

Научная статья

УДК 539.3,539.42

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17414>

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДИССИПАТИВНОГО НЕРАВЕНСТВА

М. М. Фролов¹ , А. В. Савиковский^{1, 2}, А. С. Семенов¹

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия;

² АО «Силовые машины – ЗТЛ, ЛМЗ, Электросила, Энергомашэкспорт»,
Санкт-Петербург, Россия

 frolov.mm@bk.ru

Аннотация. Предложен новый подход к получению энергетического критерия разрушения термоупругого тела с трещиной, основанный на совместном рассмотрении первого и второго законов термодинамики. Анализ ограничен процессами хрупкого квазистатического разрушения в слабонеоднородном поле температур. Использована концепция поверхностной энергии Гриффитса, дополненная зависимостью указанной энергии от температуры. Показано, что в слабонеоднородном поле температур не возникает дополнительных термодинамических потоков, кроме скорости роста трещины, что позволяет распространить критерий Гриффитса на неизотермический случай. Установлено, что векторный J -интеграл, представляющий собой вектор потока энергии в вершине трещины, является единственным параметром разрушения для термоупругих сред с трещиной. Рассматриваются различные формы представления вектора потока энергии для случаев линейной и нелинейной термоупругости.

Ключевые слова: хрупкое разрушение, термомеханическое нагружение, диссипативное неравенство, энергетический критерий разрушения

Для цитирования: Фролов М. М., Савиковский А. В., Семенов А. С. Энергетический критерий разрушения на основе диссипативного неравенства // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 4. С. 147–160. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17414>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17414>

AN ENERGY FRACTURE CRITERION BASED ON DISSIPATIVE INEQUALITY

М. М. Frolov¹ , А. V. Savikovskii^{1, 2}, А. S. Semenov¹

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia;

² Joint Stock Company "Power machines – ZTL, LMZ, Electrosila,
Energomachexport" (JSC "Power machines"), St. Petersburg, Russia

 frolov.mm@bk.ru

Abstract. A new approach to obtaining the energy criterion for the fracture of a thermoelastic body with a growing crack has been put forward. The criterion is based directly on the first and second laws of thermodynamics. An analysis was restricted by brittle quasi-static fracture processes in the weakly nonuniform temperature field (WNUTF). The Griffith conception

of surface energy supplemented by the temperature dependence of this energy was used. No thermodynamic fluxes were shown to arise in the WNUTF, except for the rate of a growing crack. This result made it possible to extend the Griffith criterion to the nonisothermal case. The vectorial J -integral representing the energy flux vector at the crack tip was established to be the only fracture parameter for thermoelastic media with cracks. Different energy flux vector representation forms for cases of linear and nonlinear thermoelasticity were considered and discussed.

Keywords: brittle fracture, thermomechanical loading, dissipative inequality, energy fracture criterion

For citation: Frolov M. M., Savikovskii A. V., Semenov A. S., An energy fracture criterion based on dissipative inequality, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (4) (2024) 147–160. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17414>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Основные положения энергетического подхода в механике хрупкого разрушения были сформулированы А. Гриффитсом в работе [1]. Концепция Гриффитса заключалась в том, что при разрушении образуется новая поверхность трещины, затраты на образование которой компенсируются уменьшением энергии в объеме. Для демонстрации своей концепции А. Гриффитс использовал прямое вычисление энергии деформации по известному решению задачи о растяжении плоскости с эллиптическим отверстием [2, 3].

В дальнейшем для вычисления поглощения энергии при квазистатическом хрупком разрушении был применен аппарат инвариантных интегралов, введен J -интеграл [4, 5]. Г. П. Черепанов [6, 7] получил аналогичный контурный интеграл из баланса энергии. Существует также способ получения J -интеграла на основе уравнений движения [8, 9]. Строго формализовать и указать условия сходимости J -интеграла удалось М. Гёртину в работе [10].

В линейной механике разрушения скорость высвобождения энергии можно вычислять через коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) [11, 12]. Для чистой моды нормального отрыва связь J -интеграла и КИН получена в работе [4]. Для смешанной моды разрушения введен векторный J -интеграл, компоненты J_k которого имеют однозначную связь с КИН [13 – 15].

В нелинейной механике разрушения для упругопластического материала со степенным упрочнением Дж. Хатчинсон, Дж. Райс и Г. Розенгрин показали [16, 17], что J -интеграл определяет коэффициент при сингулярном члене в асимптотическом разложении напряжений в окрестности вершины трещины.

Дальнейшее развитие концепции J -интеграла происходило путем обобщения на случай термомеханических задач. Для прямолинейной трещины нормального отрыва это проделано в работе [18] и обобщено на смешанную моду [8, 19 – 21]. Обобщение на случай влияния электрических полей рассматривалось в работах [22 – 26].

Все вышеупомянутые работы так или иначе опираются на баланс энергии, при этом сам критерий разрушения формулируется как постулат. Следующий шаг в обобщении теории хрупкого разрушения – получение критерия разрушения из второго начала термодинамики. В работах М. Гёртина [27, 28] получен критерий разрушения для изотермического процесса на основе концепции конфигурационных сил [29] из второго начала термодинамики. В последующих работах, использующих второе начало термодинамики [30 – 32], также рассматривается изотермический процесс.

В данной работе предлагается процедура получения энергетического критерия хрупкого разрушения на основе совместного использования двух законов термодинамики: баланса энергии и диссипативного неравенства в неизотермической постановке.

Законы термодинамики для тела с трещиной

А. Гриффитс ввел в рассмотрение концепцию поверхностной энергии трещины [1] и критерий разрушения, основанный на балансе энергии:

Трещина начинает распространяться, если скорость высвобождения энергии деформации G превосходит скорость приращения поверхностной энергии трещины Σ ($\delta\Sigma = \psi\delta l$), где δl – приращение длины трещины; ψ – удельная поверхностная энергия разрушения, которая, согласно Гриффитсу, есть константа материала.

