Математическая физика

Научная статья
УДК 517.926.4
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.18303

ОПТИМИЗИРОВАННЫЙ ТАУ-МЕТОД ЛАНЦОША

А. Л. Буляница [1,2] ✉, А. С. Бердников [1], А. А. Евстрапов [1]

[1] Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия;

[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

✉ antbulyan@yandex.ru

Аннотация. В статье обсуждается эффективный алгоритм получения приближенных полиномиальных решений для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и полиномиальными правыми функциями. Алгоритм является усовершенствованной версией тау-метода К. Ланцоша и дает возможность получать оптимальное отклонение приближенного решения от точного в соответствии с минимаксной нормой для заданного отрезка. При незначительной модификации алгоритм позволяет находить приближенные выражения для производных точных решений с существенно большей точностью, чем способны обеспечивать производные приближенных решений.

Ключевые слова: минимаксная норма, полином Чебышева, оптимальная аппроксимация, линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, тау-метод

Финансирование: Исследование выполнено в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер 075-00444-25-00).

Для цитирования: Буляница А. Л., Бердников А. С., Евстрапов А. А. Оптимизированный тау-метод Ланцоша // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 30–48. DOI: https://doi.org/10.18721/ JPM.18303

Original article
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.18303

AN OPTIMIZED LANCZOS TAU-METHOD

A. L. Bulyanitsa [1,2] ✉, A. S. Berdnikov [1], A. A. Evstrapov [1]

[1] Institute for Analytical Instrumentation of RAS, St. Petersburg, Russia;

[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

✉ antbulyan@yandex.ru

Abstract. The paper puts forward an effective algorithm for producing approximate polynomial solutions for linear ordinary differential equations (LODEs) and sets of LODEs with polynomial coefficients and polynomial right-hand side functions. The algorithm is an upgraded version of the Lanczos Tau-method and provides the optimal deviation of the approximate solution from the exact one according to the minimax norm for a given interval. With minor modification, the algorithm allows one to find approximate expressions for the derivatives of the exact solutions with sufficiently greater accuracy than the derivatives of the approximate solutions are capable of providing that.

Keywords: minimax norm, Chebyshev polynomial, optimal approximation, linear ordinary differential equation, Tau-method

Funding: The reported study was carried out within the framework of the State Assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (No. 075-00444-25-00).

For citation: Bulyanitsa A. L., Berdnikov A. S., Evstrapov A. A., An optimized Lanczos Tau-method, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 30–48. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.18303

Введение

Тау-метод[1] Ланцоша позволяет получать приближенные полиномиальные решения для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и полиномиальными правыми частями [1, 2]. Эти решения должны быть максимально точными на рассматриваемом конечном отрезке в соответствии с минимаксной нормой, что является противоположностью приближения методами наименьших квадратов и/или рядами ортогональных полиномов различных типов [3 – 5].

В данной статье рассматриваются причины, по которым полиномиальные решения, получаемые с помощью исходного алгоритма Ланцоша, могут оказаться неоптимальными и предлагаются эффективные пути улучшения алгоритма. Общие теоретические соображения подкрепляются численными примерами.

Первоначально тау-метод был предложен в статье [1] и впоследствии подробно изложен в монографии [2] с большим количеством иллюстративных примеров. В статье [6] приведены базовые математические определения, которые позволяют строго представить этот метод. Публикация [7] рассматривает случай разбиения отрезка на малые отрезки и последующего применения тау-метода к каждому малому отрезку для получения гладкого и точного приближенного кусочно-полиномиального решения.

Другой путь повышения точности этого метода раскрыт в статье [8]. Рекуррентные схемы тау-метода, когда степень аппроксимирующего полинома увеличивается шаг за шагом, без его пересчета с нуля, рассмотрены в работах [9, 10]. Анализ погрешностей приближенных решений обсуждается в публикациях [11, 12]. Распространение тау-метода на линейные дифференциальные уравнения с коэффициентами, отличными от полиномиальных, на нелинейные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных и т. п., рассмотрены в статьях [13 – 15].

Возрождение интереса к задачам, связанным с различными методами формирования приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, систем, интегральных уравнений и других объектов, подтверждается публикациями последних лет. При этом также используется тау-метод Ланцоша, однако с построением смещенного базиса Лежандра при решении систем с временной задержкой [16]; применяется аппроксимация дифференциальных операторов (так же, как и у нас) с использованием смещенных полиномов Чебышева [17], представлены варианты разложения функций по полиномам Эрмита и Лагерра [18].

---

[1] Название «тау-метод» предложено и введено в обращение Корнелиусом Ланцошем (венгерский физик и математик) в его работе [1] на том основании, что дополнительные свободные множители для полиномов Чебышева в правой части дифференциальных уравнений он обозначал греческими буквами τ с нижними индексами.

Помимо этого, разработаны специальные программные средства Tau Toolbox[2], в частности для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (в том числе нелинейных) и их систем, а также интегральных уравнений [19 – 21]. Статьи [22, 23] содержат ссылки на применение этих программных средств при разложении решений по полиномам Соболева и решении сингулярных интегральных уравнений. В работе [24] ищутся коэффициенты аппроксимирующих формул при достижении чебышевского альтернанса. Этот подход используется при аппроксимации функций Ферми – Дирака на основе итерационной процедуры.

В последние годы появляются научные публикации, посвященные чебышевским приближениям функций [25, 26], а также учебные пособия, рассматривающие более широкий круг вопросов, относящихся к поиску приближенных решений и обоснованию их свойств [27 – 29].

Таким образом, интерес к рассматриваемой тематике не ослабевает, что подтверждает актуальность рассматриваемой авторами научной задачи.

Тау-метод изначально был сформулирован как способ аппроксимации специальных функций математической физики, которые можно было бы выразить с помощью простых дифференциальных уравнений. В настоящее время этот метод становится мощным и точным инструментом для численного решения сложных дифференциальных и функциональных уравнений. Идея, предложенная К. Ланцошем, заключается в аппроксимации решения заданной задачи путем вычисления точного решения некоторой приближенной задачи, близкой к исходной. На этом пути решение дифференциального уравнения аппроксимируется полиномом, который является точным решением дифференциального уравнения, полученного добавлением полиномиальных членов возмущения к его правой части. Члены возмущения выбираются так, чтобы гарантировать существование аналитического полиномиального решения возмущенного уравнения.

Если коэффициенты уравнения, и/или начальные условия, и/или границы отрезка зависят от каких-либо параметров, то на выходе получается алгебраическое выражение, зависящее от этих параметров. Это несомненное преимущество тау-метода, по сравнению с классическими численными методами, которые выдают индивидуальные решения при фиксированных числовых значениях параметров. Его использование может существенно упростить исследование и достичь оптимизации решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметров.

Следующий раздел содержит различные определения и теоремы, которые использованы далее для этого исследования.

Раздел «Пример решения уравнения тау-методом» иллюстрирует работу тау-метода Ланцоша; здесь решается линейное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами и известным аналитическим неполиномиальным решением.

В разделе «Различие погрешностей и невязок» проанализирована принципиальная разница между погрешностью (расхождением между точным и приближенным решениями) и дифференциальной невязкой (паразитным значением правой части дифференциального уравнения после подстановки приближенного решения). Минимизация дифференциальной невязки не эквивалентна минимизации погрешности, и поэтому полиномы Чебышева или некоторые другие ортогональные полиномы, используемые для минимизации дифференциальной невязки, не дают оптимального приближенного решения.

В следующим за ним разделе описан оптимизированный тау-метод для решения приведенных линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Интегральная форма линейного дифференциального уравнения и теорема Пикара позволяют доказать утверждение, что невязка интегральной формы пропорциональна погрешности приближенного решения. Следовательно, если возмущение интегральной формы является суммой полиномов Чебышева, то приближенное решение, полученное тау-методом, близко к оптимальному. Оптимизированный тау-метод вносит возмущение как в правую часть дифференциального уравнения, так и в начальные условия приближенного решения (последнее существенно отличается от исходного тау-метода).

[2] Пакет можно загрузить с сайта https://bitbucket.org/tautoolbox/tautoolbox/src/main/.

В разделе «Обсуждение достигнутых результатов» сопоставляются использованные подходы к проблеме и анализируются полученные преимущества предлагаемой модификации метода.

