Математическая физика

Научная статья
УДК 537.534.7, 543.51
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.18406

АНАЛИТИЧЕСКИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ РАДИОЧАСТОТНЫХ ИОННЫХ ВОРОНОК ОБЩЕГО ВИДА С ПРЯМОЙ ОСЬЮ

А. С. Бердников [1]✉, Н. К. Краснова [2], С. В. Масюкевич [1], Е. П. Подольская [1], К. В. Соловьев [2,1]

[1] Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия;

[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

✉ asberd@yandex.ru

Аннотация. В статье представлены аналитические формулы для потенциалов электрических полей, которые соответствуют радиочастотным воронкам с прямолинейным каналом транспортировки общего вида, в частности воронок с криволинейным профилем канала, с мультипольными диафрагмами, с неравномерно расположенными электродами. При определении электрических полей, за основу было взято распределение электрического потенциала на оси устройства. Полученные выражения целесообразно использовать для быстрого качественного моделирования радиочастотных устройств, предназначенных для изолирования, транспортировки и фокусировки ионов, а также при решении соответствующих задач математической физики.

Ключевые слова: аналитическое решение уравнения Лапласа, аналитическое электрическое поле, электронно-оптическая система

Финансирование: Исследование выполнено в рамках темы FFZM-2025-0006 Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 075-00444-25-00 от 26.12.2024.

Для цитирования: Бердников А. С., Краснова Н. К., Масюкевич С. В., Подольская Е. П., Соловьев К. В. Аналитические квадратурные формулы для электрических полей радиочастотных ионных воронок общего вида с прямой осью // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 4. С. 75—100. DOI: https://doi.org/10.18721/ JPM.18406

Original article
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.18406

ANALYTICAL QUADRATURE FORMULAE FOR ELECTRIC FIELDS OF THE RF STRAIGHT-AXIS ION FUNNELS OF A GENERAL TYPE

A. S. Berdnikov [1]✉, N. K. Krasnova [2], S. V. Masyukevich [1], E. P. Podolskaya [1], K. V. Solovyev [2,1]

[1] Institute for Analytical Instrumentation, RAS, St. Petersburg, Russia;

[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

✉ asberd@yandex.ru

Abstract. The article presents analytical quadrature expressions for electric field potentials that correspond to radio-frequency straight-axis ion funnels of a general type, specifically, the funnels with a curved channel profile, with multipole diaphragms, and with unequally spaced electrodes. When determining electric fields, the distribution of electric potential over the axis of the device was taken as a basis. The resulting formulae would be appropriate for use in quick, high-quality simulating of radio-frequency devices designed for isolation, conveying and focusing ions, as well as in solving some problems of mathematical physics.

Keywords: analytical solutions of the Laplace equation, analytical electric fields, electron-optical systems with periodic electrodes, ion guides, radio-frequency ion funnels

Funding: The reported study was carried out within the framework of the theme FFZM-2025-0006 of the State Assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation No. 075-00444-235-00 dated 26.12.2024.

For citation: Berdnikov A. S., Krasnova N. K., Masyukevich S. V., Podolskaya E. P., Solovyev K. V., Analytical quadrature formulae for electric fields of the RF straight-axis ion funnels of a general type, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (4) (2025) 75–100. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.18406

Введение

Настоящее исследование является прямым продолжением материалов статей [1 – 4], где рассматриваются аналитические выражения для потенциалов электрических полей в цилиндрических и конических радиочастотных транспортирующих каналах [5, 6]. Прообразом подобных устройств следует считать цилиндрические радиочастотные ловушки типа SRIG (Stacked Ring Ion Guides), впервые предложенные авторами публикаций [7, 8] и подробно исследованные в работах [5, 9 – 11, 12]. Конические радиочастотные воронки, которые относятся к следующему поколению устройств такого типа, рассмотрены и подробно изучены в работах [12 – 19]. Однако потенциальные возможности радиочастотных ионных воронок не исчерпываются этими простейшими случаями.

В данной работе получены и представлены аналитические формулы для электрических потенциалов; эти выражения удобно применять для быстрого качественного моделирования ионных воронок со сложной структурой. Действительно, при проектировании ионно-оптических устройств бывает целесообразно использовать радиочастотные фокусирующие воронки, профиль которых отличается от конического (см., например, статью [17]), а также квадрупольно- либо мультипольно-сегментированные электроды (см. работу [20]). Могут оказаться полезными и некруговые диафрагмы; в этом случае соответствующие электрические потенциалы являются аддитивной суперпозицией осесимметричных аналитических потенциалов и мультипольных поправок, представляющих собой аналитические решения для мультипольно-сегментированных электродов (результат разложения по азимутальному углу в сумму гармоник Фурье для коллокационных точек краевого условия одиночной диафрагмы требуемой формы). Дополнительно при оптимизации параметров радиочастотных ионных воронок сложной структуры может потребоваться неравномерное размещение диафрагм вдоль канала транспортировки и соответствующие аналитические решения.

Применение точных или приближенных аналитических моделей позволяет облегчить исследование свойств ионно-оптических устройств, а также ставить и решать обратные задачи синтеза ионно-оптических систем. В последнем случае по заданному поведению заряженных частиц восстанавливают электрическое поле, обеспечивающее указанные функциональные характеристики, а потом (в соответствии с этим электрическим полем) определяют конфигурацию электродов, реализующих требуемое устройство. Работы Ю. К. Голикова (см., например, книги [21 – 23]) наглядно демонстрируют преимущества такого подхода.

Для конструирования электрических потенциалов высокочастотных электрических полей используется принцип квазистатичности. Квазистатическая модель электрического поля, меняющегося во времени, подразумевает, что можно выразить высокочастотный потенциал этого поля в виде функции времени, задающей закон изменения напряжений на электродах, умноженной на потенциал электростатического поля, соответствующий постоянным напряжениям на электродах.

Предположение о квазистатичности высокочастотного электрического поля справедливо, когда время характерного изменения электрических напряжений на электродах существенно превышает время распространения электромагнитного возмущения в пределах устройства. Зависящий от времени множитель описывает временно́е изменение электрических напряжений, а зависящий от координат потенциал соответствует постоянным напряжениям на электродах, которые изменяются во времени синхронно и пропорционально друг другу. Хотя такой шаг есть, по сути, пренебрежение электродинамическими эффектами максвелловских уравнений, он все же допустим, если частота напряжений, прикладываемых к электродам, не слишком велика (в указанном выше смысле).

Далее рассматриваются аналитические выражения для электростатических потенциалов, которые соответствуют конфигурациям электродов, типичным для радиочастотных ионных воронок. Подразумевается, что при моделировании радиочастотных ионных воронок с прямой осью и соответствующим профилем транспортирующего канала эти электростатические потенциалы необходимо будет умножать на быстро осциллирующие функции времени, задающие закон (в большинстве случаев синусоидальный) для изменения высокочастотных напряжений на электродах. В рамках квазистатической модели электрического поля, вместо синусоидальных радиочастотных напряжений могут использоваться радиочастотные напряжения со сложным спектром и, в частности, импульсные напряжения с произвольной формой импульсов [24]. Кроме того, в зависимости от режима функционирования воронки, к электродам могут прикладываться двух- и четырехфазные радиочастотные напряжения [12], а также амплитудно-, частотно- и фазомодулированные радиочастотные напряжения [12], обеспечивающие режим A-волны при транспортировке ионов [25 − 37].

Целью данной работы является вывод аналитических квадратурных формул, которые позволяют быстро восстанавливать структуру электрического поля во всем требуемом пространстве по заданному распределению электрического потенциала на оси устройства.

Имея восстановленную структуру электрического поля, мы тем самым можем восстановить и структуру электродов, ответственных за создание соответствующего электрического поля.

Полученные аналитические решения трехмерного уравнения Лапласа представляют не только практический, но и самостоятельный научный интерес, так как их можно применять для решения задач математической физики, не имеющих прямого отношения к вопросам оптики заряженных частиц.

Теоретические предпосылки

В этом разделе приводится краткая справка о математическом аппарате, который будет использоваться при последующих математических выкладках. Мы сочли уместным включить краткое изложение этих методов во введении к данной статье, поскольку, как правило, данный материал не слишком широко известен специалистам по оптике заряженных частиц, а первоисточники, на которые можно сослаться, труднодоступны в силу раритетного происхождения и/или небольшого тиража соответствующих изданий [21 − 23].

Планарные поля. Планарные (двумерные) электростатические поля характеризуются электрическим потенциалом $U(x, y)$, который зависит лишь от двух декартовых координат и удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Хорошо известно, что вещественная и мнимая части любой аналитической функции комплексной переменной, например, имеющей вид

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), \tag{2}$$

удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа в силу того, что для этих функций выполняются условия Коши – Римана [38]:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \tag{3}$$

Если же для вещественной и мнимой частей комплекснозначной функции двух вещественных переменных существуют частные производные первого порядка и выполнены условия Коши – Римана (3), то такая функция есть аналитическая функция комплексной переменной. Это означает, что в окрестности любой точки, в которой выполняются условия (3), она разлагается в сходящийся степенной ряд и в силу этого дифференцируема сколько угодно раз.

Менее известно, что обратное утверждение тоже справедливо.

Утверждение 1. *Любую вещественную функцию двух переменных, которая удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа, можно рассматривать как вещественную (мнимую) часть некоторой аналитической функции комплексной переменной.*

Доказательство. Пусть имеется функция $u(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению (1). Соотношения (3) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных [38], заданную для неизвестной функции $v(x, y)$ при известной функции $u(x, y)$. Система уравнений разрешима, решение существует, и оно единственное с точностью до аддитивной постоянной, если для неизвестной функции $v(x, y)$ справедливо условие равенства смешанных производных:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right). \tag{4}$$

В силу гармоничности функции $u(x, y)$, для рассматриваемой системы уравнений (3) данное условие выполнено.

Решением системы уравнений (3) является следующая функция:

$$\begin{aligned} v(x,y) &= -\int_{x_0}^{x} dt\left(\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial y^2} ds\right) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u(t,y_0)}{\partial y} dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x_0,s)}{\partial x} ds + C = \\ &= +\int_{y_0}^{y} ds\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial x^2} dt\right) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x_0,s)}{\partial x} ds - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u(t,y_0)}{\partial y} dt + C, \end{aligned} \tag{5а}$$

которую также можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} v(x,y) &= -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u(t,y)}{\partial y} dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x_0,s)}{\partial x} ds + C = \\ &= +\int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x,s)}{\partial x} ds - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u(t,y_0)}{\partial y} dt + C. \end{aligned} \tag{5б}$$

Функция видов (5а) и (5б) определена однозначным образом, с точностью до вещественной аддитивной константы C, задающей значение функции $v(x_0, y_0)$. Поэтому для любой функции $u(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению (1), можно восстановить недостающую мнимую часть $v(x, y)$, которая бы обеспечивала выполнение условий Коши – Римана (3). Тем самым будет определена аналитическая функция комплексной переменной (2) – единственная, с точностью до аддитивной мнимой константы.