Чтобы получить данный критерий, поверхностную энергию необходимо учитывать в законах термодинамики.

Сформулируем первое и второе начала термодинамики деформируемого твердого тела с учетом поверхностной энергии трещины для элемента двумерного континуума V (рис. 1), содержащего вершину трещины.

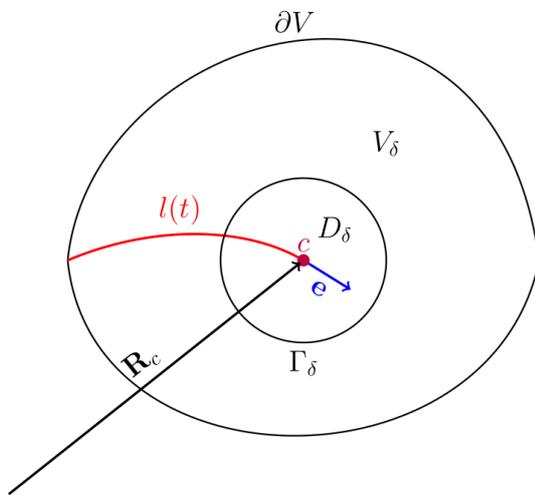


Рис. 1. Элемент объема ∂V твердого тела с трещиной $l(t)$ (выделена красной линией): \mathbf{R}_c – вектор положения вершины трещины, \mathbf{e} – вектор направления распространения трещины, D_δ – круг радиуса δ с подвижной границей Γ_δ , V_δ – внешняя область этого круга

q – плотность источников объемного тепловыделения, \mathbf{h}_0 – тепловой поток через поверхность.

Здесь и далее все объемные плотности рассчитаны на единицу объема в отсчетной конфигурации, поверхностные плотности – на единицу поверхности тоже в отсчетной конфигурации.

Поверхностная энергия аддитивна и допускает представление в виде интеграла

$$\Sigma = \int_l \psi dl. \tag{3}$$

Допустим также, что плотность поверхностной энергии разрушения ψ есть функция температуры T . Изменение поверхностной энергии (3) следует выражению

$$\dot{\Sigma} = \psi \dot{l}(t) + \int_{l(t)} \dot{\psi}(T) dl = \psi \dot{l}(t) + \int_{l(t)} \frac{d\psi}{dT} \dot{T} dl. \tag{4}$$

Введем вектор положения вершины \mathbf{R}_c в отсчетной конфигурации (см. рис. 1). Тогда скорость распространения трещины вычисляется следующим образом:

Первое начало термодинамики. Уравнение баланса энергии может быть представлено в следующем виде:

$$\dot{U} + \dot{K} + \dot{\Sigma} = N + Q, \tag{1}$$

где U, K – внутренняя и кинетическая энергия соответственно, N – мощность внешних воздействий, Q – скорость подвода тепла.

Введенные величины определяются равенствами:

$$\begin{aligned} U &= \int_V \rho_0 u dV, \\ K &= \int_V \rho_0 k dV, \quad N = \int_{\partial V} \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{v} dS, \\ Q &= \int_V \rho_0 q dV - \int_{\partial V} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{N} dS, \end{aligned} \tag{2}$$

где ρ_0 – плотность в отсчетной конфигурации, u – плотность внутренней энергии, k – плотность кинетической энергии, \mathbf{v} – скорость точек тела, \mathbf{S} – тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа первого рода, \mathbf{N} – вектор внешней нормали к поверхности,

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{R}_c}{dt} = \dot{l}(t)\mathbf{e}, \quad (5)$$

где \mathbf{e} – касательная к траектории трещины.

Первый член выражения (4) допускает представление в виде скалярного произведения скорости распространения трещины (5) на вектор поверхностной энергии $\boldsymbol{\Psi}$ такой, что $\boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{e} = \psi$. Физический смысл этого вектора состоит в том, что он показывает количество энергии ψ , которое необходимо затратить для распространения трещины в направлении \mathbf{e} . В квазистатическом процессе изменение температуры есть малая величина, поэтому вторым слагаемым в выражении (4) можно пренебречь, по сравнению с первым:

$$\dot{\Sigma} = \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{v}_c. \quad (6)$$

Второе начало термодинамики. В линейной неравновесной термодинамике показано, что локальное производство p энтропии S есть билинейная форма [33]:

$$p = \sum_k J_k X_k, \quad (7)$$

где X_k – термодинамическая сила; J_k – поток, порождаемый этой силой.

В силу второго начала термодинамики, справедливо выражение

$$P(S) = \int_V \rho_0 p dV = \dot{S} - \Psi(S) \geq 0, \quad (8)$$

где P – производство энтропии в системе, Ψ – подвод энтропии из окружения.

В термодинамике деформируемого твердого тела наиболее распространена форма записи выражения (8) как диссипативное неравенство Клаузиуса – Дюгема [34]:

$$\int_V \rho_0 p dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho_0 s dV - \int_V \frac{\rho_0 q}{T} dV + \int_{\partial V} \frac{1}{T} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{N} dS \geq 0, \quad (9)$$

где s – плотность энтропии.

Рассмотрим слабонеоднородное поле температуры и разделим объем V на систему достаточно малых объемов V_k . Будем считать, что в пределах каждого объема V_k флуктуации температуры достаточно малы. В силу данного предположения вводится следующее равенство:

$$\int_{V_k} \Phi(T) dV = \int_{V_k} [\Phi(T_k) + o(\Delta T)] dV \approx \int_{V_k} \Phi(T_k) dV, \quad (10)$$

где $T_k = \text{const}$ – средняя температура в объеме V_k .

