

Научная статья

УДК 51-73, 537.311.5

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.19305>

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В. В. Филиппов^{1, 2} , **А. А. Ершов**^{3, 4}

¹ Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия;

² Липецкий государственный педагогический университет
имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Россия;

³ Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН,
г. Екатеринбург, Россия;

⁴ Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина,
г. Екатеринбург, Россия

 wwfilippow@mail.ru

Аннотация. Представленное исследование ставило целью выполнить качественный анализ двух решений краевых задач Неймана для ограниченной области, вычисленных с помощью метода разделения переменных. Предложенные авторские решения моделируют распределение электрического потенциала в проводящей пластине прямоугольной формы, через которую проходит постоянный ток. Рассмотрена модификация стандартных граничных условий, которая состоит в учете неравномерной плотности тока на поверхности контактов. Выполнено сопоставление результатов применения теоретических компьютерных моделей, полученных на основе решений задач Неймана и проведенных экспериментальных измерений. Показано, что вблизи токовых контактов достигается существенное повышение точности решения при использовании модифицированных граничных условий относительно стандартных; при этом в средней области образца расхождение результатов, полученных этими двумя расчетными методами, оказывается минимальным.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, задача Неймана, электрический потенциал, квазистационарный электрический ток

Для цитирования: Филиппов В. В., Ершов А. А. Анализ точности аналитических методов расчета электрических полей постоянного тока в ограниченной области // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2026. Т. 19. № 3. С. 52–62. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.19305>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.19305>

AN ANALYSIS OF THE ACCURACY OF ANALYTICAL METHODS FOR CALCULATING THE DC ELECTRIC FIELDS IN A LIMITED AREA

V. V. Filippov^{1, 2} , **A. A. Ershov**^{3, 4}

¹ Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia;

² Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia;

³ Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
Ekaterinburg, Russia;



⁴ Ural Federal University named after first president of Russia B. N. Yeltsin,
Ekaterinburg, Russia
✉ wwfilippow@mail.ru

Abstract. The presented study aimed to perform a qualitative analysis of two calculated solutions to Neumann boundary value problems for a bounded region using the partition method. The proposed author's solutions have simulated the distribution of electric potential in a rectangular conducting plate through which a direct current passes. A modification of the standard boundary conditions was considered; it involved taking into account the nonuniform current density on the contact surface. A comparison of the results of the application of theoretical computer models obtained on the basis of solutions to the Neumann problems and experimental measurements was carried out. A significant increase in the solution accuracy was shown to achieve near current contacts when using the modified boundary conditions relative to the standard ones. Moreover, the discrepancy between the results obtained by these two calculation methods in the middle region of the sample, turned out to be minimal.

Keywords: Laplace equation, Neumann problem, electric potential, quasi-stationary electric current

For citation: Filippov V. V., Ershov A. A., An analysis of the accuracy of analytical methods for calculating the DC electric fields in a limited area, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 19 (3) (2026) 52–62. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.19305>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Явления электронного переноса в металлах и полупроводниках стали за последнее время одним из основных предметов актуальных исследований в области современной твердотельной электроники и наноэлектроники [1 – 4]. При проектировании компонентной базы электроники важно правильно задавать уравнения переноса и граничные условия [2, 4]. Оптимизация математических моделей, описывающих макроскопические поля и перенос заряда, позволяет совершенствовать методики измерений свойств полупроводниковых кристаллов [5, 6], корректнее определять сопротивление контактов металл-полупроводник [7, 8]. При описании макроскопических эффектов электронного переноса в полупроводниковых материалах и устройствах применяют кинетическое уравнение Больцмана и уравнения Максвелла [9].

На сегодняшний день в литературе [10, 11] описано немалое количество разработок, относящихся к методам решений уравнений Лапласа и Пуассона для ограниченных областей, в том числе применительно к физике полупроводников и полупроводниковой электронике [12, 13].

Аналитические подходы к решению указанных дифференциальных уравнений в частных производных хорошо известны и, как правило, используют методы разделения переменных, функций Грина и конформных отображений. Однако для приложений важны частные решения при соответствующих граничных условиях, соблюдение которых делает зачастую невозможным аналитическое решение поставленных задач. В частности, известные математические трудности вызывает задача решения уравнения Лапласа в случае смешанных условий Дирихле и Неймана на границах геометрической области [14, 15].

В данной работе исследуется решение уравнения Лапласа для потенциала в ограниченной прямоугольной проводящей области. Выполнена экспериментальная проверка двух решений, представленных в литературе.

Математическая постановка задачи и ее решение

Рассчитаем распределение электрического потенциала в области однородного изотропного полупроводника, имеющей форму правильной четырехугольной призмы ($a \times b \times d$), на две грани которой нанесены два низкоомных контакта равного размера.

Образец такого полупроводника имеет малую толщину d ($d \ll a, b$), и через металлические контакты 1, 2 размерами $2c_i \times d$ ($i = 1, 2$), расположенные по периметру образца, проходит постоянный ток I_{12} через всю его толщину (рис. 1).

