

Научная статья

УДК 534-13

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.19114>

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ КОНТИНУАЛЬНЫХ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

А. В. Лукин [□], И. А. Попов, Н. Д. Пискун, Д. В. Антуфьев

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

[□] lukin_av@spbstu.ru

Аннотация. Рассмотрена проблема синтеза динамических моделей пониженного порядка для континуальных упругих систем в геометрически нелинейной постановке (прежде всего – тонкостенных конструкций) на базе метода конечных элементов. В основе рассматриваемых подходов лежит идея идентификации нелинейной (квадратично-кубической) жесткостной характеристики упругой системы в ее модальных координатах с последующим применением аппарата теории нелинейных нормальных мод и нормальных форм Пуанкаре для построения инвариантного многообразия, касательного к выбранному модальному подпространству. Разработанный алгоритм использован для построения нелинейной модели продольно-изгибных колебаний пролетной балки и ее верификации на базе приближенного аналитического решения методом Галёркина. Обсуждаются особенности программной реализации представленного метода на основе программной системы конечно-элементного анализа ABAQUS.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, нормальная форма Пуанкаре, нелинейное модальное взаимодействие, редуцированная модель

Финансирование: Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 24-71-10097; <https://rscf.ru/project/24-71-10097/>.

Для цитирования: Лукин А. В., Попов И. А., Пискун Н. Д., Антуфьев Д. В. Нелинейные модели пониженного порядка для континуальных упругих элементов конструкций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2026. Т. 19. № 1. С. 170–190. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.19114>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.19114>

NONLINEAR REDUCED ORDER MODELS FOR ELASTIC STRUCTURES

A. V. Lukin [□], I. A. Popov, N. D. Piskun, D. V. Antufiev

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

[□] lukin_av@spbstu.ru

Abstract. The problem of synthesizing the reduced-order dynamic models for continuous elastic systems in a geometrically nonlinear formulation (primarily thin-walled structures) based on the finite element method is considered. The approaches under consideration are based on the idea of identifying the nonlinear (quadratic-cubic) stiffness characteristic of an elastic system in its modal coordinates, followed by the application of the theory of nonlinear normal modes and Poincaré normal forms to construct an invariant manifold tangent to the selected modal subspace. The developed algorithm is used to construct a nonlinear model of



coupled longitudinal-bending vibrations of a clamped-clamped beam and its verification based on an approximate analytical solution by the Galerkin method. The features of the software implementation of the presented method based on the ABAQUS finite element analysis software system are discussed.

Keywords: nonlinear theory of elasticity, Poincaré normal form, nonlinear modal interaction, reduced-order model

Funding: The reported study was funded by Russian Science Foundation (Grant No. 24-71-10097), <https://rscf.ru/project/24-71-10097/>.

For citation: Lukin A. V., Popov I. A., Piskun N. D., Antufiev D. V., Nonlinear reduced order models for elastic structures, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 19 (1) (2026) 170–190. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.19114>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Актуальной задачей механики деформируемого твердого тела и динамики машин на современном этапе является разработка эффективных численных методов моделирования динамических режимов работы сооружений, конструкций, приборов и их элементов в геометрически нелинейной постановке и с учетом связанности физических полей различной природы (термо-, электро-, магнито-, аэро-, гидроупругость и пр.). Ключевыми требованиями к создаваемым математическим моделям становятся противоречащие друг другу (на первый взгляд) характеристики: с одной стороны, это высокая степень подробности модели, ее адекватности реальным геометрическим и физико-механическим параметрам системы и условиям ее нагружения; с другой стороны, это компактность численной модели, ее применимость для проведения вычислений в реальном времени и с учетом вариативности как параметров внешнего нагружения, так и параметров, описывающих саму систему. Модель также должна быть адаптирована к использованию в задачах проектирования систем автоматического управления движением, а также съема и обработки полезных сигналов.

В современной научной литературе модели, обладающие указанными свойствами, называются моделями пониженного порядка (*англ.* Reduced-Order Models (ROM)), или редуцированными моделями [1 – 3]. Вопросам разработки, верификации и практического применения численных методов синтеза таких моделей для различных физико-математических постановок и промышленных приложений посвящено значительное число научных работ (см., например, статьи [4 – 7]). Отмечается¹, что автоматизированные алгоритмы создания моделей пониженного порядка представляют собой ключевую технологию в рамках разработки цифрового двойника изделия [8].

В настоящей работе рассматривается проблема синтеза динамических моделей пониженного порядка для континуальных упругих систем в геометрически нелинейной постановке (прежде всего, тонкостенных конструкций: струн, мембран, балок, пластинок и оболочек) на базе метода конечных элементов.

В основе рассматриваемых подходов лежит концепция идентификации нелинейной (квадратично-кубической) жесткостной характеристики упругой системы в ее модальных координатах, с последующим применением аппарата теории нелинейных нормальных мод и нормальных форм Пуанкаре для построения инвариантного многообразия, относящегося к изучаемому модальному подпространству.

Целью настоящей работы является построение модели пониженного порядка, точно описывающей нелинейную динамику полной системы при заданном пространственном распределении внешнего воздействия и его спектральном составе.

¹ ГОСТ Р 57700.37–2021 «Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения».

В работе представлены результаты применения метода к построению нелинейной модели продольно-изгибных колебаний пролетной балки и ее верификации на базе приближенного аналитического решения методом Галёркина. Обсуждаются особенности программной реализации представленного метода на основе программной системы конечно-элементного анализа ABAQUS.

Постановка задачи

Уравнения эластодинамики трехмерного упругого тела в геометрически точной лагранжевой постановке имеют вид [8]:

$$\frac{\partial}{\partial X_k} (F_{ij} S_{jk}) + \rho_0 b_i^0 = \rho_0 \ddot{u}_i \text{ для } X \in \Omega_0, i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где Ω_0 – область трехмерного пространства, занимаемая телом в своей отсчетной конфигурации; \mathbf{u} – вектор перемещений материальных точек упругого тела, $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ (\mathbf{x} , \mathbf{X} – радиусы-векторы точек тела в актуальной и отсчетной конфигурациях соответственно); ρ_0 – массовая плотность материала; b_0 – объемная плотность приложенных сил.

Компоненты тензора градиента деформации определяются выражениями

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}, \quad (2)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Определяющее соотношение для анизотропного линейно-упругого материала имеет вид

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (3)$$

где S_{ij} – компоненты тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих модулей 4-го ранга; E_{kl} – компоненты тензора деформации Коши – Грина.

Компоненты E_{kl} выражаются через градиент деформации следующим образом:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}). \quad (4)$$

Уравнения (1) дополняются граничными условиями

$$F_{ij} S_{jk} n_k^0 = t_i^0 \text{ для } \mathbf{X} \in \partial\Omega_0', \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ для } \mathbf{X} \in \partial\Omega_0''.$$

Здесь $\partial\Omega_0', \partial\Omega_0''$ – части границы тела $\partial\Omega_0$, на которой заданы внешние поверхностные усилия \mathbf{t}_0 и перемещения \mathbf{u}_0 , соответственно; \mathbf{n}^0 – нормаль к поверхности тела.

Все указанные величины рассматриваются по отношению к отсчетной конфигурации.

Путем применения проекционных или вариационно-сеточных методов вычислительной механики (методы Галёркина, Ритца; метод конечных элементов и др.) уравнения (1) – (5) приводятся к виду следующей системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(t), \quad (6)$$

где $\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_N]^T$ – конечномерный вектор обобщенных координат дискретизированной модели (модальных координат в случае применения метода Галёркина; узловых перемещений для метода конечных элементов); \mathbf{M} , \mathbf{K} – матрицы масс и жесткостей; $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{U})$ – вектор нелинейных восстанавливающих сил, обусловленных учетом квадратичных компонент в тензоре деформации (4); $\mathbf{F}(t)$ – вектор обобщенных сил.

В уравнениях (6) также учтены малые силы линейного вязкого трения по модели Рэлея; матрица диссипации \mathbf{C} имеет вид

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}, \quad (7)$$

где α, β – параметры демпфирования Рэлея.



Отметим, что в рамках рассматриваемой геометрически точной постановки вектор нелинейных внутренних усилий Γ имеет следующую структуру:

$$\Gamma(\mathbf{U}) = \mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \mathbf{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{U}), \quad (8)$$

где \mathbf{G} , \mathbf{H} – билинейная и трилинейная векторные формы по обобщенным координатам \mathbf{U} :

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \mathbf{G}_{rs} U_r U_s, \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{U}) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N \mathbf{H}_{rst} U_r U_s U_t. \quad (9)$$

В выражениях (9) \mathbf{G}_{rs} , \mathbf{H}_{rst} представляют собой векторы коэффициентов соответствующих мономов второй и третьей степени в уравнениях (6).