В каждом объеме V_k справедливо неравенство Клаузиуса – Дюгема вида

$$\int_{V_k} \rho_0 p dV = \int_{V_k} \rho_0 \dot{s} dV - \int_{V_k} \frac{\rho_0 q}{T_k} dV + \int_{\partial V_k} \frac{1}{T_k} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{N} dS \geq 0. \quad (11)$$

Для каждого объема $T_k = \text{const}$, следовательно, можно вынести величину температуры из-под знака интеграла и умножить неравенство на эту величину:

$$\int_{V_k} \rho_0 T_k p dV = \int_{V_k} \rho_0 T_k \dot{s} dV - \int_{V_k} \rho_0 q dV + \int_{\partial V_k} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{N} dS \geq 0. \quad (12)$$

Знак неравенства при умножении не изменится, так как предполагается, что рассматривается абсолютная температура T_k (она измеряется в градусах Кельвина). Суммирование по всем k дает

$$\int_V \rho_0 T p dV = \int_V \rho_0 T \dot{s} dV - \int_V \rho_0 q dV + \int_{\partial V} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{N} dS \geq 0. \quad (13)$$

Второе и третье слагаемые в неравенстве (13) совпадают с величиной подвода тепла Q (см. формулу в равенствах (2)), и тогда

$$\int_V \rho_0 T p dV = \int_V \rho_0 T \dot{s} dV - Q \geq 0. \quad (14)$$



Общая форма энергетического критерия. Подставим скорость подвода тепла Q из уравнения баланса энергии (1) в энтропийное неравенство (14):

$$\int_V \rho_0 T p dV = \int_V \rho_0 T \dot{s} dV - \dot{U} - \dot{K} - \dot{\Sigma} + N \geq 0. \quad (15)$$

Заменим плотность внутренней энергии u на плотность свободной энергии Гельмгольца f согласно соотношению $u = f + Ts$:

$$\dot{U} = \frac{d}{dt} \int_V \rho_0 f dV + \frac{d}{dt} \int_V \rho_0 T s dV = \dot{F} + \int_V \rho_0 (\dot{T}s + T\dot{s}) dV. \quad (16)$$

Теперь рассмотрим квазистатический процесс деформирования и при этом пренебрежем кинетической энергией в неравенстве (15). С учетом такого допущения, подстановка (16) в (15) дает следующее неравенство:

$$-\int_V \rho_0 T p dV = \dot{F} - N + \int_V \rho_0 \dot{T}s dV + \dot{\Sigma} \leq 0. \quad (17)$$

В изотермической постановке задачи, из полученного неравенства следует известный критерий Гриффитса:

$$\dot{\Pi} + \dot{\Sigma} \leq 0 \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial l} (\Pi + \Sigma) \leq 0, \quad (18)$$

где $\dot{\Pi} = \dot{F} - N$ – скорость изменения потенциальной энергии тела.

В силу формулы (7), неравенство (17) должно иметь структуру, пропорциональную произведению термодинамических сил на величины потоков. Требуется знать, сколько потоков есть в рассматриваемой системе и каким процессам они отвечают. В изотермической нелинейно-упругой постановке единственный поток – это скорость распространения трещины [27].

В рамках данной работы необходимо установить, появляются ли дополнительные термодинамические силы и потоки в неизотермическом случае. Чтобы это выяснить, необходимо прямым вычислением привести неравенство (17) к виду (7).

Энергетический критерий при хрупком разрушении

Рассмотрим распространение трещины в однородной изотропной нелинейной термоупругой среде. Плотность свободной энергии такой среды имеет вид

$$f = f(\mathbf{F}, T), \quad (19)$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla}$ – градиент деформации ($\overset{\circ}{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}$ – набла-оператор в отсчетной конфигурации).

В вершине трещины свободная энергия имеет сингулярность, поэтому интеграл по объему от данной величины понимается в смысле главного значения: объем V разделяется на две области: круг D_δ радиуса δ с центром в вершине трещины и внешность круга $V_\delta = V \setminus D_\delta$ (см. рис. 1). Далее вычисляется интеграл в области V_δ и его предел при δ , стремящемся к нулю.

При росте трещины объем V_δ имеет подвижную границу Γ_δ , поэтому производные по времени от интегралов по данному объему вычисляются с помощью транспортной теоремы Рейнольдса [35]:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\delta} A dV = \int_{V_\delta} \dot{A} dV - \int_{\Gamma_\delta} A V_\Gamma d\Gamma, \quad (20)$$

где $V_\Gamma = \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{N}$ – скорость движения контура Γ_δ по нормали относительно точек тела.

Скорость изменения свободной энергии, в соответствии с уравнением (20), определяется равенством

$$\dot{F} = \int_{V_\delta} \rho_0 \dot{f} dV - \int_{\Gamma_\delta} \rho_0 f V_\Gamma d\Gamma. \quad (21)$$

Вычислим производную от плотности свободной энергии:

$$\rho_0 \dot{f}(\mathbf{F}, T) = \rho_0 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \rho_0 \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0 s \dot{T} \quad (22)$$

и подставим ее в равенство (21):

$$\dot{F} = \int_{V_\delta} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{F}} dV - \int_{V_\delta} \rho_0 s \dot{T} dV - \int_{\Gamma_\delta} \rho_0 f \mathcal{V}_\Gamma d\Gamma. \quad (23)$$

Далее принимаются два дополнительных допущения относительно условий нагружения тела с трещиной:

- берега трещины свободны от нагрузок;
- объемными силами можно пренебречь.