Имеющуюся функцию $v(x, y)$, которая удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа, всегда можно аналогичным образом дополнить недостающей вещественной частью $u(x, y)$ и получить на выходе требуемую аналитическую функцию комплексной переменной.

Утверждение 1 доказано.

Следствие утверждения 1. Если в процессе синтеза двумерных электронно- и ионно-оптических систем исследуются только те гармонические функции двух переменных, которые получены из аналитических функций комплексной переменной, то ни одно решение не будет пропущено.

Пусть имеется произвольная аналитическая функция комплексной переменной. Ее можно симметризировать, обеспечив по второму аргументу четность вещественной части и нечетность части мнимой.

Утверждение 2. *Любой аналитической функции комплексной переменной $f(z) = f(x+iy)$ можно сопоставить симметризованную (по переменной y) аналитическую функцию комплексной переменной (причем единственным образом), у которой вещественная часть четная по переменной y, мнимая – нечетная по той же переменной, а значения вещественной части на оси $y = 0$ совпадают со значениями вещественной части исходной функции.*

Доказательство. Возьмем произвольную аналитическую функцию комплексной переменной $f(z)$, заданную формулой (2), у которой вещественная и мнимая части удовлетворяют соотношениям Коши – Римана (3). Тогда у комплекснозначной функции (которая, вообще говоря, не обязательно должна быть аналитической функцией) вида

$$\bar{f}(\bar{z}) = u(x,-y) - iv(x,-y)$$

вещественная и мнимая части удовлетворяют соотношениям Коши – Римана (3). Следовательно, эта функция также является аналитической функцией комплексной переменной. Поэтому аналитической функцией комплексной переменной будет функция

$$h(z) = \frac{1}{2}\left[f(z) + \bar{f}(\bar{z})\right] = \frac{1}{2}\left[u(x,y) + u(x,-y)\right] + \frac{i}{2}\left[v(x,y) - v(x,-y)\right], \tag{6}$$

у которой вещественная и мнимая части обладают требуемой четностью по y.

Точно так же, аналитической функцией комплексной переменной будет антисимметричная функция вида

$$g(z) = \frac{1}{2}\left[f(z) - \bar{f}(\bar{z})\right] = \frac{1}{2}\left[u(x,y) - u(x,-y)\right] + \frac{i}{2}\left[v(x,y) + v(x,-y)\right], \tag{7}$$

у которой вещественная часть нечетная по переменной y и тождественно равна нулю при $y = 0$, а мнимая часть четная по переменной y и на оси $y = 0$ совпадает с мнимой частью функции $f(z)$.

Значение на оси симметрии $y = 0$ для вещественной части функции $f(z)$ и для вещественной части функции $h(z)$, которая задается формулой (6), будет одним и тем же. Точно так же, на оси симметрии $y = 0$ нормальные производные (производные по переменной y) у мнимых частей функций $f(z)$ и $h(z)$ будут совпадать.

Единственность симметризованной функции комплексной переменной следует из единственности решения задачи Коши (8) для двумерной гармонической функции, которая рассматривается далее, а также из единственности мнимой части аналитической функции комплексной переменной (с точностью до аддитивной константы, см. Утверждение 1) при заданной вещественной части.

Утверждение 2 доказано.

Процесс симметризации (6), примененный к уже симметризованной функции, эту функцию не изменяет. Частная производная симметризованной аналитической функции комплексной переменной, взятая по переменной x, будет тоже симметризованной функцией комплексной переменной. Частная производная симметризованной функции комплексной переменной, взятая по переменной y, будет функцией комплексной переменной, обладающей, аналогично функции (7), нечетностью вещественной и четностью мнимой части по второму аргументу. Такими же свойствами четности обладают компоненты симметризованной (согласно выражению (6)) аналитической функции комплексной переменной, умноженной на мнимую единицу. Аналогичные утверждения справедливы для функций комплексной переменной, полученных преобразованием (7). Последовательное использование преобразований (6) и (7) дает тождественный нуль.

Для гармонической функции $U(x, y)$, четной по переменной y и удовлетворяющей условию $U(x, -y) = U(x, y)$, можно поставить задачу Коши, а именно – определить значение функции на всей плоскости по ее поведению на оси симметрии:

$$U(x,y)\big|_{y=0} = G(x). \tag{8}$$

Утверждение 3. *Решение задачи Коши (8) для планарной гармонической функции, четной по переменной y, существует и оно единственное, по крайней мере, в окрестности оси симметрии y = 0, если функция G(x) дифференцируема бесконечное число раз и разлагается в сходящийся степенной ряд в каждой точке.*

Доказательство. Если учитывать требования четности по y, то двумерную гармоническаяую функцию $U(x, y)$ в окрестности оси симметрии $y = 0$ можно разложить в ряд по четным степеням переменной y:

$$U(x,y) = U_0(x) - \frac{1}{2}y^2 U_2(x) + \cdots + (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} U_{2k}(x) + \ldots . \tag{9}$$

Возможность разложения в степенной ряд следует из аналитичности двумерных гармонических функций (см. теорему Бернштейна об аналитичности решений двумерных эллиптических уравнений [39, 40]). После подстановки выражения (9) в уравнение (1) и комбинирования множителей при одинаковых степенях переменной y получаем значения всех коэффициентов ряда (9) с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$U_0(x) = G(x),\ U_{2k+2}(x) = \frac{d^2 U_{2k}(x)}{dx^2}. \tag{10}$$

Ряд (9) для функции $U(x, y)$ сходится, причем абсолютно, так как сходится степенной ряд для функции $G(x)$, который можно использовать как мажоранту для ряда (9).

Утверждение 3 доказано.

Ряды вида (9), функциональные по одной переменной и степенные по другой, получили название рядов Шерцера[1]. Они используются в ионной оптике для описания симметричных электрических и магнитных полей при анализе параксиальных траекторий в окрестности плоскости симметрии или оси симметрии.

Аналогичным образом формулируется и исследуется задача Коши о восстановлении гармонической функции, нечетной по переменной y, по ее нормальной производной на оси симметрии:

$$\left.\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = H(x). \tag{11}$$

Поиск решения в виде антисимметричного ряда

$$U(x,y) = yU_1(x) - \frac{1}{6}y^3 U_3(x) + \cdots + (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} U_{2k+1}(x) + \ldots \tag{12}$$

позволяет выразить с помощью рекуррентных соотношений вида

$$U_1(x) = H(x),\ U_{2k+1}(x) = \frac{d^2 U_{2k-1}(x)}{dx^2} \tag{13}$$

все члены ряда через производные функции $H(x)$. Тем самым можно найти единственно возможное решение, справедливое, по крайней мере, в некоторой окрестности оси симметрии $y = 0$, в которой этот ряд сходится.

Ряд Шерцера (9) с коэффициентами (10) не содержит информации о поведении функции $U(x, y)$, которая будет решением задачи Коши (8), вдали от оси симметрии. Интегральная формула, использующая функцию Грина для задачи Дирихле двумерного уравнения Лапласа на верхней полуплоскости [42], свободна от этого недостатка и имеет следующий вид:

---

[1] По всей видимости, этот термин введен в обращение в монографии [41].

$$U(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(t)}{(x-t)^2+y^2}dt. \tag{14}$$

С помощью непосредственной проверки можно убедиться, что если интеграл в формуле (14) сходится, то функция $U(x, y)$ при $y > 0$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа, а при $y \to 0$ удовлетворяет условию (8). Если функция (14) будет должна подчиняться указанному уравнению Лапласа, в том числе и на границе $y = 0$, то потребуется дифференцируемость (аналитичность) функции $G(t)$.

Формулу (14) следует использовать для непосредственных вычислений лишь при $y > 0$. Однако функция (14) удовлетворяет условию $\partial U(x, y)/\partial y = 0$ при $y = 0+$ и поэтому может быть гладко продолжена на полуплоскость $y < 0$ симметричным образом, порождая тем самым четную функцию по переменной y.

Аналогичным образом функция Грина для задачи Неймана (11), которая рассматривается на верхней полуплоскости $y > 0$ для нечетной по у гармонической функции $U(x, y)$ (см. книгу [42]), приводит к следующей формуле:

$$U(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(t)\ln\left[(x-t)^2+y^2\right]dt. \tag{15}$$

Эта формула обеспечивает единственно возможное решение для антисимметричной задачи Коши (11), если функция $H(t)$ достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности.

К сожалению, формула (14) для симметричной задачи Коши (8) применима на деле только тогда, когда модуль функции $G(t)$ растет на бесконечности медленнее линейной функции. Еще более жесткое условие для стремления к нулю на бесконечности налагается на функцию $H(t)$, которая используется в интеграле (15). Кроме того, для вычисления интегралов в выражениях (14) и (15) необходимо либо иметь высокий уровень мастерства и навыков в аналитическом вычислении интегралов, либо иметь в распоряжении надежные математические справочники (довольно большого объема), посвященные интегрированию функций.

Однако, как правило, функция $G(t)$ представляет собой суперпозицию хорошо известных элементарных функций, и тогда задача решается проще. Действительно, для любой элементарной функции вещественной переменной известен ее аналог на комплексной плоскости (результат аналитического продолжения с вещественной оси на всю комплексную плоскость). Все, что требуется в этом случае, – это составить аналогичную суперпозицию, включающую известные аналитические функции комплексной переменной, и отделить от полученного результата его вещественную либо мнимую часть. При необходимости может потребоваться выполнение симметризации либо антисимметризации полученного решения, в соответствии с формулами (6) или (7).

Осесимметричные поля. Электрический потенциал осесимметричных электростатических полей имеет вид

$$U(x,y,z)=V\left(z,\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

где функция $V(z, r)$ удовлетворяет осесимметричному уравнению Лапласа вида

$$\frac{\partial^2V(z,r)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2V(z,r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V(z,r)}{\partial r}=0. \tag{16}$$

Как и в случае планарных полей, для осесимметричного потенциала можно поставить задачу Коши о восстановлении функции $V(z, r)$ по ее значению на оси симметрии:

$$V(z,r)\big|_{r=0}=F(z). \tag{17}$$

Утверждение 4. *Решение задачи Коши (17) для осесимметричной гармонической функции в окрестности оси симметрии существует и является единственным, если функция $F(z)$ дифференцируема бесконечное число раз и разлагается в сходящийся степенной ряд в каждой точке.*

Доказательство. Поиск решения в виде ряда Шерцера

$$V(z,r) = V_0(z) - \frac{1}{2}r^2 V_2(z) + \cdots + (-1)^k \frac{r^{2k}}{(2k)!} V_{2k}(z) + \ldots \quad (18)$$

позволяет после подстановки этого ряда в уравнение (16) и учета начального значения (17) получить следующие рекуррентные соотношения:

$$V_0(z) = F(z),\ V_{2k+2}(z) = \frac{2k+1}{2(k+1)} V''_{2k}(z). \quad (19)$$

Если использовать рекуррентные соотношения (19), то можно однозначным образом восстановить неизвестные коэффициенты ряда (18). Абсолютная сходимость ряда (18) с этими коэффициентами следует из сходимости степенного ряда для функции $F(z)$, который может служить в качестве мажоранты.

