

Прикладная и вычислительная математика

Научная статья

УДК 519.63

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17415>

СРАВНЕНИЕ АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ ЭЛЕМЕНТОВ РАВЬЯРА – ТОМА НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКОВ

Д. А. Петухов [□], М. Е. Фролов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

[□] d_a_petukhov@mail.ru

Аннотация. Функциональные апостериорные оценки погрешности известны для многих задач теории упругости. Однако, как следует из работы С. И. Репина и А. В. Музалевского, применение классических аппроксимаций метода конечных элементов при их реализации может вести к растущей переоценке абсолютного значения ошибки. Позднее, в работе М. Е. Фролова показано, что применение аппроксимаций, характерных для смешанных методов конечных элементов, позволяет избежать возрастания переоценки абсолютной величины ошибки с измельчением сеток. Дальнейшие исследования в этом направлении проводились М. Е. Фроловым и М. А. Чуриловой с использованием простейших аппроксимаций Равьяра – Тома и Арнольда – Боффи – Фалка. В данной работе проведен сравнительный анализ конечных элементов Равьяра – Тома нулевого и первого порядков. На примере плоских задач линейной теории упругости показано, что применение аппроксимации Равьяра – Тома первого порядка существенно снижает переоценку абсолютной величины ошибки.

Ключевые слова: метод конечных элементов, надежные апостериорные оценки погрешности, элементы Равьяра – Тома

Для цитирования: Петухов Д. А., Фролов М. Е. Сравнение адаптивных алгоритмов решения плоских задач линейной теории упругости на основе элементов Равьяра – Тома нулевого и первого порядков // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 4. С. 161–174. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17415>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17415>

A COMPARISON OF ADAPTIVE ALGORITHMS FOR SOLVING PLANE PROBLEMS IN THE LINEAR ELASTICITY THEORY USING THE ZERO- AND FIRST-ORDER RAVIART – THOMAS ELEMENTS

D. A. Petukhov [□], M. E. Frolov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

[□] d_a_petukhov@mail.ru

Abstract. Functional-type a posteriori error estimates are known for many problems of the elasticity theory. However, as followed from the work of S. I. Repin and A. V. Muzalevsky, the use of classical Finite Element Method (FEM) approximations for their implementation

may lead to a growing overestimation of the absolute value of an error. Later, in the work of M. E. Frolov, it was shown that the use of approximations for mixed FEMs avoids a growing overestimation of the absolute error with mesh refinements. Further research in this direction was carried out by M. E. Frolov and M. A. Churilova using the simplest Raviart – Thomas and Arnold – Boffi – Falk approximations. In this paper, a comparative analysis is performed for zero-order and first-order Raviart – Thomas finite elements. It is shown for plane problems of linear elasticity that the use of the first-order Raviart – Thomas approximation significantly reduces an overestimation of the absolute error value.

Keywords: finite element method, reliable a posteriori error estimates, Raviart – Thomas elements

For citation: Petukhov D. A., Frolov M. E., A comparison of adaptive algorithms for solving plane problems in the linear elasticity theory using the zero- and first-order Raviart – Thomas elements, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (4) (2024) 161–174. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17415>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Решение подавляющего большинства прикладных инженерных задач не может быть получено аналитическим путем, ввиду наличия геометрической и физической нелинейности, а также нетривиальности расчетных областей, что приводит даже в линейном случае к отсутствию классического решения краевой задачи. Тогда решения строятся в обобщенном смысле, в связи с чем целесообразно использовать численные методы решения в рамках строгого математического или имитационного моделирования. В процессе моделирования возникает несколько источников ошибок:

ошибка модели, которая включает разницу между реальным объектом или процессом и точным решением соответствующей краевой задачи;

ошибка дискретизации, которая включает разницу между непрерывным решением и его дискретным аналогом;

вычислительная ошибка, которая может накапливаться в ходе решения, ввиду особенностей приближенных вычислений.

В итоге все три компонента оказывают влияние на конечный результат расчетов. При этом важно отделять погрешность модели от остальных, которые для этого необходимо оценивать. В связи с этим актуальны исследования методов оценки и контроля ошибки, содержащейся в приближенном решении.

Как правило, для оценки погрешности полученного решения используют апостериорные оценки точности. В отличие от априорных оценок, они позволяют получать локальное распределение погрешности, а также количественно оценивать полученное численное решение.

Принципиальный вид апостериорной оценки следующий:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq M(\mathbf{u}_h, D), \quad (1)$$

где \mathbf{u} – точное решение в рамках рассматриваемой математической постановки, \mathbf{u}_h – приближенное решение, D – исходные данные задачи (коэффициенты уравнений, геометрия области, правая часть, граничные условия и т. п.), $M(\mathbf{u}_h, D)$ – мажоранта.

В левой части выражения (1) для оценки отклонения численного решения от точного часто используется энергетическая норма. Важно отметить, что правая часть (1), в отличие от априорных оценок, содержит известное приближенное решение и данные задачи, т. е. может быть вычислена явно.

Исследования в данной области получили активное развитие, начиная с 1980-х гг. На данный момент существует ряд устоявшихся подходов к построению апостериорных оценок. Часть из них основана на явном или неявном методе невязок. Первыми работами данной группы методов считаются статьи [1, 2]. Существенную роль в их обосновании



играет оператор интерполирования Клемана, описанный в работе [3], и подобные ему операторы. Дальнейшее развитие данные методы получили в стохастическом методе Галёркина [4], в погруженном методе конечных элементов (*англ.* immersed finite element method) [5], в методе виртуальных элементов (*англ.* virtual element method) [6] и других.

Широкое распространение получили методы, теоретическое обоснование которых связано с эффектом суперсходимости (см., например, монографию [7] и цитируемую там литературу). Впервые этот эффект исследовали отечественные ученые Л. А. Оганесян и Л. А. Руховец [8]. Указанные методы также используются не только для метода конечных элементов, но и для SUPG-метода (метод Петрова – Галёркина) [9]. Также метод сглаживания градиента рассмотрен в изогометрическом анализе (IGA) [10] и для задач нелинейной теории упругости [11]. Также применяются иерархические методы контроля точности решения (см., например, статью [12]).