С учетом этих допущений и формулы Гаусса – Остроградского, первый интеграл в равенстве (23) преобразуется следующим образом:

$$\int_{V_\delta} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{F}} dV = \int_{V_\delta} \overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{v}) dV = \int_{\partial V} \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\Gamma_\delta} \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (24)$$

Энтропия s имеет сингулярность в вершине, так как $s = -\frac{\partial f}{\partial T}$, поэтому интегральное слагаемое в неравенстве (17) также понимается в смысле главного значения.

Подстановка формул (6), (23) и (24) в неравенство (17) дает другое неравенство:

$$-\int_{\Gamma_\delta} \rho_0 f \mathcal{V}_\Gamma d\Gamma - \int_{\Gamma_\delta} \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{v}_c \leq 0. \quad (25)$$

Введем вектор относительного отсчетного положения вершины трещины $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_c$ и относительное актуальное положение точек в виде $\mathbf{r}'(\boldsymbol{\rho}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{R}_c + \boldsymbol{\rho}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$. Тогда скорость точек тела можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{v}(\mathbf{R}, t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_c. \quad (26)$$

С учетом данного соотношения уравнение (25) принимает вид

$$\int_{\Gamma_\delta} \rho_0 f \mathcal{V}_\Gamma d\Gamma + \int_{\Gamma_\delta} \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} d\Gamma - \mathbf{v}_c \cdot \int_{\Gamma_\delta} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} d\Gamma - \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{v}_c \geq 0. \quad (27)$$

Вычислим предел соотношения (27) при $\delta \rightarrow 0$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} \rho_0 f \mathcal{V}_\Gamma d\Gamma = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} \rho_0 f \mathcal{V}_\Gamma \cdot \mathbf{N} d\Gamma = \mathbf{v}_c \cdot \int_c \rho_0 f \mathbf{N}, \quad (28)$$

где введено обозначение $\int_c f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} f d\Gamma$.

Предполагается, что данный предел существует и конечен, так как для упругого тела энергия имеет особенность вида $1/r$ [7]. Остальные слагаемые из соотношения (27) вычисляются в соответствии с равенствами

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} d\Gamma = 0. \quad (29)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{v}_c \cdot \int_{\Gamma_\delta} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} d\Gamma = \mathbf{v}_c \cdot \int_{\bar{n}} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}. \quad (30)$$

Данный предел существует и конечен, так как $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S}$ имеет тот же вид особенности, что и энергия, а именно $1/r$. Доказательство предельного перехода (29) можно найти в статье [10].



После совершения указанных предельных переходов, неравенство (27) преобразуется к виду

$$\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{f} \geq 0, \quad (31)$$

где введены вспомогательные обозначения:

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} - \boldsymbol{\psi}, \quad (32)$$

$$\mathbf{J} = \int_c (\rho_0 f \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{N}, \quad (33)$$

где \mathbf{E} – единичный тензор второго ранга.

Заметим, что подинтегральное выражение в формуле (33), стоящее в круглых скобках, представляет собой тензор энергии-импульса Эшелби.

Интерпретация результатов

Отметим некоторые особенности полученного энергетического критерия разрушения, представленного формулой (31).

Вектор потока энергии. \mathbf{J} -интеграл¹ (33) есть векторная форма интеграла Черепанова – Райса [4]. Данный интеграл был впервые получен Дж. Эшелби [36] в следующей форме:

$$\mathbf{J}(\Omega) = \int_{\Gamma} (\rho_0 f \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{N} d\Gamma, \quad (34)$$

где Ω – некоторая конечная область материала, Γ – граница области Ω .

Позднее этот интеграл появился в работах по механике разрушения в виде компонент вектора \mathbf{J} , которые обычно обозначают как интегралы J_1 и J_2 [13, 14]; J_1 – проекция потока энергии на направление распространения трещины \mathbf{e} , J_2 – проекция на направление, ортогональное к вектору \mathbf{e} .

Утверждение. Важным свойством вектора потока энергии $\mathbf{J}(\Omega)$ является его инвариантность: в условиях статического равновесия в однородном поле температуры поток энергии равен нулю на любом замкнутом контуре, проходящем в области однородного материала.

Доказательство. Рассмотрим конечную область Ω однородного материала, ограниченную контуром $\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_c^+ \cup \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_c^-$ (рис. 2) и вычислим поток энергии в этой области:

$$\mathbf{J}(\Gamma) = \int_{\Gamma} (\rho_0 f \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{N} d\Gamma = \mathbf{J}(\Omega) = \int_{\Omega} \overset{\circ}{\nabla}(\rho_0 f) dV - \int_{\Omega} \overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{F}) dV. \quad (35)$$

Преобразуем первый интеграл в выражении (35) следующим образом:

$$\int_{\Omega} \overset{\circ}{\nabla}(\rho_0 f) dV = \int_{\Omega} \left(\rho_0 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}} : \mathbf{F} \overset{\circ}{\nabla} + \rho_0 \frac{\partial f}{\partial T} \overset{\circ}{\nabla} T \right) dV. \quad (36)$$

Аналогично преобразуем второй интеграл в том же выражении:

$$-\int_{\Omega} \overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{F}) dV = -\int_{\Omega} \left(\left(\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{S} : \mathbf{F} \overset{\circ}{\nabla} \right) dV = -\int_{\Omega} \mathbf{S} : \mathbf{F} \overset{\circ}{\nabla} dV. \quad (37)$$

Складывая оба интеграла, получаем:

$$\mathbf{J}(\Omega) = -\int_{\Omega} \rho_0 s \overset{\circ}{\nabla} T dV. \quad (38)$$

В однородном температурном поле интеграл (38) тождественно равен нулю. Следовательно, равен нулю и исходный интеграл по контуру Γ :

$$\mathbf{J}(\Gamma) = \mathbf{J}(\Gamma_f) + \mathbf{J}(\Gamma_c^+) + \mathbf{J}(\Gamma_c^-) - \mathbf{J}(\Gamma_\varepsilon) = 0; \quad (39)$$

на контуре Γ_ε принято направление нормали, совпадающее с контуром Γ_f .