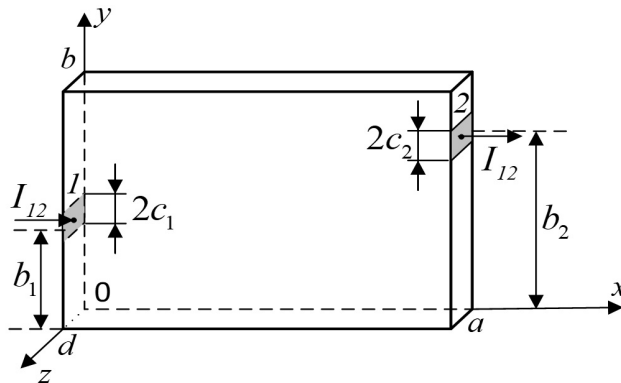


Рис. 1. Схема расположения токовых контактов 1, 2 на противоположных гранях однородного полупроводникового образца, имеющего форму правильной четырехугольной призмы: I_{12} – постоянный ток через контакты

При условии протекания постоянного электрического тока, в указанной области удобно использовать декартову систему координат, в которой основные уравнения распределения полей имеют следующий вид [16, 17]:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad} \varphi, \quad \text{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{j}$ – плотность тока, $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, φ – потенциал, σ – удельная проводимость полупроводникового материала.

Учитывая условие тонкой пластины ($d \ll a, b$), мы можем считать распределение потенциала двумерным (далее образец называется прямоугольным). Тогда уравнение для потенциала примет следующий вид:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Общее решение уравнения (2) находим на основе метода разделения переменных [10, 11], постоянные интегрирования определяются нами в соответствии с задаваемыми граничными условиями. Используя граничные условия для граней $y = 0, b$, известные из литературы [5, 13, 16], имеем:

$$\mathbf{j}_y = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0. \quad (3)$$

Отсюда получаем решение в виде ряда:

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k \text{ch}(\beta_k x) + B_k \text{sh}(\beta_k x)] \cos(\beta_k y), \quad (4)$$

где A_k, B_k – коэффициенты разложения, $\beta_k = \pi k / b$ ($k \in \mathbb{Z}$).

С постановкой граничных условий на гранях $x = 0$ не все так однозначно. Для низкоомных омических контактов необходимо определять смешанные условия, а именно:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad y \in [0; b_1 - c_1) \cup (b_1 + c_1; b], \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \quad y \in [0; b_2 - c_2) \cup (b_2 + c_2; b], \quad (6)$$

$$\varphi_{x=0} = \varphi_1, \quad y \in [b_1 - c_1; b_1 + c_1], \quad (7)$$

$$\varphi_{x=a} = \varphi_2, \quad y \in [b_2 - c_2; b_2 + c_2]. \quad (8)$$

Однако на данный момент, для этой задачи в известной нам литературе не представлено решения в элементарных функциях.

В случае малых токовых контактов 1, 2 ($2c_i < 0,1b$) граничные условия можно представить в таком виде:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{cases} 0, & y \in [0; b_1 - c_1) \cup (b_1 + c_1; b], \\ -\frac{I_{12}}{2c_1 d \sigma}, & y \in [b_1 - c_1; b_1 + c_1]; \end{cases} \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=a} = \begin{cases} 0, & y \in [0; b_2 - c_2) \cup (b_2 + c_2; b], \\ -\frac{I_{12}}{2c_2 d \sigma}, & y \in [b_2 - c_2; b_2 + c_2]. \end{cases} \quad (10)$$

Далее, используя известный алгоритм поиска коэффициентов членов ряда Фурье [11, 13], получаем выражение для потенциала в виде ряда аналитических функций:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \frac{I_{12}}{\sigma b d} \left(\frac{a}{2} - x \right) + \frac{2I_{12}}{\sigma \pi d} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(\beta_k y)}{k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{\sin(\beta_k c_1)}{\beta_k c_1} \text{ch}[\beta_k (x - a)] \cdot \cos(\beta_k b_1) - \frac{\sin(\beta_k c_2)}{\beta_k c_2} \text{ch}(\beta_k x) \cdot \cos(\beta_k b_2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

В большинстве практических случаев, для достижения расчетной погрешности менее 1% достаточно не более 100 членов ряда для расчета потенциала вблизи токовых контактов и порядка 10 в средней области образца.