Важно отметить, что апостериорные оценки, построенные методом невязок или сглаживанием градиента, справедливы только для галёркинских аппроксимаций, т. е. точного решения соответствующей конечномерной задачи. Свойство галёркинской ортогональности широко используется при их теоретическом обосновании. Кроме того, в апостериорных оценках, построенных на основе явного метода невязок, присутствуют константы, вычисление которых весьма нетривиально, поскольку они зависят от локальной структуры сетки.

В данном контексте актуально использовать апостериорные оценки, основанные на функциональном подходе, так как они применимы к широкому спектру аппроксимаций и при их вычислении не возникает констант, зависящих от сетки.

Основной вклад в развитие данного подхода внесен в работах С. И. Репина, его коллег и учеников (см., например, работы [20 – 34, 13 – 17] и цитируемую там литературу).

Одним из важных индикаторов работы апостериорной оценки служит индекс эффективности, который определяет, как сильно мажоранта переоценивает истинную величину ошибки и возможна ли недооценка.

Индекс эффективности определяется следующим образом:

$$I_{eff} = \frac{M(\mathbf{u}_h, D)}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|}.$$

Из этого определения следует, что оптимальное значение индекса равно единице, а значение, меньшее единицы, говорит о ненадежности метода.

Одной из серьезных проблем при вычислении апостериорных оценок является рост индекса эффективности (см., например, статьи [13, 14]). Исследования показывают, что для функциональных оценок в определенных случаях целесообразно применять смешанные аппроксимации метода конечных элементов (см., например, работы [14 – 17]).

Далее рассматриваются задачи линейной теории упругости. Применение апостериорных оценок функционального типа для них рассмотрено, в частности, в работах [13, 17, 14] и цитируемой там литературе. В статье [14] в качестве смешанных аппроксимаций использовались аппроксимации Арнольда – Бoffи – Фалка [18] и Равьяра – Тома нулевого порядка [19] на четырехугольных элементах.

Настоящая работа продолжает эти исследования; проведено сравнение аппроксимаций Равьяра – Тома нулевого и первого порядков на триангуляциях.

Постановка задачи

В рамках данной работы рассмотрена задача плоской деформации:

$$\text{Div} \sigma + \mathbf{f} = 0,$$

$$\sigma = L\varepsilon, \tag{2}$$

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T),$$

где $\mathbf{f} \in \mathbb{L}_2(\Omega, R^2)$ – плотность объемных сил, причем Ω – расчетная область в R^2 , \mathbb{L}_2 – единое обозначение для пространств скалярных и векторных функций, суммируемых с

квадратом на указанном множестве в смысле интеграла Лебега; L – тензор упругих модулей; σ – тензор напряжений; ε – тензор малых деформаций.

Система (2) дополняется следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_d \text{ на } \Gamma_d, \\ \sigma \mathbf{n} &= \mathbf{F} \text{ на } \Gamma_s, \end{aligned} \quad (3)$$

где Γ_d, Γ_s – две непересекающиеся части границы области Ω , далее обозначаемой Γ , причем $\Gamma_d \cup \Gamma_s = \Gamma$; \mathbf{u}_d – заданные перемещения (например, нулевые при жестком закреплении); $\mathbf{F} \in \mathbb{L}_2(\Gamma_s, R^2)$ – заданные поверхностные силы, действующие на границе (например, нулевые при свободной границе); \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе.

Предполагается, что существуют две положительные константы l_1 и l_2 такие, что почти всюду в области Ω справедливо двустороннее неравенство вида

$$l_1^2 |\varepsilon|^2 \leq L\varepsilon : \varepsilon \leq l_2^2 |\varepsilon|^2, \quad \forall \varepsilon \in M_{sym}, \quad (4)$$

где M_{sym} – пространство симметричных тензоров второго ранга размерности 2.

В рамках данного исследования тензор упругих свойств предполагается симметричным, т. е.

$$L_{ijkm} = L_{jikm} = L_{kmij}, \quad L_{ijkm} \in \mathbb{L}_\infty(\Omega) \quad i, j, k, m = \overline{1:2}, \quad (5)$$

где $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$ – пространство измеримых функций, ограниченных почти всюду в Ω .

Для простоты реализации (хотя это и не принципиально) материал предполагается однородным и изотропным.

Обобщенная формулировка задачи (2), (3) выглядит следующим образом:

Найти функцию $\mathbf{u} \in V = \mathbf{V} + V_0$, которая удовлетворяет тождеству

$$\int_{\Omega} L\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{w}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} ds, \quad \forall \mathbf{w} \in V_0, \quad (6)$$

где $V_0 = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{W}_2^1(\Omega, R^2) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_d \}$,

(здесь $\mathbb{W}_2^1(\Omega, R^2)$ – стандартное обозначение для соответствующего пространства Соболева).

Функционал энергии для данной задачи имеет следующий вид:

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} L\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_s} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} ds. \quad (7)$$

В случае произвольного решения $\mathbf{v} \in V$, для энергетической нормы справедлива оценка снизу:

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|^2 \geq 2(\mathcal{J}(\mathbf{v}) - \mathcal{J}(\mathbf{u}_{ref})), \quad (8)$$

где \mathbf{u}_{ref} – приближенное решение, полученное на мелкой сетке (англ. reference solution).

При этом энергетическая норма определяется формулой

$$\| \mathbf{v} \| = \left(\int_{\Omega} L\varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Мажоранта для задачи (2), (3) впервые была получена в работе [13] по аналогии с работой [20] и имеет следующий вид:

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|^2 \leq M_{LE}^2(\mathbf{v}, \tau, \beta) := (1 + \beta) \| \tau - L\varepsilon(\mathbf{v}) \|^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) C^2 \left(\| \text{Div} \tau + \mathbf{f} \|^2 + \| \mathbf{F} - \tau \mathbf{n} \|^2 \right), \quad (9)$$

где $\tau \in \mathbb{L}_2(\Omega, M_{sym})$ – симметричный тензор; β – произвольный положительный параметр; норма $\| \dots \|$ здесь и далее – стандартная норма в пространствах $\mathbb{L}_2(\dots)$.