В заключении статьи кратко сформулированы основные итоги работы.

Необходимые определения и общие теоремы

В этом разделе содержатся определения и общие теоремы, используемые далее в этом исследовании. Подробности и доказательства соответствующих утверждений можно найти в книгах [3 – 5].

Определение 1. Полином вида

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

степени n является минимаксным приближением заданной функции $f(x)$ с заданным весом $w(x) \neq 0$ на заданном отрезке $x\in[x_a, x_b]$, если $P(x)$ есть решение вариационной задачи

$$\max_{x\in[x_a,x_b]}\left|w(x)\big(f(x)-P(x)\big)\right| \to \min, \tag{1}$$

где минимизация выполняется по всем возможным наборам коэффициентов a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n.

Определение 2. Приведенный полином вида

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

степени n называется полиномом, наименее уклоняющимся от нуля на заданном отрезке $x\in[x_a, x_b]$ с заданным весом $w(x) \neq 0$, если $P(x)$ есть решение вариационной задачи

$$\max_{x\in[x_a,x_b]}\left|w(x)P(x)\right| \to \min, \tag{2}$$

где минимизация производится по всем возможным наборам коэффициентов a_0, a_1, ..., a_{n-1}.

Младшая часть $a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ полинома степени n, наименее уклоняющегося от нуля, является полиномом степени $n - 1$, обеспечивающим минимаксное приближение (решение вариационной задачи (1)) для функции $f(x) = -x^n$ с весом $w(x)$.

Определение 3. Набор из m точек

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m$$

называется чебышевским альтернансом размера m для функции $h(x)$ на отрезке $[x_a, x_b]$, если точки $x_k\in[x_a, x_b]$ являются чередующимися локальными минимумами и максимумами $h(x)$ с равными абсолютными значениями, так что

$$h(x_k) = (-1)^k\varepsilon \text{ и } |\varepsilon| = \max|h(x)| \text{ для } x\in[x_a, x_b].$$

Теорема 1 (теорема Валле Пуссена). *Предположим, что имеется многочлен $Q(x)$ степени n, функция $f(x)$, отрезок $[x_a, x_b]$ и весовая функция $w(x) \neq 0$. Предположим также, что имеется $n + 2$ точек (альтернанс Валле Пуссена)*

$$x_a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \le x_b,$$

в которых выражение $w(x)[f(x) - Q(x)]$ имеет ненулевые значения с чередующимися знаками:

$$+\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, + (-1)^{n+2}\,\lambda_{n+2}$$

(предполагается, что для $\forall k$ $\lambda_k > 0$).

Если λ – минимаксное отклонение от нуля для

$$w(x)\,[f(x) - P(x)],$$

где оптимальный полином $P(x)$ есть решение вариационной задачи (1), то

$$\lambda \ge \min\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}\}.$$

Если указанные точки x_k *также являются локальными минимумами и максимумами для* $w(x)[f(x) - Q(x)]$, *то*

$$\lambda \le \max\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}\}.$$

Теорема 2 (теорема Чебышева об альтернансе). *Если существует чебышевский альтернанс размера* $n + 2$ *на отрезке* $[x_a, x_b]$ *для функции* $w(x)\,[f(x) - P(x)]$, *где* $w(x) \ne 0$ *и* $f(x)$ *– заданные функции, а* $P(x)$ *– многочлен степени n, то этот многочлен* $P(x)$ *есть единственное решение вариационной задачи (1). Если функции* $w(x) \ne 0$ *и* $f(x)$ *непрерывны на отрезке* $[x_a, x_b]$, *то вариационная задача (1) имеет единственное решение* $P(x)$, *и это решение удовлетворяет условию теоремы Чебышева, т. е. для функции* $w(x)[f(x) - P(x)]$ *существует чебышевский альтернанс размерности* $n + 2$ *на отрезке* $[x_a, x_b]$.

Теорема 3 (критерий Чебышева). *Если для функции* $w(x)P(x)$ *существует чебышевский альтернанс размера* $n + 1$ *на отрезке* $[x_a, x_b]$, *где* $w(x) \ne 0$ *– заданная функция, а* $P(x)$ *– многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным единице, то многочлен* $P(x)$ *есть единственное решение вариационной задачи (2), т. е. многочлен, наименее уклоняющийся от нуля. Если функция* $w(x) \ne 0$ *непрерывна на отрезке* $[x_a, x_b]$, *то вариационная задача (2) имеет единственное решение и это решение удовлетворяет критерию Чебышева, т. е. для функции* $w(x)P(x)$ *существует чебышевский альтернанс размера* $n + 1$ *на отрезке* $[x_a, x_b]$.

Алгоритмы, позволяющие вычислять полиномы для минимаксных приближений, и полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля при заданном весе $w(x) \ne 0$ на заданном отрезке $[x_a, x_b]$, рассмотрены в работах [30 – 32].

Определение 4. Полиномы $T_n(x)$ степени n, определяемые как

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

для $-1 \le x \le +1$, называются полиномами Чебышева первого рода.

В соответствии с определением 2 и теоремой 3 полиномы $T_n(x)/2^{n-1}$ являются полиномами степени n, наименее уклоняющимися от нуля на отрезке $x \in [-1, +1]$ с весом $w(x) = 1$. Величина уклонения равна $1/2^{n-1}$.

Определение 5. Пусть имеется обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$L[x(t)] = 0,$$

где $L[x(t)]$ – некоторый дифференциальный оператор.

Если для тестовой функции $x(t)$ справедливо равенство

$$L[x(t)] = Q(t),$$

то $Q(t)$ называется дифференциальной невязкой $x(t)$.

Определение 6. Пусть имеется интегральное уравнение

$$x(t) = K[x(t)],$$

эквивалентное дифференциальному уравнению

$$L[x(t)] = 0,$$

где $K[x(t)]$ – некоторый интегральный оператор.

Если для пробной функции $x(t)$ справедливо равенство

$$x(t) - K[x(t)] = R(t),$$

то $R(t)$ называется интегральной невязкой $x(t)$.

Определение 7. Пусть имеется обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L[x(t)] = 0,$$

причем $x^*(t)$ – точное решение уравнения. Если $x(t)$ – приближенное решение уравнения, то разность

$$\Delta x(t) = x(t) - x^*(t)$$

называется погрешностью приближенного решения $x(t)$.

Замечание 1. Аналогичным образом вводятся дифференциальные невязки, интегральные невязки и погрешности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример решения уравнения тау-методом

Метод Ланцоша дает приближенные полиномиальные решения на некотором фиксированном отрезке для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и полиномиальными правыми функциями вида

$$L[x(t)] = x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) - f(t) = 0,$$

где $a_k(t)$, $f(t)$ – полиномы; $x(t)$ – неизвестная функция.

Для иллюстрации возьмем простой пример:

$$L[x(t)] = x''(t) + tx'(t) + 2x(t) = 0,$$
$$x(0) = 0,\ x'(0) = 1. \tag{3}$$

Точное решение уравнения (3) есть $x^*(t) = t\cdot\exp(-t^2/2)$. Предположим, что точное решение неизвестно и необходимо найти приближенное решение задачи (3) при $0 \le t \le 4$. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации (см., например, монографию [33]) гарантирует, что любую непрерывную функцию можно аппроксимировать на фиксированном отрезке конечного размера со сколь угодно высокой точностью полиномом соответствующей степени. Это утверждение служит основой для нахождения приближенного решения в виде полинома для рассматриваемой задачи.

