

Научная статья

УДК 534.16

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17404>

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ И ЗАПАЗДЫВАНИИ В УПРУГОСТИ

А. А. Алифов 

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия

 alishir@mail.ru

Аннотация. Рассмотрено взаимодействие автоколебаний и параметрических колебаний при нелинейном параметрическом возбуждении и запаздывании в упругости. Для решения дифференциальных уравнений движения системы использован метод прямой линеаризации и выведены уравнения для нестационарных и стационарных режимов колебаний. С помощью критериев Рауса – Гурвица получены условия устойчивости стационарных режимов. Чтобы выяснить влияние нелинейного параметрического возбуждения на динамику смешанных параметрических и автоколебаний, выполнены соответствующие расчеты и проведено сравнение результатов, полученных при наличии и в отсутствие запаздывания. Согласно расчетным данным, при наличии запаздывания происходит изменение величин амплитуд, которое сопровождается смещением позиций амплитудных кривых в амплитудно-частотной области, а также их сужение либо уширение, по сравнению с отсутствием запаздывания. Наличие запаздывания влияет также на устойчивость колебаний.

Ключевые слова: автоколебания, параметрические колебания, взаимодействие, нелинейность, запаздывание, упругость, метод прямой линеаризации

Для цитирования: Алифов А. А. Параметрические и автоколебания при нелинейном параметрическом воздействии и запаздывании в упругости // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 4. С. 48–56. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17404>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17404>

PARAMETRIC AND SELF-EXCITED OSCILLATIONS UNDER NONLINEAR PARAMETRIC ACTION AND LAG IN ELASTICITY

A. A. Alifov 

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

 alishir@mail.ru

Abstract. The interaction of parametric oscillations and self-oscillations under nonlinear parametric excitation and delay in elasticity is considered. To solve the differential equations of the system motion, the direct linearization method was used and equations for non-stationary and stationary modes of oscillations were derived. Using the Routh–Hurwitz criteria, stability conditions for stationary regimes were obtained. To find out the effect of nonlinear parametric excitation on the dynamics of mixed autoparametric oscillations, relevant calculations were carried out and a comparison was made of the results obtained in the presence and absence of delay. According to calculated data, in the presence of a delay, a change in amplitude values occurs, accompanied by a shift in the amplitude curves in the amplitude-frequency area, as well as their narrowing or broadening, compared to no lag. The presence of lag also affects the stability of oscillations.

Keywords: self-oscillations, parametric oscillations, interaction, nonlinearity, delay, elasticity, method of direct linearization

For citation: Alifov A. A., Parametric and self-excited oscillations under nonlinear parametric action and lag in elasticity, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (4) (2024) 48–56. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17404>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Колебательные процессы широко распространены в природе и возникают на всех уровнях материи (микромир – мегамир), наблюдаемых человеком. Они происходят в механических, аэрогидродинамических, электромагнитных системах, в огромном множестве технических систем, химических реакций и др. Колебаниям подвержены экономические, социальные, исторические и прочие процессы, в том числе развитие науки. Примеры множества колебательных процессов, наблюдаемых в естественных условиях и опытах, приведены в нашей книге [1].

Согласно известной классификации колебательных процессов (см., например, работы [2, 3]) по механизму возбуждения, существует 4 типа колебаний: свободные, вынужденные, параметрические и автоколебания. Последние три типа образуют 4 класса смешанных колебаний (динамическое взаимодействие двух и более типов в одной системе). Различные типы и классы смешанных типов колебаний изучены во многих работах. Широкому изучению параметрических колебаний, которые могут возникать при функционировании, например, оболочек, пластин, стержней и т. п., посвящена монография [4]. В ней эти колебания рассмотрены при линейном и нелинейном (квадратичном) параметрическом возбуждениях; математически они выражаются периодическими коэффициентами в дифференциальных уравнениях движения системы.

Данное исследование посвящено смешанным параметрическим и автоколебаниям при нелинейном параметрическом возбуждении кубического вида и наличии запаздывания в силе упругости. Системы с запаздыванием широко распространены в природе и устройствах различного рода (см., например, работы [5 – 13]). Нелинейные дифференциальные уравнения рассматриваемых колебаний решены с применением метода прямой линеаризации [14 – 17].

Модель и ее математическое описание

Автопараметрические колебания при нелинейном параметрическом возбуждении и запаздывания в упругости рассмотрим на основе широко используемой [3, 18 – 21] модели (рис. 1).

