


Научная статья
УДК 532.546: 519.63
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17405>

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАНИЧНОГО РЕЖИМА В ПРОЦЕССЕ ВЫТЕСНЕНИЯ ВОДОЙ НЕФТИ ИЗ ПЛАСТА

Х. М. Гамзаев 

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,
г. Баку, Азербайджан
 xan.h@rambler.ru

Аннотация. Рассмотрен процесс вытеснения нефти из прямоугольного пласта водой; процесс описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных относительно пластового давления (ПД) и насыщенности вытесняющей фазы (НВФ). В рамках предложенной модели поставлена задача идентификации режима на выходной границе пласта по заданным условиям на входной границе. Методом разностной аппроксимации построен разностный аналог задачи, неявный относительно ПД, но явный по НВФ. Для решения полученной системы линейных разностных уравнений относительно давления применяется декомпозиция. В результате получена явная формула для определения приближенного значения ПД на выходной границе пласта при заданном временном слое. С учетом вычисленного распределения давления в пласте, по явной формуле находится распределение НВФ во временном слое. На основе предложенного вычислительного алгоритма проведены численные эксперименты для модельного нефтяного пласта.

Ключевые слова: метод заводнения, двухфазное течение, насыщенность вытесняющей фазы, граничная обратная задача, декомпозиция


Для цитирования: Гамзаев Х. М. Идентификация граничного режима в процессе вытеснения водой нефти из пласта // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 4. С. 57–67. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17405>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM/17405>

IDENTIFICATION OF THE BOUNDARY REGIME IN THE PROCESS OF WATER-OIL DISPLACEMENT FROM THE RESERVOIR

Kh. M. Gamzaev 

Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan
 xan.h@rambler.ru

Abstract. The water-oil displacement process (from a rectangular reservoir) has been considered, that is described by a nonlinear system of partial differential equations with respect to the reservoir pressure (RP) and displacing phase saturation (DPS). Within the framework of the proposed model, the task of identifying the regime at the output boundary of the reservoir according to the specified conditions at the input boundary was set. The difference approximation method was used to construct a difference analogue of the problem, implicit with respect to RP and explicit with respect to DPS. As a result, an explicit formula was obtained for determining the approximate RP value at the outlet boundary of the reservoir at a given time layer. Taking into account the calculated RP distribution in the reservoir, the DPS distribution in the time layer was determined using an explicit formula. Based on the proposed computational algorithm, numerical experiments were carried out for the model oil reservoir.

Keywords: flooding method, two-phase flow, displacing phase saturation, boundary inverse problem, decomposition

For citation: Gamzaev Kh. M., Identification of the boundary regime in the process of water-oil displacement from the reservoir, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (4) (2024) 57–67. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17405>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

В настоящее время метод заводнения является наиболее распространенным вторичным методом разработки нефтяных месторождений. Суть данного метода заключается в закачке воды через систему нагнетательных скважин в нефтеносный пласт, с целью поддержания давления в пласте и вытеснения нефти к добывающим скважинам. Обычно на этапах проектирования и разработки нефтяных пластов возникает необходимость в анализе и регулировании процессов вытеснения на основе математических моделей совместного течения в пористой среде двух жидкостей: воды и нефти; эти жидкости представляют собой отдельные фазы, которые не смешиваются между собой.

Традиционно в качестве математической модели совместного течения в пласте двух указанных несмешивающихся жидкостей используются уравнения движения жидкостей в форме обобщенного закона Дарси и дифференциальные уравнения сплошности (неразрывности) фильтрационных потоков нефти и воды в пласте [1 – 4]. При этом физические и механические характеристики пласта, нефти и воды, начальное условие в пласте, условие на скважинах и на границе пласта, а также геометрические параметры пласта считаются заданными. Обычно на границах, через которые в пласт поступает вытесняющая фаза (нагнетательные скважины, контур питания, галереи), считаются заданными либо расход вытесняющей фазы, либо давление. Кроме того, на этих границах может быть задана величина насыщенности вытесняющей фазы. На границе стоков (эксплуатационные скважины, галереи) также считаются заданными дебит нефти или давление.

Однако необходимо отметить очень важное обстоятельство, относящееся к условиям, которые задаются на эксплуатационных скважинах или галерее. Дело в том, что установление того или иного технологического режима в эксплуатационных скважинах или галерее зависит от происходящих процессов вытеснения в системе «пласт – скважина», а также от взаимодействия скважин. Поэтому заранее выбирать определенный технологический режим работы эксплуатационных скважин или регулировать поток жидкостей на этих скважинах по заранее заданному условию не представляется возможным.