¹ Г. П. Черепанов в своей книге [7] использовал для обозначения данной величины термин «вектор потока энергии», поэтому далее нами используется именно он для обозначения \mathbf{J} -интеграла.

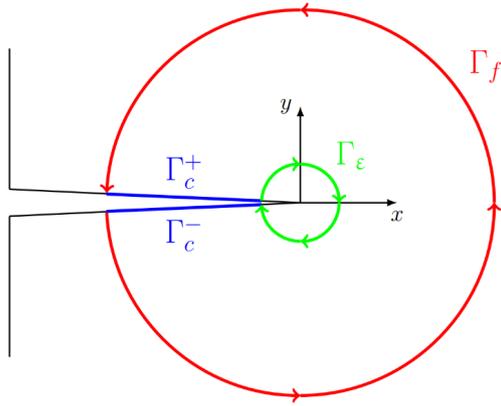


Рис. 2. Контур интегрирования $\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^- \cup \Gamma_\varepsilon$, ограничивающий область, не содержащую вершины трещины

На берегах Γ_c^+ , Γ_c^- прямолинейной трещины, компонента J_1 потока энергии равна нулю, следовательно

$$J_1(\Gamma_f) = J_1(\Gamma_\varepsilon).$$

Полученное равенство доказывает инвариантность интеграла J_1 в силу произвольности выбора контура Γ_f .

Инвариантность J_2 обеспечивается только в случае учета при его вычислении берегов трещины

$$J_2 = J_2(\Gamma_f) + J_2(\Gamma_c^+) + J_2(\Gamma_c^-).$$

Утверждение доказано.

Различным аспектам задачи вычисления J_2 с учетом берегов трещины посвящены работы [15, 37 – 39] и многие другие.

Вектор потока энергии в линейной термоупругости. Рассмотрим следующее определение свободной энергии однородного, линейно термоупругого тела:

$$\rho_0 f(\boldsymbol{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - (T - T_0) \boldsymbol{\alpha} : {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} (T - T_0) \boldsymbol{\alpha} : {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (40)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}(T - T_0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \boldsymbol{\alpha}(T - T_0)$ – тензоры упругой и термической деформации, соответственно; ${}^4\mathbf{C} = \text{const}$ – тензор упругих модулей; $\boldsymbol{\alpha} = \text{const}$ – тензор коэффициентов линейного теплового расширения.

В таком представлении энтропия следует выражению

$$\rho_0 s = -\rho_0 \frac{\partial f}{\partial T} = \boldsymbol{\alpha} : {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - (T - T_0) \boldsymbol{\alpha} : {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (41)$$

Тогда выражение (38) примет вид

$$\mathbf{J} = \int_{\Gamma} \left(\rho_0 f \mathbf{E} - \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \cdot \mathbf{N} d\Gamma = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha} \left(\overset{\circ}{\nabla} T \right) dV, \quad (42)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши, \mathbf{u} – вектор перемещений.

На основе уравнения (42) выразим интеграл по малому контуру Γ_ε :

$$\mathbf{J}(\Gamma_\varepsilon) = \mathbf{J}(\Gamma_c) + \int_{\Gamma_f} \left(\rho_0 f \mathbf{E} - \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \cdot \mathbf{N} d\Gamma + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \overset{\circ}{\nabla} T dV, \quad (43)$$

где $\Gamma_c = \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-$.

В изотропной линейно-упругой среде, где $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{E}$, выражение для $\mathbf{J}(\Gamma_\varepsilon)$ (43) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{J}(\Gamma_\varepsilon) = \mathbf{J}(\Gamma_c) + \int_{\Gamma_f} \left(\rho_0 f \mathbf{E} - \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \cdot \mathbf{N} d\Gamma + \alpha \int_{\Omega} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \overset{\circ}{\nabla} T dV. \quad (44)$$

Покомпонентное представление вектора $\mathbf{J}(\Gamma_\varepsilon)$ имеет следующий вид:

$$J_1 = \int_{\Gamma_f} \left(\rho_0 f N_1 - \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) + \alpha \int_{\Omega} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\partial T}{\partial x} dV, \quad (45)$$

$$J_2 = \int_{\Gamma_f} \left(\rho_0 f N_2 - \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} [\rho_0 f] d\Gamma + \alpha \int_{\Omega} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\partial T}{\partial y} dV, \quad (46)$$



где $[[A]] = A_+ - A_-$ – скачок величины A на берегах трещины.

Подобный результат приведен в работах [18, 8].

О трещиноподвижной силе и диссипации. Как было отмечено ранее, неравенство (17) и, как следствие, неравенство (31) имеют структуру, пропорциональную произведению термодинамических сил на потоки. В силу данного факта можно заключить, что скорость распространения трещины есть поток, а вектор \mathbf{f} (32) есть трещиноподвижная сила. С использованием определения скорости распространения трещины (5) неравенство (31) можно переписать в скалярном виде:

$$\dot{i}(J - \psi) \geq 0, \quad (47)$$

где $J = \mathbf{e} \cdot \mathbf{J} = J_1$, $\psi = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\psi}$.

Эта форма неравенства тождественна энергетическому критерию Гриффитса: трещина начинает распространяться в том случае, если выделение энергии J в теле превышает некоторое критическое значение ψ , т. е.

$$\dot{i} > 0 \Rightarrow J \geq \psi. \quad (48)$$

Отметим тот факт, что скорость распространения трещины \mathbf{v}_c является единственным термодинамическим потоком в данной модели, а трещиноподвижная сила \mathbf{f} – единственной термодинамической силой в термомеханическом процессе. Таким образом, с точки зрения термодинамики процесс разрушения полностью определяется трещиноподвижной силой (32). В силу данного факта можно считать \mathbf{J} -интеграл единственным параметром разрушения. При этом слабонеоднородное температурное поле не создает дополнительных термодинамических потоков, и, что более важно, дополнительных трещиноподвижных сил. Этот факт позволяет с одинаковым успехом пользоваться \mathbf{J} -интегралом как в изотермической, так и в неизотермической постановках задачи механики разрушения.

