

## Математическое моделирование физических процессов

Научная статья

УДК 534.16

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18302>

### ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И АВТОКОЛЕБАНИЙ

А. А. Алифов 

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия

 [alishir@mail.ru](mailto:alishir@mail.ru)

**Аннотация.** С целью выявления действия нелинейного (кубического) параметрического возбуждения (НПВ) на взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний при источнике энергии ограниченной мощности использована широко применяемая расчетная модель автоколебательной системы, получающая энергию от такого источника. Решения нелинейных дифференциальных уравнений модели построены методом прямой линеаризации (ПЛ), которому свойственны простота и малые затраты времени. Характеристика силы трения, вызывающая автоколебания, линеаризована методом ПЛ. Выведены уравнения для амплитуды, фазы колебаний и скорости источника энергии в нестационарном и стационарном случаях движения. С использованием критериев Рауса – Гурвица рассмотрена устойчивость стационарных движений. Влияние НПВ на взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний исследовано и расчетным путем; расчеты показали, что НПВ изменяет форму амплитудных кривых, присущих линейному воздействию, оказывает существенное влияние на устойчивость движения.

**Ключевые слова:** взаимодействие, вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания, нелинейность, метод прямой линеаризации

**Для цитирования:** Алифов А. А. Влияние нелинейного параметрического возбуждения на взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2025. Т. 18. № 3. С. 20–29. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18302>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18302>

### THE INFLUENCE OF NONLINEAR PARAMETRIC EXCITATION ON THE INTERACTION OF FORCED, PARAMETRIC AND SELF-OSCILLATIONS

A. A. Alifov 

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

 [alishir@mail.ru](mailto:alishir@mail.ru)

**Abstract.** In order to reveal the effect of nonlinear (cubic) parametric excitation (NPE) on the interaction of forced, parametric, and self-oscillation with a limited-power energy source, a widely used computed model of a self-oscillating system receiving energy from such a source was used. Solutions of nonlinear differential equations of the model were constructed using the direct linearization method (DLM), which is distinguished from the known ones by its simplicity and low time costs. The friction force characteristic causing self-oscillations was linearized by DLM. Equations for the amplitude, oscillation phase and the velocity of the energy source in

nonstationary and stationary motion cases were derived. Using the Routh – Hurwitz criteria, the stability of stationary movements was considered. The influence of NPE on the interaction of forced, parametric and self-oscillations was investigated by calculations. The latter showed NPE to change the shape of the amplitude curves inherent in linear action and to have a significant impact on the motion stability.

**Keywords:** interaction, forced oscillations, parametric oscillations, self-oscillations, nonlinearity, direct linearization method

**For citation:** Alifov A. A., The influence of nonlinear parametric excitation on the interaction of forced, parametric and self-oscillations, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 18 (3) (2025) 20–29. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.18302>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

## Введение

Взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний относится к самому сложному из четырех классов смешанных колебаний по классификации, введенной в монографии [1]; они складываются из комбинации типов колебаний [2 – 4]. Из этих четырех классов смешанных колебаний в работе [5] рассмотрено взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний при нелинейном параметрическом возбуждении кубического вида без учета свойств источника энергии.

Учет указанных свойств становится в настоящее время достаточно актуальным в связи с экологическими проблемами, изменением климата, уменьшением ресурсов энергетики. Необходимость учета свойств источника энергии, которая в теории колебаний связана с известным эффектом Зоммерфельда, последовательно изложена в основополагающей монографии [6]. В этом направлении опубликовано множество работ во всем мире, в том числе книги и статьи [1, 7 – 17]. А связь между уровнем потребляемой энергии при работе деталей, точностью их обработки и колебаниями показана в публикации [18].

Ниже рассматриваются смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при нелинейном параметрическом возбуждении и ограниченной мощности источника энергии. Для решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эти колебания, использован метод прямой линеаризации [19].

## Расчетная модель

Под действием силы трения во многих технических объектах [20 – 24] возникают автоколебания, для описания которых широко используется рассматриваемая нами модель (рис. 1). Тело с массой  $m$  соединено с корпусом посредством пружины и демпфера. Оно лежит на ленте, приводимой в движение двигателем ограниченной мощности с моментной характеристикой  $M(\dot{\phi})$  и суммарным моментом инерции вращающихся частей  $I$ . Между телом и лентой возникает сила трения  $T(U)$ , зависящая от относительной скорости  $U$ :

$$U = V - \dot{x}, V = r_0 \dot{\phi},$$

где  $r_0$  – радиус шкива, вращающего ленту,  $r_0 = \text{const}$ ;  $\dot{\phi}$  – скорость вращения ротора двигателя.