Норма $\|\tau - L\varepsilon(\mathbf{v})\|_*$ в мажоранте (9) определяется следующим образом:

$$\|\tau\|_* = \left(\int_{\Omega} L^{-1} \tau : \tau d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Условие симметричности автоматически выполняется при применении стандартных аппроксимаций метода конечных элементов, однако, как следует из статей [13, 14], индекс эффективности при этом может возрастать.

В работах [14 – 17, 22, 23] и ряде других было показано, что использование нестандартных конечных элементов, например элементов Равьяра – Тома или Арнольда – Боффи – Фалка, приводит к тому, что индекс эффективности перестает возрастать с увеличением количества элементов.

Для использования таких конечных элементов необходимо преобразовать мажоранту (9) так, чтобы снять условие симметричности тензора τ .

Тогда, согласно монографии [21], мажоранта примет вид

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \leq \hat{M}_{LE}^2(\mathbf{v}, \tau, \beta_1, \beta_2) := & (1 + \beta_1) \|\tau_{sym} - L\varepsilon(\mathbf{v})\|_*^2 + \\ & + \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) (1 + \beta_2) C^2 (\|\text{Div } \tau + \mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{F} - \tau \mathbf{n}\|^2) + \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right) \left(\frac{C_{\Omega\Gamma_d}}{l_1}\right)^2 \|\tau_{sk}\|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где τ_{sym}, τ_{sk} – симметричная и кососимметричная части тензора τ , соответственно; $C_{\Omega\Gamma_d}$ – константа из неравенства Корна (при $\Gamma_d = \Gamma$ $C_{\Omega\Gamma_d} = \sqrt{2}$); β_1, β_2 – положительные параметры.

Оптимальные значения параметров β_1 и β_2 при заданном τ определяются по следующим формулам:

$$\beta_1 = \frac{C \sqrt{\|\text{Div } \tau + \mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{F} - \tau \mathbf{n}\|^2} + C_{\Omega\Gamma_d} \|\tau_{sk}\| / l_1}{\|\tau_{sym} - L\varepsilon(\mathbf{v})\|_*}, \quad \beta_2 = \frac{C_{\Omega\Gamma_d} \|\tau_{sk}\| / l_1}{C \sqrt{\|\text{Div } \tau + \mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{F} - \tau \mathbf{n}\|^2}}. \quad (12)$$

Отметим, что выражения для мажорант (9) и (11) справедливы не только для плоского случая, но и для пространственного.

Элементы Равьяра – Тома

Как было описано ранее, выбор конечных элементов для аппроксимации свободного тензора τ оказывает существенное влияние на поведение индекса эффективности функциональной апостериорной оценки.

Чтобы использовать упомянутые выше аппроксимации специального вида, свободный тензор τ рассматривается как совокупность двух векторных полей:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} = [\boldsymbol{\tau}_x \quad \boldsymbol{\tau}_y], \quad (13)$$

где $\boldsymbol{\tau}_x = (\tau_{xx} \quad \tau_{yx})^T$, $\boldsymbol{\tau}_y = (\tau_{xy} \quad \tau_{yy})^T$.

В данном исследовании применялись элементы Равьяра – Тома, которые как раз аппроксимируют векторное поле. При этом элементы нулевого порядка имеют три степени свободы – нормальные составляющие потока в серединах сторон. Элементы Равьяра – Тома первого порядка содержат уже восемь степеней свободы: 6 нормальных составляющих на трех гранях и значение векторного поля в центре элемента. Элементы Равьяра –Тома нулевого (RT0) и первого (RT1) порядков схематично представлены на рис. 1.

На каждом элементе векторные поля $\boldsymbol{\tau}_x$ и $\boldsymbol{\tau}_y$ для RT1 представляют собой линейную комбинацию следующего вида (для RT0 – аналогично, но с тремя функциями):

$$\boldsymbol{\tau}_x = \sum_{i=1}^8 \tau_{xi} \Psi_i, \quad \boldsymbol{\tau}_y = \sum_{i=1}^8 \tau_{yi} \Psi_i, \quad (14)$$

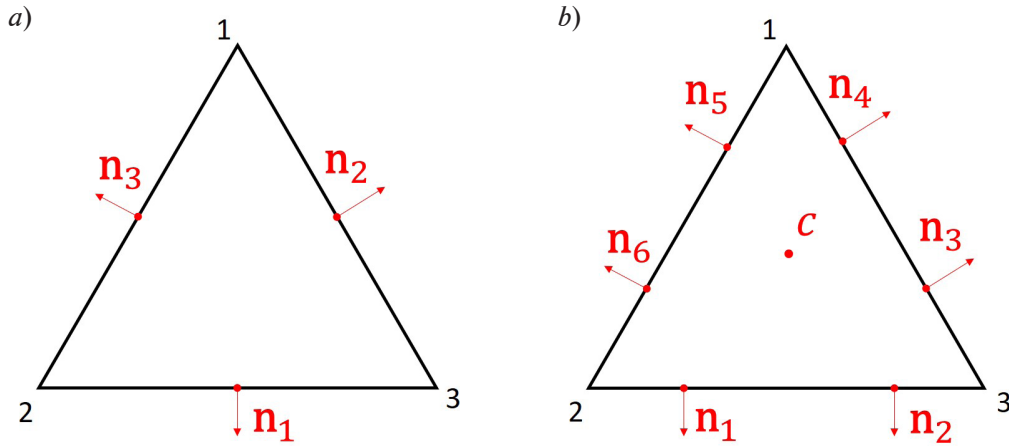


Рис. 1. Элементы Равьяра – Тома нулевого (RT0) (a) и первого (RT1) (b) порядков; \mathbf{n}_i – нормали к граням треугольника в точках, к которым привязаны степени свободы; локальная нумерация точек; C – центр треугольника