На практике, как правило, токовые контакты 1 и 2 имеют одинаковый характерный размер ($c_1 = c_2 = c$) и размещены на оси симметрии образца ($b_1 = b_2 = b/2$). В таком случае формула для распределения электрического потенциала приводится к более простому выражению:

$$\varphi(x, y) = \frac{I_{12}}{b d \sigma} \left(\frac{a}{2} - x \right) + \frac{I_{12}}{b d \sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(2\beta_k c)}{2\beta_k c} \frac{\cos(2\beta_k y)}{k \text{sh}(2\beta_k a)} (-1)^k [\text{ch}(2\beta_k (x - a)) - \text{ch}(2\beta_k x)] \right\}. \quad (12)$$

Омическое сопротивление полупроводника R_{12} определяется как разность средних значений потенциалов φ_i под контактами, отнесенная к величине тока I_{12} :

$$R_{12} = \frac{\langle \varphi_1 \rangle - \langle \varphi_2 \rangle}{I_{12}}, \quad \langle \varphi_i \rangle = \frac{1}{2c_i} \int_{b_i - c_i}^{b_i + c_i} [\varphi(y)] \Big|_{x=0, a} dy, \quad (13)$$

$$R_{12} = R_0 + r_{12}, \quad (14)$$

$$R_0 = \frac{a}{\sigma b d}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} r_{12} = & \frac{2}{\sigma \pi d} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} \left[\text{ch}(\beta_k a) \left(\left(\frac{\sin(\beta_k c_1)}{\beta_k c_1} \cos(\beta_k b_1) \right)^2 + \left(\frac{\sin(\beta_k c_2)}{\beta_k c_2} \cos(\beta_k b_2) \right)^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{\sin(\beta_k c_1)}{\beta_k c_1} \frac{\sin(\beta_k c_2)}{\beta_k c_2} \cos(\beta_k b_1) \cos(\beta_k b_2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для практически важного случая $b_1 = b_2 = b/2$, $c_1 = c_2 = c$ выражение (16) допускает существенное упрощение:

$$r_{12} = \frac{2}{\sigma \pi d} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\sin(2\beta_k c)}{2\beta_k c} \right)^2 \frac{\text{th}(\beta_k a)}{k} \right\}. \quad (17)$$

В выражениях (14) – (16) R_0 – объемное сопротивление материала, r_{12} – сопротивление растекания, обусловленное неоднородным распределением электрического поля в проводящей области [7, 16].

Полученные выражения (12) – (17) подвергались неоднократной проверке при малых контактах ($2c < 0,1b$), при измерениях напряжений между контрольными точками [5, 16].

Однако для контактов большей величины ($0,1b < 2c < 0,5b$) данные решения имеют значимую погрешность до 8,5 % от разности потенциалов на контактах.

В работах [18, 19] предложено представить граничное условие для граней $x = 0$, a в виде, близком к смешанным условиям Неймана и Дирихле (3), (5) – (8) за счет специального выбора функции для производной потенциала под контактной площадкой. Краевые условия (9), (10), соответственно, заменяются следующими условиями:

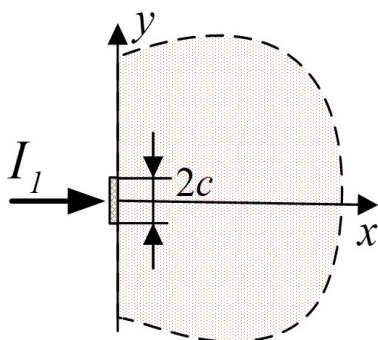
$$\left. \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{cases} 0, & y \in [0; b_1 - c_1) \cup (b_1 + c_1; b], \\ -\frac{I_{12}}{\pi \sigma d \sqrt{c_1^2 - (y - b_1)^2}}, & y \in (b_1 - c_1; b_1 + c_1); \end{cases} \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right|_{x=a} = \begin{cases} 0, & y \in [0; b_2 - c_2) \cup (b_2 + c_2; b], \\ -\frac{I_{12}}{\pi \sigma d \sqrt{c_2^2 - (y - b_2)^2}}, & y \in (b_2 - c_2; b_2 + c_2). \end{cases} \quad (19)$$

Краевые условия (18), (19) рассматриваются в рамках модели, согласно которой форма проводника практически не влияет на форму линий тока (практически не происходит так называемой деформации линий тока, стягивающихся к пятну контакта, так как расстояние до любых других граней велико относительно размеров контакта).

Таким образом, фактически для описания электрического потенциала вблизи малого эквипотенциального контакта (где $\varphi^*(x, y) \approx v(x, y)$) можно использовать следующую краевую задачу в полуплоскости (рис. 2):

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x > 0, \\ v(0, y) = U_1, & y \in [-c, c], \\ \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, & y \notin [-c, c]. \end{cases} \quad (20)$$



Данная задача при заданной силе тока I_1 , проходящего через контакт слева направо, имеет единственное точное решение [18]:

$$v(x, y) = U_1 - \frac{I_1}{\pi \sigma d} \ln \left| x + iy + \sqrt{(x + iy)^2 - c^2} \right|, \quad (21)$$

поскольку вблизи контакта $\varphi^*(x, y) \approx v(x, y)$ в качестве эквивалентного условия Неймана можно использовать следующие равенства:

$$\left. \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right|_{x=0} \approx \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{I_1}{\pi \sigma d \sqrt{c^2 - y^2}}, \quad y \in (-c, c). \quad (22)$$