На основе формулировки поставленной задачи повторим, что целью настоящей работы является построение модели пониженного порядка $n \ll N$, точно описывающей нелинейную динамику полной системы (6) при заданном пространственном распределении внешнего воздействия и его спектральном составе.

В связи с заявленной целью представим искомое поле перемещений \mathbf{U} в виде разложения по ограниченному числу модальных координат $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$:

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{q}, \quad (10)$$

где $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$ – матрица, составленная из учтенных собственных векторов линейной части системы (6).

В модальном базисе система дифференциальных уравнений примет вид

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} + \gamma(\mathbf{q}) = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (11)$$

где с учетом нормировки собственных форм φ_r по массе

$$\tilde{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi = \text{diag}[2\xi_r \omega_r], \quad \tilde{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}[\omega_r^2]. \quad (12)$$

В выражениях (12) ω_r – собственные частоты недемпфированной системы; ξ_r – коэффициенты относительного модального затухания, $\xi_r = (1/2)(\beta\omega_r + \alpha/\omega_r)$.

По аналогии с выражениями (8), (9), нелинейную жесткостную характеристику в модальном базисе $\gamma(\mathbf{q})$ можно представить в виде

$$\gamma(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad (13)$$

где

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \mathbf{g}_{rs} q_r q_s, \quad \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \mathbf{h}_{rst} q_r q_s q_t. \quad (14)$$

В дальнейшем для определенности будем считать, что дискретизация континуальной задачи выполнена с применением метода конечных элементов.

Разработка численной процедуры определения векторов коэффициентов

$$\mathbf{g}_{rs} = \{g_{rs}^l\}_{l=1}^n, \quad \mathbf{h}_{rst} = \{h_{rst}^l\}_{l=1}^n$$

на базе произвольной расчетной модели вида (6), с применением встроенного функционала выбранного программного комплекса конечно-элементного анализа, позволит синтезировать и применять при анализе динамики системы редуцированные нелинейные модели вида (11).

Процедура идентификации нелинейной жесткостной характеристики

В настоящей работе для решения задачи определения коэффициентов нелинейной жесткости в модальном базисе применяется алгоритм STEP (*англ.* Stiffness Evaluation Procedure), предложенный в статье [9]. Подробный обзор различных подходов к решению поставленной проблемы приведен в статьях [10, 11]. Программная реализация алгоритма STEP выполнена авторами настоящей работы на базе конечно-элементной системы ABAQUS.

Для идентификации значений коэффициентов $\{g_{rs}^l\}_{l=1}^n, \{h_{rst}^l\}_{l=1}^n$ нелинейной жесткостной характеристики

$$\gamma_l(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n g_{rs}^l q_r q_s + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n h_{rst}^l q_r q_s q_t, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

конечно-элементной модели, описываемой уравнениями (6), последовательно сообщается ряд заданных статических полей перемещений по рассматриваемым собственным формам. Представим соответствующий алгоритм.

Первый шаг процедуры. Выполняется статический расчет напряженно-деформированного состояния конструкции в геометрически линейной и нелинейной постановках при заданных полях перемещений вида

$$\mathbf{U}_c = \pm \phi_r q_r, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Величины модальных амплитуд q_r при этом выбираются исходя из ожидаемого размаха перемещений конструкции в реальных условиях ее нагружения. Результатом расчетов являются векторы сил реакций в узлах конечно-элементной сетки в линейной (\mathbf{F}_L) и нелинейной (\mathbf{F}_r) постановках, причем

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_{NL} = \mathbf{K}\mathbf{U}_c + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{U}_c). \quad (16)$$

Это позволяет вычислить нелинейную часть упругой восстанавливающей силы по формуле

$$\mathbf{F}_{NL} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{U}_c) = \mathbf{F}_T - \mathbf{F}_L. \quad (17)$$

Проецирование нелинейной компоненты сил реакций \mathbf{F}_{NL} на рассматриваемое модальное подпространство и учет структуры выражений (15) позволяют записать системы линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов

$$g_{rr}^l, h_{rrr}^l, \quad l = 1, 2, \dots, n$$

последовательно для всех $r = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{NL_1} &= \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_{NL_1} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Gamma}(\pm \phi_r q_r) = [g_{rr}^l] q_r q_r + [h_{rrr}^l] q_r q_r q_r, \\ \tilde{\mathbf{F}}_{NL_2} &= \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_{NL_2} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Gamma}(\pm \phi_r q_r) = [g_{rr}^l] q_r q_r + [h_{rrr}^l] q_r q_r q_r. \end{aligned} \quad (18)$$

Второй шаг процедуры. Аналогичные вычисления выполняются для определения коэффициентов g_{rs}^l, h_{rrs}^l и h_{rss}^l путем сообщения конструкции перемещений по комбинациям собственных форм вида

$$\mathbf{U}_c = +\phi_r q_r + \phi_s q_s, \quad \mathbf{U}_c = -\phi_r q_r - \phi_s q_s, \quad \mathbf{U}_c = +\phi_r q_r - \phi_s q_s. \quad (19)$$

Третий шаг процедуры. Для вычисления коэффициентов расчеты проводятся при задании системе смещений по суперпозиции каждой трех собственных форм с номерами r, s, t :

$$\mathbf{U}_c = +\phi_r q_r + \phi_s q_s + \phi_t q_t. \quad (20)$$

Описанная процедура, в принципе, позволяет вычислить коэффициенты нелинейной характеристики (15) для любого числа n собственных форм колебаний, учитываемых в модели пониженного порядка. При этом число искомым компонент линейных форм силовой характеристики составляет n^3 для $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ и n^4 для $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q})$, что приводит к стремительному росту числа расчетов в рамках процедуры STEP с повышением значения n . В то же время, в практических приложениях число рабочих форм колебаний, по которым развивается динамика конструкции, как правило, невелико, что делает STEP чрезвычайно эффективным алгоритмом вычисления нелинейной восстанавливающей силы в модальном базисе. Вопросам дальнейшего повышения вычислительной эффективности алгоритма STEP при высоких значениях n посвящена статья [12].



Особенности нелинейных модальных взаимодействий в упругих системах

Следует подчеркнуть, что изложенная выше процедура идентификации нелинейной силовой характеристики в модальном базисе, в общем случае, не приводит к построению требуемой модели пониженного порядка. Как будет показано далее, это обусловлено существенными нелинейными межмодальными взаимодействиями, которые связывают между собой движения системы по низшим (конструкционным) и высшим (объемным) формам колебаний. Наличие таких взаимодействий не позволяет осуществить классическую для линейной теории колебаний модальную редукцию – отбрасывание (принятие равными нулю тождественно) всех обобщенных модальных координат, кроме так называемых «главных», соответствующих частотному составу и пространственному распределению внешних воздействий.

Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере достаточно общего класса тонких плоских упругих конструкций (струн, прямолинейных балок, плоских мембран и пластин), базируясь на работах [13, 14].

Выделим в общей форме уравнений нелинейных колебаний упругой системы, записанных в модальном базисе вида

$$\ddot{q}_l + 2\xi_l \omega_l \dot{q}_l + \omega_l^2 q_l + \sum_{r,s=1}^n g_{rs}^l q_r q_s + \sum_{r,s,t=1}^n h_{rst}^l q_r q_s q_t = Q_l, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (21)$$

две группы обобщенных координат:

$$\mathbf{q} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n_b}, p_{n_b+1}, p_{n_b+2}, \dots, p_n]^T$$

где η_r – набор модальных координат, соответствующих низкочастотным изгибным формам колебаний конструкции ($r = 1, 2, \dots, n_b$); p_s – все остальные модальные координаты, соответствующие неизгибным высокочастотным формам колебаний ($s = n_b + 1, n_b + 2, \dots, n$); к этим формам относятся стержневые и объемные формы колебаний балок и пр.

В данном случае крутильные формы колебаний рассматриваться не будут. Будем считать, что внешнее воздействие является низкочастотным и ориентированным преимущественно по нормали к срединной поверхности конструкции. В таком случае будем считать, что $Q_s \equiv 0$ для $s = n_b + 1, n_b + 2, \dots, n$. Как следствие, динамика системы будет развиваться в первую очередь по низшим изгибным формам колебаний.

В связи с этим будет выполняться следующее соотношение между порядками модальных амплитуд, типичное для тонкостенных конструкций:

$$\eta_r = O(\varepsilon) \text{ для } r = 1, 2, \dots, n_b; \quad p_s = O(\varepsilon^2) \text{ для } s = n_b + 1, n_b + 2, \dots, n.$$

Здесь ε – малый параметр, значение которого соответствует величинам смещений, соизмеримых с толщиной конструкции.