В связи с этим возникает необходимость в разработке методов для моделирования процессов заводнения нефтяных пластов только на основании информации, заранее заданной в нагнетательных скважинах или галерее.

Постановка задачи и метод решения

Рассматривается горизонтально расположенный нефтяной пласт в форме прямоугольного параллелепипеда протяженностью l , с постоянной шириной и достаточно малой толщиной. Для вытеснения нефти из пласта, начиная с момента времени $t = 0$, через нагнетательную галерею, расположенную на входной границе пласта $x = 0$, в пласт начинает закачиваться вода. Предполагается, что в пласте, согласно обобщенному закону Дарси, происходит прямолинейно-параллельное вытеснение нефти к эксплуатационной галерее, расположенной на выходной границе пласта $x = l$.

Если считать пласт изотропной, слабо деформируемой пористой средой и пренебречь капиллярным давлением, то математическую модель двухфазного течения в рассматриваемом пласте можно представить в следующем виде [1]:

$$c_R \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(S) \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad (1)$$



$$\frac{\partial \varphi S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_w(S) \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad (2)$$

$$G = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\},$$

где $S = S(x, t)$ – насыщенность вытесняющей фазы (воды), выражается в долях; $P = P(x, t)$, Па, – давление; $\varphi = \varphi(P)$ – коэффициент пористости; $c_R = \frac{d\varphi}{dP}$ – коэффициент объемной упругости пласта; $\lambda(S) = \lambda_w(S) + \lambda_o(S)$; $\lambda_w(S) = \frac{k(x)k_w(S)}{\mu_w}$; при этом $\lambda_o(S) = \frac{k(x)k_o(S)}{\mu_o}$; $k(x)$ – коэффициент абсолютной проницаемости пласта; μ_w, μ_o , Па·с, – коэффициенты динамической вязкости воды и нефти, соответственно; $k_w(S), k_o(S)$ – относительные фазовые проницаемости воды и нефти, соответственно.

Предполагается, что изменение коэффициента пористости зависит от изменения давления линейно, а относительные фазовые проницаемости являются известными однозначными функциями насыщенности вытесняющей фазы [1 – 4] и удовлетворяют условиям $k_o(S) > 0, k_w(S) > 0$.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ распределения давления и насыщенности вытесняющей фазы (связанной воды) в пласте известны, т. е. для системы (1), (2) имеем следующие начальные условия:

$$P(x, 0) = r(x), \quad (3)$$

$$S(x, 0) = \psi(x). \quad (4)$$

Предположим, что вода закачивается в пласт через границы $x = 0$ со скоростью $q(t)$ и насыщенность воды на этой границе изменяется во времени по заданному закону $\xi(t)$. Тогда для системы уравнений (1), (2) будем иметь следующие граничные условия:

$$-\lambda_w(S) \frac{\partial P(0, t)}{\partial x} = q(t), \quad (5)$$

$$S(0, t) = \xi(t). \quad (6)$$

А условие относительно давления на эксплуатационной галерее, т. е. на выходной границе пласта $x = l$, представим в виде

$$P(l, t) = \theta(t). \quad (7)$$

Однако в связи с тем, что давление на выходной границе пласта устанавливается в ходе протекания процесса вытеснения нефти водой и невозможно регулировать ее по заранее заданной программе, функция $\theta(t)$ считается неизвестной.

Предположим, что взамен недостающей информации на выходной границе пласта задается дополнительное условие относительно давления на входной границе пласта, т. е.

$$P(0, t) = f(t), \quad (8)$$

где $f(t)$, Па, – заданная функция.

Таким образом, задача состоит в нахождении функций $\{P(x, t), S(x, t), \theta(t)\}$, удовлетворяющих системе уравнений (1), (2), начальным условиям (3), (4), граничным условиям (5) – (7) и дополнительному условию (8). Поставленная задача (1) – (8), связанная с идентификацией режима на выходной границе пласта $x = l$, относится к классу граничных обратных задач математической физики [5 – 8]. Теоретические вопросы, связанные с корректностью постановок граничных обратных задач, существования и единственности решения класса граничных обратных задач для параболических уравнений в различных функциональных пространствах исследованы в работах [8 – 11]. Разработке и обоснованию вычислительных алгоритмов для численного решения граничных обратных задач для

параболических уравнений, их численной реализации посвящено множество работ, см. например [5, 6, 12 – 15].

