможным однозначно разделить полученные величины.

Анализ данных по отношению спектров η/π^0 и сравнение факторов ядерной модификации π^0- и η-мезонов позволили отметить независимость фрагментации жестких партонов от массы и состава кварков π^0- и η-мезонов, рождающихся в парных столкновениях ядер урана при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ.

Результаты настоящей работы были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России 3.1498.2017/4.6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Greutz M.** Gauge fixing, the transfer matrix, and confinement on a lattice // Phys. Rev. D. 1977. Vol. 15. No. 4. Pp. 1128–1136.

2. **Wilson K.G.** Confinement of quarks // Phys. Rev. D. 1974. Vol. 10. No. 8. Pp. 2445–2459.

3. **Wilson K.G., Walhout T.S., Harindranath A., Zhang W.-M., Perry R.J., Głazek D.S.** Nonperturbative QCD: A weak-coupling treatment on the light front // Phys. Rev. D. 1994. Vol. 49. No. 12. Pp. 6720–6766.

4. **Laermann E., Philipsen O.** The status of lattice QCD at finite temperature // Annual Review of Nuclear and Particle Science. 2003. Vol. 53. Pp. 163–198.

5. **Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al.** Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX Collaboration // Nucl. Phys. A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 184–283.

6. **Karsch F.** Lattice QCD at high temperature and density // Lectures on quark matter. Plessas W., Mathelitsch L. (Eds). Lecture Notes in Physics. 2002. Vol. 583. Berlin: Springer. Pp. 209–249.

7. **Collins J.C.** Superdense matter: neutrons or asymptotically free quarks? // Phys. Rev. Lett. 1975. Vol. 34. No. 21. Pp. 1353–1356.

8. **Rajagopal K.** The phases of QCD in heavy ion collisions and compact stars // AIP Conference Proceedings. 2000. Vol. 549. No. 1. Pp. 95–119.

9. **Бердников А.Я., Бердников Я.А., Жарко С.В., Котов Д.О., Радзевич П.В.** Экспериментальные исследования рождения π-мезонов в U+U-взаимодействиях при энергии 192 Гэв // Известия РАН. Сер. физическая. 2018. Т. 82. № 10. С. 1391–1394.

10. **Iordanova A.** U+U and Cu+Au results from PHENIX // Journal of Physics: Conference Series. 2013. Vol. 458. P. 012004.

11. **Adler S.S., Chujo T., Desmond E.J., et al.** PHENIX on-line and off-line computing // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2003. Vol. 499. No. 2/3. Pp. 593–602.

12. **Adler S.S., et al.** (PHENIX Collaboration), High transverse momentum η meson production in $p + p$, d + Au and Au + Au collisions at $\sqrt{S_{NN}}$ = 200 GeV // Phys. Rev. C. 2007. Vol. 75. No. 2. P. 024909.

13. **Adare A., et al.** (PHENIX Collaboration), Transverse momentum dependence of η meson suppression in Au+Au collisions at $\sqrt{S_{NN}}$ = 200 GeV // Phys. Rev. C. 2010. Vol. 82. No. 1. P. 011902.

Статья поступила в редакцию 04.02.2019, принята к публикации 11.03.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

РАДЗЕВИЧ Павел Владиславович – *аспирант кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
radzevichp@gmail.com

БЕРДНИКОВ Александр Ярославич – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
alexber@phmf.spbstu.ru

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
berdnikov@spbstu.ru

КОТОВ Дмитрий Олегович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
dmitriy.kotov@gmail.com

ЖАРКО Сергей Вячеславович – *ассистент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
zharkosergey94@gmail.com

REFERENCES

1. **Greutz M.,** Gauge fixing, the transfer matrix, and confinement on a lattice, Phys. Rev. D. 15 (4) (1977) 1128–1136.

2. **Wilson K.G.,** Confinement of quarks, Phys. Rev. D. 10 (8) (1974) 2445–2459.

3. **Wilson K.G., Walhout T.S., Harindranath A., et al.,** Nonperturbative QCD: A weak-coupling treatment on the light front, Phys. Rev. D. 49 (12) (1994) 6720–6766.

4. **Laermann E., Philipsen O.,** The status of lattice QCD at finite temperature, Annual Review of Nuclear and Particle Science. 53 (2003) 163–198.

5. **Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al.,** Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX collaboration, Nucl. Phys. A. 757 (1–2) (2005) 184–283.

6. **Karsch F.,** Lattice QCD at high temperature and density, In: Lectures on quark matter, W. Plessas, L. Mathelitsch (Eds), Lecture Notes in Physics, Berlin: Springer. 582 (2002) 209–249.

7. **Collins J.C.,** Superdense matter: neutrons or asymptotically free quarks? Phys. Rev. Lett. 34 (21) (1975) 1353–1356.

8. **Rajagopal K.,** The phases of QCD in heavy ion collisions and compact stars, AIP Conference Proceedings. 549 (1) (2000) 95–119.

9. **Berdnikov A.Ya., Berdnikov Ya.A., Zharko S.V., et al.,** Experimental study of pion production in U + U interactions at 192 GeV, Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 82 (10) (2018) 1262–1265.

10. **Iordanova A.,** U+U and Cu+Au results from PHENIX, Journal of Physics: Conference Series. 458 (2013) 012004.

11. **Adler S.S., Chujo T., Desmond E.J., et al.,** PHENIX on-line and off-line computing, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 499 (2/3) (2003) 593–602.

12. **Adler S.S., et al.** (PHENIX Collaboration), High transverse momentum η meson production in $p + p$, d + Au and Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV, Phys. Rev. C. 75 (2) (2007) 024909.

13. **Adare A., et al.** (PHENIX Collaboration), Transverse momentum dependence of η meson suppression in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV, Phys. Rev. C. 82 (1) (2010) 011902.

Received 04.02.2019, accepted 11.03.2019.

THE AUTHOR

RADZEVICH Pavel V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
radzevichp@gmail.com

BERDNIKOV Alexander Ya.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
alexber@phmf.spbstu.ru

BERDNIKOV Yaroslav A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
berdnikov@spbstu.ru

KOTOV Dmitry O.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
dmitriy.kotov@gmail.com

ZHARKO Sergei V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
zharkosergey94@gmail.com

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

DOI: 10.18721/JPM.12209
УДК 539.126.3

ПОДАВЛЕНИЕ ВЫХОДОВ АДРОНОВ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ЯДЕР УРАНА ПРИ РАЗЛИЧНОМ КВАРКОВОМ СОСТАВЕ РОЖДАЮЩИХСЯ ЧАСТИЦ

П.В. Радзевич, А.Я. Бердников, Я.А. Бердников
С.В. Жарко, Д.О. Котов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье представлены экспериментальные инвариантные спектры рождения, факторы ядерной модификации и отношения интенсивностей спектров легких мезонов, полученные в столкновении тяжелых ядер урана при энергии 192 ГэВ. Данные характеристики частично отражают свойства кварк-глюонной плазмы (КГП), рождающейся в столкновении тяжелых ядер урана при различном размере взаимодействующей системы и кварковом составе рождающихся частиц. Приведенные данные представлены в зависимости от поперечного импульса, среднего числа нуклон-нуклонных столкновений, среднего числа участников столкновения и класса по центральности. Предполагалось опытным путем дискриминировать эффекты горячей и плотной материи в зависимости от геометрических характеристик сталкивающихся тяжелых ядер из-за сферической несимметричности ядер урана. Анализ полученных данных привел к выводам о независимости фрагментации жестких партонов от массы и состава кварков легких мезонов и об отсутствии влияния геометрической формы сталкивающихся ядер на проявление эффекта гашения адронных струй.

Ключевые слова: кварк-глюонная плазма, легкий мезон, фактор ядерной модификации, столкновение тяжелых ядер

Ссылка при цитировании: Радзевич П.В., Бердников А.Я., Бердников Я.А., Жарко С.В., Котов Д.О. Подавление выходов адронов в столкновениях ядер урана при различном кварковом составе рождающихся частиц // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 111–120. DOI: 10.18721/JPM.12209

SUPPRESSION OF THE HADRONIC YIELDS IN THE URANIUM NUCLEI COLLISIONS AT THE DIFFERENT QUARK'S COMPOSITION OF THE PRODUCED PARTICLES

P.V. Radzevich, A.Ya. Berdnikov, Ya.A. Berdnikov
S.V. Zharko, D.O. Kotov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

This paper presents invariant spectra, nuclear modification factors and ratio of invariant spectra of light mesons, obtained in collisions of heavy uranium nuclei at 192 GeV. These values are studied with respect to transverse momenta, numbers of nucleon-nucleon collisions, numbers of participants and centrality. Light mesons production measurements are important in the study of heavy ion collisions, serving as hard probes of the quark gluon plasma (QGP). The research of light mesons in U + U collisions at 192 GeV allows discriminating the effects of hot matter depending on the geometric characteristics of the colliding heavy nuclei. The obtained results showed independence of the fragmentation of hard partons on the mass and composition of quarks and the absence of the influence of the geometric form of the colliding nuclei on the jet-quenching effect.

Keywords: quark-gluon plasma, light meson, nuclear modification factor, collision of heavy nuclei

Citation: Radzevich P.V., Berdnikov A.Ya., Berdnikov Ya.A., Zharko S.V., Kotov D.O.,

Suppression of the hadronic yields in the uranium nuclei collisions at the different quark's composition of the produced particles, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 111–120. DOI: 10.18721/JPM.12209

Введение

Согласно общепринятой терминологии, кварк-глюонная плазма – это состояние вещества, в котором степенями свободы являются кварки и глюоны, обладающие цветовым зарядом. Систематическое наблюдение формирования кварк-глюонной плазмы в столкновениях ультрарелятивистских тяжелых ядер (A + A) впервые было получено на Коллайдере релятивистских тяжелых ионов (RHIC) при энергиях столкновения $\sqrt{s_{NN}}$ = 130 и 200 ГэВ (в пересчете на один нуклон) [1 – 4] и позже на Большом адронном коллайдере (LHC) в столкновениях ядер свинца при $\sqrt{s_{NN}}$ = 2,76 ТэВ [5].

Рождение адронов в столкновениях ультрарелятивистских ионов при больших значениях поперечного импульса, $p_T > 5$ ГэВ/c, обусловлено процессами фрагментации жестких партонов, рожденных в результате процессов глубоконеупругих столкновений. Сечения рождения адронов в элементарных столкновениях протонов (p + p) хорошо описываются с помощью формализма пертурбативной квантовой хромодинамики с учетом следующего лидирующего порядка (next-to-leading-order perturbative quantum chromodynamics – NLO pQCD) [6]. Рождение адронов в столкновениях A + A подвергается влиянию кварк-глюонной среды: при прохождении сквозь нее жесткие партоны теряют часть своей энергии, что приводит к подавлению выхода адронов фрагментации (по сравнению с их выходом в элементарных протон-протонных столкновениях). Данный эффект называется эффектом гашения адронных струй [6, 7]. Изучение особенностей рождения легких мезонов различного типа (например, π^0, η, K_S) в (A + A)-столкновениях позволяет провести систематическое исследование эффектов кварк-глюонной плазмы и, в частности, эффекта гашения адронных струй в зависимости от основных характеристик, таких как масса и кварковый состав этих частиц.

Количественная оценка эффекта гашения струй производится с помощью вычисления фактора ядерной модификации, определяемого в зависимости от поперечного импульса и центральности согласно выражению:

$$R_{AA} = \frac{1}{\langle N_{coll} \rangle} \frac{dN_{AA}}{dN_{pp}}, \qquad (1)$$

где dN_{AA}, dN_{pp} – выходы адронов в (A + A)- и (p + p)-столкновениях, соответственно; $\langle N_{coll} \rangle$ – среднее число парных неупругих нуклон-нуклонных столкновений в данном классе центральности (A + A)-взаимодействий.

Выход частиц в (A + A)-столкновениях обычно измеряется в виде зависимости от их поперечного импульса и центральности столкновений. Центральность измеряется в процентах и определяет прицельный параметр и степень перекрытия налетающих друг на друга ядер [8]. Столкновения с малым прицельным параметром и центральностью в диапазоне 0 – 20 % характеризуются большой множественностью частиц и называются центральными столкновениями. В периферических столкновениях с центральностью в интервале 60 – 80 % участвует лишь малая часть нуклонов взаимодействующих ядер.

Измерение выхода K_S-мезонов проводится в канале $K_S \to \pi^0\pi^0$. Дочерние частицы распада K_S-мезонов (π^0-мезоны) измерены ранее в работе [9]. В состав K_S-мезонов входят странные кварки, что позволяет изучать особенности рождения легких мезонов в зависимости от кваркового состава исследуемых частиц при сравнении факторов ядерной модификации K_S-, π^0- и η-мезонов [9]. Различие масс K_S-, π^0- и η-мезонов [9] позволяет изучать эффект гашения струй в зависимости от массовой составляющей исследуемых частиц.

Система сталкивающихся ядер урана-238 (U + U) при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 192 ГэВ представляет особый интерес для исследования эффекта гашения адронных струй. Ядра урана обладают ярко выраженной сферической асимметрией, в результате чего в столкновениях этих ядер реализуется особая геометрия столкновений, отличная от таковой для симметричных ядер (например, ядер золота или меди). Кроме того, ядра урана являются самыми тяжелыми среди используемых в экспериментах на коллайдерах: в их столкновениях реализуется самая большая плотность энергии и, как следствие,

самая высокая множественность частиц среди всех (A + A)-систем в данном диапазоне энергий [10]. Таким образом, исследование особенностей рождения нейтральных легких мезонов в (U + U)-столкновениях при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ является важной частью систематического изучения эффекта гашения адронных струй и позволит провести дополнительную дискриминацию свободных параметров различных моделей, описывающих потери энергии жестких партонов в кварк-глюонной плазме.

В настоящей статье представлены результаты изучения эффекта гашения струй при рождении π^0-, η-, K_S-мезонов в столкновениях ядер урана при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ.

Методика исследования

Сбор первичных данных о столкновениях ядер урана при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ осуществлен с помощью спектрометра PHENIX на коллайдере RHIC (Брукхейвенская национальная лаборатория, США) в 2012 году. Значения центральности и координаты вершины вдоль оси движения пучков (z_{vert}) для каждого взаимодействия ядер урана определяются с помощью системы счетчиков ядро-ядерных столкновений (BBC – beam-beam counter) [11]. Счетчики BBC определяют триггер Minimum Bias (MB), отбирающий все события ядро-ядерных столкновений, в которых произошло хотя бы одно неупругое нуклон-нуклонное взаимодействие. При этом координата z_{vert} лежит в диапазоне: $|z_{vert}| < 20$ см. Отклик BBC в совокупности с моделированием работы спектрометра методом Монте-Карло по теории Глаубера [12] используется для определения среднего числа столкновений N_{coll} и среднего числа нуклонов-участников ядро-ядерного взаимодействия $\langle N_{part}\rangle$.