где векторные функции формы Ψ_i для элемента RT1 определяются как

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}y \\ b_{i0} + b_{i1}x + b_{i2}y \end{pmatrix} + (c_{i0} + c_{i1}x + c_{i2}y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}y + c_{i0}x + c_{i1}x^2 + c_{i2}xy \\ b_{i0} + b_{i1}x + b_{i2}y + c_{i0}y + c_{i1}xy + c_{i2}y^2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

После приведения подобных членов, на каждом элементе необходимо определить неизвестные коэффициенты

$$a_{i0}, a_{i1} + c_{i0}, a_{i2}, b_{i0}, b_{i1}, b_{i2} + c_{i0}, c_{i1}, c_{i2}$$

из следующих 64 соотношений:

$$\Psi_i \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1:6}, \quad \Psi_7 \cdot \mathbf{n}_j = 0, \quad \Psi_8 \cdot \mathbf{n}_j = 0, \\ \Psi_{i=\overline{1:6}}|_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_7|_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_8|_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $\mathbf{n}_{j=\overline{1:6}}$ – нормали к ребрам (см. рис. 1); C – барицентр элемента; δ_{ij} – дельта Кронекера. Коэффициенты τ_{xi} и τ_{yi} находятся из решения системы уравнений вида

$$\frac{\partial \hat{M}_{LE}^2(\mathbf{v}, \tau, \beta_1, \beta_2)}{\partial \tau_{xi}} = 0, \quad i = \overline{1:N_d}, \\ \frac{\partial \hat{M}_{LE}^2(\mathbf{v}, \tau, \beta_1, \beta_2)}{\partial \tau_{yi}} = 0, \quad i = \overline{1:N_d}, \quad (17)$$

где N_d – общее число степеней свободы на гранях и в центре элементов.

В результате получается система линейных алгебраических уравнений с $2N_d$ неизвестными. Система (17) решается при фиксированных значениях β_1 и β_2 , которые впоследствии пересчитываются итерационно.

Примеры сравнения смешанных аппроксимаций Равьяра – Тома нулевого и первого порядков для плоских задач линейной теории упругости представлены в следующем разделе. Они развивают работы [14, 16, 17, 22, 23].

Численные результаты

Пример 1. Проведем сравнение элементов RT0 и RT1 на примере области, представленной в работе [14]. На всей границе задано условие закрепления, т. е. $\Gamma_d = \Gamma$;

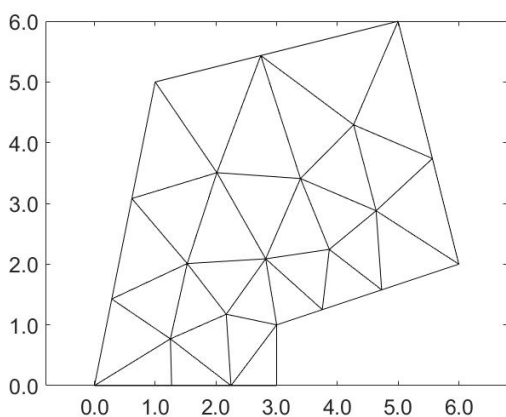


Рис. 2. Геометрия и начальная сетка метода конечных элементов для Примера 1

модуль Юнга $E = 200$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; плотность материала $\rho = 7850$ кг/м³; объемная сила \mathbf{f} задается через ускорение $(-5 \ 3)^T$ м/с². Геометрия и начальная сетка метода конечных элементов представлены на рис. 2.

В табл. 1 приведены результаты расчетов для Примера 1, полученные с помощью программного кода, реализованного в среде Matlab. Из анализа результатов, представленных в табл. 1, следует, что индекс эффективности не возрастает с увеличением размерности задачи. Также для элементов Равьяра – Тома первого порядка он убывает от 1,20 до 1,13, что существенно лучше, чем для элементов нулевого порядка, для которого индекс эффективности убывает от 1,89 до 1,50. Финальные сетки, полученные после адаптации, приведены на рис. 3. Процесс адаптации сетки заканчивается при достижении величины относительной ошибки менее 5 %.

Таблица 1

Сравнение расчетных результатов для элементов Равьяра – Тома нулевого (RT0) и первого (RT1) порядков (Пример 1)

RT0				RT1			
Кол-во узлов	Кол-во элементов	Ошибка, %	I_{eff}	Кол-во узлов	Кол-во элементов	Ошибка, %	I_{eff}
23	30	37,97	1,89	23	30	37,97	1,20
67	104	22,58	1,59	70	108	22,38	1,17
130	219	16,12	1,58	134	224	15,98	1,15
238	416	12,44	1,55	259	457	12,13	1,14
445	808	8,80	1,55	461	840	9,05	1,14
810	1502	6,75	1,54	870	1635	6,69	1,14
1507	2859	4,93	1,51	1522	2887	5,06	1,13
2760	5304	3,71	1,50	2707	5218	3,76	1,13