Известно, что один из возможных подходов к численному решению граничных обратных задач связан с нелокальным возмущением граничных условий и переходом к некоторой близкой корректной задаче [6]. Следует отметить, что некорректность рассматриваемой обратной задачи (1) – (8) связана с граничным условием (8).

Следуя методу возмущения граничных условий, взамен граничного условия (8) составим следующее нелокальное условие, связывающее значения искомой функции $P(x, t)$ на двух границах $x = 0$ и $x = l$:

$$P(0, t) + \alpha P(l, t) = f(t), \quad (9)$$

где α – параметр нелокального возмущения (параметр регуляризации).

Предположим, что решение граничной обратной задачи (1) – (7), (9) существует и она однозначно разрешима. Сначала методом разностной аппроксимации построим дискретный аналог дифференциальной задачи (1) – (7), (9) в прямоугольной области \bar{G} . Введем равномерную пространственно-временную разностную сетку в области \bar{G} :

$$\bar{\omega} = \{(x_i, t_j) : x_i = i\Delta x, t_j = j\Delta t, i = 0, 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$

с шагами $\Delta x = \frac{l}{n}$ и $\Delta t = \frac{T}{m}$.

Используя явную аппроксимацию по времени для нелинейных коэффициентов, дискретный аналог задачи (1) – (7), (9) на сетке $\bar{\omega}$ представим в виде

$$c_R \frac{P_i^j - P_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \left[\lambda(S_{i+1/2}^{j-1}) \frac{P_{i+1}^j - P_i^j}{\Delta x} - \lambda(S_{i-1/2}^{j-1}) \frac{P_i^j - P_{i-1}^j}{\Delta x} \right], \quad (10)$$

$$\frac{(\varphi S)_i^j - (\varphi S)_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \left[\lambda_w(S_{i+1/2}^{j-1}) \frac{P_{i+1}^j - P_i^j}{\Delta x} - \lambda_w(S_{i-1/2}^{j-1}) \frac{P_i^j - P_{i-1}^j}{\Delta x} \right], \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, j = 1, 2, \dots, m,$$

$$P_i^0 = r_i, \quad (12)$$

$$S_i^0 = \psi_i, \quad (13)$$

$$-\lambda_w(S_0^{j-1}) \frac{P_1^j - P_0^j}{\Delta x} = q^j, \quad (14)$$

$$S_0^j = \xi^j, \quad (15)$$

$$P_n^j = \theta^j, \quad (16)$$

$$P_0^j + \alpha P_n^j = f^j, \quad (17)$$

где $S_i^j \approx S(x_i, t_j)$, $P_i^j \approx P(x_i, t_j)$, $f^j = f(t_j)$, $\xi^j = \xi(t_j)$,

$$q^j = q(t_j), \psi_i = \psi(x_i), \theta^j = \theta(t_j), r_i = r(x_i),$$

$$\lambda_w(S_{i\pm 1/2}^{j-1}) = \frac{\lambda_w(S_i^{j-1}) + \lambda_w(S_{i\pm 1}^{j-1})}{2}, \lambda(S_{i\pm 1/2}^{j-1}) = \frac{\lambda(S_i^{j-1}) + \lambda(S_{i\pm 1}^{j-1})}{2}.$$

Дискретный аналог задачи (1) – (7), (9) в области \bar{G} представляет собой систему линейных разностных уравнений, и в качестве неизвестных этой системы выступают приближенные значения искомых функций $\theta(t)$, $P(x, t)$ и $S(x, t)$ в узлах разностной сетки $\bar{\omega}$, т. е. θ^j, P_i^j и S_i^j .

Можно видеть, что система разностных уравнений (10), (11) неявна по давлению (значение насыщенности вытесняющей фазы берется с предыдущего временного слоя $j - 1$) и явна по насыщенности вытесняющей фазы. Исходя из этого, процесс решения системы разностных уравнений (10) – (17) на каждом временном слое j ($j = 1, 2, \dots, m$) можно организовать как нижеприведенную последовательность вычислительных процедур.