Утверждение 4 доказано.

Как и в планарном случае, осесимметричный ряд Шерцера (18) позволяет изучить поведение осесимметричного электрического потенциала лишь в некоторой окрестности оси симметрии $r \approx 0$. Для восстановления осесимметричного электрического потенциала на всей плоскости (z, r) можно воспользоваться следующим эффективным методом. С помощью рассмотренных выше инструментов надо аналитически продолжить вещественную функцию $F(x)$ на комплексную плоскость; это позволяет найти двумерную гармоническую функцию $u(x, y)$ с требуемым поведением на оси $y = 0$:

$$F(x) \to f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),\ u(x,0) = F(x).$$

Затем можно применить формулу Уиттекера – Ватсона[2] вида

$$V(z,r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(z, r\cos\varphi)\,d\varphi, \quad (20)$$

которая позволяет вычислить осесимметричный потенциал $V(z, r)$, когда под знаком интеграла находится двумерная гармоническая функция $u(x, y)$.

В случае, когда функция $u(x, y)$ будет четной по y, т. е. удовлетворяет условию $u(x, -y) = u(x, y)$, формула (20) приводится к виду

$$V(z,r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} u(z, r\cos\varphi)\,d\varphi. \quad (21)$$

Утверждение 5. *Формула (20) обеспечивает взаимно-однозначную связь между решениями $V(z, r)$ задачи Коши (17) для осесимметричных гармонических функций и решениями $u(x,y)$ задачи Коши (8) для планарных гармонических функций, четных по второму аргументу, которые характеризуются одинаковым поведением на оси симметрии.*

Доказательство. Функция $V(z, r)$, заданная с помощью формулы (20), удовлетворяет осесимметричному уравнению (16), когда функция $u(x, y)$ удовлетворяет планарному уравнению Лапласа (1). Это можно проверить прямой подстановкой после замены переменной интегрирования φ на переменную y, в соответствии с формулами

$$y = r\cos\varphi,\ dy = -\sqrt{r^2 - y^2}\,d\varphi,\ \ x = z.$$

[2] Эта формула приводится в монографии [43]. Автор формулы нам неизвестен, но предположительно, формула получена одним из авторов монографии как частный случай общей формулы для трехмерной гармонической функции, которая выводится и исследуется авторами монографии в главе 18. Название «формула Уиттекера», введенное в оборот Ю. К. Голиковым, постепенно становится общеупотребительным.

Получим следующее равенство:

$$\frac{\partial^2 V(z,r)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 V(z,r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V(z,r)}{\partial r}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\varphi+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{y^2}{r^2}+\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}}=\frac{1}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(r^2-y^2\right)+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}}=$$

$$=\frac{1}{\pi r^2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\sqrt{r^2-y^2}\right)\Bigg|_{y=-r}^{y=+r}=0.$$

При $r = 0$ выполняется условие

$$V(z,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}u(z,0)\,d\varphi=u(z,0)=F(z),$$

поэтому поведение функций $V(z, r)$ и $u(z, r)$ обязано совпадать на оси симметрии $r = 0$.

Как было показано в Утверждении 3, задача Коши (8) о восстановлении планарной гармонической функции $u(z, r)$, которая будет четной по переменной r, по ее значению $u(z, 0)$ на оси симметрии $r = 0$, всегда разрешима; причем это решение не только существует, но и единственное, по крайней мере, в некоторой окрестности оси симметрии $r = 0$. Подставив в формулу (20) полученное решение $u(z, r)$, получим на выходе осесимметричную гармоническую функцию $V(z, r)$ с требуемым поведением на оси симметрии (вообще говоря, одну из многих). Однако из анализа ряда Шерцера (18) следует, что такая осесимметричная гармоническая функция – единственная и, следовательно, других решений поставленной задачи, кроме выраженного формулой (20), не существует.

Утверждение 5 доказано.

Если представить функцию $u(z, r)$ как сумму четной по r планарной гармонической функции

$$u_+(z, r) = [u(z, r) + u(z, -r)]/2$$

и нечетной по r планарной гармонической функции

$$u_-(z, r) = [u(z, r) - u(z, -r)]/2,$$

то легко заметить, что для нечетной функции интеграл (20) обращается в нуль, а замена гармонической функции $u(z, r)$ симметризованной гармонической функцией $u_+(z, r)$ оставляет значение этого интеграла без изменения. Поэтому для практического применения формулы (20) важны только планарные гармонические функции, четные по r. Отметим, что хотя планарных гармонических прототипов $u(z, r)$ для формулы (20) у имеющейся функции $V(z, r)$ может быть много, но симметризованный планарный гармонический прототип является единственным.

В заключение подраздела, посвященного осесимметричным полям, важно сделать вывод, что при анализе и синтезе систем оптики заряженных частиц интегральная формула (20) позволяет перебирать без пропусков все возможные осесимметричные потенциалы, не имеющие особенностей на оси симметрии.

Мультипольные поля. В общем случае потенциалы мультипольных электростатических полей имеют вид

$$U(x,y,z)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m\cos\left(m\arg\left(x+iy\right)+\gamma\right)W\left(z,\sqrt{x^2+y^2}\right),\tag{22}$$

где m – положительное целое число, определяющее порядок мультипольности[3]; $\arg(x, y)$ – (здесь и далее) функция, возвращающая аргумент комплексного числа $x + iy$, лежащий в диапазоне от $-\pi$ до $+\pi$.

[3] Строго говоря, для последующих математических выкладок необязательно, чтобы индекс m был положительным либо целым числом.

Когда функция $U(x, y, z)$ удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа, функция $W(z, r)$ удовлетворяет мультипольному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 W(z,r)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 W(z,r)}{\partial r^2}+\frac{(2m+1)}{r}\frac{\partial W(z,r)}{\partial r}=0. \quad (23)$$

Мультипольную симметрию задают мультипольные множители

$$\begin{gathered} R_m(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m\cos\left[m\arg(x+iy)+\gamma\right]= \\ =c_pP_m(x,y)+c_qQ_m(x,y), \\ P_m(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m\cos\left[m\arg(x+iy)\right], \\ Q_m(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m\sin\left[m\arg(x+iy)\right], \end{gathered} \quad (24)$$

для которых выполняется планарное уравнение Лапласа (1).

При положительных целочисленных значениях индекса m множители (24) являются однородными гармоническими полиномами степени m, как это следует из рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered} P_0(x,y)=1,\ Q_0(x,y)=0, \\ P_{m+1}(x,y)=xP_m(x,y)-yQ_m(x,y), \\ Q_{m+1}(x,y)=yP_m(x,y)+xQ_m(x,y). \end{gathered}$$

Рассмотрим задачу Коши о восстановлении функции $W(z, r)$ по ее значению на оси симметрии:

$$W(z,r)\big|_{r=0}=F(z). \quad (25)$$

Утверждение 6. *Решение задачи Коши (25) для множителя мультипольной гармонической функции (22) в окрестности оси симметрии существует и является единственным, если функция $F(z)$ дифференцируема бесконечное число раз и разлагается в сходящийся степенной ряд в каждой точке.*

Доказательство. Поиск решения в виде ряда Шерцера

$$W(z,r)=W_0(z)-\frac{1}{2}r^2W_2(z)+\cdots+(-1)^k\frac{r^{2k}}{(2k)!}W_{2k}(z)+\dots\,. \quad (26)$$

позволяет после подстановки ряда (26) в уравнение (23), с учетом начального значения (25), получить следующие рекуррентные соотношения:

$$W_0(z)=F(z),\ W_{2k+2}(z)=\frac{2k+1}{2(k+m+1)}W''_{2k}(z),\dots\,. \quad (27)$$

Из рекуррентных соотношений (27) можно однозначным образом восстановить неизвестные коэффициенты ряда (26). Его абсолютная сходимость с коэффициентами (27) следует из сходимости степенного ряда для $F(z)$, если этот ряд использовать в качестве мажоранты для ряда (26).

Утверждение 6 доказано.

Ряд Шерцера (26) не позволяет исследовать поведение мультипольного электрического потенциала (22) вдали от оси симметрии $r = 0$. Как и в случае осесимметричного электрического потенциала, для определения значений множителя $W(z, r)$ вдали от оси симметрии вещественная функция $F(x)$ аналитически продолжается на комплексную плоскость. Это позволяет определить двумерную гармоническую функцию $u(x, y)$ с заданным поведением на оси симметрии:

$$F(x)\to f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y),\ u(x,0)=F(x),$$

после чего становится возможным применение формулы Дугалла (28).

Формула Дугалла[4], частным случаем которой при $m = 0$ является формула Уиттекера – Ватсона (20), позволяет конструировать мультипольные потенциалы, используя произвольные двумерные гармонические функции $u(x, y)$ в качестве исходного материала:

$$W(z,r) = \frac{m!/\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1/2)} \int_0^{\pi} u(z, r\cos\varphi)\sin^{2m}(\varphi)\, d\varphi. \tag{28}$$

В случае, когда гармоническая функция $u(x, y)$ является четной по переменной y и удовлетворяет условию $u(x, -y) = u(x, y)$, формула (28) приводится к виду

$$W(z,r) = \frac{2m!/\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1/2)} \int_0^{\pi/2} u(z, r\cos\varphi)\sin^{2m}(\varphi)\, d\varphi. \tag{29}$$

Нормирующий множитель перед знаком интеграла в формулах (28) или (29) не является необходимым и не влияет на форму искомого мультипольного потенциала, однако он нужен для нормировки значения функции вдоль оси мультипольной симметрии $r = 0$, чтобы обеспечивать его совпадение с функцией $u(z, 0)$.