Рис. 2. Схема, поясняющая краевую задачу в полуплоскости (x, y) (см. формулы (20))

Решение уравнения Лапласа для электрического потенциала φ^* с краевыми условиями (3), (18), (19) можно получить численно, если использовать метод разделения переменных, в виде суммы ряда:

$$\begin{aligned} \varphi^*(x, y) = & \frac{I_{12}}{\sigma b d} \left(\frac{a}{2} - x \right) + \frac{2I_{12}}{\sigma \pi d} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(\beta_k y)}{k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} \times \right. \\ & \left. \times [J_0(\beta_k c_1) \cdot \text{ch}(\beta_k (x - a)) \cdot \cos(\beta_k b_1) - J_0(\beta_k c_2) \cdot \text{ch}(\beta_k x) \cdot \cos(\beta_k b_2)] \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $J_0(t)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

В практически важном случае для симметричного положения контактов ($b_1 = b_2 = b/2$) равной величины ($c_1 = c_2 = c$) получаем существенное упрощение выражения для потенциала:

$$\begin{aligned} \varphi^*(x, y) = & \frac{I_{12}}{\sigma b d} \left(\frac{a}{2} - x \right) + \\ & + \frac{I_{12}}{\sigma \pi d} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k J_0(2\beta_k c)}{k \cdot \text{sh}(2\beta_k a)} \cdot [\text{ch}(2\beta_k (x-a)) - \text{ch}(2\beta_k x)] \cdot \cos(2\beta_k y) \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Соответственно, если использовать выражение (24), то можно получить формулу, выражающую сопротивление образца:

$$R_{12}^* = \frac{\varphi^*(0, b/2) - \varphi^*(a, b/2)}{I_{12}} = \frac{a}{\sigma b d} + \frac{2}{\sigma \pi d} \sum_{k=1}^{\infty} J_0^2(2\beta_k c) \cdot \frac{\text{th}(\beta_k a)}{k}. \quad (25)$$

Для случаев произвольных размеров и положения контактов, на основании решения (23), получаем зависимость сопротивления проводящего образца от параметров σ , a , b , d , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 в виде, аналогичном выражению (14), где сопротивление растекания принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} r_{12}^* = & \frac{2}{\sigma \pi d} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k \cdot \text{sh}(\beta_k a)} [\text{ch}(\beta_k a) (J_0^2(\beta_k c_1) \cos^2(\beta_k b_1) + J_0^2(\beta_k c_2) \cos^2(\beta_k b_2)) - \right. \\ & \left. - 2 \cos(\beta_k b_1) \cos(\beta_k b_2) J_0(\beta_k c_1) J_0(\beta_k c_2)] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Экспериментальная установка

Проверка полученного расчетного распределения потенциала была проведена на экспериментальной установке, схема которой представлена на рис. 3. Потенциальные контакты 1, 2 на основе медных проводников были размещены на противоположных гранях электролитической ванны, наполненной проводящей жидкостью (водный солевой раствор) с удельной проводимостью, соответствующей среднему значению диапазона для полупроводниковых материалов (в нашем случае для жидкости $\sigma \approx 10^{-2}$ См/м). Напряжение измерялось вольтметром М890С+ (погрешность не превышала 0,01 В). Погрешность шага измерительного зонда (контакт 4 на рис. 3) определялась с ошибкой, не превышающей 0,5 мм. Источником питания служил генератор низкой частоты ГЗ-112. Для создания квазистационарного тока использовалась частота 50 Гц. Напряжение между контактами 1, 2 контролировалось вольтметром и составляло 6 В. Шаг построения эквипотенциалей – 0,5 В. При проведении экспериментального тестирования использовалась электролитическая ванна с размерами $a = 30$ см, $b = 25$ см, $d = 1$ см.

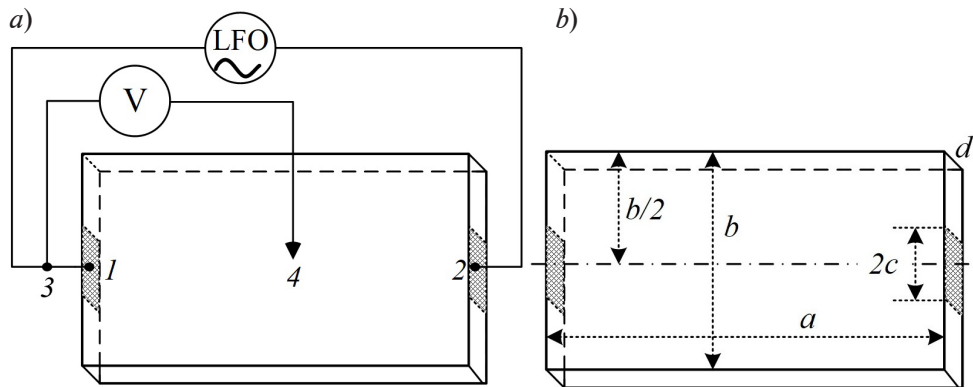


Рис. 3. Принципиальная электрическая схема экспериментальной установки (a) и геометрические параметры проводящей области (электролит) и контактов (b); LFO – генератор низкой частоты; 1, 2 – токовые контакты; 3, 4 – контакты высокоомного вольтметра