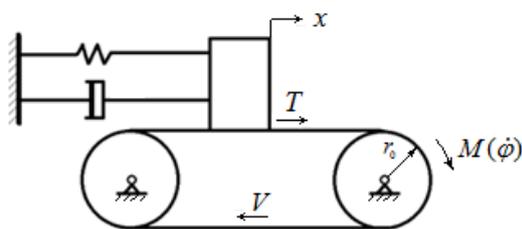


Рис. 1. Модель фрикционной автоколебательной системы:

T – нелинейная сила трения, вызывающая автоколебания; r_0 – радиус точки приложения силы трения T ; $M(\dot{\phi})$, $\dot{\phi}$ – соответственно моментная характеристика двигателя и скорость вращения его ротора, V – линейная скорость

Дифференциальные уравнения движения системы при наличии нелинейного параметрического возбуждения вида $x^3 \cos vt$ и запаздывания τ в силе упругости $c_\tau x_\tau$ ($c_\tau = \text{const}$, $x_\tau = x(t - \tau)$) имеют следующий вид:

$$m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c_0x = T(U) - F(x) - bx^3 \cos vt - c_\tau x_\tau, \quad (1)$$

$$I\ddot{\phi} = M(\dot{\phi}) - r_0 T(U),$$

где m – масса тела на движущейся ленте; k_0 , c_0 – соответственно коэффициенты демпфирования и жесткости, причем $k_0 = \text{const}$, $c_0 = \text{const}$; $F(x)$ – нелинейная часть силы упругости; b , v – соответственно коэффициент и частота нелинейного параметрического возбуждения, причем $b = \text{const}$, $v = \text{const}$; I – суммарный момент инерции

вращающихся частей; $M(\dot{\varphi})$, $\dot{\varphi}$ – соответственно моментная характеристика двигателя и скорость вращения его ротора; $T(U)$ – нелинейная сила трения, вызывающая автоколебания; $U = V - \dot{x}$, при этом $V = r_0 \dot{\varphi}$, $r_0 = \text{const}$ – радиус точки приложения силы трения $T(U)$.

Нелинейные части силы упругости $F(x)$ и силы трения $T(U)$ представим в виде зависимостей

$$F(x) = \sum_s \gamma_s x^s, \quad s = 2, 3, \dots, \quad (2)$$

$$T(U) = T_0 [\text{sgn} U + f(\dot{x})], \quad f(\dot{x}) = -\alpha_1 U + \alpha_3 U^3,$$

где T_0 – нормальная сила реакции; $\alpha_1, \alpha_3, \gamma_s$ – константы; $\text{sgn} U = 1$ при $U > 0$, $\text{sgn} U = -1$ при $U < 0$, а в случае покоя $U = 0$ имеют место неравенства

$$-T_0 \leq T(0) \leq T_0.$$

Представленная форма силы трения достаточно распространена на практике, она наблюдалась даже при космических опытах [22].

Заменим нелинейные функции $f(\dot{x})$ и $F(x)$ методом прямой линеаризации [14] линейными функциями

$$F_*(x) = B_F + c_F x, \quad f_*(\dot{x}) = B_f + k_f \dot{x}, \quad (3)$$

где B_F, c_F, B_f, k_f – коэффициенты линеаризации, зависящие от параметра точности линеаризации.

Эти коэффициенты определяются следующими выражениями:

$$B_F = \sum_s N_s \gamma_s a^s, \quad s = 2, 4, 6, \dots \quad (s - \text{четное}),$$

$$c_F = \sum_s \bar{N}_s \gamma_s a^{s-1}, \quad s = 3, 5, 7, \dots \quad (s - \text{нечетное}),$$

$$B_f = -\alpha_1 V + \alpha_3 V^3 + 3\alpha_3 N_2 V a^2 p^2, \quad k_f = \alpha_1 - 3\alpha_3 V^2 - \alpha_3 \bar{N}_3 v^2,$$

$$N_s = (2r + 1)/(2r + 1 + s), \quad \bar{N}_s = (2r + 3)/(2r + 2 + s),$$

$$N_2 = (2r + 1)/(2r + 3), \quad \bar{N}_3 = (2r + 3)/(2r + 5),$$

$$a = \max|x|, \quad v = \max|\dot{x}|.$$

Как показано в работах [14 – 17], выбор параметра точности линеаризации r достаточен в пределах значений от 0 до 2, но интервал в принципе не ограничен.

Уравнения (1) с учетом (3) принимают вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_0 \dot{x} + cx &= T_0 B_f + T_0 (\text{sgn} U + k_f \dot{x}) - bx^3 \cos vt - c_\tau x_\tau, \\ I\ddot{\varphi} &= M(\dot{\varphi}) - r_0 T_0 (\text{sgn} U + B_f + k_f \dot{x}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $c = c_0 + c_F$.

Решение линеаризованных уравнений

Для решения системы (4) воспользуемся методом и процедурой, описанными в работах [14, 16]. Они позволяют изучать нестационарные и стационарные режимы колебаний. На их основе, учитывая

$$x_\tau = a \cos(\psi - p\tau), \quad u = r_0 \Omega,$$

имеем следующие выражения:

$$x = a \cos \psi, \quad \dot{x} = -ap \sin \psi, \quad \psi = pt + \xi, \quad p = v/2. \quad (5)$$

Уравнениями нестационарных режимов являются:

а) $u \geq ap$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} (2aA - 0,5ba^3 \sin 2\xi), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} (2aE + ba^3 \cos 2\xi), \end{aligned} \quad (6a)$$