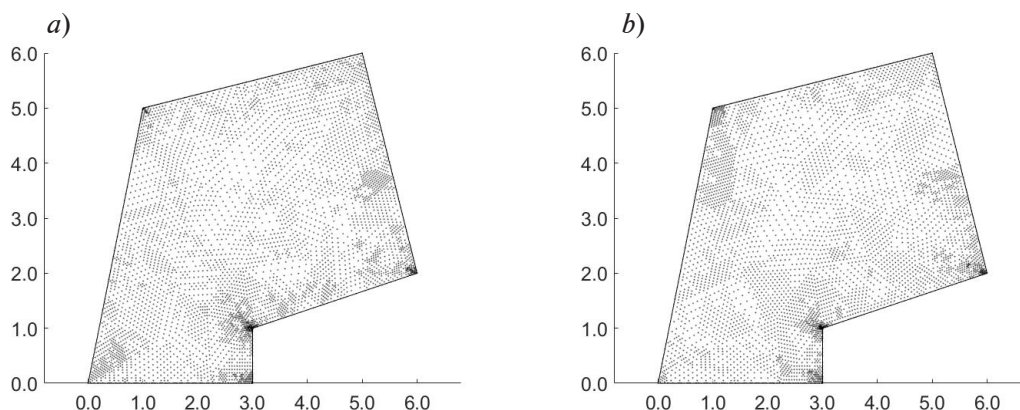


Рис. 3. Результат адаптации для элементов RT0 (a) и RT1 (b) в Примере 1

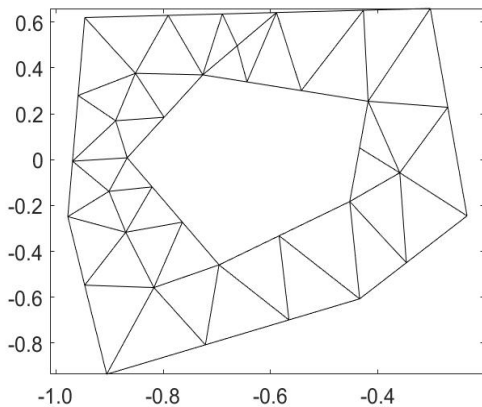


Рис. 4. Геометрия и начальная сетка метода конечных элементов для Примера 2

Пример 2. В этом примере область представляет собой многогранник с вырезом внутри. Область жестко закреплена по всей границе т. е. $\Gamma_d \equiv \Gamma$; модуль Юнга $E = 190$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,23$; плотность материала $\rho = 7850$ кг/м³; объемная сила \mathbf{f} задается через ускорение $(6 \ 17)^T$ м/с². Геометрия и начальная сетка метода конечных элементов представлены на рис. 4. Процесс адаптации сетки заканчивается при достижении величины относительной ошибки менее 7%.

В табл. 2 приведены результаты расчетов для Примера 2. Из них следует, что индекс эффективности не возрастает с увеличением размерности задачи, при этом индекс эффективности для элементов Равьяра – Тома первого порядка убывает от 1,15 до 1,08, что существенно лучше, чем для элементов Равьяра – Тома нулевого порядка (от 2,12 до 1,30, соответственно). Финальные сетки, полученные после адаптации, приведены на рис. 5.

Таблица 2

Сравнение расчетных результатов для элементов Равьяра – Тома нулевого (RT0) и первого (RT1) порядков (Пример 2)

RT0				RT1			
Кол-во узлов	Кол-во элементов	Ошибка, %	I_{eff}	Кол-во узлов	Кол-во элементов	Ошибка, %	I_{eff}
36	43	77,87	2,12	36	43	77,87	1,15
70	105	56,14	1,88	56	77	57,34	1,15
131	210	40,56	1,59	97	147	43,52	1,15
240	410	29,35	1,40	165	289	33,64	1,13
459	815	21,57	1,34	285	485	25,21	1,12
893	1627	15,46	1,32	527	932	19,46	1,10
1701	3180	11,52	1,30	908	1652	14,75	1,10
3188	6053	8,44	1,30	1614	3001	11,24	1,09
5854	11275	6,27	1,30	2864	5425	8,48	1,09
–	–	–	–	5071	9719	6,44	1,08

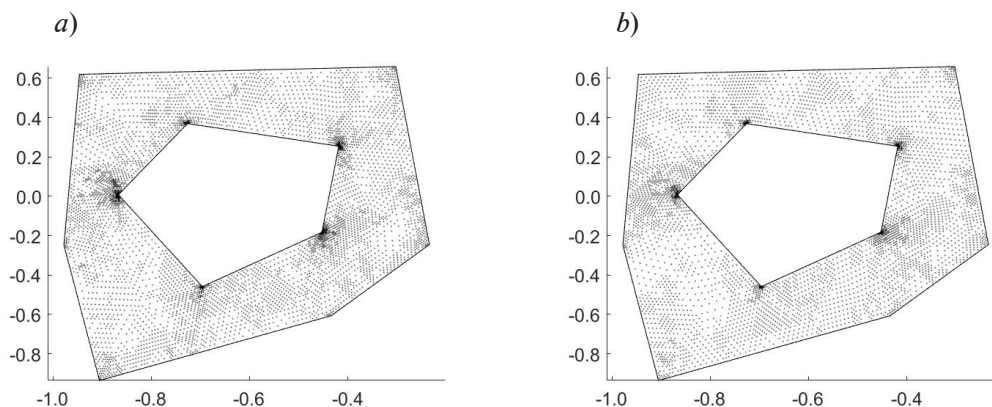


Рис. 5. Результат адаптации для элементов RT0 (a) и RT1 (b) в Примере 2

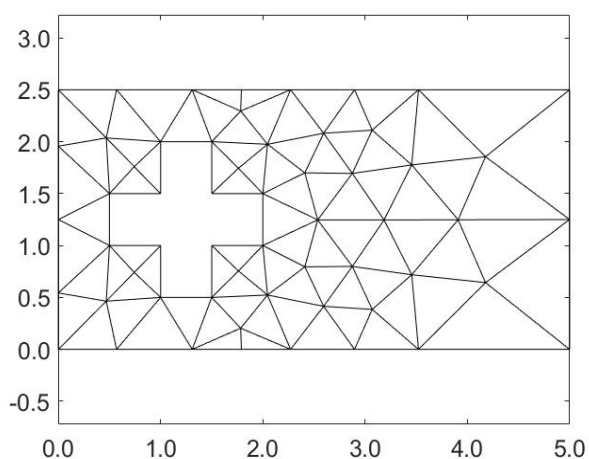


Рис. 6. Геометрия и начальная сетка метода конечных элементов для Примера 3

Пример 3. В этом примере область представляет собой прямоугольник $5,0 \times 2,5$ м с крестообразным вырезом внутри. Область жестко закреплена по правой границе и внутри крестообразного выреза; оставшая часть границы свободна; модуль Юнга $E = 200$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; плотность материала $\rho = 7850$ кг/м³; на верхнюю границу действует давление в 1 МПа, определяющее поверхностные силы \mathbf{F} , действующие на границе. Геометрия и сетка конечных элементов представлены на рис. 6. Процесс адаптации сетки заканчивается при достижении величины ошибки менее 5 %.