Будем искать приближенное решение задачи (3) в форме полинома 7-й степени с неопределенными коэффициентами b_k:

$$x(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \ldots + b_7t^7. \tag{4}$$

После подстановки выражения (4) в уравнение (3) правая часть (дифференциальная невязка) оказывается многочленом:

$$Q(t) = (2b_0 + 2b_2) + (3b_1 + 6b_3)t + (4b_2 + 12b_4)t^2 + (5b_3 + 20b_5)t^3 +$$
$$+ (6b_4 + 30b_6)t^4 + (7b_5 + 42b_7)t^5 + 8b_6t^6 + 9b_7t^7. \tag{5}$$

Нам нужно сделать дифференциальную невязку (5) максимально близкой к нулю; например, удовлетворить условие $Q(t) \equiv 0$. Однако это возможно только тогда, когда точное решение уравнения является полиномом требуемой (или меньшей) степени. Утверждение «сделать невязку максимально малой» четко не определено и не может считаться однозначным в математическом смысле. Например, мы можем приравнять нулю как можно больше коэффициентов при меньших степенях невязки (5) при условии, что некоторые коэффициенты используются для удовлетворения начальных условий. Для невязки (5) этого оказывается достаточно, чтобы исключить члены с множителями 1, t, t^2, t^3, t^4, t^5 и даже t^6. Тогда решение таково:

$$b_0 = b_2 = b_4 = b_6 = 0,\ b_1 = 1,$$
$$b_3 = -1/2,\ b_5 = 1/8,\ b_7 = -1/48, \tag{6}$$
$$Q(t) = -3/16t^7.$$

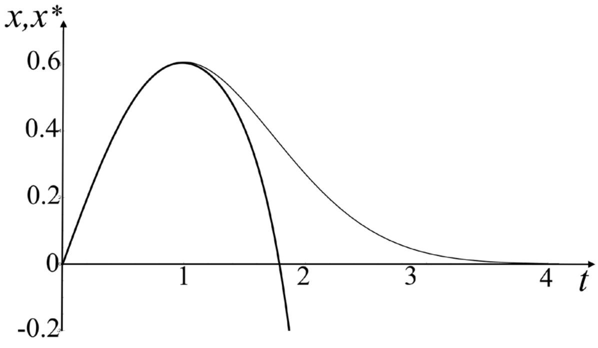

Рис. 1. Точное ($x^*(t)$) и приближенное ($x(t)$) решения дифференциального уравнения (3) (тонкая и жирная линии, соответственно); коэффициенты полинома $x(t)$ определены формулами (6)

Как и следовало ожидать, этот результат представляет собой усеченный ряд Тейлора для функции $t\cdot\exp(-t^2/2)$. На рис. 1 показано сравнение точного решения с приближенным полиномиальным решением (4) с коэффициентами (6) для $t \in [0, 4]$. Очевидно, что это решение неудовлетворительное, несмотря на высокую степень полинома.

Одна из возможных причин неудачи заключается в том, что хотя дифференциальная невязка $Q(t) = -3t^7/16$ мала вблизи точки $t = 0$, эта невязка неоправданно велика в окрестности точки $t = 4$. По-видимому, если потребовать, чтобы невязка была примерно одинаковой на всем отрезке, то можно было бы ожидать существенно лучшего результата.

Первый шаг, предложенный К. Ланцошем, – это удаление плохо определенных эмпирических условий. При новой формулировке задачи необходимо найти коэффициенты b_0, $b_1 - b_7$, τ_6, τ_7, для которых функция (5) удовлетворяет условиям

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ L[x(t)] \equiv \tau_6 t^6 + \tau_7 t^7.$$

Задача, по сути, не изменилась, но теперь система уравнений хорошо определена с алгебраической точки зрения. Соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение. Естественно, это решение совпадает с решением (6).

Следующий важный шаг, предложенный К. Ланцошем, заключается в замене дифференциальной невязки $\tau_6 t^6 + \tau_7 t^7$ (т. е. функции, которая мала на одном конце отрезка, но велика на его другом конце) дифференциальной невязкой

$$\tau_6 \overline{T}_6(t) + \tau_7 \overline{T}_7(t),$$

где $\overline{T}_6(t), \overline{T}_7(t)$ – преобразованные полиномы Чебышева $T_6(t)$ и $T_7(t)$ соответствующей степени [2, 34, 35].

Эти полиномы перемасштабированы от $t \in [-1, +1]$ до $t \in [0, 4]$ и наименее отклоняются от нуля на отрезке $t \in [0, 4]$:

$$\overline{T}_6(t) = T_6\left(\frac{t}{2} - 1\right),\ \overline{T}_7(t) = T_7\left(\frac{t}{2} - 1\right),$$

$$T_6(\tau) = 32\tau^6 - 48\tau^4 + 18\tau^2 - 1,$$

$$T_7(\tau) = 64\tau^7 - 112\tau^5 + 56\tau^3 - 7\tau.$$

Теперь дифференциальная невязка $Q(t)$ в правой части уравнения примерно одинакова во всех точках рассматриваемого отрезка. Тогда логично предположить, что погрешность приближенного решения также примерно одинакова на всем отрезке. В пользу этой гипотезы говорит равенство нулю погрешности приближенного решения во всех точках отрезка при условии равенства нулю невязки $Q(t)$ во всех его точках. Однако минимизация невязки не обязательно означает минимизацию погрешности (см. пример ниже).

Решение (4), полученное для уравнения (3) с использованием тау-метода Ланцоша, содержит следующие коэффициенты:

$$\begin{gathered} b_0 = 0,\ b_1 = 1{,}000000000,\ b_2 \approx 0{,}052400600,\ b_3 \approx -0{,}880052000, \\ b_4 \approx 0{,}442647000,\ b_5 \approx -0{,}091658100, \\ b_6 \approx 0{,}006894820,\ b_7 \approx -0{,}000023572. \end{gathered} \tag{7}$$

Рис. 2 иллюстрирует расхождение точного и приближенного полиномиальных решений (4) с коэффициентами (7), полученных с помощью тау-метода Ланцоша. Приближенное решение $x(t)$ лежит в диапазоне 0 – 0,6 при максимальной погрешности на отрезке $t \in [0, 4]$ равной 0,012. Графики точного и приближенного решений визуально практически неразличимы. На рис. 2 представлены графики погрешности и дифференциальной невязки. Видно, что точность приближенного решения, полученного с помощью тау-метода Ланцоша, вполне удовлетворительна.

В монографии [34] показано, что при разложении приближенного решения в усеченный ряд Чебышева во многих случаях приближенное решение оказывается точнее, чем при использовании метода Ланцоша. Однако приближенные решения, полученные с помощью усеченного ряда Чебышева, также не гарантируют максимально возможной точности. Цель же данного исследования – это создание такой модификации тау-метода

Ланцоша, которая бы обеспечивала максимально возможную точность приближенного решения.

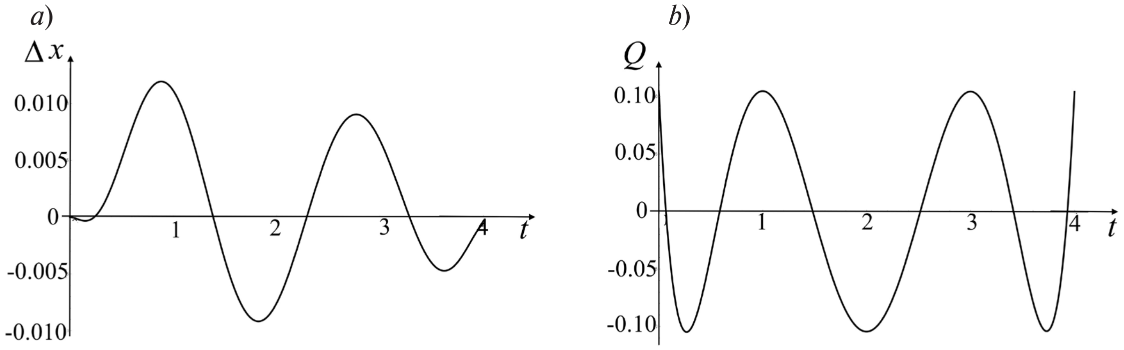

Рис. 2. Погрешность приближенного решения, полученного тау-методом Ланцоша (*a*) и его дифференциальная невязка (*b*)

Действительно, небольшая (по минимаксной норме) дифференциальная невязка в дифференциальном уравнении не означает небольшой минимаксной погрешности решения. В качестве примера рассмотрим уравнение $y''(t) + y(t) = 0$ с точным решением

$$y^*(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$$

и уравнение $z''(t) + z(t) = \varepsilon\cdot\sin t$ с точным решением

$$z^*(t) = c_1\cos t + c_2\sin t - \varepsilon(t\cdot\cos t - \sin t)/2.$$

Независимо от того, насколько мала во втором уравнении дифференциальная невязка $Q(t) = \varepsilon\cdot\sin t$, разница между этими двумя решениями с одинаковыми начальными условиями становится сколь угодно большой по мере увеличения отрезка $t \in [0, T]$.