I. При заданных значениях $S_{i+1/2}^{j-1}$ определяется решение системы разностных уравнений (18) – (21), т. е. P_i^j и θ^j :

$$c_R \frac{P_i^j - P_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \left[\lambda(S_{i+1/2}^{j-1}) \frac{P_{i+1}^j - P_i^j}{\Delta x} - \lambda(S_{i-1/2}^{j-1}) \frac{P_i^j - P_{i-1}^j}{\Delta x} \right], \quad (18)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$-\lambda_w(S_0^{j-1}) \frac{P_1^j - P_0^j}{\Delta x} = q^j, \quad (19)$$

$$P_n^j = \theta^j, \quad (20)$$

$$P_0^j + \alpha P_n^j = f^j. \quad (21)$$

II. С учетом вновь найденного значения давления P_i^j находится решение системы разностных уравнений (22), (23), т. е. насыщенность вытесняющей фазы S_i^j :

$$\frac{(\varphi S)_i^j - (\varphi S)_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \left[\lambda_w(S_{i+1/2}^{j-1}) \frac{P_{i+1}^j - P_i^j}{\Delta x} - \lambda_w(S_{i-1/2}^{j-1}) \frac{P_i^j - P_{i-1}^j}{\Delta x} \right], \quad (22)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$S_0^j = \xi^j. \quad (23)$$

Чтобы найти решение линейной системы разностных уравнений (18) – (21) при фиксированном значении j , введем следующую декомпозицию [6, 12]:

$$P_i^j = U_i^j + \theta^j W_i^j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

где U_i^j, W_i^j – также неизвестные переменные.

Если подставить выражение P_i^j в уравнение (18), то получим равенство

$$c_R \frac{U_i^j + \theta^j W_i^j - P_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \left[\lambda(S_{i+1/2}^{j-1}) \frac{U_{i+1}^j + \theta^j W_{i+1}^j - U_i^j - \theta^j W_i^j}{\Delta x} - \lambda(S_{i-1/2}^{j-1}) \frac{U_i^j + \theta^j W_i^j - U_{i-1}^j - \theta^j W_{i-1}^j}{\Delta x} \right],$$

или

$$c_R \frac{U_i^j - P_i^{j-1}}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \left[\lambda(S_{i+1/2}^{j-1}) \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\Delta x} - \lambda(S_{i-1/2}^{j-1}) \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{\Delta x} \right] + \theta^j \left\{ c_R \frac{W_i^j}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \left[\lambda(S_{i+1/2}^{j-1}) \frac{W_{i+1}^j - W_i^j}{\Delta x} - \lambda(S_{i-1/2}^{j-1}) \frac{W_i^j - W_{i-1}^j}{\Delta x} \right] \right\} = 0. \quad (25)$$

Далее, если подставить выражение для P_i^j в формулы (19), (20), то получим следующие выражения:

$$-\lambda_w(S_0^{j-1}) \frac{U_1^j - U_0^j}{\Delta x} - \theta^j \lambda_w(S_0^{j-1}) \frac{W_1^j - W_0^j}{\Delta x} = q^j, \quad (26)$$

$$U_n^j + \theta^j W_n^j = \theta^j. \quad (27)$$

Очевидно, что соотношения (25) – (27) будут автоматически выполняться при следующих условиях:

а) переменные U_i^j ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют системе разностных уравнений

$$c_R \frac{U_i^j - P_i^{j-1}}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \left[\lambda(S_{i+1/2}^{j-1}) \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\Delta x} - \lambda(S_{i-1/2}^{j-1}) \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{\Delta x} \right] = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n-1, \\ -\lambda_w(S_0^{j-1}) \frac{U_1^j - U_0^j}{\Delta x} = q^j, \quad (28)$$

$$U_n^j = 0;$$

б) переменные W_i^j ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют системе разностных уравнений

$$c_R \frac{W_i^j}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \left[\lambda(S_{i+1/2}^{j-1}) \frac{W_{i+1}^j - W_i^j}{\Delta x} - \lambda(S_{i-1/2}^{j-1}) \frac{W_i^j - W_{i-1}^j}{\Delta x} \right] = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n-1, \\ -\lambda_w(S_0^{j-1}) \frac{W_1^j - W_0^j}{\Delta x} = 0, \quad (29)$$

$$W_n^j = 1.$$

Необходимо отметить, что полученные независимые системы линейных алгебраических уравнений (28) и (29) имеют трехдиагональные матрицы и решения этих систем можно найти с помощью известного метода Томаса [6].