Легкие K_S-, π^0- и η-мезоны регистрируются в каналах $K_S \to \pi^0\pi^0$ (BR = 30,69 ± 0,05 %), $\pi^0 \to \gamma\gamma$ (BR = 98,82 ± 0,03 %) и $\eta \to \gamma\gamma$ (BR = 72,12 ± 0,34 %) [10] в системе электромагнитных калориметров спектрометра PHENIX, описание геометрии и характеристик которой представлены в работе [13]. Для улучшения отношения уровня сигнала к фону используется ряд кинематических ограничений. В частности, ограничения на минимальную энергию E_γ и асимметрию энергии фотонов, соответственно, составляют

$$E_\gamma > 400 \text{ МэВ и } \frac{|E_{\gamma 1} - E_{\gamma 2}|}{E_{\gamma 1} - E_{\gamma 2}} < 0{,}8.$$

Методика измерения выхода π^0- и η-мезонов в столкновении ядер урана при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ описана в работах [8, 14].

Для формирования частиц-кандидатов на роль π^0-мезонов (далее π^0-кандидатов) в распаде $K_S \to \pi^0\pi^0$ инвариантная масса пары γ-квантов должна находиться в диапазоне 1,5σ (σ – среднеквадратичное отклонение) от измеренных значений массы π^0-мезонов в зависимости от их поперечного импульса, а также в одном и том же плече спектрометра PHENIX. Пара γ-квантов должна иметь суммарный импульс в диапазонах

$$2 < p_T < 11 \text{ и } 2 < p_T < 14 \text{ ГэВ}/c$$

в подсистемах PbSc и PbGl [13] электромагнитного калориметра, соответственно. Для всех пар γ-квантов, отобранных в качестве π^0-кандидатов, применяется дополнительная коррекция для приведения массы π^0-кандидата к табличному значению $m_{tabl.}$ = 134,977 МэВ, что позволяет значительно увеличить отношение уровня сигнала к фону в распределениях по инвариантной массе пар $\pi^0\pi^0$.

Распределения по инвариантной массе пар π^0-кандидатов, используемые для определения выхода K_S-мезонов, формируются в различных диапазонах поперечного импульса и классах центральности и аппроксимируются суммой функции Гаусса (описывает сигнал со стороны K_S-мезонов) и параболы (описывает фон). Значение выхода K_S-мезонов определяется площадью под кривой функции Гаусса.

Для учета ограниченности аксептанса детекторной установки, эффектов ее работы и используемых в анализе кинематических ограничений, значения выходов K_S-мезонов корректируются с помощью величины эффективности регистрации. Вычисление этой величины для K_S-мезонов производится с помощью моделирования установки методом Монте-Карло с помощью программного пакета GEANT 3 [15].

Измерение инвариантных выходов K_S-мезонов в столкновениях ядер урана при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ в различных диапазонах поперечного импульса и классах центральности производится с помощью

формулы, используемой при исследовании рождения π^0-мезонов [8].

Основной систематической погрешностью при измерении выхода K_S-мезонов, рожденных в столкновении ядер U + U, является погрешность, связанная с выбором параметров аппроксимации распределений по инвариантной массе: определением диапазона аппроксимации, диапазона интегрирования сигнала и степени полинома при аппроксимации. Погрешность составляет 15,0 – 22,5 % в разных интервалах поперечного импульса и в разных классах центральности столкновений. Также существенный вклад в систематическую погрешность измерений вносят процессы конверсии γ-квантов в материалах детектора (10,4 %).

Результаты и их обсуждение

Инвариантные спектры рождения K_S-мезонов по поперечному импульсу в столкновениях ядер урана (U + U) при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ представлены на рис. 1. Спектры измерены в четырех классах центральности и в широком диапазоне поперечного импульса: до 11 ГэВ/с в центральных столкновениях.

Сравнение факторов ядерной модификации K_S-мезонов, рожденных в столкновении ядер урана (U + U) при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ, золота (Au + Au) [16] и меди (Cu + Cu) [17] при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 200 ГэВ, при равном числе парных неупругих нуклон-нуклонных столкновений $\langle N_{coll}\rangle$ показаны на рис. 2. Значения $\langle N_{coll}\rangle$ для каждой системы сталкивающихся ядер и каждого класса центральности приведены в таблице. Факторы ядерной модификации K_S-мезонов вычислены в соответствии с формулой (1).

При всех рассматриваемых значениях $\langle N_{coll}\rangle$ значения фактора ядерной модификации K_S-мезонов, измеренных в столкновениях ядер урана, золота и меди (U + U, Au + Au и Cu + Cu) при энергиях $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 и 200 ГэВ, совпадают в пределах погрешности измерений. Подобное поведение факторов ядерной модификации наблюдалось при исследовании выходов частиц (π^0-мезонов), в состав которых не входил *s*-кварк [9], что свидетельствует о независимости проявления эффекта гашения струй от геометрической формы сталкивающихся ядер и кваркового состава исследуемых легких мезонов среди (U + U)-, (Au + Au)- и (Cu + Cu)-столкновений при энергиях $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 и 200 ГэВ.

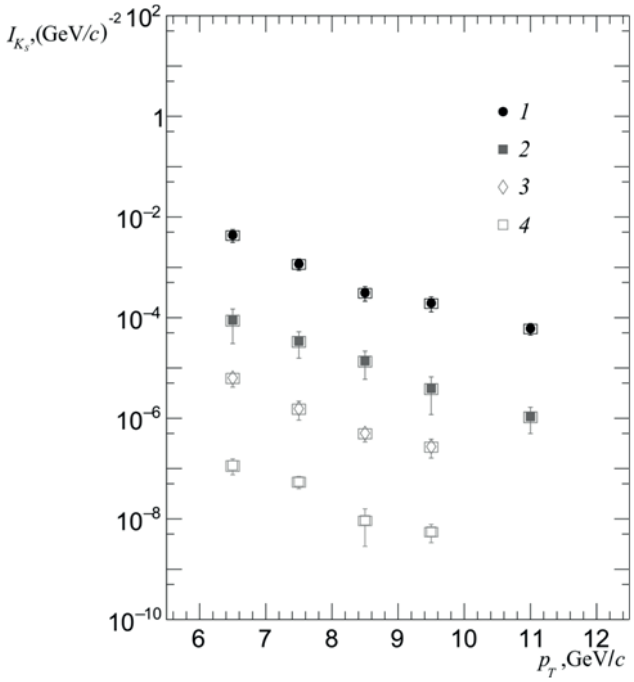


Рис. 1. Инвариантные спектры рождения K_S-мезонов по поперечному импульсу, измеренные в столкновении ядер урана при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ для различных классов центральности, %: 0 – 80 (*1*), 0 – 20 (*2*), 20 – 40 (*3*), 40 – 80 (*4*).

Здесь и далее условные обозначения на точках в виде вертикальных «усов» и серых горизонтальных «прямоугольников» отвечают статистическим и систематическим погрешностям измерений соответственно

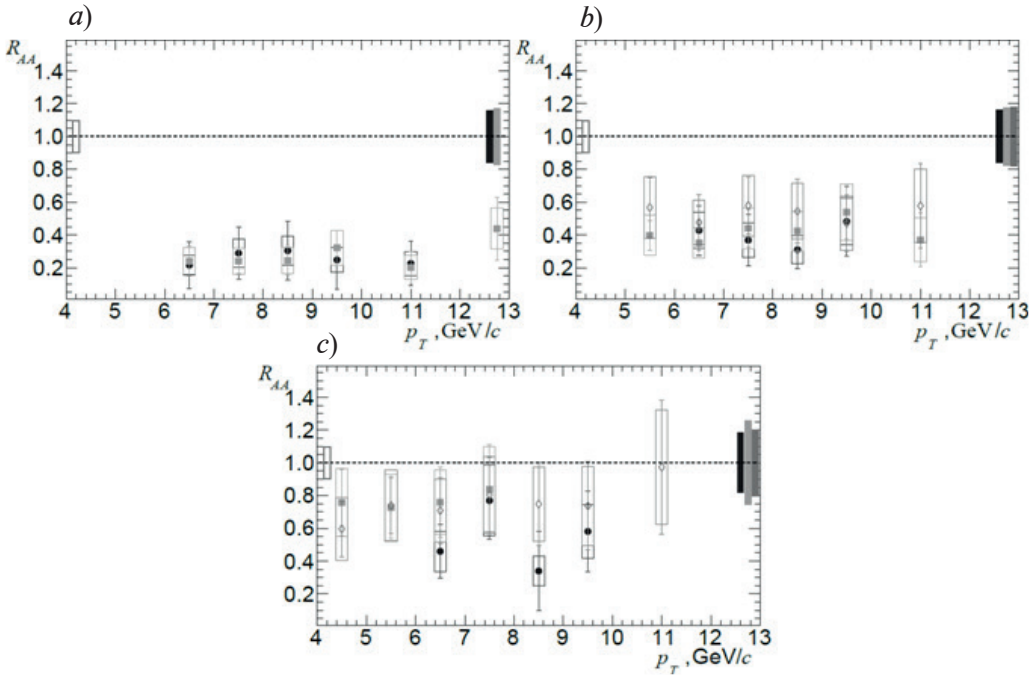


Рис. 2. Зависимости величины фактора ядерной модификации R_{AA} от поперечного импульса p_T для K_S-мезонов в (U + U)-взаимодействиях (закрашенные круглые маркеры), (Au+Au)-взаимодействиях (закрашенные квадратные маркеры) и (Cu + Cu)-взаимодействиях (ромбовидные маркеры) [16, 17] при значениях энергии 192 и 200 ГэВ соответственно (см. таблицу).

Прямоугольники против пунктирных линий указывают величину систематической погрешности N_{coll}

Таблица

Значения числа столкновений N_{coll} в зависимости от их центральности для различных типов взаимодействий (см. рис. 2)[16, 17, 19]

Центральность, %	N_{coll}	Рис.2
Au + Au, 200 ГэВ		
0 – 20	783,2 ± 71,4	*a*)
20 – 60	300,8 ± 32,6	*b*)
60 – 93	14,5 ± 2,5	*c*)
Cu + Cu, 200 ГэВ		
0 – 20	151,8± 16,1	*b*)
20 – 60	42,0± 3,5	*c*)
U + U, 192 ГэВ		
0 – 20	934,5 ± 97,5	*a*)
20 – 40	335,0 ± 33,0	*b*)
40 – 80	56,7 ± 5,0	*c*)

На рис. 3 представлены сравнения факторов ядерной модификации π^0-, η- и K_S-мезонов, измеренных в столкновениях ядер U + U при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ, в различных классах по центральности.

Факторы ядерной модификации π^0-, η- и K_S-мезонов, измеренных в столкновениях ядер U + U при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ, совпадают в пределах погрешности во всем диапазоне поперечного импульса и во всех классах центральности.

Отношение выходов η- и π^0-мезонов (η/ π^0), K_S- и π^0-мезонов (K_S/π^0), измеренных в столкновениях ядер урана при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ, в различных классах центральности показаны на рис. 4.

Поведение отношений η/π^0 и K_S/π^0, измеренных в столкновениях ядер U + U при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ, не зависит от центральности и поперечного импульса в пределах систематических погрешностей. Величины отношений η/π^0 и K_S/π^0 для спектров совпадают в пределах статистической и систематической погрешностей с ранее измеренными отношениями [17, 18]. Независимость отношений η/π^0 и K_S/π^0 от системы столкновений говорит о независимости фрагментации жестких партонов от массы и кваркового состава π^0-, η- и K_S-мезонов.

На рис. 5 показаны интегральные факторы ядерной модификации π^0-, η- и K_S-мезонов, рожденных в столкновении ядер урана, золота и меди при энергиях $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 и 200 ГэВ [8, 14, 16 – 18]. Поведение зависимостей интегральных факторов ядерной модификации π^0-, η- и K_S-мезонов, рожденных в столкновениях ядер U + U, от $\langle N_{part}\rangle$, не отличается, в пределах систематической погрешности, от поведения интегральных факторов ядерной модификации π^0-, η- и K_S-мезонов, рожденных в столкновениях ядер Cu + Cu и Au + Au.

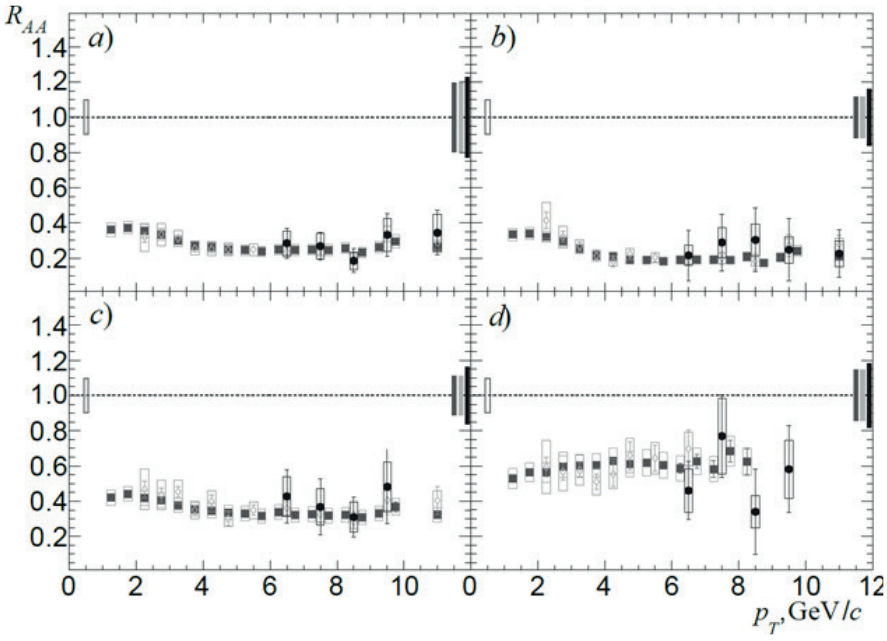


Рис. 3. Зависимости величины фактора ядерной модификации R_{AA} от поперечного импульса p_T для π^0-мезонов (квадратные маркеры), η-мезонов (ромбовидные маркеры) и K_S-мезонов (круглые маркеры) в (U + U)-взаимодействиях при значениях энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ для различных классов по центральности %:
0 – 80 (*a*), 0 – 20 (*b*), 20 – 40 (*c*), 60 – 80 для π^0- и η-мезонов и 40 – 80 для K_S-мезонов (*d*). Прямоугольники против пунктирных линий указывают величину систематической погрешности N_{coll}