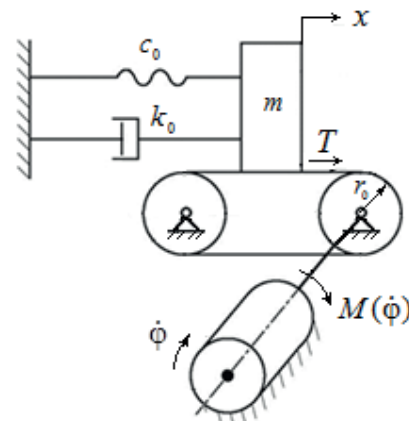


Рис. 1. Модель рассматриваемой системы:  $m$  – масса тела;  $\dot{\phi}$  – скорость вращения ротора двигателя;  $M(\dot{\phi})$  – моментная характеристика;  $T$  – сила трения;  $r_0$  – радиус шкива, вращающего ленту;  $c_0$ ,  $k_0$  – жесткость пружины и коэффициент демпфирования, соответственно

Уравнения движения системы с учетом действия на тело внешней вынуждающей силы  $\lambda \sin(v_1 t)$  и нелинейного параметрического возбуждения  $bx^3 \cos(vt)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_0 \dot{x} + c_0 x &= T(U) + \lambda \sin v_1 t - bx^3 \cos vt, \\ I\ddot{\phi} &= M(\dot{\phi}) - r_0 T(U), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k_0, c_0, \lambda, b, v_1, v$  – константы.

Силу трения примем в виде функциональной зависимости, широко распространенной в реальных (в том числе космических) [25] условиях:

$$T(U) = T_0(\operatorname{sgn} U - \alpha_1 U + \alpha_3 U^3), \quad (2)$$

где  $T_0$  – сила нормальной реакции,  $T_0 = \text{const}$ ;  $\alpha_1, \alpha_3$  – константы;  $\operatorname{sgn} U = 1$  при  $U > 0$  и  $\operatorname{sgn} U = -1$  при  $U < 0$ . В случае  $U = 0$ , т.е. относительного покоя, имеют место неравенства  $-T_0 \leq T(0) \leq T_0$ .

Методом прямой линеаризации [19] заменим нелинейные составляющие силы трения  $T(U)$  линейной:

$$T(U) = T_0(\operatorname{sgn} U + B_T + k_T \dot{x}), \quad (3)$$

где  $B_T = -\alpha_1 u + \alpha_3 u_3 + 3N_2 \alpha_3 u a^2 p^2$ ,  $k_T = -\alpha_3 \bar{N}_3 (a^2 p^2 - h)$ ,  $h = 3(u_0^2 - u^2) / \bar{N}_3$ ,  $u_0^2 = \alpha_1 / 3\alpha_3$ ,  $N_2 = (2r + 1) / (2r + 3)$ ,  $\bar{N}_3 = (2r + 3) / (2r + 5)$ .

Величина  $r$ , входящая в выражения для числовых коэффициентов  $N_2$  и  $\bar{N}_3$ , представляет собой параметр точности линеаризации, значение которой не ограничено, но ее достаточно выбрать в интервале  $(0, 2)$ . В работе [26] приведено сравнение коэффициентов  $\bar{N}_n$  и  $N_n$  с коэффициентами, полученными методом усреднения [27 – 30] для различных значений степени нелинейности  $n$ , и показано допустимое согласие результатов применения обоих методов.

С учетом замены (3) уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k\dot{x} + c_0 x &= T_0(\operatorname{sgn} U + B_T) + \lambda \sin v_1 t - bx^3 \cos vt, \\ I\ddot{\phi} &= M(\dot{\phi}) - r_0 T_0(\operatorname{sgn} U + B_T + k_T \dot{x}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $k = k_0 - T_0 k_T$ .

### Решение уравнений

Как показано в монографии [1], решения уравнений с функцией (2) при  $U > 0$  и  $U < 0$  принципиально различны, поэтому следует рассмотреть их отдельно.

Представим эти случаи выражениями

$$u \geq ap, \quad u < ap,$$

где  $u = r_0 \Omega$  ( $\Omega$  – усредненная скорость  $\dot{\phi}$ ).

Рассмотрим решения (4) при основных резонансах с частотами  $\omega \approx v_1$  и  $\omega \approx v/2$ , так как они представляют главный практический интерес.

Если использовать метод замены переменных с усреднением [19], то получаем выражения

$$x = a \cos \psi, \quad \dot{x} = -ap \sin \psi, \quad \psi = pt + \xi, \quad p = v/2, \quad \dot{\phi} = \Omega. \quad (5)$$

Далее рассматриваем два случая.

i)  $u \geq ap$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} (2aA + 2\lambda \cos \xi - 0,5ba^3 \sin 2\xi), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} [2am(\omega_0^2 - p^2) + 2\lambda \sin \xi + ba^3 \cos 2\xi], \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{I} [M(u/r_0) - r_0 T_0(1 + B_T)]; \end{aligned} \quad (6a)$$



ii)  $u < ap$ , тогда

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} \left[ 2aA + 2\lambda \cos \xi - 0,5ba^3 \sin 2\xi - \frac{8T_0}{\pi ap} \sqrt{a^2 p^2 - u^2} \right], \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} \left[ 2am(\omega_0^2 - p^2) + 2\lambda \sin \xi + ba^3 \cos 2\xi \right], \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{I} \left[ M(u/r_0) - r_0 T_0 (1 + B_T) - \frac{r_0 T_0}{\pi} (3\pi - 2\Psi_*) \right],\end{aligned}\quad (6b)$$

где  $\omega_0^2 = c_0/m$ .