Утверждение 7. *Формула (28) обеспечивает взаимно-однозначную связь между решениями задачи Коши (25) для множителей мультипольных гармонических функций (22) и решениями задачи Коши (8) для планарных четных по второму аргументу гармонических функций с одинаковым поведением на оси симметрии.*

Доказательство. Функция $W(z, r)$, заданная с помощью формулы (28), удовлетворяет мультипольному уравнению (23), когда функция $u(x, y)$ удовлетворяет планарному уравнению Лапласа (1). Это проверяется прямой подстановкой после замены переменной интегрирования φ на переменную y, в соответствии с формулами

$$y = r\cos\varphi,\ dy = -\sqrt{r^2 - y^2}\, d\varphi,\ x = z:$$

$$\frac{\partial^2 W(z,r)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W(z,r)}{\partial r^2} + \frac{(2m+1)}{r}\frac{\partial W(z,r)}{\partial r} =$$

$$= \frac{m!/\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1/2)} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\varphi + \frac{(2m+1)\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial y} \right) \sin^{2m}(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{m!/\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1/2)} \int_{-r}^{r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{(2m+1)y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{r^2 - y^2}{r^2} \right)^m \frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} =$$

$$= \frac{1}{r^{2m+2}} \frac{m!/\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1/2)} \int_{-r}^{r} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(r^2 - y^2) + (2m+1)y\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\sqrt{r^2 - y^2} \right)^{2m-1} dy =$$

$$= \frac{1}{r^{2m+2}} \frac{m!/\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1/2)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \left(\sqrt{r^2 - y^2} \right)^{2m+1} \right) \Bigg|_{y=-r}^{y=+r} = 0.$$

При $r = 0$ выполняется условие

$$W(z,0) = \frac{m!/\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1/2)} \int_0^{\pi} u(z,0)\sin^{2m}(\varphi)\, d\varphi = u(z,0) = F(z),$$

поэтому поведение функций $W(z, r)$ и $u(z, r)$ обязано совпадать на оси симметрии $r = 0$.

Как было показано в Утверждении 3, задача Коши (8) о восстановлении четной по r планарной гармонической функции $u(z, r)$ по ее значению на оси симметрии всегда разрешима, причем ее решение не только существует, но и является единственным. Подставив в формулу (28) этот прототип $u(z, r)$ с заданным поведением на оси симметрии,

[4] Формула приводится в монографии [43] (см. гл. 18, пример 2 в конце главы) со ссылкой на шотландского математика Джона Дугалла (John Dougall) в качестве автора этого результата. Дж. Дугалл (1867 – 1960) – выдающийся шотландский математик, член Эдинбургского математического общества и Королевского общества Эдинбурга. Оригинальная публикация, в которой содержится вывод этой формулы, нам неизвестна.

получим на выходе искомый множитель $W(z, r)$ мультипольной гармонической функции (22) с требуемым поведением на оси симметрии (вообще говоря, этот множитель – один из многих возможных). Из анализа ряда Шерцера (26), проведенного ранее для решений уравнения (23), следует, что такой множитель единственный и, следовательно, других решений для задачи Коши (25) не существует, за исключением функции, заданной формулой (28).

Утверждение 7 доказано.

При представлении функции $u(z, r)$ в виде суммы, состоящей из четной по r планарной гармонической функции

$$u_+(z, r) = [u(z, r) + u(z, -r)]/2$$

и нечетной по r планарной гармонической функции

$$u_-(z, r) = [u(z, r) - u(z, -r)]/2,$$

легко заметить, что интеграл (28) для нечетной функции обращается в нуль, а замена гармонической функции $u(z, r)$ на симметризованную гармоническую функцию $u_+(z, r)$ оставляет без изменения значение этого интеграла. Другими словами, для использования формулы (28) имеют значение только четные планарные гармонические функции, причем при наличии множества подходящих планарных гармонических прототипов $u(z, r)$, для любой заданной функции $W(z, r)$ существует единственный симметризованный планарный гармонический прототип.

Таким образом, при анализе и синтезе систем оптики заряженных частиц интегральная формула (28) позволяет перебирать все возможные мультипольные потенциалы, не имеющие особенностей на оси симметрии, не пропустив ни одного.

Радиочастотные воронки общего вида с равномерно расположенными электродами

В данном разделе рассматриваются аналитические формулы для планарных, осесимметричных и мультипольных электростатических полей, которые обеспечивают на оси устройства OZ потенциалы вида

$$U_C(x, y, z)\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = U_C^0(z) = f(z)\cos(\lambda z), \tag{30}$$

$$U_S(x, y, z)\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = U_S^0(z) = f(z)\sin(\lambda z). \tag{31}$$

где λ – параметр, определяющий геометрический масштаб транспортирующего устройства.

При этом функция $f(z)$ медленно изменяется вдоль оси устройства, по сравнению с быстро осциллирующими функциями $\cos(\lambda z)$ и $\sin(\lambda z)$.

Исследование планарных, осесимметричных или мультипольных рядов Шерцера применительно к условиям Коши (30), (31) подсказывает, что решение (которое существует и является единственным, по крайней мере, в окрестности оси $r = 0$) следует искать в виде

$$\begin{gathered} U_C(z, r) = F(z, r)\cos(\lambda z) + G(z, r)\sin(\lambda z), \\ U_S(z, r) = F(z, r)\sin(\lambda z) - G(z, r)\cos(\lambda z), \\ F(z, 0) = f(z),\ G(z, 0) = 0. \end{gathered} \tag{32}$$

Важно отметить, что с целью унификации обозначений для планарного уравнения Лапласа (1) здесь сделана замена переменных $x \to z$, $y \to r$.

Решение вида (32) позволяет, в частности, рассматривать для функций $U_C(z, r)$ и $U_S(z, r)$ модифицированные ряды Шерцера:

$$\begin{gathered} U_C(z, r) = \left[\cos(\lambda z) F_0(z) + \sin(\lambda z) G_0(z)\right] - \\ -\frac{1}{2} r^2 \left[\cos(\lambda z) F_2(z) + \sin(\lambda z) G_2(z)\right] + \cdots + \\ +(-1)^k \frac{r^{2k}}{(2k)!}\left[\cos(\lambda z) F_k(z) + \sin(\lambda z) G_k(z)\right] + \ldots; \end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} U_S(z,r) &= \left[\sin(\lambda z)F_0(z) - \cos(\lambda z)G_0(z)\right] - \\ &- \frac{1}{2}r^2\left[\sin(\lambda z)F_2(z) - \cos(\lambda z)G_2(z)\right] + \cdots + \\ &+ (-1)^k\frac{r^{2k}}{(2k)!}\left[\sin(\lambda z)F_k(z) - \cos(\lambda z)G_k(z)\right] + \dots . \end{aligned} \tag{34}$$

Подстановка выражений (33) и (34) в соответствующие уравнения Лапласа показывает, что коэффициенты рядов Шерцера (33) и (34) одинаковы и удовлетворяют одним и тем же рекуррентным соотношениям:

а) для планарного уравнения Лапласа (1) –

$$\begin{cases} F_0(z) = f(z), \; G_0(z) = 0, \\ F_{k+1}(z) = \dfrac{1}{2(k+1)(2k+1)}\left[F_k''(z) + 2\lambda G_k'(z) - \lambda^2 F_k(z)\right], \\ G_{k+1}(z) = \dfrac{1}{2(k+1)(2k+1)}\left[G_k''(z) - 2\lambda F_k'(z) - \lambda^2 G_k(z)\right]; \end{cases} \tag{35}$$

б) для осесимметричного уравнения Лапласа (16) –

$$\begin{cases} F_0(z) = f(z), \; G_0(z) = 0, \\ F_{k+1}(z) = \dfrac{1}{4(k+1)^2}\left[F_k''(z) + 2\lambda G_k'(z) - \lambda^2 F_k(z)\right], \\ G_{k+1}(z) = \dfrac{1}{4(k+1)^2}\left[G_k''(z) - 2\lambda F_k'(z) - \lambda^2 G_k(z)\right]; \end{cases} \tag{36}$$

в) для мультипольного уравнения Лапласа (23) –

$$\begin{cases} F_0(z) = f(z), \; G_0(z) = 0, \\ F_{k+1}(z) = \dfrac{1}{4(k+1)(k+m+1)}\left[F_k''(z) + 2\lambda G_k'(z) - \lambda^2 F_k(z)\right], \\ G_{k+1}(z) = \dfrac{1}{4(k+1)(k+m+1)}\left[G_k''(z) - 2\lambda F_k'(z) - \lambda^2 G_k(z)\right]. \end{cases} \tag{37}$$

Подстановка выражений (32) непосредственно в соответствующие уравнения Лапласа и раздельное обращение в нуль каждого из сгруппированных множителей, стоящих при синусах и косинусах, приводит к задаче Коши на оси $r = 0$ для системы двух линейных эллиптических уравнений в частных производных, которые заданы относительно двух неизвестных функций ($F(z, r)$ и $G(z, r)$):

а) для планарного уравнения Лапласа (1) –

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \lambda^2 F + 2\lambda\dfrac{\partial G}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial r^2} - \lambda^2 G - 2\lambda\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0, \\ F(z,0) = f(z), \dfrac{\partial F(z,0)}{\partial r} = 0, \; G(z,0) = 0, \dfrac{\partial G(z,0)}{\partial r} = 0; \end{cases} \tag{38}$$

б) для осесимметричного уравнения Лапласа (16) –

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r}-\lambda^2 F+2\lambda\dfrac{\partial G}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial G}{\partial r}-\lambda^2 G-2\lambda\dfrac{\partial F}{\partial z}=0, \\ F(z,0)=f(z),\ \dfrac{\partial F(z,0)}{\partial r}=0,\ G(z,0)=0,\ \dfrac{\partial G(z,0)}{\partial r}=0; \end{cases} \tag{39}$$

в) для мультипольного уравнения Лапласа (23) –

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\dfrac{(2m+1)}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r}-\lambda^2 F+2\lambda\dfrac{\partial G}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial r^2}+\dfrac{(2m+1)}{r}\dfrac{\partial G}{\partial r}-\lambda^2 G-2\lambda\dfrac{\partial F}{\partial z}=0, \\ F(z,0)=f(z),\ \dfrac{\partial F(z,0)}{\partial r}=0,\ G(z,0)=0,\ \dfrac{\partial G(z,0)}{\partial r}=0. \end{cases} \tag{40}$$

Пусть вещественная функция $f(z)$ аналитически продолжена на комплексную плоскость, в результате чего получается симметризованная функция комплексной переменной:

$$\begin{gathered} f(z)\to f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \\ u(z,0)=f(z),\ v(z,0)=0, \\ u(z,-r)=u(z,r),\ v(z,-r)=-v(z,r). \end{gathered} \tag{41}$$

Для планарного уравнения Лапласа с помощью прямой подстановки можно убедиться, что решение вида

$$\begin{cases} F(z,r)=u(z,r)\operatorname{ch}(\lambda r), \\ G(z,r)=v(z,r)\operatorname{sh}(\lambda r) \end{cases} \tag{42}$$

удовлетворяет системе уравнений (38), в том числе начальным условиям.