При квазистационарных колебаниях, уравнения для распределений электрических полей повторяют уравнения (1) для постоянного тока [17]. В случае периодических квазистационарных колебаний с известной (малой) частотой, разделяют пространственную и временную составляющие токов и напряжений (потенциалов) [11, 17]:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) \cdot \varphi_\tau(t) = 0.$$

Соответственно, в области однородной проводящей области, для пространственной части потенциала $\phi(\mathbf{r})$ справедливо уравнение Лапласа.

Выполним сравнение амплитудных значений токов проводимости $j = \sigma E$ и токов смещения $j_s = \partial D / \partial t$, где вектор электрического смещения

$$\mathbf{D} = (\varepsilon_1 + i \cdot \varepsilon_2) \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (27)$$

В формуле (27) ε_1 , ε_2 – соответственно действительная и мнимая диэлектрические проницаемости рассматриваемой среды [20].

Принимая для пресной воды значения $\varepsilon_1 = 80$ и $\varepsilon_2 = 5$ [21], при гармонических колебаниях с частотой $f = 50$ Гц, получаем следующее соотношение модулей максимального тока смещения и максимального тока проводимости:

$$\frac{|j_s|_{\max}}{|j|_{\max}} = \frac{2\pi f \cdot \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \cdot E_{\max}}{\sigma E_{\max}} \approx \frac{5,56 \cdot 10^{-11} f \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}{\sigma} \approx 2,2 \cdot 10^{-5}. \quad (28)$$

Для оценки критерия малости области протекания тока, по сравнению с длиной электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью $c^* / \sqrt{\varepsilon \mu}$

$$(c^* \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}, \mu \approx 1, \varepsilon_1 \approx \varepsilon \gg \varepsilon_2),$$

выполним расчет величины a/λ ($a = 0,3$ м):

$$\lambda \approx \frac{1}{f} \frac{c^*}{\sqrt{\varepsilon_1}} \approx 6,7 \cdot 10^5 \text{ (м)} \Rightarrow \frac{a}{\lambda} \approx 4,5 \cdot 10^{-7}. \quad (29)$$

Таким образом, необходимые условия квазистационарности в рассматриваемом эксперименте выполняются.

Использование постоянных токов в электролитической ванне приводит к явлениям, связанным с выделением составляющих электролита на токовых контактах, что создает дополнительное падение напряжения вблизи электродов 1 и 2 [17].

Использование однородных полупроводниковых кристаллов для экспериментальной проверки сталкивается с рядом технологических затруднений, связанных с изготовлением омических контактов протяженной длины [22 – 24]. Контакт меди с пресной водой известен своей стойкостью к коррозии [25], и в данном случае его можно использовать в качестве модели омического контакта металл-полупроводник.

Результаты компьютерного и экспериментального моделирования

Для экспериментальной проверки приведенных выражений для распределений потенциалов были также построены вычислительные модели в математическом пакете MathCAD [26]. Размеры области и шаг построения эквипотенциальных линий выбирались в соответствии с их экспериментальным определением.

На рис. 4 сопоставлены результаты эксперимента и расчетов при $b_1 = b_2 = b / 2$, $c_1 = c_2 = c$. Экспериментальные точки ϕ_{exp} эквипотенциалей (синего цвета) в разных случаях контактных площадок достаточно близки к теоретическим моделям потенциалов ϕ и ϕ^* , определяемым по формулам (11) и (23). Полученные экспериментальные данные показывают адекватность применяемых теоретических методов расчета.

При значениях токовых контактов $0,5 < 2c \leq b$ экспериментальная проверка не проводилась, поскольку модель плотности тока под контактом, предложенная в работе [18], не предполагает «больших» токовых контактов, соизмеримых с боковыми гранями. В частности, ряд (23) не переходит в однородное поле при частном случае контактов по площади боковых граней. Однако по мере приближения величины токовых контактов к размеру боковых граней ($2c \rightarrow b$) решение в виде (12) вновь становится более точным, поскольку в таком случае это решение приводит к единственно верному однородному распределению потенциала в области образца.