Условия  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{\xi} = 0$ , в случае  $u \geq ap$  доставляют следующие соотношения для определения стационарных значений  $a$  и  $\xi$ :

$$\begin{aligned}(\lambda^2 b^2 a^6 + b^2 a^6 L - \lambda^4 + 2\lambda^2 L - L^2 - 4b^2 a^8 A^2)^2 - 4\lambda^2 b^4 a^{12} L &= 0, \\ \operatorname{tg} \xi &= D(Dba^3 - 4\lambda)/8aA,\end{aligned}\quad (7)$$

где  $L = \lambda^2 + ba^4 [ba^2 + 2m(\omega_0^2 - p^2)]$ ,  $A = p(k_0 - T_0 k_T)$ ,  $D = 2(\lambda \pm \sqrt{L})/ba^3$ .

Для определения стационарных значений скорости  $u$  из третьего уравнения (6a) имеем при условии  $\dot{u} = 0$  выражение вида

$$M(u/r_0) - S(u) = 0, \quad (8)$$

где  $S(u)$  — нагрузка на источник энергии со стороны колебательной системы.

В случае  $u < ap$ , для определения амплитуды стационарных колебаний имеем приближенную зависимость  $ap \approx u$ , а стационарные значения скорости  $u$  определяется уравнением (8) с учетом выражения для нагрузки

$$S(u) = r_0 T_0 [(1 + B_T) + \pi^{-1}(3\pi - 2\Psi_*)],$$

которое следует из третьего уравнения (6b) при  $\dot{u} = 0$ .

### Устойчивость стационарных движений

Для определения устойчивости стационарных колебаний системы составляем уравнения в вариациях для уравнений (6), для чего пользуемся критериями Рауса — Гурвица. В результате получаем следующие условия:

$$D_1 > 0, D_3 > 0, D_1 D_2 - D_3 > 0,$$

где  $D_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33})$ ,  $D_2 = b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31}$ ,  $D_3 = b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{22}b_{13}b_{31} - b_{11}b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32}$ .

В случае скоростей  $u \geq ap$  имеем выражения вида

$$\begin{aligned}b_{11} &= \frac{r_0}{I} \left( Q - r_0 T_0 \frac{\partial B_T}{\partial u} \right), b_{12} = -\frac{r_0^2 T_0}{I} \frac{\partial B_T}{\partial a}, b_{13} = 0, \\ b_{21} &= a \frac{T_0}{2m} \frac{\partial k_T}{\partial u}, b_{22} = -\frac{1}{8pm} \left\{ 4p \left[ k_0 + T_0 \bar{N}_3 \alpha_3 (3a^2 p^2 - h) \right] - 3ba^2 \sin 2\xi \right\}, \\ b_{23} &= \frac{1}{4pm} \left[ 2\lambda \sin \xi + ba^3 \cos 2\xi \right], b_{31} = 0, \\ b_{32} &= -\frac{1}{2pma^2} (\lambda \sin \xi - ba^3 \cos 2\xi), b_{33} = \frac{1}{2pma} \left[ \lambda \cos \xi - ba^3 \sin 2\xi \right].\end{aligned}$$

В случае  $u < ap$  изменяются лишь коэффициенты, и выражения имеют вид

$$b_{11} = \frac{r_0}{I} \left[ Q - r_0 T_0 \frac{\partial B_T}{\partial u} - \frac{2r_0 T_0}{\pi \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \quad b_{12} = -\frac{r_0^2 T_0}{I} \left[ \frac{\partial B_T}{\partial a} + \frac{2u}{\pi a \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right],$$

$$b_{21} = \frac{a}{2m} \left[ T_0 \frac{\partial k_T}{\partial u} + \frac{4u T_0}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right],$$

$$b_{22} = -\frac{1}{8pm} \left\{ 4p \left[ k_0 + T_0 \bar{N}_3 \alpha_3 (3a^2 p^2 - h) \right] - 3ba^2 \sin 2\xi \right\} - \frac{2T_0 u^2}{\pi m a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}},$$

где  $\frac{\partial B_T}{\partial u} = -(\alpha_1 - 3\alpha_3 u^2 - 3\alpha_3 N_2 a^2 p^2)$ ,  $\frac{\partial B_T}{\partial a} = 6N_2 \alpha_3 u a p^2$ ,  $\frac{\partial k_T}{\partial u} = -6\alpha_3 u$ ,  $Q = dM(u/r_0)/du$ .