Кроме того, учтем, что для любой пары изгибных координат с номерами i, j квадратичные коэффициенты $g_{ij}^r = 0$ в силу симметричности упругой восстанавливающей силы. С учетом этих допущений систему уравнений (21) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=n_b+1}^n g_{ij}^r \eta_i p_j + \sum_{i,j,k=1}^n h_{ijk}^r \eta_i \eta_j \eta_k + O(\varepsilon^4) = Q_r, \quad r = 1, 2, \dots, n_b, \\ \ddot{p}_s + 2\xi_s \omega_s \dot{p}_s + \omega_s^2 p_s + \sum_{i,j=1}^{n_b} g_{ij}^s \eta_i \eta_j + O(\varepsilon^3) = 0, \quad s = n_b + 1, n_b + 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (22)$$

Структура уравнений указывает на присутствие квадратичной связанности изгибных и высших форм колебаний. Это препятствует простому пренебрежению координатами p_s при редукции полной системы к подпространству нижних рабочих форм колебаний η_r .

В то же время, вторую группу уравнений (22) в рамках сделанных предположений можно разрешить квазистатически:

$$p_s \cong - \sum_{i,j=1}^{n_b} \frac{g_{ij}^s}{\omega_s^2} \eta_i \eta_j, \quad s = n_b + 1, n_b + 2, \dots, n. \quad (23)$$

После подстановки p_s в первое из уравнений (22) это приводит к корректной (как асимптотически, так и механически) нелинейной модели пониженного порядка для изгибных форм колебаний конструкции:

$$\ddot{\eta}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r + \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma_{ijk}^r \eta_i \eta_j \eta_k + O(\varepsilon^4) = Q_r, \quad r = 1, 2, \dots, n_b, \quad (24)$$

где истинные коэффициенты нелинейной жесткости Γ_{ijk}^r учитывают как собственную нелинейность данной формы колебаний, так и ее нелинейную квазистатическую связанность с высшими формами.

Для краткости изложения приведем здесь явные выражения лишь для «диагональных» коэффициентов кубической нелинейности Γ_{iii}^r [13, 14]:

$$\Gamma_{iii}^r = h_{iii}^r - \sum_{s=n_b+1}^n \frac{g_{is}^r g_{ii}^s}{\omega_s^2}, \quad i, r = 1, 2, \dots, n_b. \quad (25)$$

Конкретный числовой анализ показывает, что в общем случае различие между значениями коэффициентов h_{ijk}^r и Γ_{ijk}^r оказывается существенным [13, 14]. Это отражает факт сильного межмодального взаимодействия в задачах геометрически нелинейной теории упругости, причем резонансные соотношения между частотами соответствующих мод не имеют здесь особого значения: обсуждаемый эффект является чисто кинематическим и обусловлен характером распределения поля конечных деформаций по объему конструкции.

Из изложенного следует вывод о необходимости вычислять при синтезе моделей пониженного порядка как сами высшие формы линейных колебаний системы, так и всех коэффициентов нелинейной жесткостной характеристики в модальном базисе. Численная реализация такой задачи для подробных конечно-элементных моделей реальных конструкций практически неосуществима: даже решение задачи на собственные значения, с вычислением полного спектра частот системы с $n \gg 1000$ степеней свободы, будет чрезвычайно трудоемким, не говоря уже о применении процедур типа STER для вычисления нелинейных жесткостных коэффициентов в полном модальном базисе. Кроме того, рассмотренная выше декомпозиция форм свободных колебаний на изгибные и остальные является, в известной степени, условной и непосредственно относится лишь к случаю низкочастотных возбуждений плоских тонкостенных конструкций. В связи с этим, возникает задача разработки и программной реализации достаточно универсальных и вычислительно эффективных алгоритмов создания моделей пониженного порядка по числу рабочих форм колебаний конструкции с разрешением их квазистатической связанности с вторичными собственными формами.

Как будет показано в следующем разделе, отмеченные принципиальные трудности можно преодолеть путем применения аппарата теории нелинейных нормальных мод и нормальных форм Пуанкаре.

Нормальная форма Пуанкаре как модель пониженного порядка

Отмеченная выше существенная нелинейная связанность уравнений системы в модальном базисе (21), с точки зрения теории динамических систем [15], выражает особенности топологической структуры ее пространства состояний, а именно — отличие геометрии инвариантных подмногообразий от геометрии линейных подпространств, натянутых на соответствующие наборы собственных векторов системы, линеаризованной в окрестности положения равновесия $\mathbf{q} = 0$. Подробное обсуждение этих вопросов приведено в работах [16, 11]; здесь же отметим лишь ключевые положения общей теории, важные для практических приложений.

Для консервативной системы в нерезонансном случае А. М. Ляпунов показал, что каждой паре комплексно-сопряженных собственных значений $\{\pm i\omega_j\}$ соответствует инвариантное многообразие, плотно заполненное периодическими орбитами и касательное к линейному подпространству соответствующих собственных векторов (так называемое



ляпуновское центральное подмногообразие (LCSM) [17]). Топологическое понятие LCSM идентично механическому понятию нелинейной нормальной моды (NNM) – изолированного семейства периодических орбит, выходящего за границы малой окрестности особой точки динамической системы [18]. В работах С. У. Шоу и К. Пьера показано [19], что в неконсервативном случае систем вибрационного типа, со слабой диссипацией, нелинейные нормальные моды также образуют инвариантные подмногообразия, касательные к линейным подпространствам. Проблема неединственности таких подмногообразий рассматривается в работе [20], где предложен алгоритм аналитического построения наиболее гладких (так называемых спектральных) подмногообразий.

Задача сведения исходной динамической системы к своему инвариантному подмногообразию решается с применением теории нормальных форм Пуанкаре [21, 22], основным результатом которой является процедура нахождения наиболее простой формы, к которой можно привести систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия или периодического движения. Построение нормальных форм широко используется в теории бифуркаций при сведении системы к своему центральному многообразию и дальнейшей классификации негиперболических особых точек или предельных циклов [21].

В контексте задач нелинейной динамики конструкций теория нормальных форм Пуанкаре выступает как метод вычисления нелинейных нормальных мод колебательной системы, как эффективный алгоритм синтеза редуцированной модели (модели пониженного порядка).

Следуя статье [23], последовательно рассмотрим процесс построения нормальной формы для нелинейной динамической системы, записанной в модальном и исходном узловом базисах, оставив за рамками изложения фактор возможного наличия внутренних резонансов между формами колебаний системы.

В первом случае формально примем, что с помощью процедур типа STEP был предварительно совершен переход к модальным координатам для всех N степеней свободы механической системы. Для простоты изложения не будем учитывать силы диссипации и внешние нагрузки на конструкцию. Тогда уравнения (11) примут следующий вид:

$$\ddot{q}_l + \omega_l^2 q_l + \sum_{r,s=1}^N g_{rs}^l q_r q_s + \sum_{r,s,t=1}^N h_{rst}^l q_r q_s q_t = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (26)$$

Обозначим вектор обобщенных скоростей $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{q}}$ и поставим задачу нахождения такой замены координат

$$\{q_i, v_i\}_{i=1}^N \rightarrow \{R_j, S_j \equiv \dot{R}_j\}_{j=1}^n, \quad n \ll N,$$

которая осуществляет переход к нормальной форме Пуанкаре по выбранным n нелинейным нормальным модам.

Можно показать, что общий вид этой замены в разложении до третьего порядка (включительно) таков:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i R_i + \sum_{i,j=1}^n \mathbf{a}_{ij} R_i R_j + \sum_{i,j=1}^n \mathbf{b}_{ij} S_i S_j + \sum_{i,j,k=1}^n \mathbf{r}_{ijk} R_i R_j R_k + \sum_{i,j,k=1}^n \mathbf{u}_{ijk} R_i R_j R_k, \\ \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i S_i + \sum_{i,j=1}^n \mathbf{\gamma}_{ij} R_i S_j + \sum_{i,j,k=1}^n \mathbf{\mu}_{ijk} S_i S_j S_k + \sum_{i,j,k=1}^n \mathbf{v}_{ijk} S_i R_j R_k, \end{aligned} \quad (27)$$

где \mathbf{e}_i – вектор, i -компонента которого равна единице, а все остальные – нулю; \mathbf{a}_{ij} , \mathbf{b}_{ij} , \mathbf{r}_{ijk} , \mathbf{u}_{ijk} , $\mathbf{\gamma}_{ijk}$, $\mathbf{\mu}_{ijk}$, \mathbf{v}_{ijk} – искомые векторы коэффициентов нелинейной замены переменных.

Как следует из выражений (27), в модальном представлении переход к нормальной форме осуществляется квазигождественной заменой координат, что отражает свойство касательности инвариантного подмногообразия к соответствующему линейному подпространству.