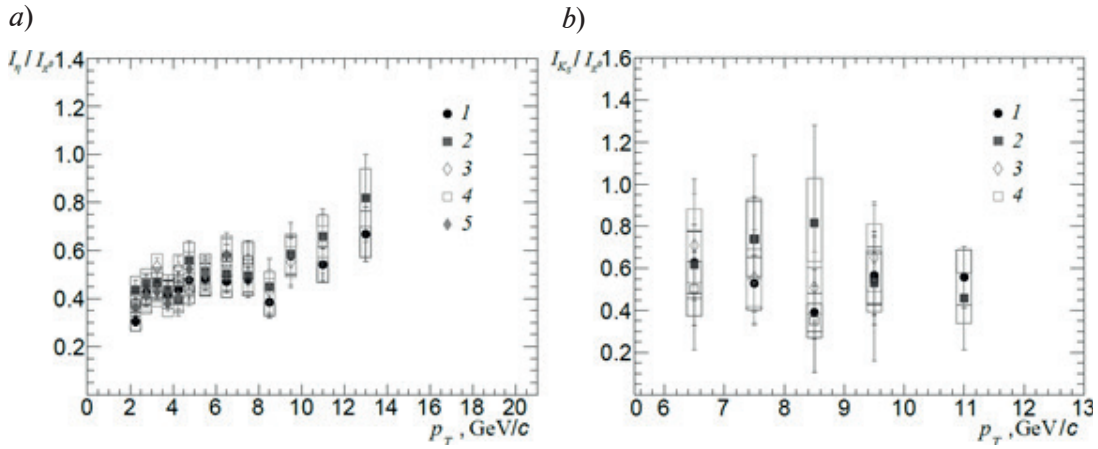


Рис. 4. Зависимости отношений спектров рождения η-мезонов к спектрам рождения π^0-мезонов (*a*) и спектров рождения K_S-мезонов к спектрам рождения π^0-мезонов (*b*), измеренных в столкновении ядер U + U при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 192 ГэВ, от поперечного импульса для различных классов по центральности, %:
0 – 80 (*1*), 0 – 20 (*2*), 20 – 40 (*3*), 40 – 60 для η/π^0 и 40 – 80 для K_S/π^0 (*4*), 60 – 80 (*5*)

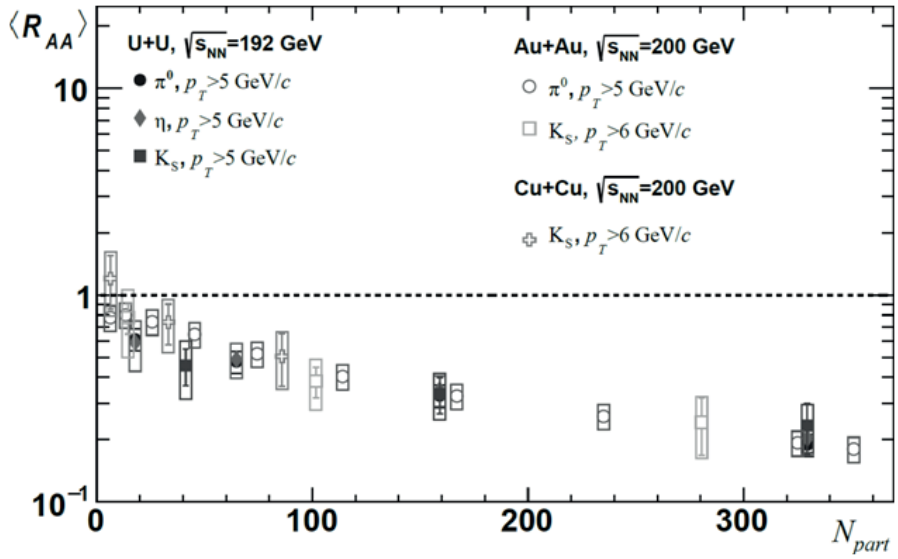


Рис. 5. Зависимости интегральных факторов ядерной модификации π^0-, η- и K_S-мезонов в столкновениях ядер U + U, Au + Au и Cu + Cu [16, 17, 19] при энергиях $\sqrt{s_{NN}}$ = 192 и 200 ГэВ от среднего числа участников столкновения $\langle N_{part} \rangle$

Заключение

В настоящей работе представлены результаты измерения инвариантных спектров рождения K_S-мезонов по поперечному импульсу в четырех классах центральности, и факторов ядерной модификации K_S-мезонов в трех классах центральности в столкновениях ядер урана (U + U) при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 192 ГэВ.

Совпадение факторов ядерной модификации K_S-мезонов, рожденных в столкновении ядер урана при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 192 ГэВ, золота и меди при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ, при равном числе средних парных неупругих нуклон-нуклонных столкновений во всем измеренном диапазоне поперечного импульса во всех классах по центральности говорит об отсутствии зависимости эффекта гашения адронных струй от формы сталкивающихся ядер. Подобное поведение факторов ядерной модификации наблюдается при изучении частиц с отличным кварковым составом (π^0- и η- мезоны) [8].

Поведение отношений η/π^0 и K_S/π^0 и интегральных факторов ядерной модификации π^0-, η- и K_S-мезонов говорит о независимости фрагментации жестких партонов

от массы и состава кварков π^0-, η- и K_S-мезонов, рождающихся в столкновениях ядер U + U при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ.

Результаты измерений, выполненных в рамках исследования (U + U)-столкновений при энергии $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 ГэВ для π^0-, η- и K_S-мезонов, говорят об отсутствии влияния геометрической формы сталкивающихся ядер на проявление эффекта гашения адронных струй.

Результаты настоящей работы были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России 3.1498.2017/4.6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Arsene I., Dearden I.G., Beavis D., et al.** Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 1–27.

2. **Back B.B., Baker M.D., Ballintijn M., et al.** The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 28–101.

3. **Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al.** Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX Collaboration // Nucl. Phys. A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 184–283.

4. **Adams J., Aggarwal M.M., Ahammed Z., et al.** Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: the STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 184–283.

5. **Sultanov R.** Jet mesurements by ALICE at LHC// Physics of Atomic Nuclei. 2015. Vol. 78. No.14. Pp. 1587–1590.

6. **Tarasov A.** Jet quenching as a probe of the phases of QCD in relativistic nuclear collisions // Phys. Rev. C. 2007. Vol. 76. No. 5. P. 054902.

7. **Betz B.** Jet quenching in relativistic heavy ion collisions // B. Eur. Phys. J.A. 2012. Vol. 48. No. 164. Pp. 1434–6001.

8. **Бердников А.Я., Бердников Я.А., Жарко С.В., Котов Д.О., Радзевич П.В.** Экспериментальные исследования рождения π-мезонов в (U + U)-взаимодействиях при энергии 192 Гэв // Известия РАН. Сер. физическая. 2018. Т. 82. № 10. С. 1391–1394.

9. **Tanabashi M., Hagiwara K., Hikasa K., et al.** Review of particle physics // Physical Review. D. 2018. Vol. 98. No. 3. P. 030001.

10. **Iordanova A.** U+U and Cu+Au results from PHENIX // Journal of Physics: Conference Series. 2013. Vol. 458. P. 012004.

11. **Allen M., Bennett M. J., Bobrek M., et al.** PHENIX inner detectors // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 549–559.

12. **Miller M.L., Reygers, K., Sanders S. J., et al.** Glauber modeling in high-energy nuclear collisions // Annual Review of Nuclear and Particle Science. 2007. Vol. 57. Pp. 205–243.

13. **Aphecetche L., Awes T.C., Banning J., et al.** PHENIX calorimeter // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 521–536.

14. **Berdnikov A.Ya., Berdnikov Ya.A., Kotov D.O., Radzevich P.V., Zharko S.V.** Nuclear modification factors of π^0 and η mesons in U+U collisions at $\sqrt{S_{NN}}$ = 192 GeV // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1135. P. 012046.

15. **Adler S.S. Afanasiev S., Aidala C., et al.** (PHENIX Collaboration). PHENIX on-line and off-line computing // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 593–602.

16. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.** (PHENIX Collaboration). Production of ω mesons in $p + p$, d + Au, Cu + Cu and Au + Au collisions at $\sqrt{S_{NN}}$ = 200 GeV // Physical Review. C. 2011. Vol. 84. No. 4. P. 044902.

17. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.** (PHENIX Collaboration). Measurement of K_{S0} and K_{*0} in $p + p$, d + Au, and Cu + Cu collisions at $\sqrt{S_{NN}}$ = 200 GeV // Physical Review. C. 2014. Vol. 90. No. 5. P. 054905.

18. **Adler S.S., et al.** (PHENIX Collaboration). High transverse momentum η meson production in $p + p$, d + Au and Au + Au collisions at $\sqrt{S_{NN}}$ = 200 GeV // Phys. Rev. C. 2007. Vol. 75. No. 2. P. 024909.

19. **Adare A., Aidala C., Ajitanand N.N., et al.** (PHENIX Collaboration). Forward J/ψ production in U+U collisions at $\sqrt{S_{NN}}$ = 193 GeV. Physical Review. C. 2016. Vol. 93. No. 3 P. 034903.

Статья поступила в редакцию 20.03.2019, принята к публикации 01.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

РАДЗЕВИЧ Павел Владиславович – *аспирант кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
radzevichp@gmail.com

БЕРДНИКОВ Александр Ярославич – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
alexber@phmf.spbstu.ru

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
berdnikov@spbstu.ru

ЖАРКО Сергей Вячеславович – *ассистент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
zharkosergey94@gmail.com

КОТОВ Дмитрий Олегович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
dmitriy.kotov@gmail.com

REFERENCES

1. **Arsene I., Dearden I.G., Beavis D., et al.,** Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 1–27.

2. **Back B.B., Baker M.D., Ballintijn M., et al.,** The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 28–101.

3. **Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al.,** Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX Collaboration, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 184–283.

4. **Adams J., Aggarwal M.M., Ahammed Z., et al.,** Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: the STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 184–283.

5. **Sultanov R.,** Jet measurements by ALICE at LHC, Physics of Atomic Nuclei. 78 (14) (2015) 1587–1590.

6. **Tarasov A.,** Jet quenching as a probe of the phases of QCD in relativistic nuclear collisions, Phys. Rev. C. 76 (5) (2007) 054902.

7. **Betz B.,** Jet quenching in relativistic heavy ion collisions, B. Eur. Phys. J.A. Ser. 48 (164) (2012) 1434–6001.

8. **Berdnikov A.Ya., Berdnikov Ya.A., Zharko S.V., et al.,** Experimental study of pion production in U + U interactions at 192 GeV, Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 82 (10) (2018) 1262–1265.

9. **Tanabashi M., Hagiwara K., Hikasa K., et al.,** Review of particle physics, Physical Review, D. 98 (3) (2018) 030001.

10. **Iordanova A.,** U+U and Cu+Au results

from PHENIX, Journal of Physics: Conference Series. 458 (Aug) (2013) 012004.

11. **Allen M., Bennett M. J., Bobrek M., et al.,** PHENIX inner detectors, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 499 (2–3) (2003) 549–559.

12. **Miller M.L., Reygers K., Sanders S.J., et al.,** Glauber modeling in high-energy nuclear collisions, Annual Review of Nuclear and Particle Science. 57 (2007) 205–243.

13. **Aphecetche L., Awes T.C., Banning J., et al.,** PHENIX calorimeter, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 499 (2–3) (2003) 521–536.

14. **Berdnikov A.Ya., Berdnikov Ya.A., Kotov D.O., et al.,** Nuclear modification factors of π^0 and η mesons in U + U collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 192 GeV, Journal of Physics: Conference Series. 1135 (2018) 012046.

15. **Adler S.S. Afanasiev S., Aidala C., et al.** (PHENIX Collaboration), PHENIX on-line and off-line computing, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 499 (2–3) (2003) 593–602.

16. **Adare A. Afanasiev S., Aidala C., et al.** (PHENIX Collaboration), Production of ω mesons in p+p, d + Au, Cu + Cu and Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV, Physical Review. C. 84 (4) (2011) 044902.

17. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.** (PHENIX Collaboration), Measurement of K_{S0} and K_{*0} in p +p, d + Au, and Cu + Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV, Physical Review. C. 90 (5) (2014) 054905.

18. **Adler S.S., Afanasiev S., Aidala C., et al.** (PHENIX Collaboration), High transverse momentum η meson production in $p + p$, d + Au, and Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV, Physical Review, C. 75 (2) (2007) 024909.

19. **Adare A., Aidala C., Ajitanand N.N., et al.** (PHENIX Collaboration), Forward J/ψ production in U+U collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 193 GeV, Physical Review. C. 93 (3) (2016) 034903.

Received 20.03.2019, accepted 01.04.2019.

THE AUTHORS

RADZEVICH Pavel V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
radzevichp@gmail.com

BERDNIKOV Alexander Ya.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
alexber@phmf.spbstu.ru

BERDNIKOV Yaroslav A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
berdnikov@spbstu.ru

ZHARKO Sergei V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
zharkosergey94@gmail.com

KOTOV Dmitry O.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
dmitriy.kotov@gmail.com

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

DOI: 10.18721/JPM.12210
УДК 539.12

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РОЖДЕНИИ ПАР АДРОННЫХ СТРУЙ В ПРОТОН-ПРОТОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

А.Ю. Егоров, Я.А. Бердников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе проанализированы возможности поиска эффектов эволюции Балицкого – Фадина – Кураева – Липатова (БФКЛ) на будущих протон-протонных коллайдерах при максимальных энергиях в системе центра масс протонов 14, 27 и 100 ТэВ в процессах рождения пар адронных струй с большим разделением по быстроте между струями в паре. Выполнено моделирование протон-протонных столкновений в программных пакетах Монте-Карло, основанных на эволюции Докшицера – Грибова – Липатова – Альтарелли – Паризи PYTHIA8 и HERWIG++, а также в программном паз кете HEJ+ARIADNE, основанном на приближении БФКЛ. Результаты моделирования указали на перспективность экспериментального обнаружения эффектов БФКЛ при условиях, созданных на будущих протон-протонных коллайдерах.

Ключевые слова: квантовая хромодинамика, приближение БФКЛ, рождение пар адронных струй, большая быстрота

Ссылка при цитировании: Егоров А.Ю., Бердников Я.А. Асимптотические эффекты при рождении пар адронных струй в протон-протонных столкновениях при сверхвысоких энергиях // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 121–129. DOI: 10.18721/JPM.12210

ASYMPTOTIC EFFECTS IN DIJET PRODUCTION IN PROTON-PROTON COLLISIONS AT EXTREMELY HIGH ENERGIES

A.Yu. Egorov, Ya.A. Berdnikov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, the scope for the search of the Balitsky–Fadin–Kuraev–Lipatov (BFKL) evolution effects at future proton-proton colliders at center-of-mass energies of 14, 27 and 100 TeV has been analyzed for processes of dijets production with a large jet separation in rapidity at a dijet. Simulation of proton-proton collisions using Monte Carlo calculations performed with generator packages PYTHIA8 and HERWIG++ based on Dokshitzer–Gribov–Lipatov–Altarelli–Parisi evolution and with generator package HEJ+ARIADNE based on BFKL approach was carried out. The simulation observations pointed to a promise to reveal the BFKL effects experimentally under conditions established at future proton-proton colliders.