### Расчеты

Для получения информации о влиянии нелинейного параметрического воздействия кубического вида на динамику смешанных вынужденных, параметрических и автоколебаний были проведены расчеты с использованием следующих значений параметров:

$$\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}, b = 0,686 \text{ Н} \cdot \text{см}^{-1}, \lambda = 0,196 \text{ Н}, k_0 = 0,196 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}, T_0 = 4,9 \text{ Н},$$

$$\alpha_1 = 0,84 \text{ с} \cdot \text{см}^{-1}, \alpha_3 = 0,18 \text{ с}^3 \cdot \text{см}^{-3}, r_0 = 1 \text{ см}, I = 9,8 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^2.$$

При расчетах амплитуды для коэффициента линейаризации  $k_T$  было использовано число  $\bar{N}_3 = 3/4$ , которое получается при значении параметра точности линейаризации  $r = 1,50$ . Для коэффициента линейаризации  $B_T$  было использовано число  $N_2 = 3/5$  ( $r = 0,65$ ). Величины на приведенных далее рисунках и связанных с ним текстах нормализованы.

На рис. 2 представлены амплитудно-частотные кривые  $a(v)$ , полученные при расчетах на основе уравнения (7). Горизонтальные линии с обозначением  $a_a$  указывают уровень величин амплитуд автоколебаний, которые имеют место при скоростях  $u = 1,14$  и  $1,20$ .

Горизонтальный участок на кривой синего цвета (см. рис. 2, а) соответствует приближенной зависимости  $ap \approx u = 1,14$ . Колебания устойчивы при характеристиках источника энергии, крутизна  $Q$  которых находится в пределах заштрихованного сектора ( $Q = dM(u/r_0)/du$ ).

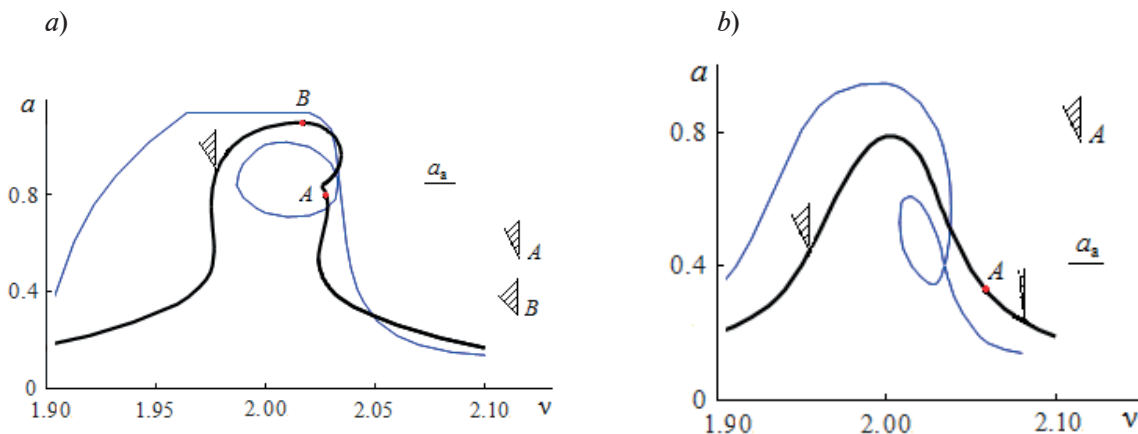


Рис. 2. Амплитудно-частотные зависимости при скоростях  $u = 1,14$  (а) и  $1,20$  (б).

Кривые синего цвета приведены для сравнения и представляют линейное параметрическое воздействие вида  $x \cos(vt)$ . Горизонтальные линии с обозначением  $a_a$  указывают уровень величин амплитуд автоколебаний. Заштрихованные сектора отражают крутизну  $Q$  характеристики источника энергии ( $Q = dM(u/r_0)/du$ ) и соответствуют устойчивым амплитудам (в точке А и других позициях)





Кривые синего цвета представляют линейное параметрическое воздействие  $x\cos(vt)$  и приведены с целью сравнения с нелинейным воздействием  $x^3\cos(vt)$ . Это сравнение показывает разницу влияния линейного и нелинейного параметрических возбуждений на динамику системы. При этих возбуждениях различаются уровни амплитуд и формы кривых возбуждения, а также значения ширины областей резонанса. Возможно также различие в количестве амплитуд на одной и той же частоте. Например, на рис. 2, *a* видно, что у частот около точки *A* при линейном возбуждении имеется три амплитуды, а при нелинейном – 4. В то же время рис. 2, *b* показывает, что при нелинейном параметрическом возбуждении отсутствуют частоты, при которых имеется более одной амплитуды, а при линейном они присутствуют.