Если применить формулу Уиттекера – Ватсона (20) с учетом четности по r функций $u(z, r)$ и $v(z, r)$, то получим, что для осесимметричного уравнения Лапласа (16), записанного в виде (32), решения задачи Коши (39) следуют выражениям:

$$\begin{cases} F(z,r)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} u(z,r\cos\varphi)\operatorname{ch}(r\cos\varphi)\,d\varphi, \\ G(z,r)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} v(z,r\cos\varphi)\operatorname{sh}(r\cos\varphi)\,d\varphi. \end{cases} \tag{43}$$

Точно так же, после применения формулы Дугалла (28) с учетом четности по r функций $u(z, r)$ и $v(z, r)$ получим, что решения (32) для задачи Коши (40) (выведена для мультипольного уравнения Лапласа (23)) после подстановки (32), можно получить с помощью формул вида

$$\begin{cases} F(z,r)=\dfrac{2m!/\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1/2)}\displaystyle\int_0^{\pi/2} u(z,r\cos\varphi)\operatorname{ch}(r\cos\varphi)\sin^{2m}(\varphi)\,d\varphi, \\ G(z,r)=\dfrac{2m!/\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1/2)}\displaystyle\int_0^{\pi/2} v(z,r\cos\varphi)\operatorname{sh}(r\cos\varphi)\sin^{2m}(\varphi)\,d\varphi. \end{cases} \tag{44}$$

Размещение основных и вспомогательных диафрагм для ионной воронки с равномерно расположенными электродами. Пусть имеется планарный, осесимметричный или мультипольный электрический потенциал $U_C(z, r)$, заданный с помощью первой формулы (32) при функциях $F(z, r)$ и $G(z, r)$, вычисленных надлежащим образом, и такой потенциал ведет себя вдоль оси $r = 0$ как

$$U_C(z, 0) = f(z) \cos(\lambda z).$$

Тонкие диафрагмы (планарные, осесимметричные или мультипольные) должны располагаться в точках локальных минимумов и максимумов осевого распределения, т.е. в точках $z_k = \pi k/\lambda$.

Для планарных и осесимметричных систем размеры диафрагм r_k определяются из условий

$$U_C(z_k, r_k) = \pm U_R$$

или, что то же самое, из условий

$$F(z_k, r_k) = U_R$$

(мультипольно-сегментированные диафрагмы рассмотрены далее).

Дополнительные диафрагмы с нулевым или почти нулевым потенциалом могут устанавливаться в точках

$$z_{k+1/2} = \pi(k + 1/2)/\lambda,$$

в которых осциллирующая функция $\cos(\lambda z)$ обращается в нуль. Размеры $r_{k+1/2}$ дополнительных диафрагм удобно определять из условий

$$G(z_{k+1/2}, r_{k+1/2}) = U_R,$$

что обеспечивает гладкий профиль канала транспортировки и способствует комбинированию потенциалов $U_C(z, r)$ и $U_S(z, r)$ в рамках единой системы электродов.

Рассмотрим планарный, осесимметричный или мультипольный электрический потенциал $U_S(z, r)$, заданный с помощью второй формулы (32) и обеспечивающий осевое распределение

$$U_S(z, 0) = f(z) \sin(\lambda z)$$

вдоль оси $r = 0$.

Теперь тонкие диафрагмы, задающие рассматриваемое электрическое поле, должны располагаться в точках

$$z_{k+1/2} = \pi(k + 1/2)/\lambda,$$

т.е. в точках локальных минимумов и максимумов осевого распределения.

Для планарных и осесимметричных систем размеры диафрагм $r_{k+1/2}$ определяются из условий

$$U_S(z_{k+1/2}, r_{k+1/2}) = \pm U_R, \text{ т.е. } G(z_{k+1/2}, r_{k+1/2}) = U_R.$$

Дополнительные диафрагмы с нулевым или почти нулевым потенциалом могут устанавливаться в точках $z_k = \pi k/\lambda$, в которых осциллирующая функция $\sin(\lambda z)$ обращается в нуль. Размеры r_k дополнительных диафрагм удобно определять из условий $F(z_k, r_k) = U_R$, что обеспечивает гладкий профиль канала транспортировки и способствует комбинированию в рамках единой системы электродов потенциалов $U_C(z, r)$ и $U_S(z, r)$.

Необходимо отметить, что при использовании комбинированного набора диафрагм, размещенных в точках (z_k, r_k) и $(z_{k+1/2}, r_{k+1/2})$, можно создавать как электрическое поле с электрическим потенциалом $U_C(z, r)$ (либо $U_S(z, r)$), так и произвольную линейную комбинацию этих потенциалов в рамках единой системы электродов. Для этого следует изменять напряжения, приложенные к диафрагмам.

При вычислении размеров диафрагм для мультипольных систем следует учитывать, что трехмерный мультипольный электрический потенциал связан с мультипольным множителем $W(z, r) = U_C(z, r)$ соотношением (22). Кроме того, вместо криволинейных мультипольных диафрагм с формой, определяемой как сечения в соответствующих точках оси эквипотенциальных поверхностей, для аналитических электрических потенциалов $U_C(z, r)$ либо $U_S(z, r)$ можно использовать мультипольно-сегментированные круговые диафрагмы.

Условия для определения радиуса диафрагм принимают вид

$$r_k^m F\left(z_k, r_k\right) = \gamma U_R \ \text{ и } \ r_{k+1/2}^m F\left(z_{k+1/2}, r_{k+1/2}\right) = \gamma U_R,$$

где γ – нормированная первая гармоника при разложении краевого условия для мультипольно-сегментированной круговой диафрагмы в ряд Фурье.

Вклад старших гармоник разложения краевого условия в ряд Фурье в окрестности оси симметрии, вдали от краев электродов, незначителен, так что ими можно пренебречь.

Радиочастотные воронки общего вида с неравномерно расположенными электродами

В данном разделе рассматриваются аналитические формулы для планарных, осесимметричных и мультипольных электростатических полей, которые обеспечивают на оси OZ разрабатываемого устройства потенциалы вида

$$U_C\left(x, y, z\right)\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = U_C^0\left(z\right) = f\left(z\right)\cos\left[h\left(z\right)\right], \tag{45}$$

$$U_S\left(x, y, z\right)\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = U_S^0\left(z\right) = f\left(z\right)\sin\left[h\left(z\right)\right], \tag{46}$$

где $h(z)$ – монотонная функция, определяющая точки расположения электродов, а функция $f(z)$ меняется вдоль оси устройства медленно, по сравнению с быстро осциллирующими функциями $\cos[h(z)]$ и $\sin[h(z)]$.

Исследование планарных, осесимметричных или мультипольных рядов Шерцера применительно к условиям Коши (45), (46) подсказывает, что решение (которое существует и является единственным) следует искать в виде

$$\begin{gathered} U_C\left(z, r\right) = F\left(z, r\right)\cos\left[h\left(z\right)\right] + G\left(z, r\right)\sin\left[h\left(z\right)\right], \\ U_S\left(z, r\right) = F\left(z, r\right)\sin\left[h\left(z\right)\right] - G\left(z, r\right)\cos\left[h\left(z\right)\right], \\ F\left(z, 0\right) = f\left(z\right),\ G\left(z, 0\right) = 0. \end{gathered} \tag{47}$$

Действительно, рассмотрим модифицированные ряды Шерцера, адаптированные к формулам (47):

$$U_C\left(z, r\right) = \sum_{k=0,\infty} \left(-1\right)^k \frac{r^{2k}}{\left(2k\right)!}\left\{\cos\left[h\left(z\right)\right]F_k\left(z\right) + \sin\left[h\left(z\right)\right]G_k\left(z\right)\right\}, \tag{48}$$

$$U_S\left(z, r\right) = \sum_{k=0,\infty} \left(-1\right)^k \frac{r^{2k}}{\left(2k\right)!}\left\{\sin\left[h\left(z\right)\right]F_k\left(z\right) - \cos\left[h\left(z\right)\right]G_k\left(z\right)\right\}. \tag{49}$$

Подстановка выражений (48) и (49) в соответствующие уравнения Лапласа показывает, что коэффициенты рядов Шерцера (48) и (49) одинаковы и удовлетворяют одним и тем же рекуррентным соотношениям. Для мультипольного уравнения Лапласа (23) эти рекуррентные соотношения имеют вид

$$\begin{cases} F_0\left(z\right) = f\left(z\right),\ G_0\left(z\right) = 0, \\ F_{k+1}\left(z\right) = \dfrac{1}{4\left(k+1\right)\left(k+m+1\right)}\left[F_k''(z) - h'\left(z\right)^2 F_k\left(z\right) + 2h'\left(z\right)G_k'\left(z\right) + h''\left(z\right)G_k\left(z\right)\right], \\ G_{k+1}\left(z\right) = \dfrac{1}{4\left(k+1\right)\left(k+m+1\right)}\left[G_k''(z) - h'\left(z\right)^2 G_k\left(z\right) - 2h'\left(z\right)F_k'\left(z\right) - h''\left(z\right)F_k\left(z\right)\right], \end{cases} \tag{50}$$

Для планарного уравнения Лапласа (1) искомые рекуррентные соотношения получаются из формул (50) как частный случай $m = -1/2$. Для осесимметричного уравнения Лапласа (17) искомые рекуррентные соотношения получаются из формул (50) как частный случай $m = 0$.

Подстановка выражений (47) непосредственно в соответствующие уравнения Лапласа и раздельное обращение в нуль каждого из сгруппированных множителей при синусах и косинусах приводят к задаче Коши на оси $r = 0$ для системы двух линейных эллиптических уравнений в частных производных, которые заданы относительно двух неизвестных функций: $F(z, r)$ и $G(z, r)$. Для мультипольного уравнения Лапласа (23) эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\dfrac{(2m+1)}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r}-h'(z)^2 F+2h'(z)\dfrac{\partial G}{\partial z}+h''(z)G=0, \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial r^2}+\dfrac{(2m+1)}{r}\dfrac{\partial G}{\partial r}-h'(z)^2 G-2h'(z)\dfrac{\partial F}{\partial z}-h''(z)F=0, \\ F(z,0)=f(z),\ \dfrac{\partial F(z,0)}{\partial r}=0, \\ G(z,0)=0,\ \dfrac{\partial G(z,0)}{\partial r}=0. \end{cases} \tag{51}$$

Для планарного уравнения Лапласа (1) система уравнений получается из формул (51) как частный случай $m = -1/2$. Для осесимметричного уравнения Лапласа (17) система уравнений получается из формул (51) как частный случай $m = 0$.