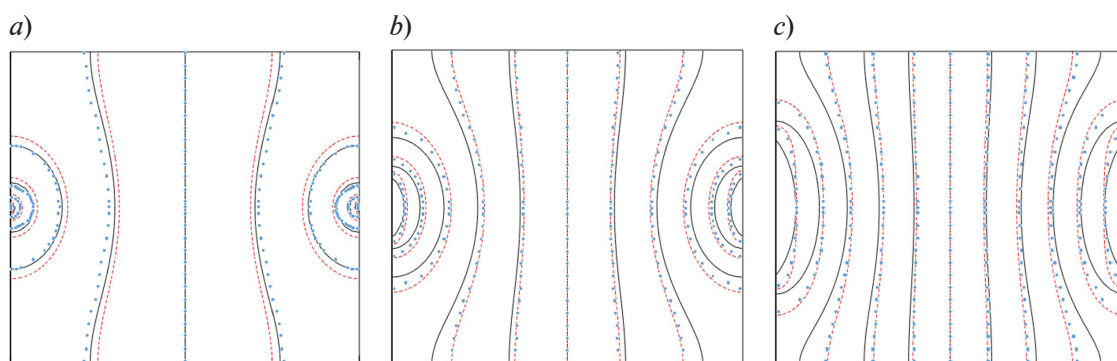


Рис. 4. Сравнение результатов компьютерного моделирования потенциалов φ и φ^* (сплошные черные линии и красные пунктиры, соответственно) с данными измерений потенциала φ_{exp} (синие точки) при разных значениях токовых контактов $2c$: $0,032b = 8$ мм (a), $0,20b = 50$ мм (b) и $0,48b = 120$ мм (c)

Заключение

На основе проведенных экспериментов и расчетов можно сделать следующие выводы.

В области токовых контактов наблюдается наибольшая концентрация эквипотенциальных линий и, соответственно, плотности тока. Данная концентрация поля снижается при повышении величины токовых контактов.

Для малых (точечных) контактов наилучшее согласие с экспериментальным распределением достигает решение в виде (12), при нахождении которого плотность тока под контактом была принята постоянной.

При постепенном увеличении контакта в области $0,2b < 2c < 0,5b$ более точным решением следует считать выражение φ^* , определяемое рядом (23).

Наибольшее расхождение применяемых теоретических схем расчетов наблюдается на границах проводника, тогда как на линии, соединяющей центры токовых контактов ($2c \approx 0,5b$), расхождения минимальны, и более простой ряд (12) в этом случае практически не требует корректировки даже для достаточно больших контактов.

В работе показано, что использование в контактной области специальной функции вида $A / \sqrt{c^2 - (y - b_1)^2}$ (A – некоторая постоянная; c – половина ширины контакта; b_1 и y – координаты центра контакта) для нормальной составляющей градиента потенциала и точки измерения соответственно, позволяет с малой погрешностью, не превысившей в проведенных экспериментах 4,2 % от разности потенциалов на контактах, решать задачу о распределении электрического поля в прямоугольной области с низкоомными токовыми электродами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Touchaei B. J., Shalchian M. A compact Non-Quasi-Static small-signal model for GaN HEMT // Microelectronics Journal. 2024. Vol. 148. June. P. 106199.
2. Абрамов И. И., Коломейцева Н. В., Лабунов В. А. Моделирование перспективных приборов нанoeлектроники. Ч. I. Модели // Нано- и микросистемная техника. 2025. Т. 27. № 4. С. 167–172.
3. Raut P., Panda D. K., Goyal A. K. A comprehensive review on next-generation modeling and optimization for semiconductor devices // IEEE Access. 2025. Vol. 13. 10 July. Pp. 123724–123742.
4. Zebrev G. I., Malich D. S. Analytical physics-based modeling of electron channel density in nanosheet and nanowire transistors // IEEE Transactions on Electron Devices. 2023. Vol. 70. No. 4. Pp. 1574–1579.
5. Заворотний А. А., Ершов А. А., Филиппов В. В., Лузянин С. Е. Контроль однородности полупроводниковых пленок в процессе проведения зондовых измерений удельной электропроводности // Известия вузов. Физика. 2025. Т. 68. № 2. С. 82–91.
6. Филиппов В. В., Заворотний А. А., Тигров В. П. Измерение компонент тензора удельной электропроводности анизотропных полупроводниковых пластин модифицированным методом Ван дер Пау // Известия вузов. Физика. 2019. Т. 62. № 1 (733). С. 92–99.