Теперь для определения θ^j используем условие (21). Подставив представление (24) в формулу (21), будем иметь:

$$U_0^j + \theta^j W_0^j + \alpha P_n^j = f^j.$$

Отсюда следует явная формула для вычисления приближенного значения искомой функции $\theta(t)$ при $t = t_j$, т. е. величины θ^j :

$$\theta^j = \frac{f^j - U_0^j}{W_0^j + \alpha}. \quad (30)$$

После определения значения θ^j можно по формуле (24) вычислять приближенные значения искомой функции $P(x, t)$ на временном слое j при $x = x_i$, т. е. P_i^j ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Затем, когда получено распределение давления в пласте на временном слое j , можно перейти к вычислению распределения насыщенности вытесняющей фазы на том же временном слое. Для этого достаточно разрешить уравнение (22) относительно насыщенности вытесняющей фазы. В результате получим следующую явную формулу для вычисления приближенных значений последней искомой функции $S(x, t)$ на временном слое j при $x = x_i$, т. е. S_i^j ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$):

$$S_i^j = \frac{\varphi(P_i^{j-1}) S_i^{j-1}}{\varphi(P_i^j)} + \frac{\Delta t}{\varphi(P_i^j) \Delta x} \left[\lambda_w(S_{i+1/2}^{j-1}) \frac{P_{i+1}^j - P_i^j}{\Delta x} - \lambda_w(S_{i-1/2}^{j-1}) \frac{P_i^j - P_{i-1}^j}{\Delta x} \right], \quad (31)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$S_0^j = \xi^j. \quad (32)$$

Очевидно, что из уравнения (31) найти значение насыщенности вытесняющей фазы на выходной границе пласта $x = l$ не представляется возможным. Для этой цели можно использовать простейшую экстраполяционную формулу.

Таким образом, вычислительный алгоритм решения граничной обратной задачи (1) – (8) методом возмущения граничных условий, с использованием системы линейных разностных уравнений (10) – (17), на каждом временном слое j ($j = 1, 2, \dots, m$) состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Параллельно определяются решения системы разностных уравнений (28) и (29) относительно вспомогательных переменных $U_i^j, W_i^j, i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$;

Шаг 2. По формуле (30) определяется значение переменной θ^j ;

Шаг 3. Вычисляются значения переменных $P_i^j (i = 0, 1, 2, \dots, n - 1)$ по формуле (24);

Шаг 4. По формуле (31) вычисляются значения переменных $S_i^j (i = 1, 2, \dots, n - 1)$.

Результаты численных расчетов

Предложенный вычислительный алгоритм апробирован для идентификации режима на выходной границе модельного нефтяного пласта со следующими характеристиками:

длина пласта $l = 100$ м;

коэффициент абсолютной проницаемости пласта $k = 50 \cdot 10^{-12}$ м²;

начальное пластовое давление $r(x) = 4$ МПа;

начальная водонасыщенность пласта $\psi(x) = 0,2$;

динамические вязкости пластовой нефти и воды $\mu_o = 3 \cdot 10^{-3}, \mu_w = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с;

относительные фазовые проницаемости для воды и нефти

$$k_w(S) = \left(\frac{S - 0,2}{0,8} \right)^3, k_o(S) = \left(\frac{0,8 - S}{0,6} \right)^3;$$

коэффициент пористости пласта $\varphi(P) = \varphi_0 + c_R(P - P_a)$,

где $\varphi_0 = 0,25, c_R = 1 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹, $P_a = 10^5$ Па;

скорость закачки воды в пласт $q(t) = 2 \cdot 10^{-4}$ м/с;

закон изменения насыщенности воды во времени

на входной границе пласта $\xi(t) = 0,8$.

Таблица 1

Результаты численных экспериментов по восстановлению временной динамики граничного режима (выражен функциями $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$)