Подстановка замены (27) в уравнения (26) и решение задачи о минимизации количества ненулевых нелинейных коэффициентов для динамической системы в новых (криволинейных) координатах $\{R_i, S_j\}$ (решение когомологических уравнений второго и третьего

приближений [23]) позволяет определить как все коэффициенты замены (27), так и итоговый вид дифференциальных уравнений, описывающих динамику выбранных n нелинейных нормальных мод:

$$\begin{aligned} \ddot{R}_r + \omega_r^2 R_r + (A_{rrr}^r + h_{rrr}^r) R_r^3 + B_{rrr}^r R_r \dot{R}_r^2 + R_r \sum_{j \neq r}^n (A_{jrr}^r + A_{rjj}^r + A_{rjj}^r + 3h_{rjj}^r) R_j^2 + \\ + R_r \sum_{j \neq r}^n B_{rjj}^r \dot{R}_j^2 + \dot{R}_r \sum_{j \neq r}^n (B_{jrr}^r + B_{rjj}^r) R_j \dot{R}_j = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (28)$$

где коэффициенты

$$\mathbf{A}_{ijk} = \sum_{s=1}^N 2\mathbf{g}_{is} a_{jk}^s, \quad \mathbf{B}_{ijk} = \sum_{s=1}^N 2\mathbf{g}_{is} b_{jk}^s \quad (29)$$

вычисляются через параметры нелинейной модальной характеристики $g(q, q)$ и коэффициенты замены координат (27) a_{ij}^s, b_{ij}^s . Явные выражения для последних здесь не приводятся для краткости изложения [23, 24].

В отношении полученных уравнений в нормальной форме (28) необходимо подчеркнуть, что они асимптотически точно описывают подмножества фазового пространства исходной системы высокой размерности (26), а именно – инвариантные центральные подмногообразия полной динамической системы. Это позволяет назвать систему в нормальной форме корректной моделью пониженного порядка, учитывающей все нелинейные межмодальные взаимодействия, свойственные исходной системе. Вторым важным следствием подхода с построением нормальной формы является отсутствие в системе (28) так называемых нелинейных членов, нарушающих инвариантность: в каждое r -е уравнение (28) координаты R_j ($j \neq r$) входят лишь в произведении с R_r или \dot{R}_r , что является аналогией с расщеплением системы на набор независимых линейных осцилляторов в линейном случае и также обосновывает возможность редукции динамической системы к малому числу нелинейных нормальных мод, соответствующих частотному составу и пространственному распределению внешних воздействий.

В то же время, из выражений (29) следует, что вычисление истинных параметров нелинейной упругой характеристики механической системы по n главным координатам требует знания коэффициентов билинейной формы $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ по всем N линейным формам колебаний. Это является обобщением на случай упругих тел произвольной геометрии ранее отмеченного факта связанности изгибных и остальных форм колебаний в случае плоских тонких конструкций (см. выражения (25)). В свою очередь, это обстоятельство ограничивает практическую реализуемость процедуры вычисления нелинейной нормальной формы в модальном базисе для упругой конструкции лишь в случае достаточно малого с вычислительной точки зрения полного числа степеней свободы N .

В ранее цитированной работе [23] предложен вычислительно эффективный алгоритм синтеза нормальной формы (модели пониженного порядка), не требующий вычисления как высших форм колебаний, так и коэффициентов их нелинейной связанности с выбранными главными формами – так называемый метод прямой нормальной формы (англ. Direct Normal Form (DNF)). Основная идея такого подхода состоит в построении нормальной формы на основе не модального базиса (11), а исходного конечно-элементного представления системы в узловых перемещениях (6).

Рассмотрим свободные нелинейные колебания системы в отсутствие затухания:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \mathbf{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0. \quad (30)$$

Переход к нормальной форме осуществляется заменой переменных

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \phi_i R_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{\mathbf{a}}_{ij} R_i R_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{\mathbf{b}}_{ij} S_i S_j, \quad \mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^n \phi_i S_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} R_i S_j, \quad (31)$$

где $\bar{\mathbf{a}}_{ij}, \bar{\mathbf{b}}_{ij}, \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}$ – векторы коэффициентов, подлежащие определению.

Здесь, для краткости изложения, в отличие от случая работы в модальном базисе, выражения перехода записаны во втором, а не третьем, приближении.

Как отмечено выше, цель рассматриваемого подхода – построение нормальной формы для $n \ll N$ без необходимости вычисления высших, вторичных форм колебаний и соответствующих им компонент нелинейной восстанавливающей силы. В работе [23] показано, что задача нахождения коэффициентов нелинейной замены координат (31) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_{ij} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij} + \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij}), \quad \mathbf{b}_{ij} = \frac{1}{2\omega_i\omega_j}(\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij} - \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij}), \\ \gamma_{ij} &= \frac{\omega_j - \omega_i}{\omega_j}\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij} + \frac{\omega_j + \omega_i}{\omega_j}\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij} &= \left[(+\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K} \right]^{-1} \mathbf{G}(\phi_i, \phi_j), \\ \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij} &= \left[(-\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K} \right]^{-1} \mathbf{G}(\phi_i, \phi_j). \end{aligned} \quad (33)$$

В отношении метода вычисления векторов $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij}, \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij}$ прежде всего отметим, что векторы квадратичных компонент узловых сил реакции $\mathbf{G}(\phi_i, \phi_j)$, входящие в правую часть, есть результат ранее описанной процедуры идентификации нелинейной жесткости STER. Необходимость работы с полноразмерными матрицами масс и жесткостей КЭ-модели, следующая из выражений (33), в практической реализации не представляет трудностей, так как может выполняться посредством вычислительно эффективных численных алгоритмов используемой программной системы КЭ-анализа. В частности, вместо вычисления обратных матриц размерности N , входящих в правые части выражений (33), можно формально поставить задачу статического нагружения силами $\mathbf{G}(\phi_i, \phi_j)$ некоторой «механической» системы с соответствующей матрицей жесткости

$$\left[(\pm\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K} \right].$$

Также отметим, что из выражений (33) следует вырожденность получаемых соотношений в случае внутреннего резонанса второго порядка, т.е. в случае

$$\pm\omega_i + \omega_j \cong \omega_k$$

для некоторых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $k \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Здесь нумерация собственных частот такова, что первые n частот из них есть главные; для них и происходит вычисление нормальной формы Пуанкаре.

Динамика нелинейных нормальных мод во втором приближении, в рамках подхода DNF, описывается уравнениями вида

$$\ddot{R}_r + \omega_r^2 R_r + \sum_{i,j,k=1}^n \left[(A_{ijk}^r + h_{ijk}^r) R_i R_j R_k + B_{ijk}^r R_i \dot{R}_j \dot{R}_k \right] = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

где

$$\bar{\mathbf{A}}_{ijk} = 2\mathbf{G}(\phi_i, \bar{\mathbf{a}}_{jk}), \quad \mathbf{A}_{ijk} = \Phi^T \bar{\mathbf{A}}_{ijk}, \quad \bar{\mathbf{B}}_{ijk} = 2\mathbf{G}(\phi_i, \bar{\mathbf{b}}_{jk}), \quad \mathbf{B}_{ijk} = \Phi^T \bar{\mathbf{B}}_{ijk}. \quad (35)$$

Существенно, что в отличие от построения нормальной формы в модальном базисе, вычисление коэффициентов $\mathbf{A}_{ijk}, \mathbf{B}_{ijk}$ по формулам (35) требует знания лишь главных форм колебаний, а также проведения дополнительного этапа процедуры STER на расширенном пространстве базисных векторов $\{\phi_i, \bar{\mathbf{a}}_{jk}\}_{i,j,k=1}^n$.

Изложенный численный алгоритм построения прямой нормальной формы был реализован авторами настоящей работы на базе программной системы КЭ-анализа ABAQUS с применением языков программирования Python и Matlab. Далее представлены

результаты верификации алгоритма на основе приближенного аналитического решения модельной задачи об изгибных колебаниях балки, защемленной с двух концов.

Пролетная балка: модель продольно-изгибных колебаний

В рамках механической модели Бернулли – Эйлера для балки постоянного сечения, связанные продольно-изгибные колебания малой, но конечной амплитуды описываются следующей системой нелинейных уравнений в частных производных [25]:

$$\begin{aligned} m\ddot{u} - EAu'' &= EA\left(\frac{1}{2}v'^2 - u'v'^2\right)' + EI\left[v'(v'' - u''v' - 2u''v'' - 3u'v''')\right]', \\ m\ddot{v} - j_3\ddot{v}'' + EIv^{IV} &= EA\left(u'v' - u'^2v' + \frac{1}{2}v'^3\right)' + \\ &+ EI\left[u'v'' + (u'v')'' - (u'^2 - v'^2)v'' - u'(u'v')'' - \left(u'^2v' - \frac{1}{3}v'^3\right)''\right]' + F, \end{aligned} \quad (36)$$

где $u(x, t)$, $v(x, t)$ – продольная и поперечная компоненты вектора перемещений; m , A – погонная масса и площадь сечения; E – модуль Юнга материала; I , j_3 – геометрический и массовый моменты инерции сечения; штрихом и точкой обозначены производные по продольной координате x и времени t , соответственно.