7. Андреев А. Н., Растегаева М. Г., Растегаев В. П., Решанов С. А. К вопросу об учете растекания тока в полупроводнике при измерениях удельного переходного сопротивления омических контактов // Физика и техника полупроводников. 1998. Т. 32. № 7. С. 832–838.
8. Костановский А. В., Зеодинов М. Г., Костановская М. Е. Удельное электрическое сопротивление нанопорошка карбида кремния // Теплофизика высоких температур. 2025. Т. 63. № 6. С. 770–773.
9. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. В 2-х кн. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 912 с.
10. Радкевич Е. В., Палин В. В. Уравнения математической физики. М.: Изд-во «Ленанд», 2024. 297 с.
11. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2007. 592 с.
12. Петров Б. К., Шалимов О. Н. Новые методы расчета электрических полей и пробивных напряжений p - n -переходов в полупроводниковых приборах. Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2008. 213 с.
13. Филиппов В. В., Лузянин С. Е., Мицук С. В. Методы решений уравнений Лапласа и Пуассона применительно к электродинамике полупроводников. Липецк: Изд. ЛГПУ им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, 2023. 86 с.
14. Бурский В. П. Некоторые новые методы исследования краевых задач для общих дифференциальных уравнений в частных производных // Теоретическая и математическая физика. 2024. Т. 218. № 1. С. 48–59.
15. Алгазин О. Д., Копаев О. В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2015. № 1 (58). С. 3–13.
16. Филиппов В. В. Особенности явлений электронного переноса в анизотропных полупроводниках. М.: Спутник+, 2015. 257 с.
17. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. СПб: Лань, 2010. 459 с.
18. Ershov A. A. Asymptotics of the solution of Laplace's equation with mixed boundary conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2011. Vol. 51. No. 6. Pp. 994–1010.
19. Дмитриев А. В., Ершов А. А. Анализ диссипации энергии в поверхностном слое для контактного электрического сопротивления // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2015. Т. 7. № 2. С. 14–24.
20. Емец Ю. П. Электрические характеристики трехкомпонентной диэлектрической среды // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1998. Т. 114. № 3. С. 1121–1136.
21. Александров В. В. Электрофизика пресных вод. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 184 с.
22. Бланк Т. В., Гольдберг Ю. А. Механизмы протекания тока в омических контактах металл – полупроводник // Физика и техника полупроводников. 2007. Т. 41. № 11. С. 1281–1308.
23. Lahtiluoma L., Setälä O. E., Vähänissi V., Savin H. Charged thin film enables dopant free ohmic metal–semiconductor contact formation // Applied Surface Science. 2025. Vol. 701. August 30. P. 163260.
24. Микушин В. М., Маркова Е. А., Новиков Д. А. Способ изготовления омического контакта. Пат. 2821299С1, Российская Федерация, МПК H01L21/28, B82Y40/00. Заявитель и патентообладатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук. № 2024104072; заявл. 16.02.2024; опублик. 19.06.2024. Бюлл. № 17.
25. Пахомов В. С. Коррозия металлов и сплавов. Справочник. Книга 1. М.: Наука и технологии, 2013. 448 с.
26. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad. М.: Инфра-инженерия, 2024. 408 с.

REFERENCES

1. Touchaei B. J., Shalchian M., A compact Non-Quasi-Static small-signal model for GaN HEMT, Microelectron. J. 148 (6) (2024) 106199.
2. Abramov I. I., Kolomejceva N. V., Labunov V. A., Modeling of advanced nanoelectronic devices. Part I. Models, Nano- i Mikrosistemnaya tekhnika [Nano- and Microsystem Engineering]. 27 (4) (2025) 167–172 (in Russian).