Отметим, что близкая задача, но с двумя материалами, была рассмотрена для RT0 в работе [16].

Таблица 3

Сравнение расчетных результатов для элементов Равьяра – Тома нулевого (RT0) и первого (RT1) порядков (Пример 3)

RT0				RT1			
Кол-во узлов	Кол-во элементов	Ошибка, %	I_{eff}	Кол-во узлов	Кол-во элементов	Ошибка, %	I_{eff}
57	82	38,97	1,85	57	82	38,97	1,29
90	138	30,70	1,57	80	121	30,91	1,26
169	280	22,73	1,50	135	216	24,56	1,24
313	549	16,97	1,46	253	429	18,49	1,21
604	1097	12,68	1,41	461	814	14,36	1,18
1131	2103	9,46	1,39	815	1485	10,73	1,16
2081	3939	6,95	1,38	1463	2725	8,18	1,15
3925	7530	5,07	1,38	2590	4905	6,16	1,14
7510	14571	3,71	1,38	4590	8810	4,66	1,14

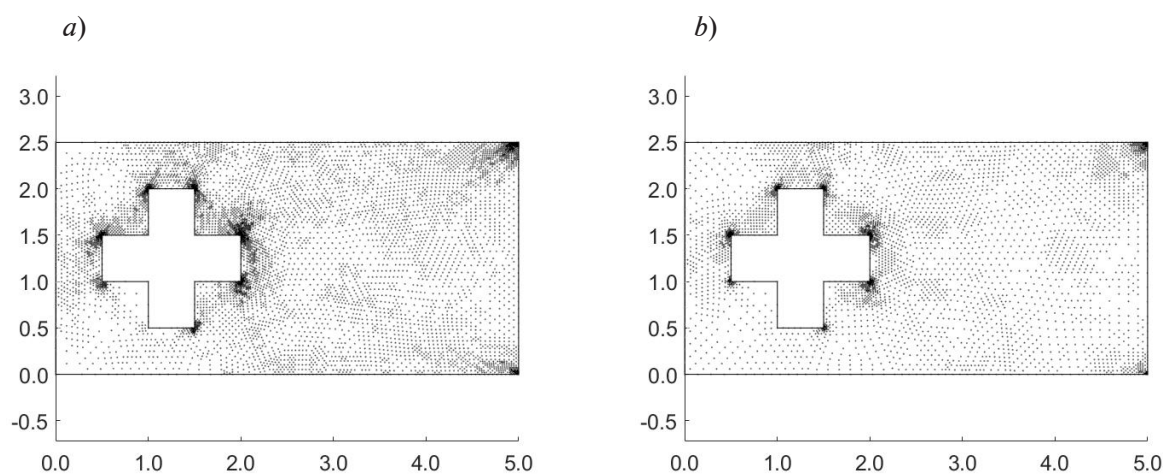


Рис. 7. Результат адаптации для элементов RT0 (a) и RT1 (b) в Примере 3

В табл. 3 приведены результаты расчетов для Примера 3. Согласно полученным данным, индекс эффективности для RT_0 убывает от 1,85 до 1,38. При этом индекс эффективности для элементов RT_1 меняется от 1,29 до 1,14, т. е. оказывается значительно ближе к оптимальному значению. Финальные сетки, полученные после адаптации, приведены на рис. 7.

Заключение

В данной работе представлен сравнительный анализ реализации мажоранты для задач линейной теории упругости в рамках плоского деформированного состояния. При этом использованы элементы Равьяра – Тома нулевого и первого порядков.

Из анализа результатов расчетов следует, что использование элементов первого порядка приводит к значительному снижению переоценки истинной величины погрешности, которая надежно (без недооценки) контролируется с помощью функциональных апостериорных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Babuška I., Rheinboldt W. C.** A-posteriori error estimates for the finite element method // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1978. Vol. 12. No. 10. Pp. 1597–1615.
2. **Babuška I., Rheinboldt W. C.** Error estimates for adaptive finite element computations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1978. Vol. 15. No. 4. Pp. 736–754.
3. **Clément P.** Approximation by finite element functions using local regularization // *Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle*. 1975. Vol. 9. No. 2. Pp. 77–84.
4. **Crowder A. J., Powell C. E., Bespalov A.** Efficient adaptive multilevel stochastic Galerkin approximation using implicit a posteriori error estimation // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2019. Vol. 41. No. 3. Pp. A1681–A1705.
5. **Cuiyu H., Zhang X.** Residual-based a posteriori error estimation for immersed finite element methods // *Journal of Scientific Computing*. 2019. Vol. 81. No. 3. Pp. 2051–2079.
6. **Mora D., Rivera G.** A priori and a posteriori error estimates for a virtual element spectral analysis for the elasticity equations // *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2020. Vol. 40. No. 1. Pp. 322–357.
7. **Wahlbin L. B.** Superconvergence in Galerkin finite element methods. Berlin: Springer Verlag, 1995. 166 p.
8. **Оганесян Л. А., Руховец Л. А.** Исследование скорости сходимости вариационно-разностных схем для эллиптических уравнений второго порядка в двумерной области с гладкой границей // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1969. Т. 9. № 5. С. 1102–1120.
9. **Du S., Lin R., Zhang Z.** Robust recovery-type a posteriori error estimators for streamline upwind/Petrov Galerkin discretizations for singularly perturbed problems // *Applied Numerical Mathematics*. 2021. Vol. 168. October. Pp. 23–40.
10. **Kumar M., Kvamsdal T., Johannessen K.** Superconvergent patch recovery and a posteriori error estimation technique in adaptive isogeometric analysis // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 316. 1 April. Pp. 1086–1156.
11. **Botti M., Riedlbeck R.** Equilibrated stress tensor reconstruction and a posteriori error estimation for nonlinear elasticity // *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2020. Vol. 20. No. 1. Pp. 39–59.
12. **Hain S., Ohlberger M., Radic M., Urban K.** A hierarchical a posteriori error estimator for the reduced basis method // *Advances in Computational Mathematics*. 2019. Vol. 45. No. 5–6. Pp. 2191–2214.
13. **Muzalevsky A. V., Repin S. I.** On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2003. Vol. 18. No. 1. Pp. 65–85.
14. **Фролов М. Е.** Применение функциональных оценок погрешности со смешанными аппроксимациями к плоским задачам линейной теории упругости // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2013. Т. 53. № 7. С. 1178–1191.
15. **Фролов М. Е., Чурилова М. А.** Адаптация сеток на основе функциональных апостериорных оценок с аппроксимацией Равьяра – Тома // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2012. Т. 52. № 7. С. 1277–1288.