Различие погрешностей и невязок

Погрешность $\Delta x(t)$ – это разность между точным решением $x^*(t)$ и приближенным решением $x(t)$. Дифференциальная невязка $Q(t)$ – это отклонение правой части дифференциального уравнения при подстановке приближенного решения. Теорема о единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений гласит:

«*Если дифференциальная невязка равна нулю везде, то и погрешность равна нулю везде, и наоборот*».

Тау-метод Ланцоша – это попытка сделать дифференциальную невязку как можно ближе к нулю, в предположении, что это сохраняет погрешность как можно ближе к нулю. Как было показано выше, это утверждение неверно.

Для нахождения связи между погрешностью и дифференциальной невязкой необходимо использовать интегральную форму уравнения. Предположим, что имеется уравнение

$$y^{(n)}(t) + c_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n(t)y + c(t) = 0, \tag{8}$$

где $c_1(t)$, $c_2(t)$, ..., $c_n(t)$ и $c(t)$ непрерывны на отрезке $t \in [t_0, T]$.

Уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$\begin{gathered} y(t) = y_0 + y_0'(t-t_0) + \ldots + y_0^{(n-1)}\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} - \\ -\int_{t_0}^{t}\ldots\int_{t_0}^{t}\left[c_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n(t)y(t) + c(t)\right]dt\ldots dt, \end{gathered} \tag{9}$$

где $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ – начальные условия для уравнения (8).

Теорема Пикара [36] о существовании и единственности решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения использует, в частности, рекуррентную последовательность функций $y_k(t)$, определяемых равенствами

$$y_{k+1}(t) = N[y_k(t)], \tag{10}$$

где $N[y(t)]$ – интегральный оператор в правой части выражения (9).

Независимо от начальной функции $y_0(t)$ и размера рассматриваемого конечного отрезка $t \in [t_0, T]$, итерации быстро сходятся к решению интегрального уравнения (9), т. е. к решению $y(t)$ дифференциального уравнения (8). Указанное решение единственно и определено для любого $t \in [t_0, T]$.

Анализ доказательства теоремы Пикара показывает, что

$$\max_{t\in[t_0,T]}\left|y(t)-y_k(t)\right| \le C\max_{t\in[t_0,T]}\left|y_{k+1}(t)-y_k(t)\right|, \tag{11}$$

где константа C определяется только коэффициентами уравнения (8) и отрезком $[t_0, T]$. Более точная оценка приводит к равенству $C = C_0/k!$

Важно, что константа C в уравнении (11) не зависит от выбора начальной функции $y_0(t)$, цепочки функций $y_k(t)$ или решения $y(t)$.

Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4 (об интегральной невязке). *Предположим, что* $y(t) = N[y(t)]$ *– интегральное уравнение (9), полученное из дифференциального уравнения (8)*; $y(t)$, $z(t)$ *– точное и приближенное решения уравнений (8) и (9), соответственно*; $R(t)$ *– интегральная невязка для* $z(t)$, *заданная соотношением*

$$z(t) = N[z(t)] + R(t). \tag{12}$$

Тогда погрешность $y(t) - z(t)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\max_{t\in[t_0,T]}\left|y(t)-z(t)\right| \le C\max_{t\in[t_0,T]}\left|R(t)\right|, \tag{13}$$

где постоянная C определяется только коэффициентами уравнения (8) и отрезком $[t_0, T]$.

Доказательство. Интегрирование по частям дает соотношения

$$\int_{t_0}^{t} c_{n-1}(t)\,y'(t)\,dt = c_{n-1}(t)\,y(t) - c_{n-1}(t_0)\,y(t_0) - \int_{t_0}^{t} c'_{n-1}(t)\,y(t)\,dt,$$

$$\int_{t_0}^{t} dt\left[\int_{t_0}^{t} c_{n-2}(t)\,y''(t)\,dt\right] = \int_{t_0}^{t} dt\left[c_{n-2}(t)\,y'(t) - c_{n-2}(t_0)\,y'(t_0) - \int_{t_0}^{t} c'_{n-2}(t)\,y'(t)\,dt\right] =$$

$$= c_{n-2}(t)\,y(t) - c_{n-2}(t_0)\,y(t_0) - \int_{t_0}^{t} c'_{n-2}(t)\,y(t)\,dt - c_{n-2}(t_0)\,y'(t_0)\frac{(t-t_0)}{1!} -$$

$$-\int_{t_0}^{t} dt\left[c'_{n-2}(t)\,y(t) - c'_{n-2}(t_0)\,y(t_0) - \int_{t_0}^{t} c''_{n-2}(t)\,y(t)\,dt\right] =$$

$$= c_{n-2}(t)\,y(t) - \int_{t_0}^{t} 2c'_{n-2}(t)\,y(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} dt\left[\int_{t_0}^{t} c''_{n-2}(t)\,y(t)\,dt\right] -$$

$$-c_{n-2}(t_0)\,y(t_0) - c_{n-2}(t_0)\,y'(t_0)\frac{(t-t_0)}{1!} + c'_{n-2}(t_0)\,y(t_0)\frac{(t-t_0)}{1!},$$

$$\int_{t_0}^{t} dt\left\{\int_{t_0}^{t} dt\left[\int_{t_0}^{t} c_{n-3}(t)\,y'''(t)\,dt\right]\right\} = \ldots$$

Интегральное уравнение (9) преобразуется в эквивалентное интегральное уравнение вида

$$y(t) = H(t) + \int_{t_0}^{t} dt\left\{h_1(t)\,y(t) + \int_{t_0}^{t} dt\left[h_2(t)\,y(t) + \ldots + \int_{t_0}^{t} dt\left(h_n(t)\,y(t) + c(t)\right)\right]\right\},$$

где $h_k(t)$ – некоторые непрерывные функции (например, полиномы), определяемые коэффициентами $c_k(t)$ после интегрирования по частям; $H(t)$ –многочлен степени $n - 1$ с коэффициентами, выраженными сложным образом через значения известных функций (коэффициентов уравнения и их производных) при $t = t_0$ и известные начальные условия для $y(t)$.

Важно, что $H(t)$ не зависит от неизвестного решения $y(t)$.

Итерации

$$y_{k+1}(t) = H(t) + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ h_1(t) y_k(t) + \int_{t_0}^{t} dt \left[h_2(t) y_k(t) + \ldots + \int_{t_0}^{t} dt \left(h_n(t) y_k(t) + c(t) \right) \right] \right\}$$

быстро сходятся при любом начальном условии $y_0(t)$. Чтобы доказать это, введем обозначения

$$\Delta y_k(t) = y_{k+1}(t) - y_k(t),\ M = \max_{t\in[t_0,T]} \left| \Delta y_0(t) \right|,\ H_k = \max_{t\in[t_0,T]} \left| h_k(t) \right|.$$

Итерации для $\Delta y_k(t)$ имеют вид

$$\Delta y_{k+1}(t) = \int_{t_0}^{t} dt \left\{ h_1(t) \Delta y_k(t) + \int_{t_0}^{t} dt \left[h_2(t) \Delta y_k(t) + \ldots + \int_{t_0}^{t} h_n(t) \Delta y_k(t) dt \right] \right\},$$

откуда можно получить следующие оценки для отрезка $t \in [t_0, T]$:

$$|\Delta y_0(t)| \le M,$$

$$|\Delta y_1(t)| \le M(\Delta T H_1 \Delta t + \Delta T^2 H_2 \Delta t^2/2! + \ldots + \Delta T^n H_n \Delta t^n/n!) \le MG\Delta t,$$

$$|\Delta y_2(t)| \le MG(\Delta T H_1 \Delta t^2/2! + \Delta T^2 H_2 \Delta t^3/3! + \ldots) \le MG^2 \Delta t^2/2!$$

. . . .

$$|\Delta y_k(t)| \le MG^k \Delta t^k/k!,$$

где $\Delta t = (t - t_0)/\Delta T$, $\Delta T = T - t_0$; $0 \le \Delta t \le 1$, G – константа:

$$G = \Delta T H_1 + \Delta T^2 H_2 + \ldots + \Delta T^n H_n.$$

Последовательность итерационных значений

$$y_{k+1}(t) = y_0(t) + \Delta y_0(t) + \Delta y_1(t) + \ldots + \Delta y_k(t)$$

сходится равномерно на отрезке $t \in [t_0, T]$, поскольку сумма приращений $\Delta y_k(t)$ мажорируется абсолютно и равномерно сходящимся рядом:

$$|\Delta y_0(t) + \Delta y_1(t) + \ldots + \Delta y_k(t)| \le |\Delta y_0(t)| + |\Delta y_1(t)| + \ldots + |\Delta y_k(t)| + \ldots \le M \exp(G\Delta t).$$

Следовательно, существует предел $y_{k+1}(t) \to y(t)$; он дает решение $y(t)$ интегрального уравнения (9) и дифференциального уравнения (8), а также оценку погрешности:

$$|y(t) - y_0(t)| \le |\Delta y_0(t)| + |\Delta y_1(t)| + \ldots + |\Delta y_k(t)| + \ldots \le M \exp(G\Delta t) \le MC, \qquad (14)$$

хотя это и может оказаться очень грубой оценкой константы C, используемой в неравенстве (12).