Пусть вещественные функции $f(z)$ и $h(z)$ аналитически продолжены на комплексную плоскость, в результате чего получаются симметризованные функции комплексной переменной:

$$\begin{gathered} f(z)\to f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \\ u(z,0)=f(z),\ v(z,0)=0,\ u(z,-r)=u(z,r),\ v(z,-r)=-v(z,r), \end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered} h(z)\to h(x+iy)=p(x,y)+iq(x,y), \\ \frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y},\ \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial q}{\partial x}, \\ p(z,0)=h(z),\ q(z,0)=0,\ p(z,-r)=p(z,r),\ q(z,-r)=-q(z,r). \end{gathered} \tag{53}$$

С помощью прямой подстановки можно убедиться, что с учетом соотношений (52) и (53) для пар функций вида

$$\begin{cases} U_C(x,y)=u(x,y)\cos[p(x,y)]\operatorname{ch}[q(x,y)]+v(x,y)\sin[p(x,y)]\operatorname{sh}[q(x,y)], \\ V_C(z,r)=v(x,y)\cos[p(x,y)]\operatorname{ch}[q(x,y)]-u(x,y)\sin[p(x,y)]\operatorname{sh}[q(x,y)]; \end{cases} \tag{54}$$

$$\begin{cases} U_S(x,y)=u(x,y)\sin[p(x,y)]\operatorname{ch}[q(x,y)]-v(x,y)\cos[p(x,y)]\operatorname{sh}[q(x,y)], \\ V_S(z,r)=v(x,y)\sin[p(x,y)]\operatorname{ch}[q(x,y)]+u(x,y)\cos[p(x,y)]\operatorname{sh}[q(x,y)] \end{cases} \tag{55}$$

выполняются соотношения Коши − Римана.

Это означает, что функции

$$U_C(x, y) + i\, V_C(x, y) \text{ и } U_S(x, y) + i\, V_S(x, y) \tag{55a}$$

являются симметризованными аналитическими функциями комплексной переменной.

Здесь стоит отметить, что при условии симметризованности функций

$$u(x, y) + iv(x, y) \text{ и } p(x, y) + iq(x, y),$$

в симметризованном характере функций (54) и (55) можно убедиться непосредственной проверкой.

Вследствие симметризованности функциий (55а), функции $U_C(z, r)$ и $U_S(z, r)$ являются симметризованными решениями двумерного уравнения Лапласа (1), которые обеспечивают требуемое поведение потенциалов (45), (46) на оси симметрии $r = 0$.

Из равенств (47), после подстановки в них функций (54), (55), получаем решение задачи Коши (51) при $m = -1/2$, которое соответствует планарному уравнению Лапласа (1):

$$\begin{cases} F(z,r) = u(z,r)\cos\left[h(z) - p(z,r)\right]\mathrm{ch}\left[q(z,r)\right] - \\ -v(z,r)\sin\left[h(z) - p(z,r)\right]\mathrm{sh}\left[q(z,r)\right], \\ G(z,r) = u(z,r)\sin\left[h(z) - p(z,r)\right]\mathrm{ch}\left[q(z,r)\right] + \\ +v(z,r)\cos\left[h(z) - p(z,r)\right]\mathrm{sh}\left[q(z,r)\right]. \end{cases} \tag{56}$$

Путем использования формулы Уиттекера – Ватсона (20) получаем решение задачи Коши (51) при $m = 0$, которое соответствует осесимметричному уравнению Лапласа (17):

$$\begin{cases} F(z,r) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\Big\{u(z,r\cos\varphi)\cos\left[h(z) - p(z,r\cos\varphi)\right]\mathrm{ch}\left[q(z,r\cos\varphi)\right] - \\ -v(z,r\cos\varphi)\sin\left[h(z) - p(z,r\cos\varphi)\right]\mathrm{sh}\left[q(z,r\cos\varphi)\right]\Big\}d\varphi, \\ G(z,r) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\Big\{u(z,r\cos\varphi)\sin\left[h(z) - p(z,r\cos\varphi)\right]\mathrm{ch}\left[q(z,r\cos\varphi)\right] + \\ +v(z,r\cos\varphi)\cos\left[h(z) - p(z,r\cos\varphi)\right]\mathrm{sh}\left[q(z,r\cos\varphi)\right]\Big\}d\varphi. \end{cases} \tag{57}$$

После применения формулы Дугалла (28) получаем точно так же решение задачи Коши (51) с произвольным индексом $m > 0$, которое соответствует мультипольному уравнению Лапласа (23):

$$\begin{cases} F(z,r) = \dfrac{2m!/\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1/2)}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\Big\{u(z,r\cos\varphi)\cos\left[h(z) - p(z,r\cos\varphi)\right]\mathrm{ch}\left[q(z,r\cos\varphi)\right] - \\ -v(z,r\cos\varphi)\sin\left[h(z) - p(z,r\cos\varphi)\right]\mathrm{sh}\left[q(z,r\cos\varphi)\right]\Big\}\sin^{2m}(\varphi)d\varphi, \\ G(z,r) = \dfrac{2m!/\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1/2)}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\Big\{u(z,r\cos\varphi)\sin\left[h(z) - p(z,r\cos\varphi)\right]\mathrm{ch}\left[q(z,r\cos\varphi)\right] + \\ +v(z,r\cos\varphi)\cos\left[h(z) - p(z,r\cos\varphi)\right]\mathrm{sh}\left[q(z,r\cos\varphi)\right]\Big\}\sin^{2m}(\varphi)d\varphi. \end{cases} \tag{58}$$

Размещение основных и вспомогательных диафрагм для ионной воронки с неравномерно расположенными электродами. По аналогии со случаем равномерно расположенных электродов для планарного, осесимметричного или мультипольного электрического потенциала $U_C(z, r)$, заданного с помощью первой формулы (47), его распределение вдоль оси $r = 0$ определяется формулой

$$U_C(z, 0) = f(z)\cos[h(z)],$$

где функция $h(z)$ монотонна и имеет достаточно большой диапазон значений.

Тонкие диафрагмы должны располагаться в точках локальных минимумов и максимумов осевого распределения, т.е. в точках z_k, которые представляют собой решения алгебраических уравнений $h(z_k) = \pi k/\lambda$. В силу высказанных предположений о свойствах функции $h(z)$, такие решения существуют и являются единственными при любых, интересующих нас значениях индекса k.

Размеры планарных и осесимметричных диафрагм r_k определяются из условий

$$U_C(z_k, r_k) = \pm U_R, \text{ т. е. } F(z_k, r_k) = U_R;$$

дополнительные диафрагмы с нулевым (или почти нулевым) потенциалом можно устанавливать в точках $z_{k+1/2}$, которые есть решения алгебраических уравнений

$$h(z_{k+1/2}) = \pi(k + 1/2)/\lambda;$$

в них осциллирующая функция $\cos[h(z)]$ обращается в нуль.

Для планарного, осесимметричного или мультипольного электрического потенциала $U_S(z, r)$, заданного с помощью второй формулы (47), вдоль оси $r = 0$ обеспечивается распределение

$$U_S(z, 0) = f(z) \sin[h(z)].$$

Тонкие диафрагмы, задающие рассматриваемое электрическое поле, должны располагаться в точках $z_{k+1/2}$, для которых выполняются условия

$$h(z_{k+1/2}) = \pi(k + 1/2)/\lambda,$$

т.е. в точках локальных минимумов и максимумов осевого распределения.

Размеры диафрагм планарных и осесимметричных систем $r_{k+1/2}$ определяются из условий

$$U_S(z_{k+1/2}, r_{k+1/2}) = \pm U_R, \text{ т. е. } G(z_{k+1/2}, r_{k+1/2}) = U_R.$$

Дополнительные диафрагмы с нулевым (или почти нулевым) потенциалом можно устанавливать в точках z_k, определяемых уравнениями $h(z_k) = \pi k/\lambda$, в которых функция $\sin[h(z)]$ обращается в нуль. Размеры r_k дополнительных диафрагм находятся из условий $F(z_k, r_k) = U_R$, что обеспечивает гладкий профиль канала транспортировки и способствует комбинированию потенциалов $U_C(z, r)$ и $U_S(z, r)$ в рамках единой системы электродов.

Использование комбинированного набора диафрагм, размещенных в точках (z_k, r_k) и $(z_{k+1/2}, r_{k+1/2})$, позволяет создавать как электрическое поле с электрическим потенциалом $U_C(z, r)$ либо $U_S(z, r)$, так и произвольную линейную комбинацию этих потенциалов в рамках единой системы электродов. Для этого необходимо изменять напряжения, приложенные к диафрагмам.

Размеры диафрагм для мультипольных систем вычисляются точно так же, как и в случае равномерно расположенных электродов.

Заключение

В работе получены аналитические выражения в квадратурах для электрических потенциалов, которые целесообразно использовать для исследования движения ионов в радиочастотных ловушках и радиочастотных воронках с прямой осью, образованных планарными, круговыми либо мультипольными диафрагмами с прямолинейным каналом транспортировки, характеризуемым сложным радиальным профилем. Профиль канала транспортировки однозначным образом определяется по осевому распределению электрического потенциала, используемого в качестве исходных данных для задачи Коши при вычислении электрических потенциалов во всем рассматриваемом пространстве. Взвешенные суммы аналитических выражений, которые соответствуют круговым и мультипольно-сегментированным диафрагмам, позволяют синтезировать электрические потенциалы для радиочастотных воронок с диафрагмами некруговой формы.

С помощью получаемых на выходе аналитических выражений можно быстро исследовать и оптимизировать поведение ионов в соответствующих радиочастотных ионных воронках, используя псевдопотенциальную модель движения ионов в высокочастотных электрических полях [44 – 46, 6, 12].

Полученные аналитические выражения для трехмерных гармонических функций с осциллирующим поведением на оси могут быть также полезными при решении ряда задач математической физики.

Благодарности

Авторы выражают свою искреннюю благодарность доктору физико-математических наук Михаилу Игоревичу Явору, главному научному сотруднику Института аналитического приборостроения РАН (г. Санкт-Петербург), за активное и деятельное участие в обсуждении рассматриваемой проблемы и указание на полезные литературные источники, использованные в данном исследовании.

Авторы с благодарностью отдают дань памяти своему учителю, доктору физико-математических наук Юрию Константиновичу Голикову, профессору Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, внесшему неоценимый вклад в развитие современной физической электроники, в том числе в решение обратных задач ионной оптики.

При проведении вычислений использовалась программа Wolfram Mathematica версии 11 (Home Edition) [47].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердников А. С., Масюкевич С. В., Соловьев К. В., Хасин Ю. И.** Электрические поля цилиндрических радиочастотных транспортирующих каналов // Научное приборостроение. 2025. Т. 35. № 3. С. 3–17.

2. **Сысоев А. А., Бердников А. С., Масюкевич С. В., Соловьев К. В., Краснова Н. К.** Аналитическое исследование режимов работы радиочастотных воронок в газодинамических интерфейсах тандемных трехквадрупольных масс-спектрометров // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 4. С. 134–145.

3. **Бердников А. С., Масюкевич С. В.** Аналитические потенциалы электрических полей для моделирования транспортирующих каналов с периодической структурой // Научное приборостроение. 2024. Т. 34. № 1. С. 107–116.

4. **Бердников А. С., Масюкевич С. В., Помозов Т. В., Хасин Ю. И., Соловьев К. В.** Аналитические потенциалы электрических полей для моделирования мультипольных радиочастотных ионных воронок с нелинейным профилем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 2. С. 94–119.