$t_j, \text{ч}$	$\theta_1(t) = 4 + 0,2 \sin 10t, \text{МПа}$			$f_1(t), \text{МПа}$	$\theta_2(t) = 4 \cdot e^{-t/T}, \text{МПа}$			$f_2(t), \text{МПа}$
	θ'_1	$\bar{\theta}_1$	$\tilde{\theta}_1$		θ'_2	$\bar{\theta}_2$	$\tilde{\theta}_2$	
1	3,906	3,906	3,876	4,723	3,742	3,742	3,677	4,511
2	4,166	4,166	4,150	5,118	3,501	3,501	3,455	4,543
3	3,801	3,801	3,816	5,071	3,275	3,275	3,255	4,441
4	4,185	4,185	4,252	5,247	3,064	3,064	3,090	4,225
5	3,872	3,872	3,829	5,094	2,866	2,866	2,805	4,023
6	4,040	4,040	4,045	5,171	2,681	2,681	2,662	3,834
7	4,057	4,057	4,053	5,173	2,508	2,508	2,485	3,657
8	3,860	3,860	3,900	5,081	2,347	2,347	2,353	3,493
9	4,191	4,191	4,154	5,231	2,195	2,195	2,156	3,338
10	3,803	3,803	3,864	5,049	2,054	2,054	2,074	3,195
11	4,156	4,156	4,253	5,211	1,921	1,921	1,964	3,059
12	3,921	3,921	3,929	5,097	1,797	1,797	1,788	2,932
13	3,983	3,983	4,021	5,124	1,681	1,681	1,690	2,812
14	4,109	4,109	4,094	5,175	1,573	1,573	1,556	2,698
15	3,825	3,825	3,900	5,040	1,472	1,472	1,499	2,592

Обозначения: t – время; $\theta'_{1,2}$ – точные значения функций $\theta_{1,2}(t)$; $\bar{\theta}, \tilde{\theta}_{1,2}$ – вычисленные значения функций $\theta_{1,2}(t)$ при невозмущенных и возмущенных входных данных, соответственно; $f_{1,2}(t)$ – заданные функции давления на входной границе пласта.

Примечание. Для возмущенных входных данных, в качестве уровня погрешности использовалось значение $\delta = 0,02$.

Таблица 2

**Расчетные распределения давления и насыщенности воды
в нефтяном пласте в различные моменты времени**

$x_i, \text{ м}$	$P_i^j, \text{ МПа}$	S_i^j	$P_i^j, \text{ МПа}$	S_i^j	$P_i^j, \text{ МПа}$	S_i^j	
	$t_1 = 5 \text{ ч}$		$t_2 = 10 \text{ ч}$		$t_3 = 15 \text{ ч}$		
0	5,094	0,800	5,049	0,800	5,040	0,800	
5	5,048	0,771	5,002	0,771	4,993	0,772	
10	4,996		4,950		4,942		
15	4,944		4,898		4,889		
20	4,878		4,846		4,837		
25	4,787		4,793		4,734		
30	4,716	0,200	4,739	0,200	4,731	0,771	
35	4,659		4,686		4,678		
40	4,600		4,631		4,624		
45	4,542		4,546		4,569		
50	4,483		4,447		4,514		
55	4,424		4,382		4,459		
60	4,365		4,321		4,403		
65	4,305		4,259		4,344		0,751
70	4,244		4,196		4,247		0,441
75	4,184		4,133		4,149		0,205
80	4,122	4,068	4,085	0,200			
85	4,061	4,003	4,021				
90	3,998	3,938	3,957				
95	3,936	3,871	3,891				
100	3,872	3,803	3,825				

Примечание. Вычисленные распределения давления и насыщенности вытесняющей фазы по длине пласта соответствуют восстанавливаемой функции $\theta_1(t) = 4 + 0,2\sin 10 t$.

Численный эксперимент продолжительностью $T = 54$ тыс. с (15 ч) был проведен по следующей схеме:

1. задавалось давление $\theta(t)$ на выходной границе пласта и определялось решение прямой задачи (1) – (7), т. е. находили функции $P(x, t)$ и $S(x, t)$ $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$;
2. вычисленная зависимость $P(0, t) = f(t)$ принималась в качестве точных входных данных для идентификации функции $\theta(t)$.

Расчеты были проведены на равномерной пространственно-временной разностной сетке с шагами $\Delta x = 5$ м, $\Delta t = 60$ с.

При проведении численных экспериментов использовались невозмущенные и возмущенные входные данные. При использовании невозмущенных входных данных значение параметра нелокального возмущения принималось равным нулю. Для возмущения входных данных использовалось следующее соотношение:

$$\tilde{f}(t) = f(t) + \delta\sigma(t)f(t),$$

где слагаемое $\delta\sigma(t)f(t)$ моделирует различный уровень погрешности для входных данных $f(t)$; $\sigma(t)$ – случайная величина, моделируемая с помощью датчика случайных чисел; δ – уровень погрешности.