Принято, что внешние нагрузки действуют на балку только в поперечном направлении и имеют распределение $F(x, t)$.

В предположении о малости амплитуд продольных перемещений, по сравнению с поперечными, т. е. $u = O(v^2)$, и тонкости стержня $h \ll L$ (h – толщина стержня, т.е. высота сечения в плоскости изгиба, L – длина стержня) можно пренебречь силами инерции сечения на поворот и записать упрощенную асимптотически корректную модель системы:

$$\begin{aligned} m\ddot{v} + EIv^{IV} - EA\left[u'v' + \frac{1}{2}v'^3\right] &= F(x, t), \\ m\ddot{u} - EA(u'' + v'v'') &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Перейдем к безразмерным величинам и параметрам:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{v}{h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{u} = \frac{L}{h^2}u, \quad \bar{t} = \frac{t}{T_0}, \quad T_0 = L^2\sqrt{\frac{m}{EI}}, \\ f(\bar{x}, \bar{t}) &= \frac{L^4}{EI(h)}F(L\bar{x}, T_0\bar{t}), \quad \beta = \frac{Ah^2}{I}, \quad \mu = \frac{1}{AL^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Затем получим уравнения в безразмерном виде:

$$\ddot{v} + v^{IV} - \beta\left[u'v' + \frac{1}{2}v'^3\right]' = f(x, t), \quad \mu\ddot{u} - (u'' + v'v'') = 0. \quad (39)$$

Здесь опущена черта в обозначениях безразмерных величин; точкой и штрихом отмечены производные по безразмерному времени и продольной координате.

Далее выполним модальную дискретизацию континуальной системы методом Галёркина. Функции поперечных и продольных перемещений представляются в виде рядов по собственным формам колебаний:

$$v(x, t) = \sum_{r=1}^{n_b} \Phi_r(x)\eta_r(t), \quad u(x, t) = \sum_{s=n_b+1}^n \Psi_s(x)p_s(t). \quad (40)$$

Формы свободных изгибных и продольных колебаний балки (стержня), защемленной с двух концов, имеют следующий вид:



$$\Phi_r(x) = A_r \begin{bmatrix} (\sin \alpha_r - \sinh \alpha_r)(\cos \alpha_r x - \cosh \alpha_r x) - \\ -(\cos \alpha_r - \cosh \alpha_r)(\sin \alpha_r x - \sinh \alpha_r x) \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$\Psi_s(x) = B_s \sin(s\pi x),$$

где α_r являются корнями трансцендентного уравнения

$$\cos(\alpha_r) \cdot \cosh(\alpha_r) - 1 = 0, \quad (42)$$

а амплитудные множители A_r , B_s определяются из условия нормировки собственных функций по модальной массе:

$$\int_0^1 \Phi_r^2 dx = \int_0^1 \Psi_s^2 dx = 1. \quad (43)$$

Подставив ряды (40) в уравнения (39) и записав условия минимизации невязки, приходим к системе нелинейных дифференциальных уравнений в модальных координатах:

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=n_b+1}^n g_{ij}^r \eta_i p_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk}^r \eta_i \eta_j \eta_k = Q_r, \quad r = 1, 2, \dots, n_b, \quad (44)$$

$$\ddot{p}_s + \omega_s^2 p_s + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=1}^{n_b} g_{ij}^s \eta_i \eta_j = 0, \quad s = n_b + 1, n_b + 2, \dots, n,$$

где модальные нагрузки

$$Q_r(t) = \int_0^1 \Phi_r(x) F(x, t) dx, \quad \omega_r = \alpha_r^2, \quad \omega_s = \mu^{-0.5} \pi s,$$

а квадратичные и кубические коэффициенты жесткости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} g_{ij}^r &= -\beta \int_0^1 (\Psi_r \Phi'_i)' \Phi_r dx, \quad r = 1, 2, \dots, n_b, \\ h_{ijk}^r &= -\frac{\beta}{2} \int_0^1 (\Phi'_i \Phi'_j \Phi'_k)' \Phi_r dx, \quad r = 1, 2, \dots, n_b, \\ g_{ij}^s &= -\frac{1}{\mu} \int_0^1 \Psi_s \Phi'_i \Phi''_j dx, \quad s = n_b + 1, n_b + 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (45)$$

Следуя общей теории, изложенной в первой части статьи, отметим, что модель (44) представляет собой конкретный пример тонкостенной упругой системы с существенной нелинейной связанностью между изгибными и продольными формами колебаний (см. уравнения (22)). Численную идентификацию коэффициентов мультилинейных форм \mathbf{g} и \mathbf{h} можно выполнить с помощью процедуры STEP, что позволяет верифицировать разработанный алгоритм определения нелинейной жесткостной характеристики путем сопоставления результатов с аналитическими выражениями для этих коэффициентов.

Далее представлены результаты такой верификации в случае редукции континуальной системы к трем нижним изгибным формам. В качестве примера рассмотрена балка длиной 1 м, шириной 50 мм и толщиной 1 мм, изготовленная из стали с модулем Юнга, равным 210 ГПа и объемной плотностью 7800 кг/м³.

Зависимость результатов от величины коэффициента Пуассона ν далее рассматривается отдельно; на первом этапе, в целях прямого сопоставления численного и аналитического решений принималось значение $\nu = 0$. Аналитическое решение было получено на основе моделей продольных колебаний стержня и изгибных колебаний балки Бернулли – Эйлера.

На рис. 1 показаны поля перемещений конструкции, сообщаемых ей кинематически в ходе некоторых из внутренних этапов процедуры STEP.

В табл. 1 и 2 приведены значения коэффициентов трилинейной формы h , полученные аналитически и численно методом STEP в оболочечной (конечный элемент первого порядка S4R программной системы ABAQUS) и объемной (элемент второго порядка C3D20R) конечно-элементных (КЭ) постановках, а также величины относительных

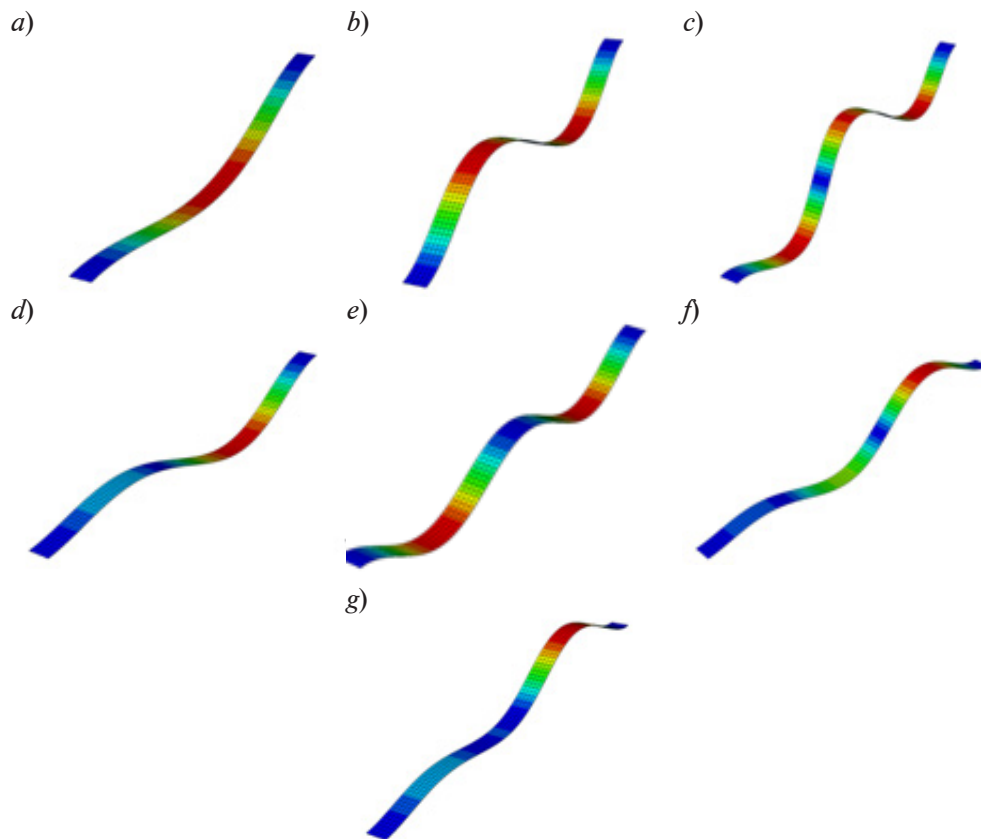


Рис. 1. Сценарии кинематического нагружения конструкции по ее формам колебаний:
 $-\phi_1 q_1$ (a), $-\phi_2 q_2$ (b), $-\phi_3 q_3$ (c), $-\phi_1 q_1 - \phi_2 q_2$ (d), $-\phi_1 q_1 - \phi_3 q_3$ (e),
 $\phi_3 q_3 + \phi_2 q_2$ (f), $\phi_1 q_1 + \phi_3 q_3 + \phi_2 q_2$ (g)