Решение дифференциальных уравнений (1) было получено также численно. Характеристика источника энергии для решения была принята в виде

$$M(\phi) = M_0 - Q\phi.$$

Крутизна варьировалась в пределах  $0 < Q \leq 20$ , где значение  $Q = 20$  соответствует углу, равному приблизительно  $87^\circ$ . Для примера на рис. 3 представлен один из графиков, который отражает одно из решений, полученных при разных значениях параметров  $M_0$ ,  $Q$ ,  $p$ . Числа в рамках (шрифт голубого цвета) выданы программой вычисления. В случае решения, представленного на рис. 3, были взяты значения параметров  $M_0 = 5,9889$ ,

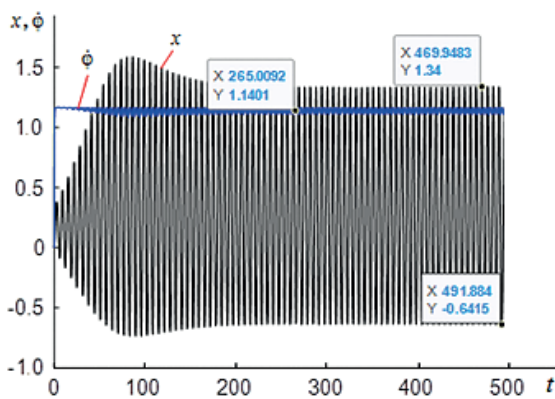


Рис. 3. Зависимости  $x(t)$  и  $\phi(t)$  при значениях параметров двигателя  $M_0 = 5,9889$ ,  $Q = 5$ .  
Данные получены при  $p = 1$

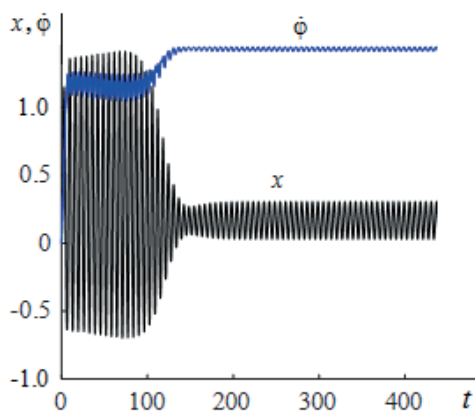


Рис. 4. Временная динамика координаты  $x$  и скорости вращения ротора двигателя  $\phi$  при его характеристике  $M_0 = 0,8780994695$ .  
Данные получены при  $p = 1$

$Q = 5$ , которые позволили выйти на режим со средним значением скорости вращения ротора двигателя  $\dot{\phi} = 1,1401$  (в рамочке на графике использовано обозначение  $Y$ ); этот режим достаточно хорошо соответствует скорости  $u = 1,14$ . Для амплитуды ( $Y$  в рамочках на графике) было получено значение  $a \approx 0,991$ , близкое к значению  $1,07$ , полученному в результате решения уравнения (7).

Было также изучено влияние параметров  $M_0$ ,  $Q$ , характеризующих источник энергии, на протекание динамических процессов. Как было отмечено выше, решения уравнений для случаев  $u \geq ap$ ,  $u < ap$  принципиально различны и существует некоторое граничное значение скорости  $u_T$ , разделяющее эти случаи. При граничном значении скорости  $u_T$  в системе возможен переход из одного состояния в другое. Это зависит от крутизны характеристики источника энергии, ее расположения относительно кривой нагрузки на источник. Переход имеет место при пологих характеристиках  $M(\phi)$  и связан с нагрузкой  $S(u)$  на источник энергии со стороны колебательной системы, зависящей от функции (2), выраженный уравнением (8).

В качестве примера на рис. 4 представлен график указанного перехода при определенных значениях параметров двигателя и характеристики источника энергии. При одном и том же значении крутизны  $Q = 0,4986$  (угол наклона составляет около  $26^\circ$ ), весьма малая ( $1 \cdot 10^{-10}$ ) разница значений  $M_0$ , равных  $0,8780994694$  и  $0,8780994695$ , приводит к кардинальному изменению

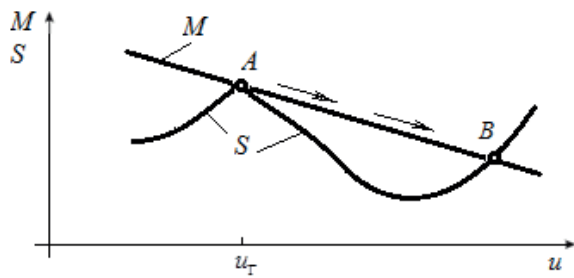


Рис. 5. Зависимости нагрузки  $S$  и моментной характеристики  $M$  от скорости  $u$  в ее узком диапазоне изменения;  
 $u_T$  – граничное значение скорости

теристики  $M$  от скорости  $u$ , на узком диапазоне изменения  $u$ , в котором имеет место переход из точки  $A$  в точку  $B$  (соответствует данным на рис. 4) при фиксированной позиции характеристики источника энергии на граничной скорости  $u_T$ , соответствующей точке  $A$ . Разные переходы с описанием полного графика нагрузки для различных классов колебаний обстоятельно изложены в монографии [1], поэтому здесь не представлены.