Пусть $y_0(t) = z(t)$, где $z(t)$ удовлетворяет соотношению (12). Тогда справедливы равенства

$$y_1(t) = N[z(t)] = z(t) - R(t),\ \Delta y_0(t) = y_1(t) - y_0(t) = -R(t),$$

$$M = \max|\Delta y_0(t)| = \max|R(t)|.$$

Объединяя это соотношение с уравнением (14), получаем соотношение (12).

Теорема 4 доказана.

Это доказательство имеет значительное сходство с доказательством теоремы Пикара для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [30], однако с небольшими изменениями. Неравенство (13) означает, что для минимизации разницы между приближенным решением $z(t)$ и точным решением $y(t)$ нам следует минимизировать модуль функции $R(t)$ в уравнении (12). При возврате от уравнения (9) к уравнению (8) равенство (12) преобразуется в равенство

$$z^{(n)}(t) + c_1(t)z^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n(t)z + c(t) = Q(t) = d^nR(t)/dt^n. \qquad (15)$$

Уравнение (15) показывает, что для тау-метода дифференциальная невязка является n-й производной погрешности с точностью до постоянного множителя (см. неравенство (13)). В частности, если сумма полиномов Чебышева используется в качестве возмущения для правой части дифференциальных уравнений, как это делается в оригинальном методе Ланцоша, то погрешность приближенного решения является n-кратным интегралом от суммы, составленной из полиномов Чебышева. Следовательно, для дифференциальных уравнений высокого порядка погрешность приближенного решения может быть далека от функции, наименее отклоняющейся от нуля.

Аналогичные утверждения верны для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами.

Оптимизированный тау-метод для решения дифференциальных уравнений

Предположим, что имеется линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (8), в котором старший коэффициент равен единице, а остальные коэффициенты и свободный член – это полиномы от независимой переменной. В предыдущем разделе говорится, что для получения оптимального приближенного решения следует выбрать правую часть в виде

$$R(t) = \sum_k \tau_k \overline{T}_{k+n}(t), \qquad (16)$$

где $\overline{T}_{k+n}(t)$ – полиномы Чебышева первого рода, наименее уклоняющиеся от нуля, с аргументом, масштабированным от отрезка $[-1, +1]$ до отрезка $[t_0, T]$; τ_k – константы, которые будут определены далее.

Количество членов в сумме (16) и степени полиномов соответствуют дифференциальной невязке в правой части дифференциального уравнения (8) после подстановки приближенного полиномиального решения с неопределенными коэффициентами.

При преобразовании интегральной формы

$$\begin{aligned} z(t) = y_0 + y_0'(t-t_0) + \ldots + y_0^{(n-1)}\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_k \tau_k \overline{T}_{k+n}(t) - \\ - \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{t} \left[c_1(t) z^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n(t) z(t) + c(t) \right] dt \ldots dt \end{aligned} \qquad (17)$$

в дифференциальное уравнение, выходной сигнал равен

$$z^{(n)}(t) + c_1(t) z^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n(t) z + c(t) = \sum_k \tau_k \overline{S}_k(t), \qquad (18)$$

где полиномы $\overline{S}_k(t)$ определяются как

$$\overline{S}_k(t) = d^n \overline{T}_{k+n}(t) \big/ dt^n.$$

Аналогично исходному методу Ланцоша, уравнение (18) позволяет определять как коэффициенты приближенного решения $z(t)$, так и коэффициенты τ_k. Кроме того, анализ уравнения (17) показывает, что начальные условия приближенного решения $z(t)$ должны быть рассчитаны как

$$z_0^{(j)} = \left.\frac{d^j z(t)}{dt^j}\right|_{t=t_0} = y_0^{(j)} + \sum_k \tau_k \left.\frac{d^j \overline{T}_{k+n}(t)}{dt^j}\right|_{t=t_0}, \ j = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (19)$$

Если объединить уравнения (19) и линейные уравнения, полученные из уравнения (18), то можно однозначно найти все неопределенные коэффициенты. Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5. *Пусть оптимизированный тау-метод получен путем объединения соотношений (18) для дифференциальной невязки приближенного решения $z(t)$ и соотношений (19) для начальных условий приближенного решения $z(t)$, где $\bar{S}_k(t)=d^n\bar{T}_{k+n}(t)/dt^n$ и $\bar{T}_{k+n}(t)$ – полиномы Чебышева степени $k+n$, пересчитанные из отрезка $[-1, +1]$ в отрезок $[t_0, T]$. Тогда погрешность приближенного решения $z(t)$, вычисленная как точное аналитическое решение возмущенной задачи (18), (19), удовлетворяет соотношению*

$$\max_{t\in[t_0,T]}\left|y(t)-z(t)\right|\le C\max_{t\in[t_0,T]}\left|\sum_k \tau_k\bar{T}_{k+n}(t)\right|\le C\sum_k\left|\tau_k\right|, \tag{20}$$

где константа C в уравнении (20) определяется только коэффициентами уравнения (8) и отрезком $[t_0, T]$, а приближенное решение $z(t)$, полученное таким образом, близко к оптимальному минимаксному приближению точного решения $y(t)$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует непосредственно из Теоремы 4, если в качестве интегральной невязки использовать взвешенную сумму масштабированных полиномов Чебышева первого рода. Заключительное неравенство в формуле (20) следует из равенства единице минимаксной нормы каждого из масштабированных многочленов Чебышева на рассматриваемом отрезке.

Теорема 5 доказана

Замечание 2. Строго говоря, сумма нескольких масштабированных многочленов Чебышева не является многочленом, наименее отклоняющимся от нуля на рассматриваемом отрезке и, следовательно, полученное приближенное решение отличается от оптимального минимаксного приближения точного решения дифференциального уравнения. Отклонение погрешности приближенного решения от погрешности истинного минимаксного приближения к точному решению $y(t)$ определяется теоремой Валле Пуссена (см. Теорему 1) после анализа локальных минимумов и максимумов значения правой части в неравенстве (20).

Замечание 3. В случае, когда требуются точные начальные условия, полиномы $\bar{T}_{k+n}(t)$ представляются в виде

$$\bar{T}_{k+n}(t)=(t-t_0)^n\,T_n^*\left[(t-t_0)/(T-t_0)\right],$$

где $T_n^*(t)$ – полиномы, наименее отклоняющиеся от нуля, с весом t^n на нормированном отрезке $t\in[0, 1]$.

Такая процедура дает большую погрешность, но позволяет задавать точные начальные условия. Алгоритмы численного вычисления полиномов обсуждаются в работах [25 – 27].