16. **Чурилова М. А., Фролов М. Е.** Функциональные апостериорные оценки для задач линейной упругости: вычислительные свойства и адаптивные алгоритмы // Университетский научный журнал. 2014. № 10. С. 23–36.
17. **Чурилова М. А.** Влияние выбора критерия маркировки на работу адаптивного алгоритма с апостериорным контролем точности // Научно-технические ведомости СПбГПУ: Физико-математические науки. 2015. № 4 (230). С. 139–149.
18. **Arnold D. N., Boffi D., Falk R. S.** Quadrilateral $H(\text{div})$ finite elements // SIAM Journal of Numerical Analysis. 2005. Vol. 42. No. 6. Pp. 2429–2451.
19. **Raviart P. A., Thomas J. M.** A mixed finite element for second order elliptic problems (Chapter) // Galligani I., Magenes E. (Eds.) Mathematical Aspects of Finite Element Methods (Conference Proceedings); Book Series “Lecture Notes in Mathematics”, Vol. 606. Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 1977. Pp. 292–315.
20. **Repin S. I., Xanthis L. S.** A posteriori error estimation for elastoplastic problems based on duality theory // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1996. Vol. 138. No. 1–4. Pp. 317–339.
21. **Repin S. I.** A posteriori estimates for partial differential equations. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2008. 316 p.
22. **Churilova M. A., Frolov M. E.** Comparison of adaptive algorithms for solving plane problem of classical and Cosserat elasticity // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 32. No. 3. Pp. 370–382.
23. **Churilova M. A., Frolov M. E.** A posteriori error estimates for linear problems in Cosserat elasticity // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1158. No. 2. P. 022032.
24. **Репин С. И.** Апостериорные тождества для мер отклонения от точных решений нелинейных краевых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 6. С. 896–919.
25. **Репин С. И.** Контроль точности приближенных решений одного класса сингулярно возмущенных краевых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 11. С. 1822–1839.
26. **Репин С. И.** Апостериорные тождества для отклонений от точных решений задач реакции–конвекции–диффузии // Записки научных семинаров ПОМИ. 2022. Т. 519. С. 205–228.
27. **Репин С. И.** Оценки отклонения от точных решений краевых задач в мерах более сильных, чем энергетическая норма // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 5. С. 749–765.
28. **Апушкинская Д. Е., Репин С. И.** Бигармоническая задача с препятствием: гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближенных решений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 11. С. 1881–1897.
29. **Вальдман Я., Фролов М. Е.** Функциональные апостериорные оценки точности решений задач механики деформируемого твердого тела // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2020. Т. 13. № 4. С. 203–215.
30. **Mali O., Neittaanmäki P., Repin S.** Accuracy verification methods: Theory and algorithms. Dordrecht: Springer, 2014. 355 p.
31. **Repin S. I., Sauter S. A.** Accuracy of mathematical models. Berlin: European Mathematical Society, 2020. 317 p.
32. **Muzalevskiy A., Neittaanmäki P., Repin S.** Generation of error indicators for partial differential equations by machine learning methods // T. T. Tuovinen, J. Periaux, P. Neittaanmäki (Eds.). Computational sciences and artificial intelligence in industry: New digital technologies for solving future societal and economical challenges. Springer-Verlag. 2022. Pp. 63–96.
33. **Frolov M. E.** Reliable a posteriori error estimation for Cosserat elasticity in 3D // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 1. Pp. 96–103.
34. **Репин С. И.** Оценка расстояния до точного решения эволюционной задачи полученной линеаризацией уравнения Навье–Стокса // Записки научных семинаров ПОМИ. 2020. Т. 489. С. 68–80.