Помимо представленных в настоящей статье результатов, были также численно решены дифференциальные уравнения (6). Результаты здесь не приведены ввиду ограниченного объема статьи. Отметим лишь то, что получено хорошее согласие результатов этих решений с таковыми для уравнений (7).

### Заключение

Как следует из результатов, полученных в настоящем исследовании, нелинейное параметрическое возбуждение обладает специфическими особенностями, по сравнению с линейным параметрическим. Эти особенности следующие:

- оно значительно изменяет форму амплитудных кривых;
- оказывает существенное влияние на устойчивость колебаний.

Сравнение результатов по этим возбуждениям показывает, что при взаимодействии колебательной системы с нелинейным параметрическим возбуждением (в случае источника энергии ограниченной мощности) возникает ряд эффектов такого же характера, как при линейном параметрическом возбуждении. Представляется нецелесообразным излагать здесь характер этих эффектов, поскольку их основательное и подробное описание представлено в монографии [1].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alifov A. A., Frolov K. V. Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publishing Corporation, 1990. 327 p.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1981. 568 с.
3. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. Под ред. В. В. Мигулина. 2-е изд., перераб. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. 392 с.
4. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
5. Алифов А. А. Влияние нелинейного параметрического возбуждения на взаимодействие параметрических и вынужденных колебаний // Материалы XV Всероссийской научно-технической конференции «Динамика нелинейных дискретных электротехнических и электронных систем». Чебоксары, 02 июня 2023 года. Чебоксары: Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, 2023. С. 7–8.
6. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 236 с.
7. Фролов К. В. Избранные труды. В 2 тт. Т. 1. Вибрация и техника. М.: Наука, 2007. 349 с.

8. Рубаник В. П., Старик Л. К. Об устойчивости автоколебаний резца в случае неидеального источника энергии // Научные труды высших учебных заведений Литовской ССР. Серия «Вибротехника». 1971. № 2 (11). С. 205–212.
9. Абдиев Ф. К. Автоколебания системы с запаздыванием и с неидеальным источником энергии // Известия АН АзССР. Серия физико-технических и математических наук. 1983. № 4. С. 134–139.
10. Bharti S. K., Bisoi A., Sinha A., Samantaray A. K., Bhattacharyya R. Sommerfeld effect at forward and backward critical speeds in a rigid rotor shaft system with anisotropic supports // Journal of Sound and Vibration. 2019. Vol. 442. 3 March. Pp. 330–349.
11. Sinha A., Samantaray A. K., Bhattacharyya R. Self-synchronization of two unbalanced DC motor-driven rotors on a common movable platform // Badodkar D., Dwarakanath T. (Eds.). Machines, mechanism and robotics. Proceedings of iNaCoMM 2017. Book Ser. “Lecture Notes in Mechanical Engineering”, Springer, Singapore, 2018. Pp. 207–217.
12. Jha A. K., Dasgupta S. S. Attenuation of Sommerfeld effect in an internally damped eccentric shaft-disk system via active magnetic bearings // Meccanica. 2019. Vol. 54. No. 1–2. Pp. 311–320.
13. Varanis M., Balthazar J. M., Silva A., Mereles A. G., Pederiva R. Remarks on the Sommerfeld effect characterization in the wavelet domain // Journal of Vibration and Control. 2019. Vol. 25. No. 1. Pp. 98–108.
14. Rocha R. T., Balthazar J. M., Tusset A. M., Souza S. L. T., Janzen F. C., Arbex H. C. On a non-ideal magnetic levitation system: nonlinear dynamical behavior and energy harvesting analyses // Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 95. No. 4. Pp. 3423–3438.
15. Sinha A., Bharti S. K., Samantaray A. K., Bhattacharyya R. Sommerfeld effect in a single-DoF system with base excitation from motor driven mechanism // Mechanism and Machine Theory. 2020. Vol. 148. June. P. 103808.
16. Чернышева Ю. В., Горский А. Н., Середа А. Г. Эффект Зоммерфельда и динамика вагонов // Электроника и электрооборудование транспорта. 2019. № 1. С. 8–10.
17. Ешин Е. К. Об эффекте Зоммерфельда и скрытых колебаниях в асинхронном электроприводе горных машин // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2023. Т. 66. № 1. С. 80–85.
18. Alifov A. A. About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation // Proceedings of the International Scientific and Technical Conference "Measurement and Quality: Problems, Prospects"; November 21–23, 2018, AzTU, Baku, Azerbaijan. Pp. 289–293.
19. Алифов А. А. Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2015. 74 с.
20. Климов Д. М. Об одном виде автоколебаний в системе с сухим трением // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 3. С. 6–12.
21. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Ленинград: Машиностроение, 1976. 320 с.
22. Мурашкин Л. С., Мурашкин С. Л. Прикладная нелинейная механика станков. Ленинград: Машиностроение, 1977. 192 с.
23. Пономарев А. С., Соколов В. И., Кожухарь А. А. Поперечные автоколебания силовых столов, вызванные силами трения // Вестник Харьковского политехнического института. Машиностроение. 1977. Т. 8. № 130. С. 67–69.
24. Коритыцкий Я. И. Крутильные автоколебания вытяжных приборов прядильных машин при граничном трении в опорах скольжения // «Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах». Сб. статей АН СССР под ред. К. В. Фролова. М.: Наука, 1972. 303 с.
25. Броневец М. А., Журавлёв В. Ф. Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 3–11.
26. Алифов А. А. Смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при неидеальном источнике энергии и запаздывающих силах // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29. № 5. С. 739–750.
27. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
28. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
29. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фufaев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 256 с.