Пример. Рассмотрим приближенное решение задачи (3) в виде полинома

$$x(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 + c_5t^5 + c_6t^6 + c_7t^7. \tag{21}$$

Подставив это решение в уравнение (3), приходим к выводу (см. уравнение (5)), что требуются два вспомогательных полинома $\bar{S}_6(t)$ и $\bar{S}_7(t)$ со старшими членами t^6 и t^7:

$$\bar{S}_6(t)=\frac{d^2\bar{T}_8(t)}{dt^2},\ \bar{S}_7(t)=\frac{d^2\bar{T}_9(t)}{dt^2},\ \bar{T}_8(t)=T_8\left(\frac{t}{2}-1\right),\ \bar{T}_9(t)=T_9\left(\frac{t}{2}-1\right),$$

$$T_8(\tau) = 128\tau^8 - 256\tau^6+160\tau^4 + 32\tau^2 - 1,$$

$$T_9(\tau) = 256\tau^9 - 576\tau^7 + 432\tau^5 - 120\tau^3 + 9\tau.$$

С учетом уравнений (19) для начальных условий, получаются следующие соотношения:

$$x''(t)+tx'(t)+2x(t)\equiv\tau_6\bar{S}_6(t)+\tau_7\bar{S}_7(t),$$

$$x(0)-\tau_6\bar{T}_8(0)-\tau_7\bar{T}_9(0)=0,$$

$$x'(0)-\tau_6\bar{T}_8'(0)-\tau_7\bar{T}_9'(0)=1.$$

Получим следующее решение соответствующей системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{gathered} c_0 \approx 0{,}00234716,\ c_1 \approx 0{,}92262700, \\ c_2 \approx 0{,}41914500,\ c_3 \approx -1{,}45266000, \\ c_4 \approx 0{,}78428300,\ c_5 \approx -0{,}20136600, \\ c_6 \approx 0{,}02406430,\ c_7 \approx -0{,}00106550. \end{gathered} \tag{22}$$

Рис. 3 и 4 иллюстрируют точность приближенного решения и его производных первого и второго порядков. Поскольку нет визуальных различий между графиками приближенного и точного решений, на рис. 3 такие графики не представлены. Максимальная погрешность на отрезке $t \in [0,4]$ для приближенного решения равна 0,0023; для производной первого порядка погрешность составляет 0,0770; для производной второго порядка погрешность по абсолютной величине достигает значения 0,8400.

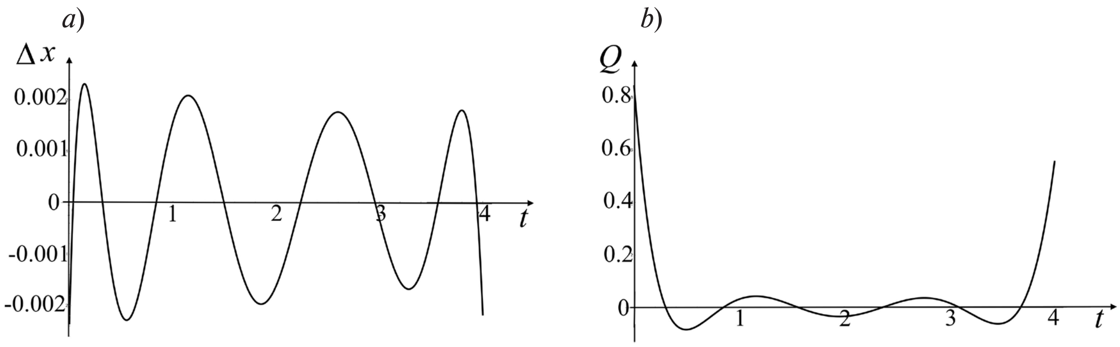

Рис. 3. Характеристики приближенного решения уравнения (3), полученного оптимизированным тау-методом: *a* – погрешность этого решения, *b* – его дифференциальная невязка

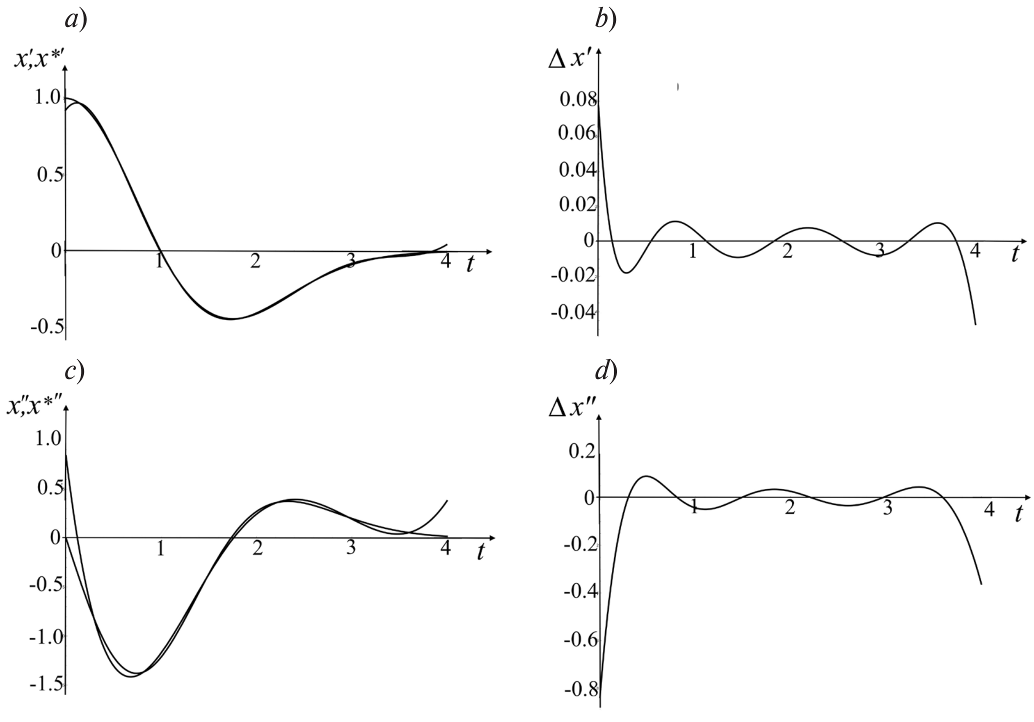

Рис. 4. Первые (*a*, *b*) и вторые (*c*, *d*) производные приближенного ($x(t)$) и точного ($x^*(t)$) решений уравнения (3) (*a*, *c*) и погрешности этих производных для приближенного решения (*b*, *d*). Результаты получены оптимизированным тау-методом

Обсуждение достигнутых результатов

Как было указано в Замечании 2 к Теореме 5, результат может отличаться от минимаксного оптимального полинома, если в предлагаемом алгоритме используется более одного вспомогательного полинома. Для нахождения истинного оптимального решения необходимо рассмотреть общую вариационную задачу, где свободные параметры приближенного решения используются для получения наименее уклоняющегося полинома для правой части интегрального уравнения.

Однако процесс решения такой задачи плохо алгоритмизирован. Замена истинного, наименее уклоняющегося полинома в правой части интегрального уравнения суммой полиномов Чебышева позволяет свести общую вариационную задачу к простым алгебраическим вычислениям. Даже если погрешность полученного приближенного решения не оказалась истинной минимаксной погрешностью, то эта погрешность все равно достаточно мала.

Несомненным достоинством рассматриваемого алгоритма следует считать его способность получать приближенные аналитические решения, когда коэффициенты уравнения, и/или начальные условия, и/или начальная и конечная точки рассматриваемого отрезка являются алгебраическими выражениями, зависящими от параметров. Это позволяет исследовать и оптимизировать решения без численного решения дифференциальных уравнений для каждого рассматриваемого набора параметров.

Заключение

Проведенное исследование позволяет сформулировать следующие обобщающие утверждения.

1. Минимизация дифференциальных невязок линейного дифференциального уравнения n-го порядка или системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка неэквивалентна минимизации погрешностей приближенных решений. Полиномиальные дифференциальные невязки в правых частях уравнений, используемых в методе Ланцоша, должны быть производными n-го порядка полиномов Чебышева, а не самими полиномами Чебышева.

2. Использование приближенных начальных условий для приближенных решений дает исследователю больше свободы в построении приближенных решений и обеспечивает бóльшую точность. Оптимальные вариации начальных условий следуют из анализа невязок интегральной формы, которые представляют собой линейные комбинации масштабированных полиномов Чебышева с абстрактными коэффициентами, вычисляемыми впоследствии из системы линейных алгебраических уравнений оптимизированного тау-метода.

3. Производные приближенных решений – это не лучшие приближения к производным точных решений, даже если приближенные решения оказываются лучшими приближениями к точным решениям. Чтобы получать хорошие приближения для производных точных решений, необходимо преобразовывать линейное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами в систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка, а затем применять метод Ланцоша к этой системе. Такой подход также вводит больше свободных коэффициентов для варьирования приближенного решения и, следовательно, обеспечивает бóльшую точность для самого приближенного решения.