3. **Raut P., Panda D. K., Goyal A. K.**, A comprehensive review on next-generation modeling and optimization for semiconductor devices, *IEEE Access*. 13 (10 Jul) (2025) 123724–123742.
4. **Zebrev G. I., Malich D. S.**, Analytical physics-based modeling of electron channel density in nanosheet and nanowire transistors, *IEEE Trans. Electron Devices*. 70 (4) (2023) 1574–1579.
5. **Zavorotnii A. A., Ershov A. A., Filippov V. V., Luzyanin S. E.**, Monitoring the homogeneity of semiconductor films during probe measurements of specific electrical conductivity, *Izvestiya Vuzov. Fizika [University News. Physics]*. 68 (2) (2025) 82–91 (in Russian).
6. **Filippov V. V., Zavorotnii A. A., Tigrov V. P.**, Modified Van der Pauw method of measuring the electrical conductivity tensor of anisotropic semiconductor films, *Russ. Phys. J.* 62 (1) (2019) 105–113.
7. **Andreev A. N., Rastegaeva M. G., Rastegaev V. P., Reshanov S. A.**, Allowing for current spreading in semiconductors during measurements of the contact resistivity of ohmic contacts, *Semiconductors*. 32 (7) (1998) 739–744.
8. **Kostanovski A. V., Zeodinov M. G., Kostanovskaia M. E.**, Specific electrical resistance of silicon carbide nanopowder, *Teplofizika vysokih temperatur [High Temperature Thermophysics]* 63 (6) (2025) 770–773 (in Russian).
9. **Sze S. M.**, *Physics of semiconductor devices*, 2-nd edition, John Wiley & Sons, New York, 1981.
10. **Radkevich E. V., Palin V. V.**, *Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]*, Lenard Publ., Moscow, 2024 (in Russian).
11. **Polyanin A. D.**, *Spravochnik po linejnym uravneniyam matematicheskoy fiziki [Handbook of linear equations of mathematical physics]*, Fizmatlit, Moscow, 2007 (in Russian).
12. **Petrov B. K., Shalimov O. N.**, *Novye metody rascheta elektricheskikh poley i probivnykh napryazhenij p - n perekhodov v poluprovodnikovyyh priborah [New methods for calculating electric fields and breakdown voltages of p - n junctions in semiconductor devices]*, Publ. by Voronezhskiy Gosudarstvenniy Universitet, Voronezh, 2008 (in Russian).
13. **Filippov V. V., Luzyanin S. E., Mitsuk S. V.**, *Metody resheniy uravneniy Laplasy i Puassona primenitel'no k elektrodinamike poluprovodnikov [Methods for solving the Laplace and Poisson equations as applied to the electrodynamics of semiconductors]*, Publ. by Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, 2023 (in Russian).
14. **Burskii V. P.**, Some new methods for studying boundary value problems for general partial differential equations, *Theor. Math. Phys.* 218 (1) (2024) 41–50.
15. **Algazin O. D., Kopaev O. V.**, Solution of the mixed boundary-value problem for Laplace equation in multidimensional infinite layer, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Ser. "Natural Sciences"*. (1(58)) (2015) 3–13 (in Russian).
16. **Filippov V. V.**, *Osobennosti yavlenij elektronnoy perenosy v anizotropnykh poluprovodnikakh [Features of electron transport phenomena in anisotropic semiconductors]*, Sputnik+ Publ., Moscow, 2015 (in Russian).
17. **Matveev A. N.**, *Electricity and magnetism* (Translated from the Russian by R. Wadhwa and N. Deineko) Mir Publishers, Moscow, 1986.
18. **Ershov A. A.**, Asymptotics of the solution of Laplace's equation with mixed boundary conditions, *Comput. Math. Math. Phys.* 51 (6) (2011) 994–1010.
19. **Dmitriev A. V., Ershov A. A.**, The analysis of energy absorption in a blanket for contact electric resistance, *Bull. South Ural State University. Ser. "Math. Mech. Phys."* 7 (2) (2015) 14–24 (in Russian).
20. **Emets Y. P.**, Electrical characteristics of three-component dielectric media, *J. Exp. Theor. Phys.* 87 (3) (1998) 612–620.
21. **Alexandrov V. V.**, *Elektrofizika presnykh vod [Fresh water electrophysics]*, Gidrometeoizdat Publ., Leningrad, 1985 (in Russian).
22. **Blank T. V., Gol'dberg Yu. A.**, Mechanisms of current flow in metal-semiconductor ohmic contacts, *Semiconductors*. 41 (11) (2007) 1263–1292.
23. **Lahtiluoma L., Setälä O. E., Vähäniemi V., Savin H.**, Charged thin film enables dopant free ohmic metal–semiconductor contact formation, *Appl. Surf. Sci.* 701 (8) (2025) 163260.
24. **Mikushin V. M., Markova E. A., Novikov D. A.**, *Sposob izgotovleniya omicheskogo kontakta [Method for manufacturing an ohmic contact]*, Pat. No. RU 2821299C1, Russian Federation; MPC H01L21/28, B82Y40/00; Federal State Budgetary Scientific Institution A. F. Ioffe Physical-Technical Institute of the Russian Academy of Sciences is a declarant and patentee. No. 2024104072; declar. 16.02.2024, publ. 19.06.2024. Bull. No. 17 (in Russian).

25. **Pakhomov V. S.**, Korroziya metallov i splavov. Spravochnik. Kniga 1 [Corrosion of metals and alloys. Reference Book 1], Nauka Publishing, Moscow, 2013 (in Russian).

26. **Makarov E. G.**, Inzhenernye raschety v Mathcad [Engineering calculations in Mathcad], Infra-Engineering, Moscow, 2024 (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ФИЛИППОВ Владимир Владимирович — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики и биомедицинской техники Липецкого государственного технического университета; профессор кафедры математики и физики Липецкого государственного педагогического университета имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Россия.

398600, Россия, г. Липецк, Московская ул., 30

wwfilippow@mail.ru

ORCID: 0000-0003-4323-351X

ЕРШОВ Александр Анатольевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела динамических систем Института математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН; доцент кафедры математического анализа Института естественных наук и математики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Россия.

620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

ale10919@yandex.ru

ORCID: 0000-0002-9685-9711

THE AUTHORS

FILIPPOV Vladimir V.

Lipetsk State Technical University,

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky

30, Moskovskaya St., Lipetsk, 398600, Russia

wwfilippow@mail.ru

ORCID: 0000-0003-4323-351X

ERSHOV Aleksandr A.

Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,

Ural Federal University named after first president of Russia B. N. Yeltsin

16, S. Kovalevskaya St., Ekaterinburg, 620990, Russia

ale10919@yandex.ru

ORCID: 0000-0002-9685-9711

Статья поступила в редакцию 11.02.2026. Одобрена после рецензирования 13.04.2026. Принята 13.04.2026.

Received 11.02.2026. Approved after reviewing 13.04.2026. Accepted 13.04.2026.