Keywords: quantum chromodynamics, BFKL approach, dijet production, large rapidity

Citation: Egorov A.Yu., Berdnikov Ya.A., Asymptotic effects in dijet production in proton-proton collisions at extremely high energies, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 121–129. DOI: 10.18721/JPM.12210

Введение

Жесткие столкновения адронов при предельно высокой энергии системы центра масс ($\sqrt{s} \to \infty$), большом переданном импульсе ($Q \to \infty$) и фиксированном отношении $Q/\sqrt{s} \sim x$ (данный предел носит название предела Бъеркена, а x – скейлинговая переменная), описываются в терминах пертурбативной квантовой хромодинамики в рамках коллинеарной факторизации. Последняя обеспечивает факторизацию адрон-адронного сечения на жесткий подпроцесс и партонные функции распределения. Этот кинематический режим требует суммирования диаграмм, усиленных большими логарифмами переданного импульса, а именно – членов пертурбативного ряда, пропорциональных величине

$$(\alpha_s(Q^2)\ln Q^2)^n,$$

где $\alpha_s(Q^2)$ – бегущая константа сильного взаимодействия, n – порядок члена пертурбативного ряда.

Такое суммирование во всех порядках теории возмущений достигнуто в главном логарифмическом приближении (ГЛП) в уравнениях эволюции Докшицера – Грибова – Липатова – Альтарелли – Паризи (ДГЛАП) [1 – 5], описывающих эволюцию партонных функций распределения с масштабом Q. Суммирование членов, пропорциональных $[\alpha_s(Q^2)]^n[\ln Q^2]^{n-1}$, приводит к уравнениям ДГЛАП в логарифмическом приближении, следующим за ГЛП (СГЛП).

Рассеянный в жестком подпроцессе партон испускает тормозное излучение, формирующее партонный ливень. Партонный ливень также можно описать в разных логарифмических приближениях функций расщепления ДГЛАП. Излучающиеся партоны упорядочены по поперечному импульсу $p_\perp$, оставаясь при этом одного порядка по быстроте y:

$$y = 1/2\ln[(E + p_z)/(E - p_z)],$$

где E – энергия партона, p_z – продольный импульс (импульс вдоль пучка сталкивающихся адронов).

Партонный ливень и адронизация приводят к образованию адронных струй. Инклюзивное рождение адронных струй хорошо согласуется с расчетами в рамках подхода ДГЛАП в СГЛП в широком диапазоне поперечных импульсов, причем для всех экспериментально доступных на сегодняшний день энергий, которые достигаются на ускорителях HERA (DESY, Германия), Теватрон (Fermilab, США) и Большом адронном коллайдере (LHC, CERN, Швейцария). Однако согласие с экспериментом становится хуже, когда адронные струи сильно разделены по быстроте [6].

Когда энергия столкновения системы центра масс $\sqrt{s}$ стремится к бесконечности, т. е. намного превышает конечный масштаб жесткого взаимодействия Q, так что $Q/\sqrt{s} \sim x \to 0$ (предел Редже – Грибова), жесткие партоны рассеиваются под большими быстротами y, и при этом излучение партонов быстро растет с увеличением фазового пространства, доступного по быстроте. Такая динамика обусловлена диаграммами, усиленными большими логарифмами:

$$\ln s \sim \ln(1/x).$$

Суммирование этих логарифмов достигнуто в ГЛП- и СГЛП-приближениях в уравнениях эволюции Балицкого – Фадина – Кураева – Липатова (БФКЛ) [7 – 9].

Поиски эволюции БФКЛ в процессах рождения адронных струй в протон-протонных столкновениях, ранее были выполнены на Теватроне в эксперименте D0 [10 – 12] для энергий $\sqrt{s} = 630$ и 1800 ГэВ, а также на LHC в экспериментах ATLAS [13, 14] и CMS [6, 15 – 17] для энергии системы центра масс $\sqrt{s} = 7$ ТэВ, достигнутой в фазе Run I работы LHC. В то время как эволюция ДГЛАП хорошо подтверждается в эксперименте в бъеркеновском пределе (большие энергии системы центра масс и большие переданные импульсы), эксперименты по поиску эволюции БФКЛ, которая должна доминировать в полужестких процессах (большие энергии системы центра масс и умеренные значения передачи импульса), дают неопределенный результат. Это обусловлено несколькими причинами. Одна из них – это отсутствие генератора Монте-Карло, выполняющего расчет эволюции БФКЛ в СГЛП, а также отсутствие генератора, выполняющего чистый расчет в приближении ДГЛАП. Существующие генераторы Монте-Карло, основанные на уравнениях ДГЛАП, включают в себя феноменологические модельные поправки, частично эмулирующие эффекты БФКЛ, такие как явления цветовой когерентности, углового упорядочения в партонном

каскаде и дипольного партонного ливня. Дополнительной неопределенностью при поиске проявлений эволюции БФКЛ является теоретическая неопределенность в энергетическом масштабе $\sqrt{s_0}$, на котором эффекты БФКЛ становятся доминирующими. Поэтому для поиска таких эффектов необходимы энергии, максимально доступные в эксперименте.

В настоящей работе с помощью моделирования Монте-Карло рассматриваются возможности поисков эффектов БФКЛ на будущих планируемых адронных коллайдерах при максимальных энергиях системы центра масс, а именно при значении $\sqrt{s}$ =14 ТэВ. Это номинальная энергия Большого адронного коллайдера (LHC), на которую он должен выйти в фазе Run III. Представляют также интерес значения $\sqrt{s}$ = 27 и 100 ТэВ, это соответственно энергии планируемого HE-LHC (High Energy – Large Hadron Collider) [18] и планируемого FCC (Future Circular Collider) [19].

Использованные генераторы Монте-Карло

В настоящей работе для моделирования столкновений протонов использовались генераторы Монте-Карло, основанные как на эволюции ДГЛАП, так и на эволюции БФКЛ. К первым из указанных относятся генераторы PYTHIA8 (8153) [20] с наборами настроек 4C [21], а также HERWIG++ (2.7.1) [22] с набором настроек UE-EE3C [23]. Они выполняют расчет матричных элементов в лидирующем порядке теории возмущений, уточненный благодаря учету партонного ливня в ГЛП уравнений ДГЛАП. Различие между генераторами PYTHIA8 и HERWIG++ состоит в том, что они используют разные феноменологические модели для моделирования партонного ливня и адронизации.

Для выполнения задач настоящей работы важно, что в этих генераторах по-разному реализованы эффекты цветовой когерентности в партонном каскаде, частично эмулирующие эволюцию БФКЛ:

в PYTHIA8 используется *дипольный* каскад, упорядоченный по *поперечному импульсу*;

в HERWIG++ применяется *партонный* каскад, упорядоченный по *углу*.

Указанные эффекты лишь частично учитывают динамику БФКЛ. Расчет методом Монте-Карло, основанный на ГЛП уравнений БФКЛ, выполнен генератором HEJ (1.4.0) [24] на партонном уровне. Адронизация же партонного уровня произведена генератором ARIADNE (4.12J01) [25]. Предсказания, основанные на ГЛП уравнений БФКЛ, будут далее обозначаться HEJ+ARIADNE.

Результаты расчетов с помощью генераторов Монте-Карло дают предсказания на адронном уровне. Адроны в конечном состоянии могут формировать струи, несущие информацию о партонном подпроцессе. Для восстановления адронных струй наилучшими считаются инфракрасно- и коллинеарно-безопасные кластерные алгоритмы, к числу которых относится анти-kT алгоритм [26]. В настоящей работе используется этот алгоритм, который реализован в программном пакете FASTJET [27]. Значение параметра размера струи было выбрано равным 0,5 в пространстве псевдобыстроты и азимутального угла φ. Псевдобыстрота – безразмерная физическая величина:

$$\eta = -\ln[\mathrm{tg}(\theta/2)],$$

где θ – полярный угол.

Выбранное значение параметра соответствует использованному при измерениях на LHC при энергии системы центра масс $\sqrt{s}$ = 7 ТэВ [15].

Наблюдаемые, чувствительные к эффектам БФКЛ

Одной из основных трудностей обнаружения эффектов БФКЛ является выбор величины, возможной и удобной для измерения. В работе [28] показано, что в столкновении протонов измерение сечения процесса рождения пар адронных струй с большим разделением по быстроте является чувствительным к эффектам БФКЛ. При этом пара адронных струй, обладающих наибольшей и наименьшей быстротами ($y_{\max}$ и $y_{\min}$), среди адронных струй, рожденных в протон-протонном столкновении, с поперечными импульсами свыше определенного порога ($p_\perp \geq p_{\perp\min}$), называется парой струй Мюллера – Навеле (МН). В этом исследовании приближение БФКЛ было использовано, чтобы рассчитать величину отношения сечения рождения МН-пары адронных струй к борновскому сечению (K-фактор МН).

Следует отметить, что K-фактором называется отношение сечения, рассчитанного в высших порядках теории возмущений, к борновскому сечению. Но измерение бор-

новского сечения практически не осуществимо, так как невозможно кинематически запретить виртуальные поправки. Однако вместо борновского сечения можно измерять «эксклюзивное» двухструйное сечение, т. е. сечение процесса рождения строго двух струй с поперечными импульсами выше порога $p_{\perp\min}$.

В работе [29] был рассчитан инклюзивный K-фактор в рамках теории БФКЛ, т. е. отношение инклюзивного сечения рождения пар адронных струй к борновскому сечению. В инклюзивном сечении рождения пар адронных струй все струи с поперечными импульсами выше порога $p_{\perp\min}$ дают попарный вклад в сечение. Измерение инклюзивного сечения рождения пар адронных струй может быть предпочтительным перед МН-сечением, так как при большой энергии системы центра масс, МН-пара может оказаться за пределами аксептанса детектора по быстроте [29].

Следует отметить, что при поиске эффектов БФКЛ необходимо обеспечить как можно более высокую энергию системы центра масс, и при этом как можно низкое значение порога по поперечному импульсу $p_{\perp\min}$. В эксперименте измерение поперечного импульса струй ограничено снизу. Еще одно требование предъявляется к детектору: необходима его способность регистрировать адронные струи при больших быстротах, что связано с малыми углами относительно сталкивающихся пучков. Так, в измерениях ATLAS [13, 14] регистрировались двухструйные наблюдаемые, чувствительные к эффектам БФКЛ, для среднего поперечного импульса пары

$$\langle p_\perp \rangle = (p_{\perp 1} + p_{\perp 2})/2 > 50(60) \text{ ГэВ}$$

при интервалах быстроты между струями до

$$\Delta y = |y_1 - y_2| = 6(8),$$

где y_1, y_2 – быстроты адронных струй в паре.

В то же время в эксперименте CMS [15 – 16] измерялись пары адронных струй с поперечным импульсом $p_\perp \geq 35$ ГэВ и интервалом быстроты до $\Delta y = 9{,}4$. Таким образом, измерения CMS более чувствительны к возможным эффектам БФКЛ.

В работе [16] сотрудниками коллаборации CMS измерены величины R^{incl} и R^{MN} – отношения сечений рождения пар адронных струй в протон-протонных столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ в системе центра масс как функции разделения по быстроте Δy:

$$R^{incl} = \sigma^{incl}/\,\sigma^{excl},\ R^{\mathrm{MN}} = \sigma^{\mathrm{MN}}/\,\sigma^{excl}, \qquad (1)$$

где σ^{incl} – инклюзивное сечение рождения пар струй с поперечным импульсом струй $p_\perp \geq 35$ ГэВ; σ^{excl} – «эксклюзивное» сечение рождения пары струй; σ^{MN} – МН-сечение рождения пар струй (МН-пара – это максимально разделенная по быстроте пара среди струй с поперечным импульсом $p_\perp \geq 35$ ГэВ, рожденных в событии).

События, имеющие только одну пару струй с поперечным импульсом струй $p_\perp \geq 35$ ГэВ, дают вклад в «эксклюзивное» сечение. В эксперименте CMS [15] было проведено сравнение результатов измерения с предсказаниями Монте-Карло. Для получения этих предсказаний были использованы такие же генераторы, какие мы применяли в настоящей работе. Авторами работы [15] было показано, что генератор PYTHIA8 (4C) адекватно описывает экспериментальные данные, тогда как HERWIG++ (UE-EE3C) их переоценивает в области больших быстрот. Что же касается генератора HEJ+ARIADNE, то он значительно переоценивает экспериментальные данные. Однако известно, что ГЛП БФКЛ предсказывает чересчур сильный рост сечений. Следовательно, важным становится учет вклада СГЛП БФКЛ, который, как известно, замедляет рост сечений.

Результаты расчетов и их обсуждение

В настоящей работе проведены прогностические расчеты величин (1) методом Монте-Карло как функций интервала быстроты $\Delta y = |y_1 - y_2|$, (y_1, y_2 – быстроты первой и второй адронной струи в паре) в различных генераторах (см. их описание в разделе «Использованные генераторы Монте-Карло» настоящей статьи), для протон-протонных столкновений с энергиями $\sqrt{s} = 14$, 27 и 100 ТэВ, доступными для будущих коллайдеров. В расчетах были использованы модели PYTHIA8 (4C) и HERWIG++ (UE-EE3C), выполняющие вычисления матричных элементов в лидирующем порядке теории возмущений с учетом партонного ливня в ГЛП ДГЛАП, а также модели HEJ+ARIADNE, основанные на ГЛП БФКЛ. Струи восстановлены с помощью алгоритма анти-kT с параметром размера струи 0,5. Результаты расчетов приведены на рис. 1.

Полученные зависимости отношений

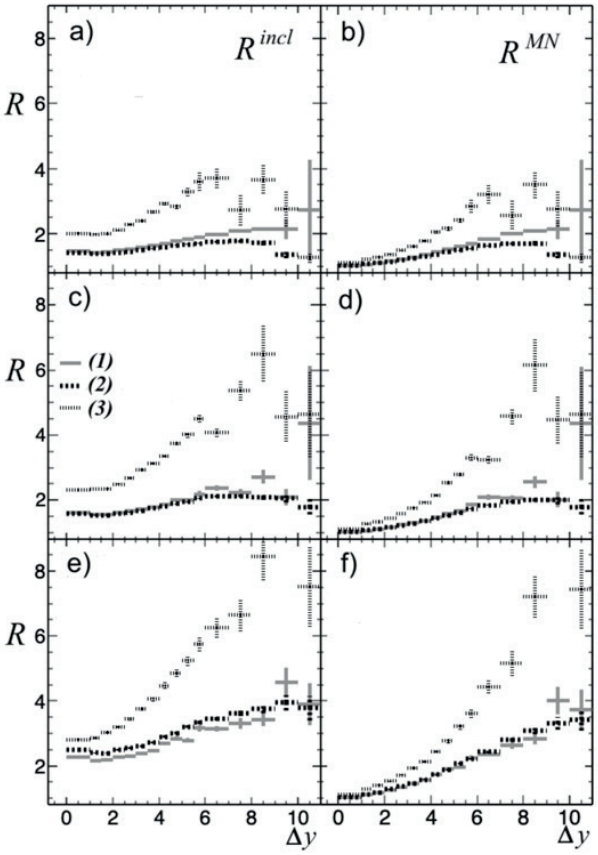


Рис. 1. Расчетные зависимости величин R^{incl} (*a*, *c*, *e*) и R^{MN} (*b*, *d*, *f*) от интервалов быстроты Δy между струями в паре, для различных энергий $\sqrt{s_{NN}}$, ТэВ: 14 (*a*, *b*), 27 (*c*, *d*), 100 (*e*, *f*). Поперечный импульс струй $p_{\perp} \geq 35$ ГэВ.
Использованы генераторы HERWIG++ (*1*), PYTHIA8 (*2*) и HEJ+ARIADNE (*3*)

сечений рождения пар адронных струй R^{incl} и R^{MN} от интервала быстроты $\Delta y = |y_1 - y_2|$ между струями в паре имеют ожидаемую форму. Наблюдается рост значений R^{incl} и R^{MN} с увеличением интервала быстроты Δy, что связано с ростом фазового пространства для излучения, а также динамическими эффектами. При самых больших интервалах быстрот наблюдается спад отношений, что связано с кинематическими ограничениями на излучение струи с поперечным импульсом выше порога $p_{\perp\min} = 35$ ГэВ, дополнительной к «эксклюзивной» паре струй. При максимальном значении Δy отношения должны стать равными единице, когда вся энергия в системе центра масс будет потрачена на рождение «эксклюзивной» пары струй.