Кинетическое уравнение распространения трещины. Для описания процесса разрушения недостаточно знать напряженно-деформированное состояние среды в данный момент времени, поскольку это состояние зависит от геометрических параметров трещины. Ввиду этого необходимо сформулировать дополнительное определяющее соотношение, связывающее геометрические характеристики трещины с известными функциями напряженно-деформированного состояния. Одной из возможных формулировок определяющего соотношения является кинетическое уравнение вида

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c(\mathbf{f}), \quad (49)$$

так как трещиноподвижная сила \mathbf{f} , по своему определению (33) и (32), является функцией напряженно-деформированного состояния среды.

Также допустимо кинетическое уравнение вида

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c(\mathbf{J}), \quad (50)$$

так как из неравенства (31) следует более слабое: $\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{J} \geq 0$.

Неравенство (31) может служить ограничением на параметры данного определяющего соотношения. Простейшие формы определяющих соотношений (49) – линейные (см. статью [27]).

Заключение

В данной работе авторами предложен метод получения критерия разрушения, базирующийся непосредственно на законах термодинамики. Данный подход применим при условиях хрупкого квазистатического разрушения в слабонеоднородном температурном поле. Для введения в законы термодинамики параметров разрушения использована концепция поверхностной энергии Гриффитса, дополненная зависимостью указанной энергии от температуры.

Получен энергетический критерий разрушения для оговоренных выше условий, который по форме совпадает с критерием Гриффитса. Показано, что в слабонеоднородном температурном поле не возникает каких-либо дополнительных термодинамических потоков, кроме скорости роста трещины; это позволяет распространить критерий Гриффитса на неизотермический случай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*. 1921. Vol. 221. No. 582–593. Pp. 163–198.
2. Колосов Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев: Типогр. Маттисена, 1909. 187 с.
3. Inglis C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // *Transactions of the Institution of Naval Architects*. 1913. Vol. 55. Pp. 219–241.
4. Rice J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *Journal of Applied Mechanics*. 1968. Vol. 35. No. 2. Pp. 379–386.
5. Atkinson C., Eshelby J. D. The flow of energy into the tip of a moving crack // *International Journal of Fracture Mechanics*. 1968. Vol. 4. No. 1. Pp. 3–18.
6. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде // *Прикладная математика и механика*. 1967. Т. 31. № 3. С. 476–488.
7. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
8. Kishimoto K., Aoki S., Sakata M. On the path independent integral- \hat{J} // *Engineering Fracture Mechanics*. 1980. Vol. 13. No. 4. Pp. 841–850.
9. Khan D., Biswas K. Circular arc crack under dynamic load: a generalized approach for energy release rate // *International Journal of Fracture*. 2006. Vol. 141. No. 1–2. Pp. 27–35.
10. Gurtin M. E. On the energy release rate in quasi-static elastic crack propagation // *Journal of Elasticity*. 1979. Vol. 9. No. 2. Pp. 187–195.
11. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate // *Journal of Applied Mechanics*. 1957. Vol. 24. No. 3. Pp. 361–364.
12. Erdogan F. Stress intensity factors // *Journal of Applied Mechanics*. 1983. Vol. 50. No. 4b. Pp. 992–1002.
13. Knowles J. K., Sternberg E. On a class of conservation laws on linearized and finite elastostatics // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1972. Vol. 44. No. 3. Pp. 187–211.
14. Budiansky B., Rice J. R. Conservation laws and energy-release rates // *Journal of Applied Mechanics*. 1973. Vol. 40. No. 1. Pp. 201–203.
15. Eishen J. W. An improved method for computing the J_2 integral // *Engineering Fracture Mechanics*. 1987. Vol. 26. No. 5. Pp. 691–700.
16. Hutchinson J. W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1968. Vol. 16. No. 1. Pp. 13–31.
17. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1968. Vol. 16. No. 1. Pp. 1–12.
18. Wilson W. K., Yu J.-W. The use of J -integral in thermal stress crack problems // *International Journal of Fracture*. 1979. Vol. 15. No. 4. Pp. 377–387.
19. Chen W.-H., Chen K.-T. On the study of mixed mode thermal fracture using modified J_k integrals // *International Journal of Fracture*. 1981. Vol. 17. No. 5. Pp. R99–R103.
20. Bui H. D. A path-independent integral for mixed modes of fracture in linear thermoelasticity // B. A. Bilby et al. (Eds.). *Proceedings of “Fundamentals of Deformation and Fracture. Eshelby Memorial” Symposium*. Sheffield, 2–5 April 1984. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. Pp. 597–604.
21. Li X. J -integral and J^* -integral in thermal stress conditions // *Engineering Fracture Mechanics*. 1993. Vol. 45. No. 5. Pp. 713–715.
22. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.
23. Dascalu C., Maugin G. A. Energy-release rates and path-independent integrals in electroelastic crack propagation // *International Journal of Engineering Science*. 1994. Vol. 32. No. 5. Pp. 755–765.