REFERENCES

1. **Babuška I., Rheinboldt W. C.**, A-posteriori error estimates for the finite element method, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 12 (10) (1978) 1597–1615.
2. **Babuška I., Rheinboldt W. C.**, Error estimates for adaptive finite element computations, *SIAM J. Numer. Anal.* 15 (4) (1978) 736–754.
3. **Clément P.**, Approximation by finite element functions using local regularization, *Rev. Franç. Automat. Inform. Rech. Opérat.* 9 (2) (1975) 77–84.
4. **Crowder A. J., Powell C. E., Bessalov A.**, Efficient adaptive multilevel stochastic Galerkin approximation using implicit a posteriori error estimation, *SIAM J. Sci. Comput.* 41 (3) (2019) A1681–A1705.
5. **Cuiyu H., Zhang X.**, Residual-based a posteriori error estimation for immersed finite element methods, *J. Sci. Comput.* 81 (3) (2019) 2051–2079.
6. **Mora D., Rivera G.**, A priori and a posteriori error estimates for a virtual element spectral analysis for the elasticity equations, *IMA J. Numer. Anal.* 40 (1) (2020) 322–357.
7. **Wahlbin L. B.**, *Superconvergence in Galerkin finite element methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
8. **Oganesyan L. A., Rukhovets L. A.**, Study of the rate of convergence of variational difference schemes for second-order elliptic equations in a two-dimensional field with a smooth boundary, *Comp. Math. and Math. Phys.* 9 (5) (1969) 158–183.
9. **Du S., Lin R., Zhang Z.**, Robust recovery-type a posteriori error estimators for streamline upwind/Petrov Galerkin discretizations for singularly perturbed problems, *Appl. Numer. Math.* 168 (Oct) (2021) 23–40.
10. **Kumar M., Kvamsdal T., Johannessen K.**, Superconvergent patch recovery and a posteriori error estimation technique in adaptive isogeometric analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 316 (1 Apr) (2017) 1086–1156.
11. **Botti M., Riedlbeck R.**, Equilibrated stress tensor reconstruction and a posteriori error estimation for nonlinear elasticity, *Comput. Methods Appl. Math.* 20 (1) (2020) 39–59.
12. **Hain S., Ohlberger M., Radic M., Urban K.**, A hierarchical a posteriori error estimator for the reduced basis method, *Adv. Comput. Math.* 45 (5–6) (2019) 2191–2214.
13. **Muzalevsky A. V., Repin S. I.**, On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity, *Russ. J. Numer. Anal.* 18 (1) (2003) 65–85.
14. **Frolov M. E.**, Application of functional error estimates with mixed approximations to plane problems of linear elasticity, *Comp. Math. and Math. Phys.* 53 (7) (2013) 1000–1012.
15. **Frolov M. E., Churilova M. A.**, Mesh adaptation based on functional a posteriori estimates with Raviart – Thomas approximation, *Comp. Math. and Math. Phys.* 52 (7) (2012) 1044 –1054.
16. **Churilova M. A., Frolov M. E.**, Functional a posteriori error estimates for linear elasticity: computational properties and adaptive algorithms, *Humanities and Science University Journal* 10 (2014) 23–36.
17. **Churilova M. A.**, The sensitivity of the adaptive algorithm with a posteriori error control to marking criteria, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics.* 4 (230) (2015) 139–149 (in Russian).
18. **Arnold D. N., Boffi D., Falk R. S.**, Quadrilateral H(div) finite elements, *SIAM J. Numer. Anal.* 42 (6) (2005) 2429–2451.
19. **Raviart P. A., Thomas J. M.**, A mixed finite element for second order elliptic problems (Chapter), In book: Galligani I., Magenes E. (Eds.) *Mathematical aspects of finite element methods (Conf. Proc.)*; Book Ser. “Lecture Notes in Mathematics”, Vol. 606. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1977) 292–315.
20. **Repin S. I., Xanthis L. S.**, A posteriori error estimation for elastoplastic problems based on duality theory, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 138 (1–4) (1996) 317–339.
21. **Repin S. I.**, *A posteriori estimates for partial differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2008.
22. **Churilova M. A., Frolov M. E.**, Comparison of adaptive algorithms for solving plane problem of classical and Cosserat elasticity, *Mater. Phys. Mech.* 32 (3) (2017) 370–382.
23. **Churilova M. A., Frolov M. E.**, A posteriori error estimates for linear problems in Cosserat elasticity, *J. Phys.: Conf. Ser.* 1158 (2) (2019) 022032.

24. **Repin S. I.**, A posteriori identities for measures of deviation from exact solutions of nonlinear boundary value problems, *Comp. Math. and Math. Phys.* 63 (6) (2023) 934–956.
25. **Repin S. I.**, Error control for approximate solutions of a class of singularly perturbed boundary value problems, *Comp. Math. and Math. Phys.* 62 (11) (2022) 1799–1816.
26. **Repin S. I.**, A posteriori error identities for parabolic convection–diffusion problems, *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI [Notes from Scientific Seminars at St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences]*. 519 (2022) 205–228.
27. **Repin S. I.**, Estimates of the deviation from exact solutions of boundary value problems in measures stronger than the energy norm, *Comp. Math. and Math. Phys.* 60 (5) (2020) 749–765.
28. **Apushkinskaya D. E., Repin S. I.**, Biharmonic obstacle problem: guaranteed and computable error bounds for approximate solutions, *Comp. Math. and Math. Phys.* 60 (11) (2020) 1823–1838.
29. **Valdman J., Frolov M. E.**, Functional-type a posteriori error estimates for solutions of problems in deformable solid mechanics, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*. 13 (4) (2020) 148–155.
30. **Mali O., Neittaanmäki P., Repin S.**, Accuracy verification methods: Theory and algorithms. Springer, Dordrecht, 2014.
31. **Repin S. I., Sauter S. A.**, Accuracy of mathematical models. Berlin: European Mathematical Society, 2020.
32. **Muzalevskiy A., Neittaanmäki P., Repin S.**, Generation of error indicators for partial differential equations by machine learning methods, In book: T. T. Tuovinen, J. Periaux, P. Neittaanmäki (Eds.) *Computational sciences and artificial intelligence in industry: New digital technologies for solving future societal and economical challenges*, Springer-Verlag (2022) 63–96.
33. **Frolov M. E.**, Reliable a posteriori error estimation for Cosserat elasticity in 3D, *Lobachevskii J. Math.* 42 (1) (2021) 96–103.
34. **Repin S. I.**, Estimates of the distance to the solution of an evolutionary problem obtained by linearization of the Navier–Stokes equation, *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI [Notes from Scientific Seminars at St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences]*. 489 (2020) 67–80.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПЕТУХОВ Дмитрий Александрович – аспирант Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
d_a_petukhov@mail.ru

ФРОЛОВ Максим Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
frolov_me@spbstu.ru
ORCID: 0000-0002-1022-0221

THE AUTHORS

PETUKHOV Dmitrii A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
d_a_petukhov@mail.ru

FROLOV Maksim E.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
frolov_me@spbstu.ru
ORCID: 0000-0002-1022-0221

*Статья поступила в редакцию 20.06.2024. Одобрена после рецензирования 09.07.2024.
Принята 09.07.2024.*

Received 20.06.2024. Approved after reviewing 09.07.2024. Accepted 09.07.2024.