Таблица 3

Расчетные распределения давления и насыщенности воды в нефтяном пласте при различных значениях шага Δx в момент времени $t = 15$ ч

$x_i, \text{ м}$	$P_i^j, \text{ МПа}$	S_i^j	$P_i^j, \text{ МПа}$	S_i^j	$P_i^j, \text{ МПа}$	S_i^j
	$\Delta x_1 = 5,00 \text{ м}$		$\Delta x_2 = 2,50 \text{ м}$		$\Delta x_3 = 1,25 \text{ м}$	
0	5,040	0,800	4,999	0,800	4,962	0,800
5	4,993	0,772	4,949	0,776	4,913	0,785
10	4,942	0,771	4,899		4,864	
15	4,889		4,847		4,814	
20	4,837		4,795		4,764	
25	4,734		4,743		4,713	
30	4,731		4,691		4,663	
35	4,678		4,638		4,611	
40	4,624		4,585		4,560	
45	4,569		4,531		4,508	
50	4,514		4,477		4,455	
55	4,459		4,422		4,402	
60	4,403		4,367		4,349	
65	4,344		0,751		4,312	
70	4,247		0,441	4,236	0,493	4,234
75	4,149	0,205	4,152	0,200	4,158	0,200
80	4,085	0,200	4,088		4,093	
85	4,021		4,024		4,027	
90	3,957		3,958		3,961	
95	3,891		3,892		3,893	
100	3,825		3,825	3,825		

В этом случае значение параметра нелокального возмущения α определяется в соответствии с принципом невязки [5, 6].

Результаты численных экспериментов по восстановлению двух функций, а именно

$$\theta_1(t) = 4 + 0,2 \sin 10 t \text{ (МПа)} \text{ и } \theta_2(t) = 4 \cdot e^{-t/T} \text{ (МПа)},$$

с использованием невозмущенных и возмущенных входных данных, представлены в табл. 1.

При использовании невозмущенных входных данных, как показывают численные расчеты, искомая функция $\theta(t)$ восстанавливается с высокой точностью. А при использовании возмущенных входных данных давление на выходной границе пласта определяется с определенной погрешностью. Однако в этом случае для заданного уровня погрешности $\delta = 0,02$ максимальная относительная погрешность восстановления значений искомой функции $\theta(t)$ не превышает 2,32 и 2,22 %, соответственно. Значения параметра нелокального возмущения составляли при этом 0,01 и 0,02, соответственно.

Следует отметить, что при проведении численных расчетов очень важен выбор шага разностной сетки по временной переменной. Дело в том, что использование малых таких шагов при решении некорректно поставленных граничных обратных задач дает

противоположный эффект, по сравнению с численным решением прямых задач: с повышением временного шага увеличивается точность решения обратных задач [5]. В связи с этим шаг разностной сетки по временной переменной определялся путем численного экспериментирования (табл. 2).

С целью изучения влияния шага разностной сетки по пространственной переменной на точность восстановления давления на выходной границе пласта проведены численные расчеты при значениях шага $\Delta x = 5,00, 2,50$ и $1,25$ м. Полученные результаты представлены в табл. 3.

Из табл. 3 следует, что независимо от шага разностной сетки по пространственной переменной, точное значение давления на выходной границе пласта, равное $3,825$ МПа, восстанавливается абсолютно точно (см. последнюю строку табл. 3) при использовании невозмущенных входных данных. Кроме того, полученные распределения давления и насыщенности вытесняющей фазы в пласте показывают практическую сходимость используемого разностного метода.