Наблюдается увеличение доступного по Δy фазового пространства с увеличением энергии в системе центра масс. Максимум отношений смещается в сторону больших интервалов быстроты.

Результаты расчетов в генераторном пакете HEJ+ARIADNE (основан на ГЛП БФКЛ) предсказывают значительно больший рост отношений с интервалом быстроты Δy, чем таковые в генераторах PYTHIA8 и HERWIG++. Однако расчеты в ГЛП БФКЛ могут давать завышенные значения роста сечения.

Анализ результатов, полученных с помощью HEJ+ARIADNE, приводит к заключению, что в этом случае предсказывается более быстрый рост отношений с энергией $\sqrt{s}$ в системе центра масс, чем при использовании генераторов PYTHIA8 и HERWIG++. Следовательно, увеличение энергии взаимодействия делает измерения более чувствительными к эффектам БФКЛ.

Динамика уравнений ДГЛАП не имеет эволюции по быстроте. Излучение партонов (адронных струй) должно быть равновероятным во всем интервале быстрот. Следовательно, отношения сечений должны оставаться постоянными во всем ин-

тервале быстрот. Наблюдаемый рост величин, рассчитанных с помощью генераторов PYTHIA8 и HERWIG++ (основаны на ДГЛАП), может быть связан с ростом фазового пространства и с явлениями, частично эмулирующими эффекты БФКЛ, такими как цветовая когерентность, угловое упорядочение в партонном каскаде и дипольный каскад. Разница в предсказаниях, полученных с помощью генераторов PYTHIA8 и HERWIG++, обусловлена различием в реализации моделей цветовой когерентности. В первом случае реализуется дипольный каскад, упорядоченный по поперечному импульсу, а во втором – партонный каскад, упорядоченный по углу.

Полученные результаты расчетов показывают, что эти модели предсказывают различное поведение расчетных величин с ростом энергий в системе центра масс, причем в первом случае предсказывается более интенсивный рост отношений, чем во втором. Следует также отметить, что модели, учитывающие цветовую когерентность, были введены в расчеты в генераторы, основанные на ДГЛАП, с целью улучшения согласия с экспериментом в центральных по быстроте областях, т. е. туда, где расчеты характеризовались малыми поправками. Результаты моделирования продемонстрировали нестабильное поведение этих поправок при больших быстротах и энергиях в системе центра масс.

Сравнение величин отношений R^{incl} и R^{MN} между собой позволяет заключить, что первая из них всегда превышает вторую, при этом первая лежит значительно выше второй для небольших интервалов быстроты и становится соизмеримой с ней для больших. Такой результат можно объяснить тем, что МН-пары адронных струй составляют подмножество инклюзивных пар. В инклюзивное сечение рождения пар струй дают вклад как МН-пары адронных струй, так и попарные комбинации струй, лежащих в интервале быстрот между МН-струями. Как следует из полученных результатов, при сверхвысоких энергиях интервал быстрот в МН-паре может достигать значений $\Delta y > 11$. Эти события наиболее чувствительны к эффектам БФКЛ. Однако их детектирование представляет существенные экспериментальные трудности. В то же время эти события могут давать вклад в инклюзивное сечение за счет струй, рожденных вместе с МН-парой, которые упорядочены по быстроте при меньших интервалах быстрот.

Таким образом, инклюзивные сечения рождения пар адронных струй следует предпочесть при поиске эффектов БФКЛ на сверхвысоких энергиях.

Заключение

Полученные расчетные результаты моделирования указывают на перспективность экспериментального обнаружения эффектов БФКЛ при условиях, созданных на будущих протон-протонных коллайдерах.

Для получения более определенных и четких выводов относительно проявления эффектов БФКЛ, необходимо иметь чистые предсказания, основанные на эволюции ДГЛАП, без добавок, частично эмулирующих эффекты БФКЛ. Кроме того, необходимо развивать как аналитические вычисления, так и оценки методом Монте-Карло на основе эволюции БФКЛ в логарифмическом приближении, следующим за ГЛП (СГЛП).

Результаты настоящей работы были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России 3.1498.2017/4.6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Грибов В.Н., Липатов Л.Н.** Глубоко неупругое *ep*-рассеяние в теории возмущений // Ядерная физика. 1972. Т. 15. № 4. С. 781–807.

2. **Грибов В.Н., Липатов Л.Н.** Аннигиляция e^+e^--пар и глубоко неупругое *ep*-рассеяние в теории возмущений // Ядерная физика. 1972. Т. 15. № 6. С. 1218–1237.

3. **Липатов Л.Н.** Партонная модель и теория возмущений // Ядерная физика. 1974. Т. 20. № 1. С. 181–198.

4. **Altarelli G., Parisi G.** Asymptotic freedom in parton language //Nuclear Physics. B. 1977. Vol. 126. No. 2. Pp. 298–318.

5. **Докшицер Ю.Л.** Вычисление структурных функций для глубоконеупругого рассеяния и $e^+ e^-$ анигиляции в теории возмущений квантовой хромодинамики // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. № 4. С. 1216–1249.

6. **Chatrchyan S., Khachatryan V., Sirunyan A.M., et al.** Measurement of the inclusive production cross sections for forward jets and for dijet events with one forward and one central jet

in *pp* collisions at $\sqrt{s}$ = 7 TeV // Journal of High Energy Physics. 2012. Vol. 2012. No. 6. P. 36. Pp. 1–37.

7. **Кураев Е.А., Липатов Л.Н., Фадин В.С.** Мультиреджеонные процессы в теории Янга – Миллса // ЖЭТФ. 1976. Т. 43. № 3. С. 840–855.

8. **Кураев Е.А., Липатов Л.Н., Фадин В.С.** Сингулярность Померанчука в неабелевых калибровочных теориях // ЖЭТФ. 1977. Т. 72. № 2. С. 377–389.

9. **Балицкий Я.Я., Липатов Л.Н.** Сингулярность Померанчука в квантовой хромодинамике // Ядерная физика. 1978. Т. 28. № 7. С. 1597–1611.

10. **Abachi S. et al.** (D0 Collaboration). Azimuthal decorrelation of jets widely separated in rapidity // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77. No. 4. Pp. 595–600.

11. **Abbott B. et al.** (D0 Collaboration). Probing Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov dynamics in the dijet cross section at large rapidity intervals in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s}$ = 1800 and 630 GeV // Physical Review Letters. 2000. Vol. 84. No. 25. Pp. 5722–5727.

12. **Abbott B. et al.** (D0 Collaboration). Probing hard color-singlet exchange in $p\bar{p}$ collisions at root *s* = 630 GeV and 1800 GeV // Physics Letters. B. 1998. Vol. 440. No. 1–2. Pp. 189–202.

13. **Aad G. et al.** (The ATLAS Collaboration). Measurement of dijet production with a veto on additional central jet activity in *pp* collisions at $\sqrt{s}$ = 7 TeV using the ATLAS detector // Journal of High Energy Physics. 2011. Vol. 2011. No. 9. P. 53. Pp. 1–53.

14. **Aad G., Abbott B., Abdallah J., et al.** (The ATLAS Collaboration). Measurements of jet vetoes and azimuthal decorrelations in dijet events produced in *pp* collisions at root *s* = 7 TeV using the ATLAS detector // The European Physical Journal. C. 2014. Vol. 74. No. 11. P. 3117. Pp. 1–27.

15. **Chatrchyan S., Khachatryan V., Sirunyan A.M., et al.** (The CSM Collaboration). Ratios of dijet production cross sections as a function of the absolute difference in rapidity between jets in proton-proton collisions at $\sqrt{s}$ = 7 TeV // The European Physical Journal. C. 2012. Vol. 72. No. 11. Pp. 2216–2234.

16. **Khachatryan V., Sirunyan A.M., Tumasyan A., et al.** (The CSM Collaboration). Azimuthal decorrelation of jets widely separated in rapidity in *pp* collisions at $\sqrt{s}$ = 7 TeV // Journal of High Energy Physics. 2016. Vol. 2016. No. 8. P. 139. Pp. 1–40.

17. **Sirunyan A.M., Tunasyan A., Adam W., et al.** (The CSM Collaboration). Study of dijet events with a large rapidity gap between the two leading jets in *pp* collisions at $\sqrt{s}$ = 7 TeV // The European Physical Journal. C. 2018. Vol. 78. No. 3. Pp. 242–282.

18. **Zimmermann F. et al.** Future circular collider study. Vol. 4. The high energy LHC (HE-LHC). Tech. Rep. CERN-ACC-2018-0059. Geneva: CERN, 2018.

19. **Benedikt M. et al.** Future circular collider. Vol. 3. The hadron collider (FCC-hh). 2018. No. CERN-ACC-2018-0058.

20. **Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P.** A brief introduction to PYTHIA 8.1 // Computer Physics Communications. 2008. Vol. 178. No. 11. Pp. 852–867.

21. **Corke R., Sjöstrand T.** Interleaved parton showers and tuning prospects // Journal of High Energy Physics. 2011. Vol. 2011. No. 3. P. 32. Pp. 1–51.

22. **Bähr M., Gieseke S., Gigg M.A., et al.** Herwig++ physics and manual // The European Physical Journal. C. 2008. Vol. 58. No. 4. Pp. 639–707.

23. **Gieseke S., Grellscheid D., Hamilton K., et al.** Herwig++ 2.5 release note //arXiv preprint arXiv:1102.1672. 2011.

24. **Andersen J.R., Smillie J. M.,** Multiple jets at the LHC with high energy jets // Journal of High Energy Physics. 2011. Vol. 2011. No. 6. P. 10. Pp. 10–47.

25. **Lönnblad L.** ARIADNE version 4 – A program for simulation of QCD cascades implementing the color dipole model // Comput. Phys. Commun. 1992. Vol. 71. No. 1–2. Pp. 15–31.

26. **Cacciari M., Salam G.P., Soyez G.** The anti-*kt* jet clustering algorithm // Journal of High Energy Physics. 2008. Vol. 2008. No. 4. P. 63. Pp. 1–13.

27. **Cacciari M., Salam G.P., Soyez G.** FastJet user manual // The European Physical Journal C. 2012. Vol. 72. No. 3. Pp. 1896–1950.

28. **Mueller A.H., Navelet H.** An inclusive minijet cross section and the bare pomeron in QCD // Nuclear Physics. B. 1987. Vol. 282. Pp. 727–744.

29. **Kim V.T., Pivovarov G.B.** Balitskiĭ-Fadin-Kuraev-Lipatov QCD pomeron in high energy hadron collisions: Inclusive dijet production // Physical Review. D. 1996. Vol. 53. No. 1. Pp. 6–10.

Статья поступила в редакцию 20.03.2019, принята к публикации 01.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЕГОРОВ Анатолий Юрьевич – *ассистент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
egorov.a@spbstu.ru

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
berdnikov@spbstu.ru

REFERENCES

1. **Gribov V.N., Lipatov L.N.,** Deep inelastic *ep* scattering in perturbative theory, Sov. J. Nucl. Phys. 15 (4) (1972) 438–450.

2. **Gribov V.N., Lipatov L.N.,** e^+e^- pair annihilation and deep inelastic *ep*-scattering in perturbation theory, Yadern. Fiz. 15 (6) (1972) 1218–1237.

3. **Lipatov L.N.,** The parton model and perturbation theory, Sov. J. Nucl. Phys. 20 (1) (1974) 94–102.

4. **Altarelli G., Parisi G.,** Asymptotic freedom in parton language, Nuclear Physics, B. 126 (2) (1977) 298–318.

5. **Dokshitzer Y.L.,** Calculation of the structure functions for deep inelastic scattering and e^+e^- annihilation by perturbation theory in quantum chromodynamics, Journal of Experimental and Theoretical Physics. 73 (4) (1977) 1216–1240.

6. **Chatrchyan S., Khachatryan V., Sirunyan A.M., et al.,** Measurement of the inclusive production cross sections for forward jets and for dijet events with one forward and one central jet in *pp* collisions at $\sqrt{s}$ = 7 TeV, Journal of High Energy Physics. 2012 (6) (2012) 36, 1–37.

7. **Kuraev E.A., Lipatov L.N., Fadin V.S.,** Multi-reggeon processes in Yang-Milles theory, Journal of Experimental and Theoretical Physics. 43 (3) (1976) 443–443.

8. **Kuraev E.A., Lipatov L.N., Fadin V.S.,** Pomeranchuk singularity in non-Abelian gauge theories, Journal of Experimental and Theoretical Physics. 72 (2) (1977) 377–389.

9. **Balitsky I.I., Lipatov L.N.,** The Pomeranchuk singularity in quantum chromodynamics, Sov J. Nucl. Phys. 28 (7) (1978) 822–829.

10. **Abachi S. et al.** (D0 Collaboration), Azimuthal decorrelation of jets widely separated in rapidity, Physical Review Letters. 77 (4) (1996) 595–600.

11. **Abbott B. et al.** (D0 Collaboration), Probing Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov dynamics in the dijet cross section at large rapidity intervals in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s}$ = 1800 and 630 GeV, Physical Review Letters. 84 (25) (2000) 5722–5727.

12. **Abbott B. et al.** (D0 Collaboration), Probing hard color-singlet exchange in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s}$ = 630 GeV and 1800 GeV, Physics Letters, B. 440 (1–2) (1998) 189–202.

13. **Aad G., Abbott B., Abdallah J., et al.** (The ATLAS Collaboration), Measurement of dijet production with a veto on additional central jet activity in *pp* collisions at $\sqrt{s}$ = 7 TeV using the ATLAS detector, Journal of High Energy Physics. 2011 (9) (2011) 1–53.

14. **Aad G., Abbott B., Abdallah J., et al.** (The ATLAS Collaboration), Measurements of jet vetoes and azimuthal decorrelations in dijet events produced in *pp* collisions at root *s* = 7 TeV using the ATLAS detector, The European Physical Journal, C. 74 (11) (2014) 3117, 1–27.

15. **Chatrchyan S., Khachatryan V., Sirunyan A.M., et al.** (The CSM Collaboration), Ratios of dijet production cross sections as a function of the absolute difference in rapidity between jets in proton-proton collisions at $\sqrt{s}$ = 7 TeV, The European Physical Journal, C. 72 (11) (2012) 2216–2234.