Таблица 1

Коэффициенты трилинейной формы h
(в модальных координатах), полученные аналитически

h_{ijk}	Значение коэффициента		
	Форма 1	Форма 2	Форма 3
h_{111}	1334	–	–936,0
h_{112}	–	2432	–
h_{113}	–935,9	–	7230
h_{122}	2432	–	–248,0
h_{133}	7230	–	–14847
h_{222}	–	21284	–
h_{223}	–248,0	–	23971
h_{132}	–	–248,0	–
h_{333}	–14847	–	95642

Таблица 2

Коэффициенты трилинейной формы h
(в модальных координатах), полученные численно
методом STEP в оболочечной и объемной КЭ-постановках

h_{ijk}	Значения коэффициента и погрешности					
	Форма 1		Форма 2		Форма 3	
	<u>SF</u> $\delta, \%$	<u>BF</u> $\delta, \%$	<u>SF</u> $\delta, \%$	<u>BF</u> $\delta, \%$	<u>SF</u> $\delta, \%$	<u>BF</u> $\delta, \%$
h_{111}	<u>1332</u> 0,1	<u>2645</u> 98,2	–	–	<u>–937,9</u> 0,2	<u>–1852</u> 97,9
h_{112}	–	–	<u>2432</u> 0,01	<u>4821</u> 98,2	–	–
h_{113}	<u>–941,1</u> 0,6	<u>–1857</u> 98,4	–	–	<u>7257</u> 0,3	<u>14333</u> 98,2
h_{122}	<u>2416</u> 0,6	<u>4802</u> 97,4	–	–	<u>–260,5</u> 5,0	<u>–490,9</u> 97,9
h_{133}	<u>7286</u> 0,8	<u>14372</u> 98,8	–	–	<u>–15028</u> 1,2	<u>–29469</u> 98,5
h_{222}	–	–	<u>21217</u> 0,3	<u>42032</u> 97,5	–	–
h_{223}	<u>–260,9</u> 5,2	<u>–490,3</u> 97,7	–	–	<u>23944</u> 0,1	<u>41335</u> 72,4
h_{132}	–	–	<u>–263,1</u> 6,1	<u>–490,6</u> 97,8	–	–
h_{333}	<u>–15088</u> 1,6	<u>–29552</u> 99,1	–	–	<u>96930</u> 1,3	<u>190132</u> 98,8

Обозначения: SF, BF – оболочечная и объемная постановки (англ. Shell & Bulk Formulations) задачи; δ – относительная погрешность в сопоставлении с аналитическими значениями коэффициентов (см. табл. 1).

Примечание. Прочерки в табл. 1 и 2 заменяют пренебрежимо малые значения коэффициентов.

погрешностей в сопоставлении с аналитическими значениями коэффициентов. Прочерки во всех таблицах заменяют пренебрежимо малые значения данных коэффициентов.

Из представленных результатов следует, что численная реализация процедуры STEP в применении к оболочечным конечным элементам характеризуется высокой точностью; наблюдаемые погрешности порядка долей и единиц процентов могут быть вызваны сеточной дискретизацией, с одной стороны, и кинематическими допущениями балочной модели Бернулли – Эйлера, с другой. В то же время расчет в объемной конечно-элементной постановке приводит к завышенным (примерно в два раза) значениям коэффициентов нелинейной жесткости. Это вызвано отмеченной выше существенной деформационной связанностью рассматриваемых нижних изгибных форм колебаний с множеством форм объемного деформирования твердого тела. Подробное обсуждение и теоретическое обоснование этих эффектов приведено в статье [14].

Ключевым соображением здесь выступает следующее: в оболочечной КЭ-постановке модель обладает существенно менее полным спектром собственных частот колебаний, по сравнению с объемной постановкой, в связи с выполнением кинематических гипотез теории оболочек Рейсснера – Миндлина.

Поэтому жесткое кинематическое нагружение конструкции по некоторой форме изгибных колебаний вызывает внутренние силы упругого сопротивления деформированию по меньшему, для оболочечной постановки, числу высших форм колебаний, чем в случае прямого трехмерного моделирования твердого тела.

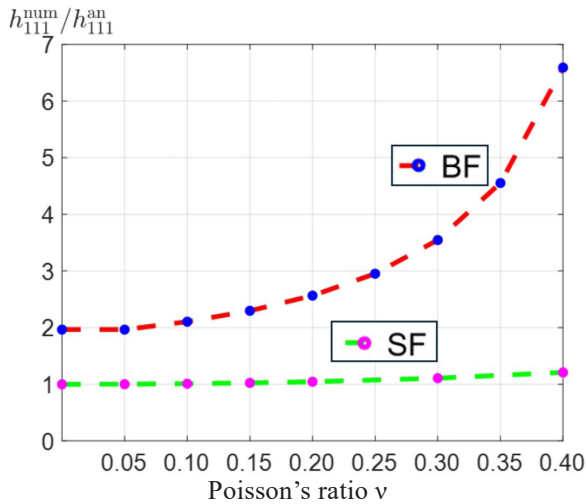


Рис. 2. Отношение кубического коэффициента h_{111}^{num} к своему аналитическому значению h_{111}^{an} при вариации значения коэффициента Пуассона ν для двух постановок

Следует также отметить зависимость коэффициентов нелинейной жесткости от величины коэффициента Пуассона. На рис. 2 показано отношение кубического коэффициента h_{111}^1 к полученному аналитическому значению для оболочечной (Shell) и объемной (Bulk) КЭ-постановок в виде функции от величины ν .

Таким образом, проведена верификация процедуры определения коэффициентов нелинейной восстанавливающей силы в модальном базисе STEP. Как отмечено выше, наличие сильных нелинейных связей нижних изгибных форм колебаний с высокочастотными формами деформирования конструкций как в объемной, так и в оболочечной КЭ-постановках, приводит к медленной сходимости модального разложения при определении нелинейной жесткостной характеристики. Далее выполняется верификация численного алгоритма построения

прямой нормальной формы DNF, позволяющего строить корректные модели пониженного порядка для континуальных упругих систем.

Пролетная балка: учет растяжимости срединной линии

При рассмотрении изгибных колебаний тонких балок, силы инерции в продольном направлении, выражающиеся как $m\ddot{u}$, можно считать пренебрежимо малыми в отсутствие внутренних комбинационных продольно-изгибных резонансов. Это допущение позволяет квазистатически разрешить во втором уравнении (39) продольные перемещения u через поперечные перемещения v :

$$u'' = -\left(\frac{1}{2}v'^2\right)', \quad u = -\frac{1}{2}\int_0^x v'^2 ds + c_1(t)x + c_2(t), \quad (46)$$

что с учетом граничных условий $u(0, t) = u(1, t) = 0$ дает

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 v'^2 ds. \quad (47)$$

Подстановка выражений (46) в первое уравнение (39) приводит к интегродифференциальному уравнению изгибных колебаний пролетной балки с учетом фактора растяжимости срединной линии:

$$\ddot{v} + v^{IV} = \frac{\beta}{2}\left(\int_0^1 v'^2 dx\right) \cdot v'' + f(x, t). \quad (48)$$

Используем модальную дискретизацию методом Галёркина. Функции поперечных перемещений представляются в виде ряда по собственным формам колебаний (см. первое уравнение (41)):

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{n_b} \Phi_i(x)\eta_i(t). \quad (49)$$

Приходим к системе нелинейных дифференциальных уравнений в модальных координатах:



$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=1}^{n_b} \sum_{l=1}^{n_b} \Gamma_{ijl}^r \eta_i \eta_j \eta_l = Q_r, \quad r = 1, 2, \dots, n_b, \quad (50)$$

где

$$\Gamma_{ijk}^r = -\frac{\beta}{2} \int_0^1 \Phi_r \Phi''_i dx \int_0^1 \Phi'_j \Phi'_k dx. \quad (51)$$

Система (50) демонстрирует конкретный пример уравнений типа (24), учитывающих квазистатический вклад деформирования по высшим формам колебаний в нелинейную динамику низкомодовых изгибных колебаний. Как показано выше, такая модель служит аналитическим эталоном для верификации численного алгоритма DNF построения нормальной формы Пуанкаре на базе метода конечных элементов.