Исследованию возможностей, предоставляемых заменой одиночного дифференциального уравнения системой дифференциальных уравнений в комбинации с оптимизированным тау-методом, будет посвящена отдельная публикация.

Предложенный подход представляет собой оптимизацию оригинального тау-метода Ланцоша по следующим причинам.

Во-первых, новый метод оптимизирует погрешность приближенного решения, тогда как оригинальный тау-метод оптимизирует лишь дифференциальную невязку. Однако для дифференциальных уравнений высокого порядка погрешность приближенного решения, вычисляемая как результат многократного повторного интегрирования минимальной дифференциальной невязки, может оказаться очень далекой от минимально достижимой погрешности, если дифференциальная невязка не равна тождественно нулю.

Те же соображения справедливы, когда некоторые авторы используют ортогональные многочлены иных типов для оптимизации дифференциальных невязок дифференциальных уравнений.

Во-вторых, предлагаемый метод вводит контролируемое возмущение начальных условий. Эта функция предоставляет пользователю больше свободы для оптимизации приближенного решения и, как итог, получения результатов с большей точностью.

В-третьих, ориентированный на погрешность анализ интегральных вычетов показывает, что уравнения с полиномиальными старшими коэффициентами следует рассматривать с помощью скорректированных тау-алгоритмов, чтобы получать хорошую точность для приближенных решений.

Рассмотрению специального варианта оптимизированного тау-метода, ориентированного на дифференциальные уравнения с полиномиальным старшим коэффициентом, будет посвящена отдельная публикация.

Благодарности

Александр Сергеевич Бердников выражает искреннюю благодарность доктору Алдерту Компаньеру (Dr. Aaldert Compagner) с факультета вычислительной физики Делфтского технического университета (г. Делфт, Нидерланды) за научное сотрудничество и финансовую поддержку в 1990–1996 гг. при разработке основ тау-метода и батареи тестов для датчиков случайных чисел, а также кандидату технических наук Сергею Бруновичу Туртиа, старшему научному сотруднику Института аналитического приборостроения Российской академии наук (г. Санкт-Петербург, Россия) за эффективные совместные исследования тау-метода и алгоритмов датчиков случайных чисел в указанный период времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lanczos C.** Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions // Journal of Mathematics and Physics. 1938. Vol. 17. No. 1–4. Pp. 123–199.

2. **Lanczos C.** Applied analysis. First edition. New York, USA: Prentice Hall Inc., 1956. 539 p.

3. **Гончаров В. Л.** Теория интерполирования и приближения функций. Ленинград – Москва: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1934. 316 с.

4. **Ахиезер Н. И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Гостехиздат, 1947. 323 с.

5. **Golomb M.** Lectures on theory of approximation. Chicago, USA: Argonne National Laboratory Publishing, 1962. 289 p.

6. **Ortiz E. L.** The Tau method // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1969. Vol. 6. No. 3. Pp. 480–492.

7. **Ortiz E. L.** Step by step Tau method – Part I. Piecewise polynomial approximations // Computers and Mathematics with Applications. 1975. Vol. 1. No. 3–4. Pp. 381–392.

8. **Gavina A., Matos J., Vasconcelos P. B.** Improving the accuracy of Chebyshev Tau method for nonlinear differential problems // Mathematics in Computer Science. 2016. Vol. 10. No. 2. Pp. 279–289.

9. **Ortiz E. L.** A recursive method for the approximate expansion of functions in a series of polynomials // Computer Physics Communications. 1972. Vol. 4. No. 2. Pp. 151–156.

10. **Crisci M. R., Russo E.** An extension of Ortiz' recursive formulation of the Tau method to certain linear systems of ordinary differential equations // Mathematics of Computation. 1983. Vol. 41. No. 163. Pp. 27–42.

11. **Freilich J. H., Ortiz E. L.** Numerical solution of systems of ordinary differential equations with the Tau method: An error analysis // Mathematics of Computation. 1982. Vol. 39. No. 160. Pp. 467–479.

12. **Namasivayam S., Ortiz E. L.** Error analysis of the Tau method: dependence of the approximation error on the choice of perturbation term // Computers & Mathematics with Applications. 1993. Vol. 25. No. 1. Pp. 89–104.

13. **Aliabadi M. H., Shamoard S.** A matrix formulation of the Tau method for Fedholm and Volterra linear integro-differential equations estimation // The Korean Journal of Computational & Applied Mathematics. 2002. Vol. 9. May. Pp. 497–507.

14. **Shahmorad S.** Numerical solution of the general form linear Fredholm—Volterra integro-differential equations by the Tau method with an error estimation // Applied Mathematics and Computation. 2005. Vol. 167. No. 2. Pp. 1418—1429.

15. **Gavina A., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.** Solving nonholonomic systems with the Tau method // Mathematical and Computational Applications. 2019. Vol. 24. No. 4. Pp. 91—101.

16. **Provoost E., Michiels W.** The Lanczos Tau framework for time-delay systems: Padé approximation and collocation revisited // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2024. Vol. 62. No. 6. Pp. 2529—2548.

17. **Варин В. П.** Аппроксимация дифференциальных операторов с учетом граничных условий // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 8. С. 1251—1271.

18. **Branquinho A., Díaz J. E. F., Foulquié-Moreno A., Mañas M.** Classical multiple orthogonal polynomials for arbitrary number of weights and their explicit representation // Studies in Applied Mathematics. 2025. Vol. 154. No. 3. P. e70033.

19. **Lima N. J., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.** Solving partial differential problems with Tau Toolbox // Mathematics in Computer Science. 2024. Vol. 18. No. 8. Pp. 1—12.

20. **Vasconcelos P. B., Grammont L., Lima N. J.** Low rank approximation in the computation of first kind integral equations with Tau Toolbox // Applied Numerical Mathematics. 2024. Vol. 205. November. Pp. 1—15.

21. **Lima N., Matos J. A. O., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.** A time-splitting Tau method for PDE's: A contribution for the spectral Tau Toolbox library // Mathematics in Computer Science. 2022. Vol. 16. No. 1. Pp. 6—11.

22. **Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Picar M. A.** Sobolev orthogonal polynomials and spectral methods in boundary value problems // Applied Numerical Mathematics. 2024. Vol. 200. June. Pp. 254—272.

23. **Grammont L., Kulkarni R. P., Vasconcelos P. B.** Fast and accurate solvers for weakly singular integral equations // Numerical Algorithms. 2023. Vol. 92. No. 4. Pp. 2045—2070.

24. **Калиткин Н. Н., Колганов С. А.** Построение аппроксимаций, удовлетворяющих чебышевскому альтернансу. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020. № 91. 33 с.

25. **Зоркальцев В. И., Губий Е. В.** Чебышевские приближения и аппроксимация методом наименьших квадратов // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2020. Т. 33. С. 3—19.

26. **Трубников Ю. В., Чернявский М. М.** О численно-аналитическом методе построения экстремальных полиномов комплексного аргумента // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. 2023. Т. 59. № 1. С. 18—36.

27. **Гулевич Д. Р., Залипаев В. В.** Численные методы в физике и технике. СПб.: Изд. Университета ИТМО, 2020. 211 с.

28. **Беликова Г. И., Бровкина Е. А., Вагер Б. Г., Витковская Л. В., Матвеев Ю. Л.** Численные методы. СПб.: РГГМУ, 2019. 174 с.

29. **Бельхеева Р. К., Шарый С. П.** Вычислительные методы в примерах. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2022. 90 с.

30. **Berdnikov A., Solovyev K., Krasnova N., Golovitski A., Syasko M.** Algorithm for constructing the Chebyshev-type polynomials and the Chebyshev-type approximations with a given weight // Proceedings of the Internatioonal Conference on Electrical Engineering and Photonics (EExPolytech). October 20—21., 2022. St. Petersburg: SPbPU, 2022. Pp. 143—145.

31. **Бердников А. С., Соловьев К. В.** Численный алгоритм для конструирования многочленов, наименее отклоняющихся от нуля с заданным весом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 2. С. 146—160.

32. **Бердников А. С., Масюкевич С. В.** Численный алгоритм для минимаксной полиномиальной аппроксимации функций с заданным весом // Научное приборостроение. 2023. Т. 33. № 3. С. 74—83.