5. **Gerlich D.** Inhomogeneous RF fields: A versatile tool for the study of processes with slow ions // Ng Ch.-Y., Baer M. (Eds.). State-selected and state-to-state ion-molecule reaction dynamics. Part 1: Experiment (Book Series: Advances in Chemical Physics. Vol. LXXXII). New York: John Wiley & Sons Inc., 1992. Pp. 1–176.

6. **Yavor M. I.** Optics of charged particle analyzers (Book Series: Advances in Imaging and Electron Physics. Vol. 157). Amsterdam: Academic Press, 2009.

7. **Bahr R.** Diplom thesis. University of Freiburg, Germany, 1969 (cited by Refs. [5, 9, 10]).

8. **Gerlich D.** Diplom thesis. University of Freiburg, Germany, 1971 (cited by Refs. [5, 9, 10]).

9. **Teloy E., Gerlich D.** Integral cross sections for ion-molecule reactions. Part I. The guided beam technique // Chemical Physics. 1974. Vol. 4. No. 3. Pp. 417–427.

10. **Gerlich D., Kaefer G.** Ion trap studies of association processes in collisions of CH^{3+} and CD^{3+} with n-H_2, p-H_2, D_2 and He at 80 K // The Astrophysical Journal. 1989. Vol. 347. No. 2. Pp. 849–854.

11. **Бердников А. С., Галль Н. Р.** Радиочастотные транспортирующие ловушки с периодическими электродами без паразитных областей захвата // Масс-спектрометрия. 2013. Т. 10. № 4. С. 224–229.

12. **Yavor M. I.** Advances in optics of charged particle analyzers: Part 1. Edited by M. Hytch, P. W. Hawkes (Book Series: Advances in Imaging and Electron Physics. Vol. 232). Amsterdam: Academic Press, 2024. 220 p.

13. **Shaffer S. A., Tang K., Anderson G., Prior D. C., Udseth H. R., Smith R. D.** A novel ion funnel for focusing ions at elevated pressure using electrospray ionization mass spectrometry // Rapid Communications in Mass Spectrometry. 1997. Vol. 11. No. 16. Pp. 1813–1817.

14. **Shaffer S. A., Prior D. C., Anderson G., Udseth H. R., Smith R. D.** An ion funnel interface for improved ion focusing and sensitivity using electrospray ionization mass spectrometry // Analytical Chemistry. 1998. Vol. 70. No. 19. Pp. 4111–4119.

15. **Shaffer S. A., Tolmachev A. V., Prior D. C., Anderson G. A., Udseth H. R., Smith R. D.** Characterization of an improved electrodynamic ion funnel interface for electrospray ionization mass spectrometry // Analytical Chemistry. 1999. Vol. 71. No. 15. Pp. 2957—2964.

16. **Tolmachev A. V., Kim T., Udseth H. R., Smith R. D., Bailey T. H., Futrell J. H.** Simulation-based optimization of the electrodynamic ion funnel for high sensitivity electrospray ionization mass spectrometry // International Journal of Mass Spectrometry. 2000. Vol. 203. No. 1—3. Pp. 31—47.

17. **Kim T., Tolmachev A. V., Harkewicz R., Prior D. C., Anderson G., Udseth H. R., Smith R. D.** Design and implementation of a new electrodynamic ion funnel // Analytical Chemistry. 2000. Vol. 72. No. 10. Pp. 2247—2255.

18. **Lynn E. C., Chung M.-C., Han C.-C.** Characterizing the transmission properties of an ion funnel // Rapid Communications in Mass Spectrometry. 2000. Vol. 14. No. 22. Pp. 2129—2134.

19. **Kelly R. T., Tolmachev A. V., Page J. S., Tang K., Smith R. D.** The ion funnel: Theory, implementations and applications // Mass Spectrometry Reviews. 2010. Vol. 29. No. 2. Pp. 294—312.

20. **Bao X., Zhang Q., Liang Q., et al.** Increased sensitivity in proton transfer reaction mass spectrometry by using a novel focusing quadrupole ion funnel // Analytical Chemistry. 2022. Vol. 94. No. 39. Pp. 13368—13376.

21. **Голиков Ю. К., Краснова Н. К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010. 410 с.

22. **Голиков Ю. К., Уткин К. Г., Чепарухин В. В.** Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Ленинград.: Изд-во ЛПИ, 1974. 80 с.

23. **Голиков Ю. К., Соловьев К. В.** Электростатические ионные ловушки. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2008. 152 с.

24. **Бердников А. С., Веренчиков А. Н., Галль Н. Р., Кузьмин А. Г., Лапушкин М. Н., Масюкевич С. В., Титов Ю. А.** Радиочастотные транспортирующие системы с периодическими электродами и импульсными напряжениями // Масс-спектрометрия. 2019. Т. 16. № 4. С. 305—322.

25. **Андреева А. Д., Бердников А. С.** Устройства для манипулирования заряженными частицами на основе принципа архимедова винта // Сборник тезисов докладов IV Всероссийской конференции и V съезда Всероссийского масс-спектрометрического общества «Масс-спектрометрия и ее прикладные проблемы» (Москва, 05—09 сентября 2011 г.). 2011. С. 137.

26. **Андреева А. Д., Бердников А. С.** Масс-спектрометрические устройства на основе радиочастотных электрических полей с архимедовыми свойствами // Масс-спектрометрия. 2011. Т. 8. № 4. С. 293—296.

27. **Berdnikov A. S., Douglas D. J., Konenkov N. V.** The pseudopotential for quadrupole fields up to $q = 0.9080$ // International Journal of Mass Spectrometry. 2017. Vol. 421. October. Pp. 204—223.

28. **Бердников А. С., Андреева А. Д.** Устройство для манипулирования заряженными частицами. Патент на полезную модель. RU 113611 U1, Россия. МПК H01J49/00. Заявитель и патентообладатель Бердников А. С.; № 2011119296/07; заявл. 05.05.2011; опубл. 20.02.2012.

29. **Бердников А. С., Андреева А. Д.** Устройство для манипулирования заряженными частицами. Патент на изобретение. RU 2465679, Россия. МПК H01J49/00. Заявитель и патентообладатель Бердников А. С.; № 2011119286/07; заявл. 05.05.2011; опубл. 27.10.2012.

30. **Berdnikov A., Andreyeva A., Giles R.** Device for manipulating charged particles via field with pseudo potential having one or more local maxima along length of channel; Patent US9536721; Priority date: 05.05.2011, Application date: 04.05.2012, Publication date: 03.01.2017.

31. **Berdnikov A., Andreyeva A., Giles R.** Device for manipulating charged particles; Patent US9812308; Priority date: 05.05.2011, Application date: 21.10.2016, Publication date: 07.11.2017.

32. **Бердников А. С.** Меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. I. // Научное приборостроение. 2011. Т. 21. № 2. С. 77—89.

33. **Бердников А. С.** Меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 2. Общая формула // Научное приборостроение. 2011. Т. 21. № 3. С. 83—96.

34. **Бердников А. С.** Меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 3. Временные сигналы, характеризуемые «медленным» и «быстрым» временами // Научное приборостроение. 2011. Т. 21. № 4. С. 75—85.

35. **Бердников А. С.** Меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 4. Приборы и устройства // Научное приборостроение. 2011. Т. 21. № 4. С. 86–102.

36. **Бердников А. С.** Меняющийся во времени псевдопотенциал и его применение к описанию усредненного движения заряженных частиц. Ч. 5. Комментарии к общей формуле для меняющихся во времени псевдопотенциалов // Научное приборостроение. 2012. Т. 22. № 2. С. 105–111.

37. **Бердников А. С.** Высокочастотные электромагнитные поля с архимедовыми свойствами // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. № 1. С. 104–127.

38. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 3-е, испр. М.: «Наука». Гл. ред. физико-математической лит-ры, 1965. 716 с.

39. **Бернштейн С. Н.** Доказательство теоремы Гильберта об аналитическом характере решений эллиптических уравнений без использования нормальных рядов // Успехи математических наук. 1941. № 8. С. 82–99.

40. **Ахиезер Н. И., Петровский И. Г.** Вклад С. Н. Бернштейна в теорию дифференциальных уравнений с частными производными // Успехи математических наук. 1961. Т. 16. № 2. С. 5–20.

41. **Силадьи М.** Электронная и ионная оптика. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 639 с.

42. **Боголюбов А. Н., Левашова Н. Т., Могилевский И. Е., Мухартова Ю. В., Шапкина Н. Е.** Функция Грина оператора Лапласа. М.: Физический факультет МГУ, 2018. 187 с.

43. **Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.** Курс современного анализа. Часть II. Трансцендентные функции. М.: Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1963. 516 с.

44. **Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.** Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.

45. **Berdnikov A. S.** A pseudo potential description of the motion of charged particles in RF fields // Microscopy and Microanalysis. 2015. Vol. 21. No. S4. Pp. 78–83.

46. **Бердников А. С., Веренчиков А. Н., Кузьмин А. Г.** О корректном усреднении уравнений движения ионов в высокочастотных электрических полях // Масс-спектрометрия. 2018. Т. 15. № 4. С. 233–245.

47. Wolfram Mathematica: the system for modern technical computing: URL: http://wolfram.com/mathematica/

REFERENCES

1. **Berdnikov A. S., Masyukevich S. V., Solovyev K. V., Khasin Yu. I.,** Electric fields of cylindrical RF ion guides, Nauchnoe priborostroenie [Scientific Instrumentation]. 35 (3) (2025) 3–17 (in Russian)

2. **Sysoev A. A., Berdnikov A. S., Masyukevich S. V., et al.,** Analytical study of operating modes of RF ion funnels in the gas dynamic interfaces of tandem triple-quadrupole mass-spectrometers, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (4) (2023) 134–145 (in Russian).

3. **Berdnikov A. S., Masyukevich S. V.,** Analytical potentials of electric fields for simulation of ion guides with a periodic structure, Nauchnoe priborostroenie [Scientific Instrumentation]. 34 (1) (2024) 107–116 (in Russian).

4. **Berdnikov A. S., Masyukevich S. V., Pomozov T. V., et al.,** Analytical electric potentials for simulation of the multipole radiofrequency ion funnels with nonlinear profiles, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (2) (2024) 94–119 (in Russian).

5. **Gerlich D.,** Inhomogeneous RF fields: A versatile tool for the study of processes with slow ions, In book: Ng Ch.-Y., Baer M. (Eds.). State-selected and state-to-state ion-molecule reaction dynamics. Part 1: Experiment (Book Series: Advances in Chemical Physics. Vol. LXXXII). John Wiley & Sons Inc., New York (1992) 1–176.

6. **Yavor M. I.,** Optics of charged particle analyzers (Book Series: Advances in Imaging and Electron Physics. Vol. 157). Academic Press, Amsterdam (2009).