30. Вибрации в технике. Справочник. В 6 тт. Ред. совет: В. Н. Челомей (пред., гл. ред.). Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. Под ред. И. И. Блехмана. 1979. 351 с.

## REFERENCES

1. **Alifov A. A., Frolov K. V.**, Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. Hemisphere Publishing Corporation, New York, Washington, Philadelphia, London, 1990.
2. **Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E.**, Theory of vibration, Nauka Publishing, Moscow, 1981 (in Russian).
3. **Migulin V. V., Medvedev V. I., Mustel E. R., Parygin V. N.**, Osnovy teorii kolebaniy [Foundations of vibration theory], 2-nd edition, Nauka Publishing, Moscow, 1988 (in Russian).
4. **Biderman V. L.**, Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy [Theory of mechanical vibrations], Vysshaya Shkola [The Higher School Publishing], Moscow, 1980 (in Russian).
5. **Alifov A. A.**, Vliyaniye nelineynogo parametricheskogo возбуждениya na vzaimodeystviye parametricheskikh i vynuzhdennykh kolebaniy [Effect of nonlinear parametric excitation on the interaction between parametric and forced oscillations], Proc. 15-th All-Russian Sci. & Techn. Conf. "Dinamika nelineynykh diskretnykh elektrotekhnicheskikh i elektronnykh system" [Dynamics of nonlinear discrete electrotechnical and electronic systems], June 02, 2023, Cheboksary: Chuvash State University Named after I. N. Ulyanov (2023) 7–8.
6. **Kononenko V. O.**, Vibrating systems with limited power-supply, Iliffe, London, 1969.
7. **Frolov K. V.**, Izbrannyye Trudy v 2 t [Selected works in 2 Vols.], Nauka Publishing, Moscow, 2007 (in Russian).
8. **Rubnik V. P., Starik L. K.**, Ob ustoychivosti avtokolebaniy reztsa v sluchaye neidealnogo istochnika energii [On stability of cutter's self-oscillations in the case of a nonideal energy source], Nauchnyye trudy vuzov Lit. SSR. Vibrotekhnika [Scientific Transactions of Higher Schools of Lithuanian SSR, Ser. Vibrotechnics] (2(11)) (1971) 205–212 (in Russian).
9. **Abdiyev F. K.**, Avtokolebaniya sistemy s zapazdyvaniyem i s neidealnym istochnikom energii [Self-oscillations of a delayed system with a nonideal energy source], Izv. AN AzSSR. Seriya Fiziko-Tekhnicheskie i Matematicheskie Nauki [News of the Academy of Sciences of the Azerbaijan SSR: Ser. Physical, Technical and Mathematical Sciences]. (4) (1983) 134–139 (in Russian).
10. **Bharti S. K., Bisoi A., Sinha A., et al.**, Sommerfeld effect at forward and backward critical speeds in a rigid rotor shaft system with anisotropic supports, J. Sound Vib. 442 (3 March) (2019) 330–349.
11. **Sinha A., Samantaray A. K., Bhattacharyya R.**, Self-synchronization of two unbalanced DC motor-driven rotors on a common movable platform, In book: Badodkar D., Dwarakanath T. (Eds.) Machines, mechanism and robotics, Proc. iNaCoMM 2017. Book ser. "Lecture Notes in Mechanical Engineering", Springer, Singapore (2018) 207–217.
12. **Jha A. K., Dasgupta S. S.**, Attenuation of Sommerfeld effect in an internally damped eccentric shaft-disk system via active magnetic bearings, Meccanica. 54 (1–2) (2019) 311–320.
13. **Varanis M., Balthazar J.M., Silva A., et al.**, Remarks on the Sommerfeld effect characterization in the wavelet domain, J. Vib. Control. 25 (1) (2019) 98–108.
14. **Rocha R. T., Balthazar J. M., Tusset A. M., et al.**, On a non-ideal magnetic levitation system: nonlinear dynamical behavior and energy harvesting analyses, Nonlinear Dyn. 95 (4) (2019) 3423–3438.
15. **Sinha A., Bharti S. K., Samantaray A. K., Bhattacharyya R.**, Sommerfeld effect in a single-DoF system with base excitation from motor driven mechanism, Mech. Mach. Theory. 148 (June) (2020) 103808.
16. **Chernysheva J., Gorskiy A., Sereda A.**, The effect of Sommerfeld and wagon dynamics, Electronics & Electrical Equipment of Transport. (1) (2019) 8–10 (in Russian).
17. **Eshchin E. K.**, On the Sommerfeld effect and hidden oscillations in the minning machines asynchronous, Russian Electromechanics. 66 (1) (2023) 80–85 (in Russian).
18. **Alifov A. A.**, About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation, Proc. Int. Sci. Tech. Conf. "Measurement and Quality: Problems, Prospects", Nov. 21–23, 2018, AzTU, Baku, Azerbaijan (2018) 289–293.