33. **Hewitt E., Stromberg K. R.** Real and abstract analysis: A modern treatment of the theory of functions of a real variable. New-York: Springer-Verlag, 1965. 484 p.

34. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.

35. **Mason J. C., Handscomb D. C.** Chebyshev polynomials. London, New-York, Washington: CRC Press LLC, 2003. 335 p.

36. **Tricomi F. G.** Differential equations. London: Blackie & Son Ltd., 1961. 286 p.

REFERENCES

1. **Lanczos C.,** Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions, Journal of Mathematics and Physics. 17 (1–4) (1938) 123–199.

2. **Lanczos C.,** Applied analysis. 1-st. Ed., Prentice Hall Inc., New York, USA, 1956.

3. **Goncharov V. L.,** Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy [Theory of interpolation and approximation of functions], State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, Moscow-Leningrad, 1934 (in Russian).

4. **Achiezer N. I.,** Theory of approximation, 1-st. Ed., Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1956.

5. **Golomb M.,** Lectures on theory of approximation, Argonne National Laboratory Publishing, Chicago, USA, 1962.

6. **Ortiz E. L.,** The Tau method, SIAM J. Numer. Anal. 6 (3) (1969) 480–492.

7. **Ortiz E. L.,** Step by step Tau method – Part I. Piecewise polynomial approximations, Comput. Math. Appl. 1 (3–4) (1975) 381–392.

8. **Gavina A., Matos J., Vasconcelos P. B.,** Improving the accuracy of Chebyshev Tau method for nonlinear differential problems, Math. Comput. Sci. 10 (2) (2016) 279–289.

9. **Ortiz E. L.,** A recursive method for the approximate expansion of functions in a series of polynomials, Comput. Phys. Commun. 4 (2) (1972) 151–156.

10. **Crisci M. R., Russo E.,** An extension of Ortiz' recursive formulation of the Tau method to certain linear systems of ordinary differential equations, Math. Comput. 41 (163) (1983) 27–42.

11. **Freilich J. H., Ortiz E. L.,** Numerical solution of systems of ordinary differential equations with the Tau method: An error analysis, Math. Comput. 39 (160) (1982) 467–479.

12. **Namasivayam S., Ortiz E. L.,** Error analysis of the Tau method: dependence of the approximation error on the choice of perturbation term, Comput. Math. Appl. 25 (1) (1993) 89–104.

13. **Aliabadi M. H., Shamoard S.,** A matrix formulation of the Tau method for Fedholm and Volterra linear integro-diferential equations estimation, Korean J. Comput. & Appl. Math. 9 (May) (2002) 497–507.

14. **Shahmorad S.,** Numerical solution of the general form linear Fredholm–Volterra integro-differential equations by the Tau method with an error estimation, Appl. Math. Comput. 167 (2) (2005) 1418–1429.

15. **Gavina A., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.,** Solving nonholonomic systems with the Tau method, Math. Comput. Appl. 24 (4) (2019) 91–101.

16. **Provoost E., Michiels W.,** The Lanczos Tau framework for time-delay systems: Padé approximation and collocation revisited, SIAM J. Numer. Anal. 62 (6) (2024) 2529–2548.

17. **Varin V. P.,** Approximation of differential operators with boundary conditions, Comput. Math. Math. Phys. 63 (8) (2023) 1381–1400.

18. **Branquinho A., Díaz J. E. F., Foulquié-Moreno A., Mañas M.,** Classical multiple orthogonal polynomials for arbitrary number of weights and their explicit representation, Stud. Appl. Math. 154 (3) (2025) e70033.

19. **Lima N. J., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.,** Solving partial differential problems with Tau Toolbox, Math. Comput. Sci. 18 (8) (2024) 1–12.

20. **Vasconcelos P. B., Grammont L., Lima N. J.,** Low rank approximation in the computation of first kind integral equations with Tau Toolbox, Appl. Numer. Math. 205 (Nov) (2024) 1–15.

21. **Lima N., Matos J. A. O., Matos J. M. A., Vasconcelos P. B.,** A time-splitting Tau method for PDE's: A contribution for the spectral Tau Toolbox library, Math. Comput. Sci. 16 (1) (2022) 6–11.

22. **Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Picar M. A.,** Sobolev orthogonal polynomials and spectral methods in boundary value problems, Appl. Numer. Math. 2024. Vol. 200 (June) (2024) 254–272.

23. **Grammont L., Kulkarni R. P., Vasconcelos P. B.,** Fast and accurate solvers for weakly singular integral equations, Numer. Algorithms. 92 (4) (2023) 2045–2070.

24. **Kalitkin N. N., Kolganov S. A.,** The construction of approximations satisfying the Chebyshev alternance, Keldish Institute preprints. (91) (2020).
25. **Zorkaltsev V., Gubiy E.,** Chebyshev approximations by least squares method, The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 33 (2020) 3–19 (in Russian).
26. **Trubnikov Y. V., Chernyavsky M. M.,** On a numerical-analytical method for constructing extremal poly-nomials of a complex argument, Proc. Nat. Acad. Sci. of Belarus. Physics and Mathematics Series. 59 (1) (2023) 18–36 (in Russian).
27. **Gulevich D. R., Zalipaev V. V.,** Chislennyye metody v fizike i tekhnike [Numerical methods in physics and engineering], ITMO University, St. Petersburg, 2020 (in Russian).
28. **Belikova G. I., Brovkina E. A., Vager B. G., et al.,** Chislennyye metody [Numerical methods], Published by Russian State Hydrometeorological University, St. Petersburg, 2019 (in Russian).
29. **Belkheeva R. K., Sharyi S. P.,** Vychislitelnyye metody v primerakh [Computing techniques exemplified], Published by Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2022 (in Russian).
30. **Berdnikov A., Solovyev K., Krasnova N., et al.,** Algorithm for constructing the Chebyshev-type polynomials and the Chebyshev-type approximations with a given weight, Proc. Int. Conf. on Electrical Engineering and Photonics (EExPolytech). Oct. 20–21, 2022, SPbPU, St. Petersburg (2022) 143–145 (in Russian).
31. **Berdnikov A. S., Solovyev K. V.,** A numerical algorithm for constructing polynomials deviating least from zero with a given weight, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (2) (2023) 146–160 (in Russian).
32. **Berdnikov A. S., Masyukevich S. V.,** Numerical algorithm for minimax polynomial approximation of functions with a given weight, Nauchnoe Priborostroenie. 33 (3) (2023) 84–91.
33. **Hewitt E., Stromberg K. R.,** Real and abstract analysis: A modern treatment of the theory of functions of a real variable, Springer-Verlag, New-York, 1965.
34. **Paszkowski S.,** Numerical applications of Chebyshev polynomials and series, Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warsaw, 1975 (in Polish).
35. **Mason J. C., Handscomb D. C.,** Chebyshev polynomials, CRC Press LLC, Washington, 2003.
36. **Tricomi F. G.,** Differential equations, Blackie & Son Ltd., London, 1961.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БУЛЯНИЦА Антон Леонидович – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУН «Институт аналитического приборостроения Российской академии наук», профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.*
198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31–33, лит. А.
antbulyan@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-9235-8549

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ФГБУН «Институт аналитического приборостроения Российской академии наук», Санкт-Петербург, Россия.*
198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31–33, лит. А.
asberd@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-0985-5964

ЕВСТРАПОВ Анатолий Александрович – *доктор технических наук, директор ФГБУН «Институт аналитического приборостроения Российской академии наук», Санкт-Петербург, Россия.*
198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31–33, лит. А.
an_evs@mail.ru
ORCID: 0000-0003-4495-8096

THE AUTHORS

BULYANITSA Anton L.
Institute for Analytical Instrumentation of RAS;
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
31–33 Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
antbulyan@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-9235-8549

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of RAS
31–33 Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
asberd@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-0985-5964

EVSTRAPOV Anatoly A.
Institute for Analytical Instrumentation of RAS
31–33 Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
an_evs@mail.ru
ORCID: 0000-0003-4495-8096

Статья поступила в редакцию 03.04.2025. Одобрена после рецензирования 05.05.2025. Принята 05.05.2025.
Received 03.04.2025. Approved after reviewing 05.05.2025. Accepted 05.05.2025.