24. **Benkaci N., Maugin G.** *J*-integral computation for piezo-ceramics // *Revue Européenne des Éléments Finis*. 2001. Vol. 10. No. 1. Pp. 99–128.
25. **Gao C. F., Zhao M., Tong P., Zhang T. Y.** The energy release rate and the *J*-integral of an electrically insulated crack in a piezoelectric material // *International Journal of Engineering Science*. 2004. Vol. 42. No. 19–20. Pp. 2175–2192.
26. **Ricoeur A., Enderlein M., Kuna M.** Calculation of the *J*-integral for limited permeable cracks in piezoelectrics // *Archive of Applied Mechanics*. 2005. Vol. 74. No. 8. Pp. 536–549.
27. **Gurtin M. E., Podio-Guidugli P.** Configurational forces and the basic laws for crack propagation // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1996. Vol. 44. No. 6. Pp. 905–927.
28. **Gurtin M. E., Podio-Guidugli P.** Configurational forces and a constitutive theory for crack propagation that allows for kinking and curving // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1998. Vol. 46. No. 8. Pp. 1343–1378.
29. **Maugin G.** *Configurational forces. Thermomechanics, Physics, Mathematics, and Numerics*. Boca Raton: CRC Press, 2016. 562 p.
30. **Simha N. K., Fischer F. D., Kolednik O., Chen C. R.** Inhomogeneity effects on the crack driving force in elastic and elastic–plastic materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2003. Vol. 51. No. 1. Pp. 209–240.
31. **Gürses E., Meihe C.** A computational framework of three-dimensional configurational-force-driven brittle crack propagation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009. Vol. 198. No. 15–16. Pp. 1413–1428.
32. **Kaczmarczyk Ł., Ullah Z., Pearce C. J.** Energy consistent framework for continuously evolving 3D crack propagation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017. 1 September. Vol. 324. Pp. 54–73.
33. **Гленсдорф П., Пригожин И.** Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. Пер. с англ. под ред. Ю. А. Чизмаджаева. М.: Мир, 1973. 280 с.
34. **Пальмов В. А.** *Нелинейная механика деформируемых тел*. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2014. 793 с.
35. **Collado F. J.** Reynolds transport theorem for a two-phase flow // *Applied Physics Letters*. 2007. Vol. 90. No. 2. P. 024101.
36. **Eshelby J. D.** The force on an elastic singularity // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1951. Vol. 244. No. 877. Pp. 87–112.
37. **Tafreshi A.** Efficient evaluation of the J_2 -integral using the boundary element crack shape sensitivities // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 76. April. Pp. 9–16.
38. **Фролов М. М., Савиковский А. В., Семенов А. С.** Влияние формы контура на значения интегралов J_1 и J_2 при смешанной моде разрушения // *Неделя науки ФизМех*. СПбПУ Петра Великого. Сборник материалов Всероссийской научной конференции, 3–7 апреля 2023. СПб.: Политех-Пресс, СПбПУ, 2023. С. 322–324.
39. **Савиковский А. В., Фролов М. М., Семенов А. С.** Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений на основе контурных интегралов J_1 и J_2 с учетом берегов трещины при смешанной моде разрушения // *Неделя науки ФизМех*. СПбПУ Петра Великого. Сборник материалов Всероссийской научной конференции, 2023. СПб.: Политех-Пресс, СПбПУ, 2023. С. 294–297.

REFERENCES

1. **Griffith A. A.**, The phenomena of rupture and flow in solids, *Phil. Trans. R. Soc. A*. 221 (582–593) (1921) 163–198.
2. **Kolosov G. V.**, *Ob odnom prilozhenii teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo k ploskoy zadache matematicheskoy teorii uprugosti* [On an application of the theory of functions of a complex variable to a plane problem of the mathematical theory of elasticity], Mattisen's Printing House, Yuriev, 1909 (in Russian).
3. **Inglis C. E.**, Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Trans. Institut. Naval Architect.* (London). 55 (1913) 219–241.
4. **Rice J. R.**, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *J. Appl. Mech.* 35 (2) (1968) 379–386.