19. **Alifov A. A.**, Metody pryamoy linearizatsii dlya rascheta nelineynykh system [Methods of direct linearization for calculation of nonlinear systems], Research Center “Regular and Chaotic Dynamics”, Moscow – Izhevsk, 2015 (in Russian).
20. **Klimov D. M.**, On one type of self-excited vibrations in a system with dry friction, *Mech. Solids*. 38 (3) (2003) 1–7.
21. **Panovko Ya. G.**, Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara [Fundamentals of applied theory of oscillations and impact], Mashinostroyeniye Publishing, Leningrad, 1976 (in Russian).
22. **Murashkin L. S., Murashkin S. L.**, Prikladnaya nelineynaya mekhanika stankov [Applied nonlinear mechanics of machine tools], Mashinostroyeniye Publishing, Leningrad, 1977 (in Russian).
23. **Ponomarev A. S., Sokolov V. I., Kozhukhar’ A. A.**, Poperechnyye avtokolebaniya silovykh stolov, vyzvannyye silami treniya [Transverse self-oscillations of force tables caused by friction forces], *Bulletin of the Kharkiv Polytechnic Institute. Ser. Machine Engineering*. 8 (130) (1977) 67–69.
24. **Korityssky Ya. I.**, Krutilnyye avtokolebaniya vytyazhnykh priborov pryadilnykh mashin pri granichnom trenii v oporakh skolzheniya [Torsional self-oscillations of spinning machine drafting devices with boundary friction in sliding bearings], In book: *Collected works “Nonlinear vibrations and transition processes in machines”*, Nauka Publishing, Moscow, 1972.
25. **Bronovets M. A., Zhuravlev V. F.**, On self-excited vibrations in friction source measurement systems, *Mech. Solids*. 47 (3) (2012) 261–268.
26. **Alifov A. A. O.**, Mixed forced parametric, and self-oscillations with a nonideal energy source and lagging forces, *Izvestiya VUZ. Nonlinear Dynamics*. 29 (5) (2021) 739–750 (in Russian).
27. **Bogoliubov N. N., Mitropolsky Y. A.**, Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, CRC Press, Florida, USA, 1961.
28. **Moiseev N. N.**, Asimptoticheskiye metody nelineynoy mekhaniki [Asymptotic methods of nonlinear mechanics], Nauka Publishing, Moscow, 1981 (in Russian).
29. **Butenin N. V., Neymark Yu. I., Fufayev N. A.**, Vvedeniye v teoriyu nelineynykh kolebaniy [Introduction to the theory of nonlinear oscillations], Nauka Publishing, Moscow, 1976 (in Russian).
30. **Chelomey V. N.** (Chairman), Vibratsii v технике: spravochnik [Vibrations in machinery: Handbook], in 6 Vols., Vol. 2. Vibrations of nonlinear mechanical systems, Edited by Blekhman I. I., Publishing House of Mechanical Engineering, Moscow, 1979 (in Russian).

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**АЛИФОВ Алишир Али оглы** — доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории динамических процессов Института машиноведения имени А. А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия.

101000, Россия, г. Москва, Малый Харитоньевский пер., 4  
alishir@mail.ru  
ORCID: 0000-0003-2327-068X

### THE AUTHOR

**ALIFOV Alishir Ali**

*Mechanical Engineering Research Institute of the RAS*  
4 Malij Haritonjevskij lane, Moscow, 101000, Russia  
alishir@mail.ru  
ORCID: 0000-0003-2327-068

*Статья поступила в редакцию 12.02.2025. Одобрена после рецензирования 17.03.2025. Принята 17.03.2025.*

*Received 12.02.2025. Approved after reviewing 17.03.2025. Accepted 17.03.2025.*