16. **Khachatryan V., Sirunyan A.M., Tumasyan A., et al.** (The CSM Collaboration), Azimuthal decorrelation of jets widely separated in rapidity in *pp* collisions at $\sqrt{s}$ = 7 TeV, Journal of High Energy Physics. 2016 (8) (2016) 139, 1–40.

17. **Sirunyan A.M., Tunasyan A., Adam W., et al.** (The CSM Collaboration), Study of dijet events with a large rapidity gap between the two leading jets in *pp* collisions at $\sqrt{s}$ = 7 TeV, The European Physical Journal, C. 78 (3) (2018) 242– 282.

18. **Zimmermann F. et al.,** Future circular collider study, Vol. 4: The high energy LHC (HE-LH), Tech. Rep. CERN-ACC-2018-0059, CERN, Geneva, 2018.

19. **Benedikt M. et al.,** Future circular collider: Vol. 3: The Hadron Collider (FCC-hh), No. CERN-ACC-2018-0058, 2018.

20. **Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P.**, A brief introduction to PYTHIA 8.1, Computer Physics Communications. 178 (11) (2008) 852–867.

21. **Corke R., Sjöstrand T.,** Interleaved parton showers and tuning prospects, Journal of High Energy Physics. 2011 (3) (2011) 32, 1–51.

22. **Bähr M. et al.,** Herwig++ physics and manual, The European Physical Journal C. 58 (4) (2008) 639–707.

23. **Gieseke S. et al.,** Herwig++ 2.5 release note, arXiv preprint arXiv:1102. 1672, 2011.

24. **Andersen J.R., Smillie J.M.** Multiple jets at the LHC with high energy jets, Journal of High Energy Physics. 2011 (6) (2011) 10, 10–47.

25. **Lönnblad L.,** ARIADNE version 4 – A program for simulation of QCD cascades implementing the color dipole model, Comput. Phys. Commun. 71 (1–2) (1992) 15–31.

26. **Cacciari M., Salam G.P., Soyez G.,** The anti-*kt* jet clustering algorithm, Journal of High Energy Physics. 2008 (4) (2008) 63, 1 – 13.

27. **Cacciari M., Salam G.P., Soyez G.,** FastJet user manual, The European Physical Journal, C. 72 (3) (2012) 1896–1950.

28. **Mueller A.H., Navelet H.,** An inclusive minijet cross section and the bare pomeron in QCD, Nuclear Physics, B. 282 (1987) 727–744.

29. **Kim V.T., Pivovarov G. B.,** Balitskiĭ-Fadin-Kuraev-Lipatov QCD pomeron in high energy hadron collisions: Inclusive dijet production, Physical Review, D. 53 (1) (1996) 6–10.

Received 20.03.2019, accepted 01.04.2019.

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

Механика

DOI: 10.18721/JPM.12211
УДК 539.3

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ, ВЫХОДЯЩЕЙ ИЗ ВЕРШИНЫ ДВУХ РАЗНОРОДНЫХ КЛИНЬЕВ

В.В. Тихомиров

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В рамках антиплоской задачи рассмотрено замкнутое соединение двух различных изотропных клиньев, из вершины которого выходит трещина конечной длины под произвольным углом к оси симметрии структуры. Путем сведения проблемы к скалярному уравнению Винера – Хопфа получено ее точное решение. Изучена зависимость коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины от структурных параметров. Проанализированы эффекты увеличения и уменьшения КИН, по сравнению со случаем однородной среды. Показано, что асимптотика напряжений вблизи вершины соединения может иметь одно или два сингулярных слагаемых, определяющих как сильную, так и слабую особенности в этой особой точке.

Ключевые слова: антиплоская трещина, замкнутый биматериальный клин, сильная сингулярность, слабая сингулярность

Ссылка при цитировании: Тихомиров В.В. Точное решение задачи для трещины, выходящей из вершины двух разнородных клиньев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 130–139. DOI: 10.18721/JPM.12211

THE EXACT SOLUTION OF THE PROBLEM ON A CRACK EMERGING FROM THE TOP OF TWO DISSIMILAR WEDGES

V.V. Tikhomirov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

A closed connection of two different isotropic wedges has been considered within the scope of the antiplane problem. A finite-length crack emerges from the top of this connection at an arbitrary angle to the symmetry axis of the structure. The exact solution of the problem was obtained through the problem's reducing to the Wiener – Hopf scalar equation. The dependence of the stress intensity factor (SIF) at the crack tip on the structural parameters was studied. The effects of an increase and a decrease in SIF were compared with those known for the case of a homogeneous medium. It was shown that the stress asymptotics near the junction vertex could have one or two singular terms determining both strong and weak singularities at this singular point.

Keywords: antiplane crack, closed bimaterial wedge; strong singularity, weak singularity

Citation: V.V. Tikhomirov, The exact solution of the problem on a crack emerging from the top of two dissimilar wedges, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 130–139. DOI: 10.18721/JPM.12211

Введение

В неоднородных структурах часто имеются особые точки, в которых геометрические параметры и механические свойства компонент структуры претерпевают резкие изменения. Такими точками являются, например, вершины интерфейсных соединений нескольких клиновидных областей, состоящих из разных материалов. Подобные структуры могут быть замкнутыми в случае, когда все границы связаны между собой, или разомкнутыми, когда имеются вырезы. Напряжения, определяемые на основе линейной теории упругости, в угловых точках имеют неограниченный рост и, следовательно, такие точки сингулярности являются источниками инициализации трещин.

Начиная с работ М.Вильямса и Д.Б.Боджи [1, 2], исследованию упругих полей в биматериальных и многоматериальных клиньях посвящено большое число публикаций, ориентированных, в основном, на плоские задачи. Классу антиплоских проблем этого направления внимание уделено в значительно меньшей степени.

В работах [3 – 6] в рамках антиплоской задачи исследовались показатели особенности напряжений для полубесконечной трещины, упирающейся в вершину двух или трех изотропных клиньев. Установлено, что сингулярность напряжений в этой особой точке (симметричная задача) имеет степенной характер, отличный от классического, при котором показатель степени равен 0,5 [3, 6]. В несимметричном случае асимптотика напряжений вблизи вершины может содержать два сингулярных слагаемых [5, 6].

Сингулярность напряжений в вершине полубесконечной трещины продольного сдвига, расположенной в трехкомпонентной среде, имеющей функционально градиентные свойства, анализировалась в работе [7], где также отмечалось наличие двух вещественных собственных чисел, определяющих особенности упругих полей.

Трещина конечной длины, исходящая из вершины острого выреза, содержащегося в составной клиновидной области, рассматривалась в статьях [8 – 11]. При этом в работах [8, 9] было показано, что решение для анизотропных материалов структуры можно получить на основе решения, построенного для изотропного случая, с помощью линейного преобразования координат.

Оценке критической нагрузки для возникновения трещин в вершине острого выреза при его антиплоском нагружении посвящены работы [12, 13].

Однако вопрос об инициализации трещин в вершине замкнутого соединения клиновидных областей в условиях их антиплоской деформации до сих пор остается открытым.

В качестве первого шага к решению этой проблемы в настоящей работе рассматривается задача о трещине конечной длины, выходящей из вершины двух связанных клиньев, состоящих из разных материалов. Ее точное решение построено путем сведения проблемы к скалярной задаче Римана. Получено аналитическое представление для коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины и изучена его зависимость от параметров структуры.

Помимо самостоятельного значения, полученное точное решение проблемы является одним из базовых элементов анализа хрупкого разрушения структуры на основе так называемой финитной механики разрушения [14], где для плоских задач, ввиду отсутствия точных решений, использовались приближенные аналитические.

Постановка задачи и ее сведение к уравнению Винера – Хопфа

Рассмотрим прямолинейную трещину моды III длиной ε, выходящую из вершины соединения двух клиновидных областей (рис. 1). Материалы клиньев в областях Ω_k ($k = 1, 2, 3$) будем считать изотропными, однородными и имеющими модули сдвига μ_1 и μ_2 ($\mu_3 = \mu_2$). Контакт материалов предполагается идеальным. К берегам трещины приложена самоуравновешенная нагрузка $g(r)$ (r – полярный радиус).

Геометрию рассматриваемой упругой композиции удобно определять двумя параметрами: углом раствора α ($0 < \alpha < 2\pi$) области Ω_1 и углом β между направлением трещины и осью симметрии области Ω_1. Очевидно, что $|\beta| \le \pi - \alpha/2$. Изменение угла β при фиксированном значении α приводит к повороту области Ω_1 вокруг ее вершины. Таким образом, угол β характеризует взаимную ориентацию трещины и области Ω_1. Например, при $\beta = 0$ задача будет симметричной. Значениям $\beta = \pm(\pi - \alpha/2)$ соответствует интерфейсная трещина, а $\beta = \pm\, \alpha/2$ – случаи, когда трещина выходит

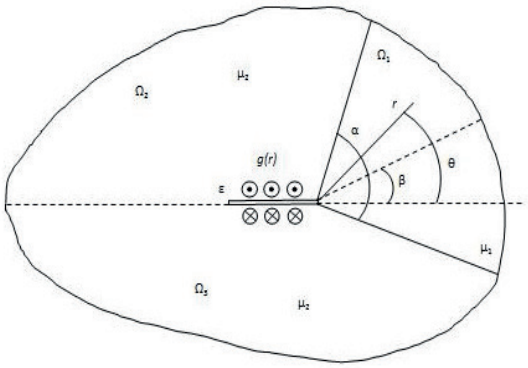


Рис. 1. Трещина, выходящая из вершины соединения двух разнородных клиньев: $g(r)$ – нагрузка на берегах трещины; μ_1, μ_2 – модули сдвига материалов; Ω_1, Ω_2, Ω_3 – клиновидные области; ε – расстояние от вершины соединения до вершины трещины; α, β – углы раствора клиньев; r, θ – полярные координаты

из вершины вдоль границ раздела фаз.

Как известно, перемещения w_k в областях Ω_k в рассматриваемом случае являются гармоническими функциями:

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_k}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_k}{\partial r}=0 \quad (k=1,2,3), \tag{1}$$

а напряжения в полярных координатах r и θ определяются формулами

$$\tau_{\theta zk}=\frac{\mu_k}{r}\frac{\partial w_k}{\partial \theta},\ \tau_{rzk}=\mu_k\frac{\partial w_k}{\partial r}.$$

Упругие поля на интерфейсах должны удовлетворять условиям совершенного контакта:

$$w_1=w_2,\ \tau_{\theta z1}=\tau_{\theta z2} \text{ при } \theta=\beta+\alpha/2, \tag{2}$$
$$w_1=w_3,\ \tau_{\theta z1}=\tau_{\theta z3} \text{ при } \theta=\beta-\alpha/2,$$

а на линии трещины – следующим смешанным условиям:

$$\tau_{\theta z2}(r,\pi)=\tau_{\theta z3}(r,-\pi)=g(r)\ (0\le r\le\varepsilon), \tag{3}$$
$$\tau_{\theta z2}(r,\pi)=\tau_{\theta z3}(r,-\pi)=\tau(r),$$
$$w_2(r,\pi)=w_3(r,-\pi)\ (\varepsilon<r<\infty). \tag{4}$$

Здесь $\tau(r)$ – неизвестная функция.

Как и в работе [15], решение задачи ищем в виде интегралов Меллина:

$$w_k(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L W_k(p,\theta)r^{-p}dp,$$
$$\tau_{\theta zk}(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L T_{\theta zk}(p,\theta)r^{-p-1}dp \quad (k=1,2,3), \tag{5}$$

где трансформанты перемещений и напряжений определяются следующими формулами:

$$W_k(p,\theta)=A_k(p)\sin p\theta+B_k(p)\cos p\theta, \tag{6}$$
$$T_{\theta zk}(p,\theta)=\mu_k p[A_k(p)\cos p\theta-B_k(p)\sin p\theta] \quad (\mu_3=\mu_2).$$

С учетом условий регулярности решения при $r\to 0$ и $r\to\infty$, контур интегрирования L расположен параллельно мнимой оси в полосе

$$-\delta_1<\operatorname{Re}p<\delta_2\ (\delta_1,\delta_2>0).$$

Смешанные условия (3) и (4) приводят к равенствам

$$T_{\theta z2}(p,\pi)=T_{\theta z3}(p,-\pi)=[T_-(p)+G_+(p)]\varepsilon^{p+1}, \tag{7}$$
$$-p[W_2(p,\pi)-W_3(p,-\pi)]=U_+(p)\varepsilon^p,$$

где

$$T_-(p)=\int_1^\infty \tau(\varepsilon\rho)\rho^p d\rho,\ G_+(p)=\int_0^1 g(\varepsilon\rho)\rho^p d\rho, \tag{8}$$
$$U_+(p)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\rho}\left[w_2(\varepsilon\rho,\pi)-w_3(\varepsilon\rho,-\pi)\right]\rho^p d\rho.$$

Функция $T_-(p)$ регулярна и не имеет нулей в левой от контура L полуплоскости Ω_-, а функции $G_+(p)$ и $U_+(p)$ – в правой полуплоскости Ω_+ [16].

Подставляя выражения (6) в левые части равенств (7) и преобразованные по Меллину условия (2), после исключения величин $A_k(p)$ и $B_k(p)$ придем к скалярному уравнению Винера – Хопфа:

$$F(p)[T_-(p)+G_+(p)]+\frac{\mu_2}{2\varepsilon}U_+(p)=0\ (p\in L). \tag{9}$$

Здесь в качестве контура L может быть взята мнимая ось, а функция $F(p)$ имеет вид

$$F(p)=f(p)/\Delta(p), \tag{10}$$
$$f(p)=2[\sin^2\pi p-m^2\sin^2(\pi-\alpha)p], \tag{11}$$
$$\Delta(p)=\sin 2\pi p+2m\sin\alpha p\cos 2\beta p-m^2\sin 2(\pi-\alpha)p. \tag{12}$$

Упругие свойства композиции отражены в этих формулах через одну биупругую постоянную

$$m=(\mu_1-\mu_2)/(\mu_1+\mu_2)=(\mu-1)/(\mu+1),$$

где $\mu=\mu_1/\mu_2$ представляет собой относительную жесткость включения ($0\le\mu<\infty$).

При всех сочетаниях модулей сдвига материалов эта величина удовлетворяет неравенству $|m|\le 1$. Если материал включения является более жестким по сравнению с

материалом матрицы, то $0 < m < 1$; в противном случае (для мягкого включения) этот параметр лежит в интервале $-1 < m < 0$. Значение $m = 0$ отвечает однородной среде, а значения $m = \pm 1$ определяют абсолютно твердое включение и клиновидный вырез.

Заметим, что нули функции (11) есть собственные числа антиплоской задачи для соединения двух клиновидных областей при симметричном и антисимметричном (относительно луча $\theta = 0$) распределениях напряжений. Нули функции (12) определяют показатели особенности напряжений в вершине полубесконечной трещины, упирающейся в упругое клиновидное включение [6].