5. Atkinson C., Eshelby J. D., The flow of energy into the tip of a moving crack, *Int. J. Fract. Mech.* 4 (1) (1968) 3–18.
6. Cherepanov G. P., Crack propagation in continuous media, *J. Appl. Math & Mech.* 31 (3) (1967) 476–488.
7. Cherepanov G. P., *Mechanics of brittle fracture*, McGraw-Hill, New York, 1979.
8. Kishimoto K., Aoki S., Sakata M., On the path independent integral- \hat{J} , *Eng. Fract. Mech.* 13 (4) (1980) 841–850.
9. Khan D., Biswas K., Circular arc crack under dynamic load: a generalized approach for energy release rate, *Int. J. Fract.* 141 (1–2) (2006) 27–35.
10. Gurtin M. E., On the energy release rate in quasi-static elastic crack propagation, *J. Elasticity.* 9 (2) (1979) 187–195.
11. Irwin G. R., Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate, *J. Appl. Mech.* 24 (3) (1957) 361–364.
12. Erdogan F., Stress intensity factors, *J. Appl. Mech.* 50 (4b) (1983) 992–1002.
13. Knowles J. K., Sternberg E., On a class of conservation laws on linearized and finite elastostatics, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 44 (3) (1972) 187–211.
14. Budiansky B., Rice J. R., Conservation laws and energy-release rates, *J. Appl. Mech.* 40 (1) (1973) 201–203.
15. Eishen J. W., An improved method for computing the J_2 integral, *Eng. Fract. Mech.* 26 (5) (1987) 691–700.
16. Hutchinson J. W., Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phys. Solids.* 16 (1) (1968) 13–31.
17. Rice J. R., Rosengren G. F., Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phys. Solids.* 16 (1) (1968) 1–12.
18. Wilson W. K., Yu J.-W., The use of J -integral in thermal stress crack problems, *Int. J. Fract.* 15 (4) (1979) 377–387.
19. Chen W.-H., Chen K.-T., On the study of mixed mode thermal fracture using modified J_k integrals, *Int. J. Fract.* 17 (5) (1981) R99–R103.
20. Bui H. D., A path-independent integral for mixed modes of fracture in linear thermoelasticity, In book: B. A. Bilby et al. (Eds.), *Proc. “Fundamentals of Deformation and Fracture. Eshelby Memorial” Symp.*, Sheffield, 2–5 April 1984, Cambridge University Press, Cambridge (1985) 597–604.
21. Li X., J -integral and J^* -integral in thermal stress conditions, *Eng. Fract. Mech.* 45 (5) (1993) 713–715.
22. Parton V. Z., Kudryavtsev B. A., *Electromagnetoelasticity: Piezo-electrics and electrically conductive solids*, Gordon and Breach Science Publishers Ltd., New York, 1988.
23. Dascalu C., Maugin G. A., Energy-release rates and path-independent integrals in electroelastic crack propagation, *Int. J. Eng. Sci.* 32 (5) (1994) 755–765.
24. Benkaci N., Maugin G., J -integral computation for piezo-ceramics, *Rev. Europ. Éléments Finis.* 10 (1) (2001) 99–128.
25. Gao C. F., Zhao M., Tong P., Zhang T. Y., The energy release rate and the J -integral of an electrically insulated crack in a piezoelectric material, *Int. J. Eng. Sci.* 42 (19–20) (2004) 2175–2192.
26. Ricoeur A., Enderlein M., Kuna M., Calculation of the J -integral for limited permeable cracks in piezoelectrics, *Arch. Appl. Mech.* 74 (8) (2005) 536–549.
27. Gurtin M. E., Podio-Guidugli P., Configurational forces and the basic laws for crack propagation, *J. Mech. Phys. Sol.* 44 (6) (1996) 905–927.
28. Gurtin M. E., Podio-Guidugli P., Configurational forces and a constitutive theory for crack propagation that allows for kinking and curving, *J. Mech. Phys. Sol.* 46 (8) (1998) 1343–1378.
29. Maugin G., *Configurational forces. Thermomechanics, Physics, Mathematics, and Numerics*, CRC Press, Boca Raton, 2016.
30. Simha N. K., Fischer F. D., Kolednik O., Chen C. R., Inhomogeneity effects on the crack driving force in elastic and elastic–plastic materials, *J. Mech. Phys. Sol.* 51 (1) (2003) 209–240.
31. Gürses E., Meihe C., A computational framework of three-dimensional configurational-force-driven brittle crack propagation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 198 (15–16) (2009) 1413–1428.
32. Kaczmarczyk Ł., Ullah Z., Pearce C. J., Energy consistent framework for continuously evolving 3D crack propagation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 324 (1 Sept) (2017) 54–73.



33. **Glansdorff P., Prigogine I.**, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuation, Wiley-Interscience, Hoboken, USA, 1971.
34. **Palmov V. A.**, Nelineynaya mekhanika deformiruyemykh tel [Nonlinear mechanics of deformable bodies], Polytechnical University Publ., St. Petersburg, 2014 (in Russian).
35. **Collado F. J.**, Reynolds transport theorem for a two-phase flow, Appl. Phys. Lett. 90 (2) (2007) 024101.
36. **Eshelby J. D.**, The force on an elastic singularity, Phil. Trans. R. Soc. London. 244 (877) (1951) 87–112.
37. **Tafreshi A.**, Efficient evaluation of the J_2 -integral using the boundary element crack shape sensitives, Theor. Appl. Fract. Mech. 76 (April) (2015) 9–16.
38. **Frolov M. M., Savikovskiy A. V., Semenov A. S.**, Vliyaniye formy kontura na znacheniya integralov J_1 i J_2 pri smeshannoy mode razrusheniya [The contour shape influence on the values of J_1 and J_2 integrals in a mixed mode fracture], The Science Week at FizMekh, The Information Package of The All-Russian Scientific Conference, 03–07 April, 2023, SPbPU, St. Petersburg (2023) 322–324 (in Russian).
39. **Savikovskiy A. V., Frolov M. M., Semenov A. S.**, Vychisleniye koeffitsiyentov intensivnosti napryazheniy na osnove konturnykh integralov J_1 i J_2 s uchetom beregov treshchiny pri smeshannoy mode razrusheniya [Calculation of stress intensity factors based on J_1 and J_2 contour integrals with consideration of crack banks in the mixed mode fracture], The Science Week at FizMekh, The Information Package of The All-Russian Scientific Conference, 03–07 April, 2023, SPbPU, St. Petersburg (2023) 294–297 (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ФРОЛОВ Максим Максимович – инженер отдела энергетического машиностроения Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
frolov.mm@bk.ru
ORCID: 0009-0005-2924-9795

САВИКОВСКИЙ Артем Викторович – инженер лаборатории «Механика материалов» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого; инженер-конструктор АО «Силловые машины – ЗТЛ, ЛМЗ, Электросила, Энергомашэкспорт», Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
savikovskii.artem@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-1710-1943

СЕМЕНОВ Артем Семенович – доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы механики и процессов управления, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра «Цифровой инжиниринг в атомной и термоядерной энергетике» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
semenov.artem@googlemail.com
ORCID: 0000-0002-8225-3487

THE AUTHORS

FROLOV Maxim M.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
frolov.mm@bk.ru
ORCID: 0009-0005-2924-9795

SAVIKOVSKII Artem V.

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
Joint Stock Company “Power machines – ZTL, LMZ, Electrosila,
Energomachexport” (JSC “Power machines”)
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
savikovskii.artem@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-1710-1943*

SEMENOV Artem S.

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
semenov.artem@googlemail.com
ORCID: 0000-0002-8225-3487*

*Статья поступила в редакцию 04.06.2024. Одобрена после рецензирования 12.07.2024.
Принята 12.07.2024.
Received 04.06.2024. Approved after reviewing 12.07.2024. Accepted 12.07.2024.*