Заключение

В рамках модели двухфазного прямолинейно-параллельного течения несжимаемых жидкостей в деформируемом нефтяном пласте рассмотрена задача идентификации режима на выходной границе этого пласта. Предложенный вычислительный алгоритм, основанный на использовании метода возмущения граничных условий, позволяет идентифицировать режим на выходной границе пласта по заданной информации на его входной границе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. Пер. с англ. Изд. 2-е. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 416 с.
2. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 736 с.
3. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 544 с.
4. Сулейманов Б. А. Особенности фильтрации гетерогенных систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 354 с.
5. Алифанов О. М. Задачи обратного теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
6. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Изд. 3-е. М.: Изд-во ЛКИ, 2009. 480 с.
7. Hasanov A. N., Romanov V. G. Introduction to inverse problems for differential equations. Cham, Switzerland: Springer Cham, 2021. 261 p.
8. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. 457 с.
9. Костин А. Б., Прилепко А. И. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 1. С. 107–116.
10. Кожанов А. И. Обратные задачи определения граничных режимов для некоторых уравнений соболевского типа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2016. Т. 9. № 2. С. 37–45.
11. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Vol. 231). New York: Marcel Dekker. 2000. 724 p.
12. Гамзаев Х. М. Об одной обратной задаче трубопроводного транспорта слабосжимаемых жидкостей // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93. № 6. С. 1622–1628.
13. Gamzaev Kh. M. Identification of the boundary mode in one thermal problem based on the single-phase Stefan model // Cybernetics and Systems Analysis. 2023. Vol. 59. No. 2. Pp. 266–273.
14. Vasil'ev V. I., Su L.-De. Numerical method for solving boundary inverse problem for one-dimensional parabolic equation // Математические заметки СВФУ. 2017. Т. 24. № 2. С. 108–117.
15. Япарова Н. М. Численное моделирование решений обратной граничной задачи теплопроводности // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2013. Т. 6. № 3. С. 112–124.

REFERENCES

1. Aziz K., Settari A., Petroleum reservoir simulation, Applied Science Publishers, New York, 1979.
2. Shchelkachev V. N., Lapuk B. B., Podzemnaya gidravlika. [Underground hydraulics]. “Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika” Publishing, Moscow, Izhevsk, 2001 (in Russian).
3. Basniyev K. S., Dmitriyev N. M., Rozenberg G. D., Neftgazovaya gidromekhanika. [Oil and gas hydromechanics], Publisher: Institute of Computer Studies, Izhevsk, 2005 (in Russian).
4. Suleymanov B. A., Osobennosti filtratsii geterogennykh system [The filtration features of heterogeneous systems], Publisher: Institute of Computer Studies, Izhevsk, 2006 (in Russian).
5. Alifanov O. M., Inverse heat transfer problems (Book Series “International Series in Heat and Mass Transfer”), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.
6. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N., Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics (Book Series “Inverse and Ill-Posed Problems”, Vol. 52), De Gruyter, Berlin, 2008.
7. Hasanov A. H., Romanov V. G., Introduction to inverse problems for differential equations, Springer-Verlag, Berlin, 2021.
8. Kabanikhin S. I., Inverse and ill-posed problems. Walter de Gruyter, Berlin, 2011.
9. Kostin A. B., Prilepko A. I., On some problems of restoration of a boundary condition for a parabolic equation, Differ. Equ. 32 (1) (1996) 113–122.
10. Kozhanov A. I., Inverse problems for determining boundary regimes for some equations of Sobolev type, Bull. South Ural State Univ., Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 9 (2) (2016) 37–45.
11. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A., Methods for solving inverse problems in mathematical physics, Marcel Dekker, New York, 2000.
12. Gamzaev Kh. M., Inverse problem of pipeline transport of weakly-compressible fluids, J. Eng. Phys. Thermophys. 93 (6) (2020) 1567–1573.
13. Gamzaev Kh. M., Identification of the boundary mode in one thermal problem based on the single-phase Stefan model, Cybern. Syst. Anal. 59 (2) (2023) 266–273.
14. Vasil’ev V. I., Su L.-D., Numerical method for solving boundary inverse problem for one-dimensional parabolic equation, Math. Notes of NEFU. 24 (2) (2017) 107–116.
15. Yaparova N. M., Chislennoye modelirovaniye resheniy obratnoy granichnoy zadachi teploprovodnosti [Numerical simulation for solving an inverse boundary heat conduction problem], Bull. South Ural State Univ., Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 6 (3) (2013) 112–124 (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ГАМЗАЕВ Ханлар Мехвали оглу — доктор технических наук, профессор кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, г. Баку, Азербайджан.

AZ 1010, Азербайджан, г. Баку, пр. Азадлыг, 20
 xan.h@rambler.ru
 ORCID: 0000-0002-1228-7892

THE AUTHOR

Gamzaev Khanlar M. o.

Azerbaijan State Oil and Industry University
 20 Azadlig Ave., Baku, AZ 1010, Azerbaijan
 xan.h@rambler.ru
 ORCID: 0000-0002-1228-7892

Статья поступила в редакцию 22.12.2023. Одобрена после рецензирования 03.06.2024. Принята 03.06.2024.

Received 22.12.2023. Approved after reviewing 03.06.2024. Accepted 03.06.2024.