Верификация заключается в сопоставлении динамических систем (34) и (50). Существенно, что эти системы описывают нелинейную динамику конструкции в разных обобщенных координатах – нормальных (\mathbf{R}, \mathbf{S}) и модальных (η) соответственно, связь между которыми можно найти путем проецирования общего представления (31) на линейное подпространство рабочих собственных форм Φ :

$$\phi_r^T \mathbf{M} \mathbf{U} \equiv \eta_r = R_r + \phi_r^T \mathbf{M} \sum_{i,j=1}^{n_b} \bar{\mathbf{a}}_{ij} R_i R_j + \phi_r^T \mathbf{M} \sum_{i,j=1}^{n_b} \bar{\mathbf{b}}_{ij} S_i S_j. \quad (52)$$

Подстановка в систему (50) выражений для η_r и $\dot{\eta}_r$ (согласно равенствам (52)) и последующее разрешение полученных дифференциальных уравнений относительно старших производных с помощью разложений нелинейных членов в ряд Тейлора позволяет прийти к уравнениям в нормальных координатах типа (34):

$$\ddot{R}_r + \omega_r^2 R_r + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=i}^{n_b} \sum_{k=l}^{n_b} \tilde{\Gamma}_{ijk}^r R_i R_j R_k + \dots = Q_r, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (53)$$

где для краткости используется верхнедиагональная форма индексации коэффициентов нелинейной восстанавливающей силы; явно выписаны лишь те основные мономы третьей степени, присутствующие в аналитической модели (50).

Таблица 3

Сопоставление значений коэффициентов нелинейной жесткости (в нормальных координатах инвариантного подмногообразия), полученных аналитически и численно методом STEP в объемной КЭ-постановке

Γ_{ijk}	Значения коэффициента и погрешности					
	Форма 1		Форма 2		Форма 3	
	AS	BF(δ ,%)	AS	BF(δ ,%)	AS	BF(δ ,%)
Γ_{111}	908,1	907.6(0,06)	–	–	–718,3	–717,0(0,18)
Γ_{112}	–	–	3399	3397(0,06)	–	–
Γ_{113}	–2155	–2157(0,09)	–	–	8437	8432(0,06)
Γ_{122}	3399	3384(0,44)	–	–	–2689	–2673(0,60)
Γ_{133}	8437	8460(0,27)	–	–	–17324	–17335(0,06)
Γ_{222}	–	–	12724	12670(0,42)	–	–
Γ_{223}	–2689	–2683(0,22)	–	–	27327	27210(0,43)
Γ_{233}	–	–	27327	27391(0,23)	–	–
Γ_{333}	–5775	–5893(2,04)	–	–	58693	58826(0,23)

Обозначения: AS – аналитическое решение (англ. Analytical Solution), BF – объемная постановка задачи (англ. Bulk Formulation); δ – относительная погрешность в сопоставлении с аналитическим значением коэффициента.

Примечание. Прочерки в клетках табл. 3 заменяют пренебрежимо малые значения коэффициентов.

Как следует из данных табл. 3, наблюдается хорошее совпадение аналитических и численных результатов (отклонение в значениях коэффициентов составляет не более 2,1%). Для диагональных коэффициентов нелинейной жесткости Γ_{rr}^r можно заметить их существенное снижение, по сравнению с результатами процедуры STEP (см. табл. 2), что отражает факт сильного межмодального взаимодействия изгибных и объемных форм колебаний. Столь же заметны различия в значениях и внедиагональных коэффициентов. В целом полученные результаты показывают на конкретном примере невозможность прямой редукции упругой системы к своему модальному линейному подпространству при исследовании нелинейной динамики и подтверждают точность и универсальность метода понижения порядка путем сведения многомерной динамической системы (конечно-элементной модели конструкции) к своему инвариантному подмножеству, связанному с рабочими нелинейными нормальными модами.

Нелинейный статический расчет конструкции на внешнее силовое воздействие

Для демонстрации возможностей изложенных методов моделирования был проведен статический расчет рассмотренной тестовой конструкции (тонкой защемленной балки) на равномерно распределенное поперечное силовое воздействие. Расчет проводился классическим методом конечных элементов в ПС ABAQUS в геометрически линейной и нелинейной постановках, а также на основе рассмотренных вариантов синтеза компактных моделей: методом модальной редукции STEP в оболочечной и объемной КЭ-постановках и методом построения прямой нормальной формы DNF на базе модели с объемными конечными элементами.

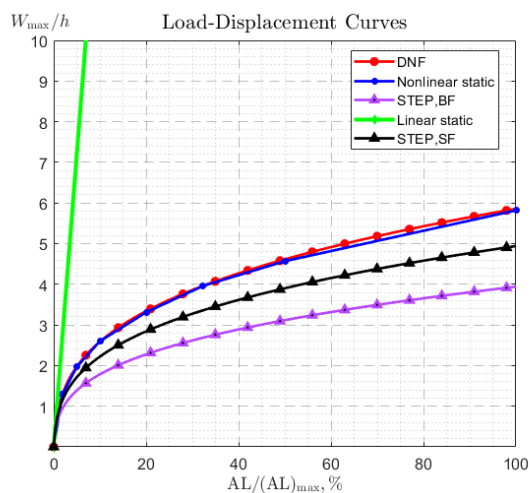


Рис. 3. Диаграммы «нагрузка-перемещение», полученные для тестовой конструкции (тонкой защемленной балки толщиной h) путем различных расчетных подходов (см. пояснения в тексте).

Обозначения: SF, BF – оболочечная и объемная постановки (*англ.* Shell & Bulk Formulations) задачи; DNF – “Direct Normal Form”; STEP – “Stiffness Evaluation Procedure”; Nonlinear & Linear statics – нелинейный и линейный статические расчеты; AL (Applied Load) – приложенная нагрузка

На рис. 3 приведено сравнение кривых «сила-перемещение» для перечисленных расчетных подходов. Прогиб в центральном сечении балки отнесен к ее толщине; амплитуда внешней нагрузки указана в процентах по отношению к своему максимальному значению. Видно, что, для рассмотренного диапазона значений прогиба фактор геометрической нелинейности имеет определяющее значение. При этом нелинейная жесткость конструкции, вычисленная по методу STEP, существенно превышает свою истинную величину (линия “Nonlinear static”). Также явно наблюдается отмеченное ранее различие между оболочечной и объемной постановками при проведении прямой модальной редукции. Метод построения нормальной формы демонстрирует, как и ожидалось, практически полное совпадение с результатом прямого нелинейного конечно-элементного расчета. При этом необходимо отметить вычислительную эффективность построенной модели пониженного порядка: ее размерность в данном случае равна трем, в то время как исходная КЭ-модель имеет 8295 степеней свободы.

Заключение

Таким образом, была разработана и верифицирована методика автоматизированного синтеза динамических моделей пониженного порядка для континуальных упругих систем в геометрически нелинейной постановке на базе метода конечных элементов. В основе рассмотренного подхода лежит идея идентификации нелинейной (квадратично-



кубической) жесткостью характеристики упругой системы в ее модальных координатах с последующим применением аппарата теории нелинейных нормальных мод и нормальных форм Пуанкаре для построения инвариантного многообразия, касательного к выбранному модальному подпространству.

Показано, что получаемая таким образом динамическая модель пониженного порядка учитывает нелинейную упругую связанность рабочих форм колебаний с высокочастотными продольными и объемными модами конструкции, что обеспечивает корректность вычисляемой нелинейной жесткостью характеристики системы по выбранным главным координатам. Разработанный алгоритм был использован для построения нелинейной модели продольно-изгибных колебаний пролетной балки и ее верификации на базе приближенного аналитического решения методом Галёркина.