7. **Bahr R.,** Diplom thesis, University of Freiburg, 1969 (cited by Refs. [5, 9, 10]).

8. **Gerlich D.,** Diplom thesis, University of Freiburg., 1971 (cited by Refs. [5, 9, 10]).

9. **Teloy E., Gerlich D.,** Integral cross sections for ion-molecule reactions. Part I. The guided beam technique, Chem. Phys. 4 (3) (1974) 417–427.

10. **Gerlich D., Kaefer G.,** Ion trap studies of association processes in collisions of CH^{3+} and CD^{3+} with n-H_2, p-H_2, D_2 and He at 80 K, Astrophys. J. 347 (2) (1989) 849–854.
11. **Berdnikov A. S., Gall N. R.,** Radio frequency ion guiding traps with periodic electrodes without spurious trapping regions, J. Anal. Chem. 69 (13) (2014) 1285–1290.
12. **Yavor M. I.,** Advances in optics of charged particle analyzers: Part 1, Ed. by M. Hytch, P. W. Hawkes, (Book Series: Advances in Imaging and Electron Physics. Vol. 232), Academic Press, Amsterdam, 2024.
13. **Shaffer S. A., Tang K., Anderson G., et al.,** A novel ion funnel for focusing ions at elevated pressure using electrospray ionization mass spectrometry, Rapid Commun. Mass Spectrom. 11 (16) (1997) 1813–1817.
14. **Shaffer S. A., Prior D. C., Anderson G., et al.,** An ion funnel interface for improved ion focusing and sensitivity using electrospray ionization mass spectrometry, Anal. Chem. 70 (19) (1998) 4111–4119.
15. **Shaffer S. A., Tolmachev A. V., Prior D. C., et al.**, Characterization of an improved electrodynamic ion funnel interface for electrospray ionization mass spectrometry, Anal. Chem. 71 (15) (1999) 2957–2964.
16. **Tolmachev A. V., Kim T., Udseth H. R., et al.,** Simulation-based optimization of the electrodynamic ion funnel for high sensitivity electrospray ionization mass spectrometry, Int. J. Mass Spectrom. 203 (1–3) (2000) 31–47.
17. **Kim T., Tolmachev A. V., Harkewicz R., et al.,** Design and implementation of a new electrodynamic ion funnel, Anal. Chem. 72 (10) (2000) 2247–2255.
18. **Lynn E. C., Chung M.-C., Han C.-C.,** Characterizing the transmission properties of an ion funnel, Rapid Commun. Mass Spectrom. 14 (22) (2000) 2129–2134.
19. **Kelly R. T., Tolmachev A. V., Page J. S., et al.,** The ion funnel: Theory, implementations and applications, Mass Spectrom. Rev. 29 (2) (2010) 294–312.
20. **Bao X., Zhang Q., Liang Q., et al.,** Increased sensitivity in proton transfer reaction mass spectrometry by using a novel focusing quadrupole ion funnel, Anal. Chem. 94 (39) (2022) 13368–13376.
21. **Golikov Yu. K., Krasnova N. K.,** Teoriya sinteza electrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of synthesis of electrostatic energy analyzers], Polytechnical University Publishing House, Saint-Petersburg, 2010 (in Russian).
22. **Golikov Yu. K., Utkin K. G., Cheparukhin V. V.,** Raschyot elementov electrostaticheskikh elektronno-opticheskikh system [Calculation of elements of electrostatic electron-optical systems], Publishing House of Leningrad Polytechnical University, Leningrad, 1974 (in Russian).
23. **Golikov Yu. K., Solovyev K. V.,** Electrostaticheskiye ionniye lovushki [Electrostatic ion traps] Polytechnical University Publishing House, Saint-Petersburg, 2008 (in Russian).
24. **Berdnikov A. S., Verenchikov A. N., Gall N. R., et al.,** Radio-frequency ion guides with periodical electrodes and pulsed voltages, J. Anal. Chem. 75 (14) (2020) 1758–1773.
25. **Andreyeva A. D., Berdnikov A. S.,** Ustroystva dlya manipulirovaniya zaryazhennymi chastitsami na osnove printsipa arkhimedova vinta [Devices for manipulating charged particles based on the principle of Archimedean screw], Proc. of the 4-th All-Russian conf. "Mass-Spectrometry and its Applied Problems" organized by the 5-th Congress of All-Russian Mass-Spectrometry Society; Sept. 05–09, 2011, Moscow (2011) 137 (in Russian).
26. **Andreyeva A. D., Berdnikov A. S.,** Mass spectrometric devices with Archimedean radio-frequency electric fields, J. Anal. Chem. 67 (13) (2012) 1034–1037.
27. **Berdnikov A. S., Douglas D. J., Konenkov N. V.,** The pseudopotential for quadrupole fields up to q = 0.9080, Int. J. Mass Spectrom. 421 (Oct) (2017) 204–223.
28. **Berdnikov A. S., Andreeva A. D.,** Ustroystvo dlya manipulirovaniya zaryazhennymi chastitsami [A device for charge particle manipulation], Patent for utility model No. RU 113611, Russia. MPK H01J49/00. Berdnikov A. S. is a declarant and patentee. No. 2011119296/07; declar. 05.05.2011, publ. 20.02.2012 (in Russian).
29. **Berdnikov A. S., Andreeva A. D.,** Ustroystvo dlya manipulirovaniya zaryazhennymi chastitsami [A device for charge particle manipulation] Invention patent No. RU 2465679, Russia. MPK H01J49/00. Berdnikov A. S. is a declarant and patentee. No. № 2011119286/07; declar. 05.05.2011, publ. 20.02.2012 (in Russian).

30. **Berdnikov A., Andreyeva A., Giles R.,** Device for manipulating charged particles via field with pseudo potential having one or more local maxima along length of channel, Patent US9536721, 2017.

31. **Berdnikov A., Andreyeva A., Giles R.,** Device for manipulating charged particles, Patent US9812308, 2017.

32. **Berdnikov A. S.,** Time-dependent pseudopotential and its application for description of the averaged motion of the charged particles. Part. I, Nauchnoe priborostroenie [Scientific Instrumentation]. 21 (2) (2011) 77–89 (in Russian).

33. **Berdnikov A. S.,** Time-dependent pseudopotential and its application for description of the averaged motion of the charged particles. Part 2. General expression for time-dependent pseudopotentials, Nauchnoe priborostroenie [Scientific Instrumentation]. 21 (3) (2011) 83–96 (in Russian).

34. **Berdnikov A. S.,** Time-dependent pseudopotential and its application for description of the averaged motion of the charged particles. Part 3. Time dependent signals characterized by "slow" and "fast" characteristic time, Nauchnoe priborostroenie [Scientific Instrumentation]. 21 (4) (2011) 75–85 (in Russian).

35. **Berdnikov A. S.,** Time-dependent pseudopotential and its application for description of the averaged motion of the charged particles. Part 4. Devices and instruments, Nauchnoe priborostroenie [Scientific Instrumentation]. 21 (4) (2011) 86–102 (in Russian).

36. **Berdnikov A. S.,** Time-dependent pseudopotential and its application for description of the averaged motion of the charged particles. Part 5. Comments to a general expression for time-dependent pseudopotentials, Nauchnoe priborostroenie [Scientific Instrumentation]. 22 (2) (2012) 105–111 (in Russian).

37. **Berdnikov A. S.,** High frequency electromagnetic fields with Archimedean properties, Nauchnoe priborostroenie [Scientific Instrumentation]. 24 (1) (2014) 104–127 (in Russian).

38. **Lavrentiev M., Shabat B.,** Methodes de la Theorie des Fonctions d’une Variable Complexe, “Mir” D’Édition, Moscou, 1972.

39. **Bernshtein S. N.,** The proof of the Hilbert theorem on the analytical type of solution of elliptic equations without using of normal series, Russian Math. Surveys. (8) (1941) 82–99 (in Russian).

40. **Akhiezer N. I., Petrovskii I. G.,** S. N. Bernshtein’s contribution to the theory of partial differential equations, Russian Math. Surveys. 16 (2) (1961) 1–15.

41. **Szilagy M.,** Electron and ion optics, Plenum Press, New York, London, 1988.

42. **Bogolyubov A. N., Levashova N. T., Mogilevskii I. E., et al.,** Funktsiya Grina operatora Laplasa [Green’s function of Laplace’s operator]. Publ. by Faculty of Physics of Moscow State University, Moscow, 2018 (in Russian).

43. **Whittaker E. T., Watson G. N.,** A course of modern analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1950.

44. **Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Zaslavski G. M.,** Nonlinear physics: From the pendulum to turbulence and chaos (Book Ser.: Contemporary Concepts in Physics, Vol. 4), Harwood Academic Publishers, Chur, Switzerland; N. Y., 1988.

45. **Berdnikov A. S.,** A pseudo potential description of the motion of charged particles in RF fields, Microsc. Microanal. 21 (S4) (2015) 78–83.

46. **Berdnikov A. S., Kuzmin A. G., Verenchikov A. N.,** On the correct averaging of the equations of ion motion in high-frequency electric fields, J. Anal. Chem. 74 (14) (2019) 1378–1389.

47. Wolfram Mathematica: the system for modern technical computing: URL: http://wolfram.com/mathematica/

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия.*

198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31–33, лит. А.

asberd@yandex.ru

ORCID: 0000-0003-0985-5964

КРАСНОВА Надежда Константиновна – *доктор физико-математических наук, профессор Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.*
195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
n.k.krasnova@mail.ru
ORCID: 0000-0002-6162-9481

МАСЮКЕВИЧ Сергей Владимирович – *старший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия.*
198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31-33, лит. А.
serg_08@mail.ru
ORCID: 0000-0002-0873-8849

ПОДОЛЬСКАЯ Екатерина Петровна – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия.*
198095, Россия. г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31-33, лит. А.
ek.podolskaya@gmail.com

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия.*
195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru
ORCID: 0000-0003-3514-8577

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation, RAS
31-33 Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
asberd@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-0985-5964

KRASNOVA Nadezhda K.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
n.k.krasnova@mail.ru
ORCID: 0000-0002-6162-9481

MASYUKEVICH Sergey V.
Institute for Analytical Instrumentation, RAS
31-33 Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
serg_08@mail.ru
ORCID: 0000-0002-0873-8849

PODOLSKAYA Ekaterina P.
Institute for Analytical Instrumentation, RAS
31-33 Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
ek.podolskaya@gmail.com

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
Institute for Analytical Instrumentation, RAS
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
k-solovyev@mail.ru
ORCID: 0000-0003-3514-8577

Статья поступила в редакцию 01.06.2025. Одобрена после рецензирования 16.06.2025. Принята 16.06.2025.
Received 01.06.2025. Approved after reviewing 16.06.2025. Accepted 16.06.2025.