Решение уравнения Винера – Хопфа

Факторизация коэффициента уравнения (9) осуществляется аналогично проделанной в работе [15]:

$$F(p) = pF_+(p)F_-^{-1}(p), \tag{13}$$

$$F_\pm(p) = \Phi_\pm(p)X_\pm^{-1}(p),$$

$$X_\pm(p) = \left[\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1/2+p)}\right]^{\pm 1},$$

$$\Phi_\pm(p) = \exp\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\Phi(t)}{t-p}dt\right]$$

$$(p \notin L),$$

где

$$\Phi(p) = [1 - m^2\sin^2(\pi-\alpha)\,p\sin^{-2}\pi p]\times$$
$$\times[1 + 2m\sin\alpha p\cos 2\beta p\sin^{-1}2\pi p -$$
$$- m^2\sin 2(\pi-\alpha)p\sin^{-1}2\pi p]^{-1},$$

а $\Gamma(p)$ – гамма-функция.

Отсюда с помощью формул (13) и применения теоремы Лиувилля [16] из уравнения (9), с учетом поведения слагаемых на бесконечности, получаем:

$$\Phi_-^{-1}(p)X_-(p)T_-(p) + Q_=(p) = \tag{14}$$
$$= -\frac{\mu_2}{2\varepsilon p}U_+(p)\Phi_+^{-1}(p)X_+(p) - Q_+(p) = 0,$$

где

$$Q_\pm(p) = \mp\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q(t)}{t-p}dt,$$
$$Q(t) = \frac{1}{t}X_+(t)\Phi_+^{-1}(t)F(t)G_+(t). \tag{15}$$

Тогда из равенств (14) находим:

$$T_-(p) = -\Phi_-(p)X_-^{-1}(p)Q_-(p). \tag{16}$$

Учитывая, что при $p \to \infty$

$$X_-(p) \sim \frac{1}{\sqrt{-p}},\ Q_-(p) \sim -\frac{C}{p}, \tag{17}$$
$$C = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{X_+(t)G_+(t)}{t\Phi_+(t)}F(t)dt,$$

получаем асимптотику

$$T_-(p) \sim -C\big/(i\sqrt{p}).$$

Отсюда, по теореме Абелева типа [16], заключаем, что асимптотика напряжений при $r \to \varepsilon + 0$ имеет вид

$$\tau(r) \sim -\frac{C}{i\sqrt{\pi(1-\rho)}} = C\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{r-\varepsilon}}. \tag{18}$$

Коэффициент интенсивности напряжений

Определим коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины $r = \varepsilon$ формулой

$$K_{\text{III}} = \lim_{r\to\varepsilon+0}\sqrt{2\pi(r-\varepsilon)\tau(r)}.$$

Тогда, используя асимптотику (16), получаем, что

$$K_{\text{III}}(\alpha,\beta,m,\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}C. \tag{19}$$

Пусть к берегам трещины приложены самоуравновешенные сосредоточенные силы T_0 на расстоянии r_0 от вершины соединения клиньев, т. е.

$$g(r) = T_0\delta(r - r_0),$$

где $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака, а $\varepsilon < r_0 < \infty$.

Тогда, вычисляя по формуле (8) функцию $G_+(t)$, совмещая в формуле (17) контур интегрирования с мнимой осью и используя теорему о вычетах в области Ω_+,согласно равенству (19), будем иметь:

$$K_{\text{III}} = -T_0\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_+(p_k)f(p_k)}{p_k\Phi_+(p_k)\Delta'(p_k)}\left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)^{p_k}. \tag{20}$$

Здесь штрих означает производную по переменной p, а p_k – положительные нули функции (12).

В случае геометрически симметричной структуры, когда $\beta = 0$, при некоторых значениях биупругой постоянной m ряд (20) суммируется и выражения для КИН можно представить в простой замкнутой форме. Для разных случаев они имеют следующий вид:

$$K_{\text{III}}^{0} = T_0\sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}}\sqrt{\frac{r_0/\varepsilon}{1-r_0/\varepsilon}} \qquad (21)$$

для трещины в однородной среде ($m = 0$);

$$K_{\text{III}}^{S} = T_0\sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon a}}\frac{1}{\sqrt{1-(r_0/\varepsilon)^{1/a}}}$$

для трещины, выходящей из вершины выреза ($\beta = 0$, $m = -1$);

$$K_{\text{III}}^{H} = T_0\sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon a}}\sqrt{\frac{(r_0/\varepsilon)^{1/a}}{1-(r_0/\varepsilon)^{1/a}}}$$

для трещины, выходящей из вершины абсолютно твердого включения ($\beta = 0$, $m = 1$).

В этих формулах

$$a = 1 - \alpha/(2\pi),\ r_0/\varepsilon < 1.$$

Используя формулы (20) и (21), введем в рассмотрение нормализованный коэффициент интенсивности напряжений (НКИН), характеризующий изменение КИН в неоднородной композиции, по сравнению с КИН в вершине такой же трещины, находящейся в однородной среде:

$$N = \frac{K_{\text{III}}}{K_{\text{III}}^{0}} = -\sqrt{\pi\left(1-\frac{r_0}{\varepsilon}\right)}\times \sum_{k=1}^{n}\frac{X_+(p_k)f(p_k)}{p_k\Phi_+(p_k)\Delta'(p_k)}\left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)^{p_k-0,5}. \qquad (22)$$

Корни характеристического уравнения

$$\Delta(p) = 0, \qquad (23)$$

расположенные в полосе $0 < \operatorname{Re} p < 1$, детально анализировались в работе [6]. Установлено, что в зависимости от параметров композиции α, β и m, уравнение (23) в этой полосе может иметь один корень $p_1 < 0,5$ или $p_1 > 0,5$, а также два корня:

$$0 < p_1 < 0,5 < p_2 < 1,0$$

или

$$0,5 < p_1 < p_2 < 1,0.$$

В случае симметричной структуры ($\beta = 0$) характеристическое уравнение принимает вид

$$\Delta_*(p) = \cos \pi p + m \cos(\pi - \alpha)\, p = 0$$

и имеет в интервале (0, 1) единственный корень.

При этом для $m > 0$ этот корень превышает значение 0,5, а для $m < 0$ лежит в интервале $0 < p_1 < 0,5$.

В этом случае НКИН показывает типичное поведение в зависимости от параметра m при различных значениях угла α и является монотонно убывающей функцией на всем интервале изменения биупругой постоянной (рис. 2). При этом эффект увеличения НКИН по сравнению с однородной средой наблюдается при нахождении трещины в более жестком материале, когда $\mu_2 > \mu_1$ и, следовательно, $m < 0$. Напротив,

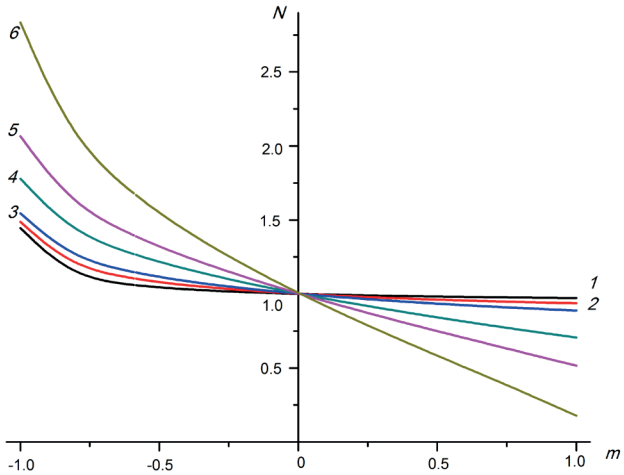


Рис. 2. Зависимости нормализованного коэффициента интенсивности напряжений (НКИН) от параметра m при $\beta = 0$ и $r_0/\varepsilon = 0,5$ для различных углов α: $\pi/4$ (*1*), $\pi/2$ (*2*), $3\pi/2$ (*3*); $3\pi/4$ (*4*), $5\pi/4$ (*5*), $7\pi/4$ (*6*)

для трещины, расположенной в относительно более мягком материале ($m > 0$) имеет место снижение НКИН. Данные эффекты становятся все более выраженными по мере возрастанием угла раствора α области Ω_1. Отсюда вытекает, что «симметричная» трещина, выходящая из вершины соединения, всегда будет распространяться в относительно более жесткой среде.

В случае структуры несимметричного строения ($\beta \neq 0$) поведение НКИН не оказывается столь однозначным. Если безразмерный параметр r_0/ε, характеризующий близость расположения нагрузки к вершине клиньев, не слишком мал, то НКИН в вершине трещины имеет в качественном плане аналогичное поведение, как и в симметричном случае. На рис. 3 показано изменение НКИН для угла $\alpha = \pi/2$ и $r_0/\varepsilon = 0{,}5$ в зависимости от величины m при различных значениях параметра асимметрии β. Приведенные данные показывают, что усиливающие и ослабляющие НКИН эффекты увеличиваются с возрастанием угла β.

Однако при $r_0/\varepsilon \to 0$ доминирующим членом ряда (22) является его первое слагаемое. Асимптотика НКИН в этом случае имеет вид

$$N \sim -\sqrt{\pi\left(1-\frac{r_0}{\varepsilon}\right)}\frac{X_+(p_1)f(p_1)}{p_1\Phi_+(p_1)\Delta'(p_1)}\left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)^{p_1-0,5}. \quad (24)$$

Отсюда вытекает, если $p_1 > 0{,}5$ и $r_0/\varepsilon << 1$, то величина $(r_0/\varepsilon)^{p_1-0,5} < 1$, что вызывает ослабляющее влияние на НКИН. Если же $p_1 < 0{,}5$, то при малых значениях относительного расстояния r_0/ε в выражении (24) множитель $(r_0/\varepsilon)^{p_1-0,5} > 1$, что приводит к усиливающему влиянию на НКИН.

Пример эффекта увеличения НКИН для малых значений r_0/ε представлен на рис. 4 для случая $\alpha = \beta = \pi/2$. При этих значениях углов первый корень уравнения (23) будет меньше 0,5 как в случае $m < 0$, так и в случае $m > 0$ [6, 15]. Анализ поведения кривых показывает, что зависимость $N(m)$ – не монотонная. Возрастание НКИН становится все более значимым по мере уменьшения приведенного расстояния r_0/ε. Кроме того, если трещина находится в более мягкой среде, то значения КИН при достаточно малом отношении r_0/ε могут превышать таковые для аналогичной трещины, расположенной в однородной среде, за счет влияния неоднородности и геометрии структуры (в противоположность симметричному случаю).

Сингулярность напряжений в вершине соединения клиньев

На основе формул (6) – (8) нетрудно получить представления для напряжений в областях Ω_j (j = 1, 2, 3):

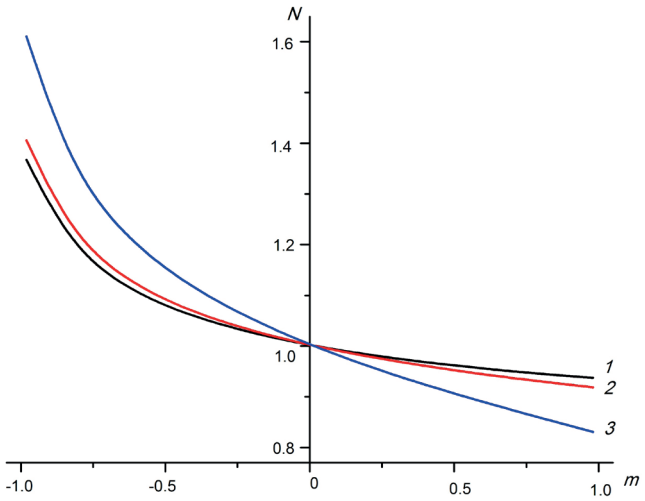


Рис. 3. Зависимости величины НКИН от параметра m при $\alpha = \pi/2$ и $r_0/\varepsilon = 0{,}5$ для различных углов β: 0 (*1*), π/4 (*2*), π/2 (*3*)

$$\tau_{\theta zj}(r,\theta)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\tau_j(p,\theta)}{\Delta(p)}\left[T_-(p)+ +G_+(p)\right]\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-p-1}dp, \quad (25)$$

где

$$\tau_j(p,\theta)=a_j(p)\cos p\theta-b_j(p)\sin p\theta;$$

$$a_1(p)=(1+m)[\sin p\pi-m\cos 2p\beta\sin p(\pi-\alpha)];$$

$$b_1(p)=(1+m)m\sin 2p\beta\sin p(\pi-\alpha);$$

$$a_n(p)=\sin p\pi+m\sin p\alpha\cos[p(\pi+ +(-1)^n 2\beta)]-m^2\cos p\alpha\sin p(\pi-\alpha);$$

$$b_n=(-1)^n m\sin p\alpha\{\sin p(\pi-\alpha)- -\sin[p(\pi+(-1)^n 2\beta]\}\ (n=2,3).$$

Подставляя в подынтегральную функцию (25) представления (15), (16) и учитывая, что трансформанта сосредоточенной нагрузки на берегах трещины имеет вид

$$G_+(p)=T_0/\varepsilon(r_0/\varepsilon)^p,$$

придем к следующему выражению для напряжений:

$$\tau_{\theta zj}(r,\theta)=\frac{T_0}{\varepsilon\pi i}\int_L \frac{\tau_j(p,\theta)}{\Delta(p)}\left[\left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)^p- -\frac{\Phi_-(p)}{X_-(p)}Q_-^*(p)\right]\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-p-1}dp, \quad (26)$$

где

$$Q_-^*(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(t)}{t(t-p)}\frac{X_+(p)}{\Phi_+(p)}\left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)^t dt.$$

В результате применения к интегралу (26) теоремы о вычетах, вычисляемых в нулях p_k функции (12), расположенных в левой от контура L полуплоскости, при $r<r_0$ получаем:

$$\tau_{\theta zj}(r,\theta)=\frac{2T_0}{r_0}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_j(-p_k,\theta)}{\Delta'(-p_k)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{p_k-1}- -\frac{r_0}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_j(-p_k,\theta)}{\Delta'(-p_k)}\frac{\Phi_-(-p_k)}{X_-(-p_k)}\times \times Q_-^*(-p_k)\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{p_k-1}\right]. \quad (27)$$

Заметим, что первая сумма в этой формуле определяет распределение напряжений в случае полубесконечной трещины, выхо-

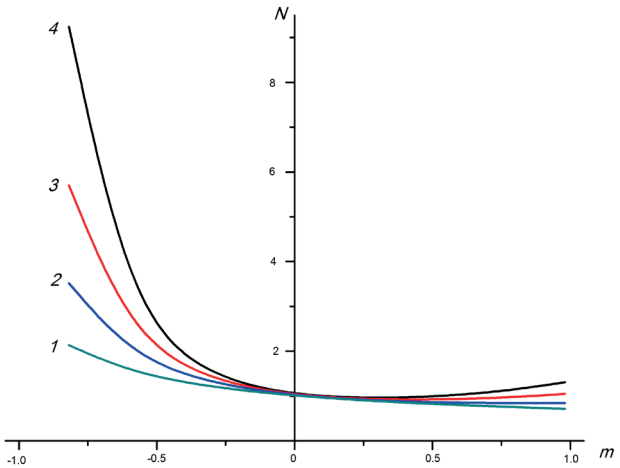


Рис. 4. Зависимости НКИН от параметра m при $\alpha=\beta=\pi/2$ для малых значений относительного расстояния r_0/ε: 0,1 (*1*); 0,01 (*2*); 0,001 (*3*); 0,0001(*4*)

дящей из вершины замкнутого соединения клиньев [6]. Вторая сумма обусловлена конечностью длины рассматриваемой трещины.