Продемонстрирована вычислительная эффективность, точность и универсальность реализованного подхода к построению моделей пониженного порядка для упругих конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Benner P., Grivet-Talocia S., Quarteroni A., Rozza G., Schilders W., Silveira L.** (Eds.) Model order reduction. Vol. 1: System- and data-driven methods and algorithms. Berlin, Boston: Walter De Gruyter, 2021. 388 p.
2. In the same edition. Vol. 2: Snapshot-based methods and algorithms. Berlin, Boston: Walter De Gruyter, 2021. 348 p.
3. In the same edition. Vol. 3: Applications. Berlin, Boston: Walter De Gruyter, 2021. 466 p.
4. **Cenedese M., Marconi J., Haller G., Jain S.** Data-assisted non-intrusive model reduction for forced nonlinear finite elements models // *Nonlinear Dynamics*. 2025. Vol. 113. No. 7. Pp. 6465–6489.
5. **Chen W., Henneron T., Clénet S., Delagnes T., Zou J.** Model order reduction of an electro-quasistatic problem using CLN method // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2024. Vol. 238. 1 October. P. 104185.
6. **Flament T., Deü J. F., Placzek A., Balmaseda M., Tran D. M.** Reduced-order model of geometrically nonlinear flexible structures for fluid–structure interaction applications // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2024. Vol. 158. January. P. 104587.
7. **Gazzola C., Zega V., Corigliano A., Lotton P., Melon M.** A reduced-order-model-based equivalent circuit for piezoelectric micro-electro-mechanical-system loudspeakers modeling // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2024. Vol. 155. No. 2. Pp. 1503–1514.
8. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука. Главная редакция физико-механической литературы, 1980. 512 с.
9. **Muravyov A. A., Rizzi S. A.** Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures // *Computers and Structures*. 2023. Vol. 81. No. 15. Pp. 1513–1523.
10. **Mignolet M. P., Przekop A., Rizzi S. A., Spottswood S. M.** A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures // *Journal of Sound and Vibration*. 2013. Vol. 332. No. 10. Pp. 2437–2460.
11. **Touzé C., Vizzaccaro A., Thomas O.** Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques // *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 105. No. 2. Pp. 1141–1190.
12. **Perez R., Wang X. Q., Mignolet M. P.** Nonintrusive structural dynamic reduced order modeling for large deformations: Enhancements for complex structures // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2014. Vol. 9. No. 3. P. 031008.
13. **Givois A., Grolet A., Thomas O., Deü J. F.** On the frequency response computation of geometrically nonlinear flat structures using reduced-order finite element models // *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 97. No. 2. Pp. 1747–1781.
14. **Vizzaccaro A., Givois A., Longobardi P., Shen Y., Deü, J. F., Salles L., Touzé C., Thomas O.** Non-intrusive reduced order modelling for the dynamics of geometrically nonlinear flat structures using three-dimensional finite elements // *Computational Mechanics*. 2020. Vol. 66. No. 6. Pp. 1293–1319.

15. **Kuznetsov Y. A.** Elements of applied bifurcation theory. 4th ed. (Book Series: Applied Mathematical Sciences, Vol. 112). Cham, Switzerland: Springer Nature, 2023. p.
16. **Touzé C.** Normal form theory and nonlinear normal modes: Theoretical settings and applications (Chapter) // G. Kerschen (Ed.) Modal analysis of nonlinear mechanical systems (Book Series “CISM International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures”, Vol. 555). Vienna: Springer International Publishing, 2014. Pp. 75–160.
17. **Ляпунов А. М.** Общая задача об устойчивости движения. Москва – Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. (Серия: Классики естествознания). 472 с.
18. **Vakakis A. F., Rand R. H.** Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system-I. Low energies // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1992. Vol. 27. No. 5. Pp. 861–874.
19. **Shaw S. W., Pierre C.** Non-linear normal modes and invariant manifolds // Journal of Sound and Vibration. 1991. Vol. 150. No. 1. Pp. 170–173.
20. **Haller G., Ponsioen S.** Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 86. No. 3. Pp. 1493–1534.
21. **Арнольд В. И.** Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.: Ижевская республиканская типография, 2000. 400 с.
22. **Nayfeh A. H.** The method of normal forms. 2nd ed. Berlin: Wiley-VCH, 2011. 330 p.
23. **Vizzaccaro A., Shen Y., Salles L., Blahoš J., Touzé C.** Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2021. Vol. 384. 1 October. P. 113957.
24. **Touzé C., Thomas O., Chaigne A.** Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes // Journal of Sound and Vibration. 2004. Vol. 273. No. 1–2. Pp. 77–101.
25. **Nayfeh A. H., Pai P. F.** Linear and nonlinear structural mechanics. New York: John Wiley & Sons, Inc. 2004. 763 p.

REFERENCES

1. **Benner P., Grivet-Talocia S., Quarteroni A., et al.** (Eds.), Model order reduction. Vol. 1: System- and data-driven methods and algorithms, Walter De Gruyter, Berlin, Boston, 2021.
2. In the same edition: Vol. 2: Snapshot-based methods and algorithms. Walter De Gruyter, Berlin, Boston, 2021.
3. In the same edition: Vol. 3: Applications. Walter De Gruyter, Berlin, Boston, 2021.
4. **Cenedese M., Marconi J., Haller G., Jain S.,** Data-assisted non-intrusive model reduction for forced nonlinear finite elements models, Nonlinear Dyn. 113 (7) (2025) 6465–6489.
5. **Chen W., Henneron T., Clénet S., et al.,** Model order reduction of an electro-quasistatic problem using CLN method, Finite Elem. Anal. Des. 238 (1 Oct) (2024) 104185.
6. **Flament T., Deü J. F., Placzek A., et al.,** Reduced-order model of geometrically nonlinear flexible structures for fluid–structure interaction applications, Int. J. NonLin. Mech. 158 (Jan) (2024) 104587.
7. **Gazzola C., Zega V., Corigliano A., et al.,** A reduced-order-model-based equivalent circuit for piezoelectric micro-electro-mechanical-system loudspeakers modeling, J. Acoust. Soc. Am. 155 (2) (2024) 1503–1514.
8. **Lurie A. I.,** Nonlinear theory of elasticity (North-Holland Ser. in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 36), Elsevier Science Publishers, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1990.
9. **Muravyov A. A., Rizzi S. A.,** Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures, Comput. Struct. 81 (15) (2023) 1513–1523.
10. **Mignolet M. P., Przekop A., Rizzi S. A., Spottswood S. M.,** A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures, J. Sound Vib. 332 (10) (2013) 2437–2460.
11. **Touzé C., Vizzaccaro A., Thomas O.,** Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques, Nonlinear Dyn. 105 (2) (2021) 1141–1190.
12. **Perez R., Wang X. Q., Mignolet M. P.,** Nonintrusive structural dynamic reduced order modeling for large deformations: Enhancements for complex structures, J. Comput. Nonlinear. Dyn. 9 (3) (2014) 031008.



13. Givois A., Grolet A., Thomas O., Deü J. F., On the frequency response computation of geometrically nonlinear flat structures using reduced-order finite element models, *Nonlinear Dyn.* 97 (2) (2019) 1747–1781.
14. Vizzaccaro A., Givois A., Longobardi P., et al., Non-intrusive reduced order modelling for the dynamics of geometrically nonlinear flat structures using three-dimensional finite elements, *Comput. Mech.* 66 (6) (2020) 1293–1319.
15. Kuznetsov Y. A., *Elements of applied bifurcation theory*, 4th ed. (Book Ser.: Applied Mathematical Sciences, Vol. 112). Springer Nature, Cham, Switzerland, 2023.
16. Touzé C. Normal form theory and nonlinear normal modes: Theoretical settings and applications (Chapter), In book: G. Kerschen (Ed.), *Modal analysis of nonlinear mechanical systems* (Book Ser. “CISM International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures”, Vol. 555). Springer International Publishing, Vienna (2014) 75–160.
17. Lyapunov A. M., *The general problem of the stability of motion*, Taylor & Francis, London, Washington, DC, 1992.
18. Vakakis A. F., Rand R. H., Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system-I. Low energies, *Int. J. Non-Linear Mech.* 27 (5) (1992) 861–874.
19. Shaw S. W., Pierre C., Non-linear normal modes and invariant manifolds, *J. Sound Vib.* 150 (1) (1991) 170–173.
20. Haller G., Ponsioen S., Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction, *Nonlinear Dyn.* 86 (3) (2016) 1493–1534.
21. Arnold V. I., *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, 2-nd ed., New York: Springer-Verlag, 1988.
22. Nayfeh A. H., *The method of normal forms*. 2nd ed., Wiley-VCH, Berlin, 2011.
23. Vizzaccaro A., Shen Y., Salles L., et al., Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 384 (1 Oct) (2021) 113957.
24. Touzé C., Thomas O., Chaigne A., Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes, *J. Sound Vib.* 273 (1–2) (2004) 77–101.
25. Nayfeh A. H., Pai P. F., *Linear and nonlinear structural mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2004.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЛУКИН Алексей Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

lukin_av@spbstu.ru

ORCID: 0000-0003-2016-8612

ПОПОВ Иван Алексеевич – ведущий инженер Высшей школы передовых цифровых технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

popov_ia@spbstu.ru

ПИСКУН Никита Дмитриевич – инженер Высшей школы передовых цифровых технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

piskun_nd@spbstu.ru

АНТУФЬЕВ Денис Викторович – инженер Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

antufiev_dv@spbstu.ru

ORCID: 0009-0000-6354-9621

THE AUTHORS

LUKIN Aleksei V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

lukin_av@spbstu.ru

ORCID: 0000-0003-2016-8612

ПОПОВ Иван А.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

popov_ia@spbstu.ru

PISKUN Nikita D.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

piskun_nd@spbstu.ru

ANTUFIEV Denis V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

antufiev_dv@spbstu.ru

ORCID: 0009-0000-6354-9621

*Статья поступила в редакцию 03.06.2025. Одобрена после рецензирования 05.09.2025.
Принята 05.09.2025.*

Received 03.06.2025. Approved after reviewing 05.09.2025. Accepted 05.09.2025.