Из представления (27) вытекает, что напряжения в вершине соединения имеют степенную особенность. В зависимости от параметров структуры асимптотика напряжений при $r \to 0$ может иметь один или два сингулярных члена, определяемых корнями уравнения (23), расположенными в интервале (0, 1). При этом показатели сингулярности $\lambda_k = 1 - p_k$ ($k = 1, 2$) могут быть как больше, так и меньше значения 0,5 и, следовательно, порождать как сильную, так и слабую сингулярность в этой особой точке.

Заключение

В статье на основе интегрального преобразования Меллина и метода Винера – Хопфа получено точное решение задачи об антиплоской трещине, выходящей из вершины замкнутого соединения двух клиновидных областей. Проанализировано поведение коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины при изменении упругих свойств и геометрии структуры, которые могут вызывать эффекты увеличения или уменьшения КИН, по сравнению с однородной средой. Показано, что при отсутствии геометрической симметрии структуры, при некоторых значениях параметров композиции и сосредоточенной нагрузке, приложенной на достаточно малом расстоянии от вершины соединения, может иметь место не характерная для симметричного случая зависимость КИН от относительной жесткости материалов. В частности, КИН для трещины, расположенной в относительно более мягком материале, может превосходить КИН для такой же трещины в однородной среде. Исследована сингулярность напряжений в угловой точке соединения и показано, что эта сингулярность может быть как сильной, так и слабой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Williams M.** Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1952. Vol. 74. No. 4. Pp. 526–528.
2. **Bogy D.B.** Two edge-bonded elastic wedges of different materials wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1971. Vol. 38. No. 2. Pp. 377–386.
3. **Schovanec L.** A mode III crack problem in a bonded composite material // Eng. Fract. Mech. 1988. Vol. 31. No. 3. Pp. 437–449.
4. **Pageau S.S., Joseph P.F., Biggers S.B.** Singular antiplane stress fields for bonded and disbanded three-material junctions // Eng. Fract. Mech. 1995.Vol. 52. No. 5. Pp. 821–832.
5. **Misuris G., Kuhn G.** Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models // Archive Appl. Mech. 2001. Vol. 71. No. 11. Pp. 764–780.
6. **Тихомиров В.В.** Трещина продольного сдвига, упирающаяся в клиновидное упругое включение // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 2 (194). С. 110 – 119.
7. **Linkov A., Rybarska-Rusinek L.** Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges // Int. J. Eng. Sci. 2012. Vol. 61. No. 1. Pp. 87– 93.
8. **Beom H.G., Jang H.S.** A wedge crack in an anisotropic material under antiplane shear // Int. J. Eng. Sci. 2011. Vol. 49. No. 9. Pp. 869–880.
9. **Beom H.G., Jang H.S.** Interfacial wedge cracks in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear // Int. J. Eng. Sci. 2012. Vol. 56. No. 1. Pp. 49–62.
10. **Beom H.G., Jang H.S.** A crack emanating from a wedge in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear // Int. J. Fract. 2012. Vol. 177. No. 2. Pp. 191–198.
11. **Shen M.H., Lin C.P., Hung S.Y.** Edge crack in front of anisotropic wedge interacting with anti-plane singularity // Theor. Appl. Fract. Mech. 2012. Vol. 58. No. 1. Pp. 1–8.
12. **Trefi M., Oyadiji O.** Strain energy approach to compute stress intensity factors for isotropic homogeneous and bimaterial V-notches // Int. J. Solids Struct. 2013. Vol. 50. No. 14–15. Pp. 2196–2212.
13. **Тихомиров В.В.** Критерии разрушения острого выреза в условиях антиплоской деформации // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 99–107.
14. **Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A.** On the most dangerous V-notch // Int. J. Solids Struct. 2010. Vol. 47. No. 7–8. Pp. 887–893.
15. **Тихомиров В.В.** Трещина моды III,

приближающаяся к упругому клиновидному включению // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 2. С. 99–109.

16. **Noble B.** Method based on the Wiener – Hopf technique for solution of partial differential equations. Oxford: Pergamon Press, 1958.

Статья поступила в редакцию 15.03.2019, принята к публикации 19.03.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич – *кандидат физико-математических наук, заместитель директора по образовательной деятельности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

victikh@mail.ru

REFERENCES

1. **Williams M.,** Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech. 74 (4) (1952) 526–528.

2. **Bogy D.B.,** Two edge-bonded elastic wedges of different materials wedge angles under surface tractions, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech. 38 (2) (1971) 377–386.

3. **Schovanec L.,** A mode III crack problem in a bonded composite material, Eng. Fract. Mech. 31 (3) (1988) 437–449.

4. **Pageau S.S., Joseph P.F., Biggers S.B.,** Singular antiplane stress fields for bonded and disbanded three-material junctions, Eng. Fract. Mech. 52 (5) (1995) 821–832.

5. **Misuris G., Kuhn G.,** Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models, Archive Appl. Mech. 71 (11) (2001) 764–780.

6. **Tikhomirov V.V.,** Longitudinal shear crack terminating at a wedge-shaped elastic inclusion, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (2(194)) (2014) 110–119.

7. **Linkov A., Rybarska-Rusinek L.,** Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges, Int. J. Eng. Sci. 61 (1) (2012) 87– 93.

8. **Beom H.G., Jang H.S.,** A wedge crack in an anisotropic material under antiplane shear, Int. J. Eng. Sci. 49 (9) (2011) 869–880.

9. **Beom H.G., Jang H.S.,** Interfacial wedge cracks in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear, Int. J. Eng. Sci. 56 (1) (2012) 49–62.

10. **Beom H.G., Jang H.S.,** A crack emanating from a wedge in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear, Int. J. Fract. 177 (2) (2012) 191–198.

11. **Shen M.H., Lin C.P., Hung S.Y.,** Edge crack in front of anisotropic wedge interacting with anti-plane singularity, Theor. Appl. Fract. Mech. 58 (1) (2012) 1–8.

12. **Trefi M., Oyadiji O.,** Strain energy approach to compute stress intensity factors for isotropic homogeneous and bimaterial V-notches, Int. J. Solids Struct. 50 (14–15) (2013) 2196–2212.

13. **Tikhomirov V.V.,** Sharp V-notch fracture criteria under antiplane deformation, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 11 (3) (2018) 99–107.

14. **Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A.,** On the most dangerous V-notch, Int. J. Solids Struct. 47 (7–8) (2010) 887–893.

15. **Tikhomirov V.V.,** Mode III crack approaching to the wedge-shaped elastic inclusion, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 10 (2) (2017) 99–109.

16. **Noble B.,** Method based on the Wiener – Hopf technique for solution of partial differential equations, Pergamon Press, Oxford, 1958.

Received 15.03.2019, accepted 19.03.2019.

THE AUTHOR

TIKHOMIROV Victor V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
victikh@mail.ru

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Безпрозванный И.Б. **88**
Бердников А.С. **32, 49**
Бердников А.Я. **101, 111**
Бердников Я.А. **101, 111, 121**
Болсуновская М.В. **88**
Величко Е.Н. **73**
Власова О.Л. **88**
Галль Л.Н. **32, 49**
Галль Н.Р. **32, 49**
Галунин С.А. **23**
Егоров А.Ю. **121**
Жарко С.В. **101, 111**
Козулина Т.П. **23**
Колесник Е.В. **7**
Котов Д.О. **101, 111**
Котов Е.В. **63**
Крылов И.С. **88**
Маннанов Э.Р. **23**
Наке Б. **23**
Непомнящая Э.К. **73**
Никаноров А.Н. **23**
Петриченко М.Р. **63**
Пчицкая Е.И. **88**
Радзевич П.В. **101, 111**
Смирнов Е.М. **7**
Смирновский А.А. **7**
Соловьев К.В. **32, 49**
Тихомиров В.В. **130**

Научное издание

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

«ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL. PHYSICS AND MATHEMATICS»
ТОМ 12, № 2, 2019

Учредитель и издатель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-51457 от 19.10.2012 г.

Редакция

д-р физ.-мат. наук, профессор *В.К. Иванов* – председатель ред. коллегии
д-р физ.-мат. наук, профессор *А.Э. Фотиади* – зам. председателя ред. коллегии
канд. физ.-мат. наук, доцент *В.М. Капралова* – ответственный секретарь
канд. физ.-мат. наук *О.А. Ящуржинская* – научный редактор, корректор
А.С. Колгатина – переводчик
Н.А. Бушманова – технический секретарь

Телефон редакции 294-22-85

Сайт http://ntv.spbstu.ru

E-mail: physics@spbstu.ru

Компьютерная верстка *Н.А. Бушмановой*

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Подписано в печать 17.06.2019. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая.
Усл. печ. л.12,9 Уч.-изд. л.12,9 Тираж 1000. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного
Отделом научных изданий в Издательско-полиграфический центр
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого
Адрес университета:195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

УСЛОВИЯ ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

в журнале «Научно-технические ведомости
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.
Физико-математические науки»

1.ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Журнал «Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки» является периодическим печатным научным рецензируемым изданием. Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Свидетельство ПИ №ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.) и распространяется по подписке агентства «Роспечать» (индекс издания 71823).

С 2008 года журнал издавался в составе сериального издания "Научно-технические ведомости СПбГПУ". **Сохраняя преемственность и продолжая научные и публикационные традиции сериального издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ», журнал издавали под сдвоенными международными стандартными сериальными номерами ISSN 1994-2354 (сериальный) 2304-9782.** В 2012 году он зарегистрирован как самостоятельное периодическое издание **ISSN 2304-9782** (Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.). С 2012 г. начат выпуск журнала в двуязычном оформлении.

Издание входит в Перечень ведущих научных рецензируемых журналов и изданий (перечень ВАК) и принимает для печати материалы научных исследований, а также статьи для опубликования основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук и кандидата наук по следующим основным научным направлениям: **Физика, Математика, Механика**, включая следующие шифры научных специальностей: 01.02.04, 01.02.05, 01.04.01, 01.04.02, 01.04.03, 01.04.04, 01.04.05, 01.04.06, 01.04.07, 01.04.10, 01.04.15, 01.04.21.

Журнал представлен в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН и включен в фонд научно-технической литературы (НТЛ) ВИНИТИ РАН, а также в международной системе по периодическим изданиям «Ulrich's Periodicals Directory». Индексирован в базах данных «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ), Web of Science (Emerging Sources Citation Index).

Периодичность выхода журнала – 4 номера в год.

Редакция журнала соблюдает права интеллектуальной собственности и со всеми авторами научных статей заключает издательский лицензионный договор.

2. ТРЕБОВАНИЯ К ПРЕДСТАВЛЯЕМЫМ МАТЕРИАЛАМ

2.1. Оформление материалов

1. Рекомендуемый объем статей – 12-20 страниц формата А-4 с учетом графических вложений. Количество графических вложений (диаграмм, графиков, рисунков, фотографий и т.п.) не должно превышать шести.

2. Число авторов статьи, как правило, не должно превышать пяти человек.

3. Авторы должны придерживаться следующей обобщенной структуры статьи: вводная часть (актуальность, существующие проблемы – объем 0,5 – 1 стр.); основная часть (постановка и описание задачи, методика исследования, изложение и обсуждение основных результатов); заключительная часть (предложения, выводы – объем 0,5 – 1 стр.); список литературы (оформление по ГОСТ 7.0.5-2008).

В списки литературы **рекомендуется** включать ссылки на научные статьи, монографии, сборники статей, сборники конференций, электронные ресурсы с указанием даты обращения, патенты.

Как правило, **нежелательны** ссылки на диссертации и авторефераты диссертаций (такие ссылки допускаются, если результаты исследований еще не опубликованы, или не представлены достаточно подробно).

В списки литературы **не рекомендуется** включать ссылки на учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций, ГОСТы и др. нормативные документы, на законы и постановления, а также на архивные документы (если все же необходимо указать такие источники, то они оформляются в виде сносок).

Рекомендуемый объем списка литературы для обзорных статей – не менее 50 источников, для остальных статей – не менее 10.

Доля источников давностью менее 5 лет должна составлять не менее половины. Допустимый процент самоцитирования – не выше 10 – 20. Объем ссылок на зарубежные источники должен быть не менее 20%.

4. УДК (UDC) оформляется и формируется в соответствии с ГОСТ 7.90-2007.

5. Набор **текста** осуществляется в редакторе **MS Word.**

6. **Формулы** набираются в редакторе MathType (не во встроенном редакторе Word) (мелкие формулы, символы и обозначения набираются без использования редактора формул). **Таблицы** набираются в том же формате, что и основной текст. В тексте буква «ё» заменяется на букву «е» и оставляется только в фамилиях.

7. **Рисунки** (в формате .tiff, .bmp, .jpeg) и **таблицы** оформляются в виде отдельных файлов. Рисунки представляются только в черно-белом варианте. Шрифт – **Times New Roman**, размер шрифта основного текста – 14, интервал – 1,5. Таблицы большого размера могут быть набраны кеглем 12. Параметры страницы: поля слева – 3 см, сверху и снизу – 2 см, справа – 1,5 см. Текст размещается без переносов. Абзацный отступ – 1 см.

2.2. Представление материалов

1. Представление всех материалов осуществляется в электронном виде через электронную редакцию (http://journals.spbstu.ru). После регистрации в системе электронной редакции автоматически формируется персональный профиль автора, позволяющий взаимодействовать как с редакцией, так и с рецензентом.

2. Вместе с материалами статьи должно быть представлено экспертное заключение о возможности опубликования материалов в открытой печати.

3. Файл статьи, подаваемый через электронную редакцию, должен содержать только сам текст без названия, списка литературы, аннотации и ключевых слов, фамилий и сведений об авторах. Все эти поля заполняются отдельно через электронную редакцию.

2.3. Рассмотрение материалов

Предоставленные материалы (п. 2.2) первоначально рассматриваются редакционной коллегией и передаются для рецензирования. После одобрения материалов, согласования различных вопросов с автором (при необходимости) редакционная коллегия сообщает автору решение об опубликовании статьи. В случае отказа в публикации статьи редакция направляет автору мотивированный отказ.

При отклонении материалов из-за нарушения сроков подачи, требований по оформлению или как не отвечающих тематике журнала материалы не публикуются и не возвращаются.

Редакционная коллегия не вступает в дискуссию с авторами отклоненных материалов.

При поступлении в редакцию значительного количества статей их прием в очередной номер может закончиться ДОСРОЧНО.

Более подробную информацию можно получить по телефону редакции:
(812) 294-22-85 с 10.00 до 18.00 – Бушманова Наталья Александровна
или по e-mail: physics@spbstu.ru