б) $u < ap$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{I} \left[M\left(\frac{u}{r_0}\right) - r_0 T_0 (1 + B_f) \right]; \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} \left[2aA - 0,5ba^3 \sin 2\xi - \frac{8T_0}{\pi ap} \sqrt{a^2 p^2 - u^2} \right], \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} (2aE + ba^3 \cos 2\xi), \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r_0}{I} \left[M\left(\frac{u}{r_0}\right) - r_0 T_0 (1 + B_f) - \frac{r_0 T_0}{\pi} (3\pi - 2\Psi_*) \right],$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= c_0 / m, \quad A = p(k_0 - T_0 k_f) - c_\tau \sin p\tau, \quad E = m(\omega_0^2 - p^2) + k_f + c_\tau \cos p\tau, \\ \Psi_* &= 2\pi - \arcsin(u/ap). \end{aligned}$$

При выводе уравнений (6б) использован прием, описанный в монографии [3]. Заметим, что с учетом равенства $u = r_0 \Omega$ выражения для B_f и k_f в уравнениях (6) имеют вид

$$B_f = -\alpha_1 u + \alpha_3 u^3 + 3\alpha_3 N_2 u a^2 p^2, \quad k_f = \alpha_1 - 3\alpha_3 u^2 - \alpha_3 \bar{N}_3 v^2.$$

Для определения стационарных значений амплитуды, фазы колебаний и скорости источника принимаем $\dot{a} = 0$, $\dot{\xi} = 0$, $\dot{u} = 0$ и в случае $u \geq ap$ получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 4A^2 + E^2 &= 0,25b^2 a^4, \quad \operatorname{tg} 2\xi = -2A/E, \\ M\left(\frac{u}{r}\right) - S(u, a) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $S(u, a)$ – нагрузка на источник энергии со стороны колебательной системы, $S(u, a) = r_0 T_0 (1 + B_f)$.

В случае скоростей $u < ap$ амплитуда определяется приближенным выражением $ap \approx u$.

Условия устойчивости стационарных колебаний

Чтобы вывести условия устойчивости стационарных колебаний, составляем для уравнений (6) уравнения в вариациях. С этой целью воспользуемся критериями Рауса – Гурвица; при этом получаем следующие условия устойчивости:

$$D_1 > 0, \quad D_3 > 0, \quad D_1 D_2 - D_3 > 0,$$

где $D_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33})$, $D_2 = b_{11} b_{33} + b_{11} b_{22} + b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32} - b_{12} b_{21} - b_{13} b_{31}$,

$$D_3 = b_{11} b_{23} b_{32} + b_{12} b_{21} b_{33} + b_{22} b_{13} b_{31} - b_{11} b_{22} b_{33} - b_{12} b_{23} b_{31} - b_{13} b_{21} b_{32}.$$

В случае $u \geq ar$ имеем следующие выражения:

$$b_{11} = \frac{r_0}{I} \left(Q - r_0 T_0 \frac{\partial B_f}{\partial u} \right), \quad b_{12} = -\frac{r_0^2 T_0}{I} \frac{\partial B_f}{\partial a}, \quad b_{13} = 0,$$

$$b_{21} = a \frac{T_0}{2m} \frac{\partial k_f}{\partial u}, \quad b_{22} = -\frac{1}{4pm} \left[2 \left(A + a \frac{\partial A}{\partial a} \right) - \frac{3}{2} ba^2 \sin 2\xi \right], \quad b_{23} = \frac{ba^3}{4pm} \cos 2\xi,$$

$$b_{31} = 0, \quad b_{32} = \frac{1}{2pm} \left(\frac{\partial E}{\partial a} + ba \cos 2\xi \right), \quad b_{33} = -\frac{ba^2}{2pm} \sin 2\xi,$$

где $Q = \frac{d}{du} M \left(\frac{u}{r_0} \right)$.

Численные расчеты

Для проведения расчетов использованы следующие значения параметров:

масса тела $m = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}$,
 коэффициент демпфирования $k_0 = 0,02 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}$,
 коэффициент жесткости $c_0 = 1 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$,
 коэффициент нелинейного параметрического возбуждения $b = 0,07 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$,
 нормальная сила реакции $T_0 = 0,5 \text{ кгс}$,
 константы $c_\tau = 0,05 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$, $\alpha_1 = 0,84 \text{ с} \cdot \text{см}^{-1}$, $\alpha_3 = 0,18 \text{ с}^3 \cdot \text{см}^{-3}$.

Для запаздывания использованы величины $p\tau = \pi/2, \pi, 3\pi/2$, а для нелинейной части силы упругости – вид $\gamma_3 y^3$, $\gamma_3 = \text{const}$ с коэффициентом линеаризации $c_F = \bar{N}_3 \gamma_3 a^2$ ($\bar{N}_3 = 3/4$, параметр точности линеаризации $r = 1,5$). Заметим, что результаты по асимптотическому методу усреднения [23] и метода прямой линеаризации совпадают, ибо число $3/4$ имеет место в обоих случаях.

На рис. 2 показаны некоторые результаты расчетов (величины на графиках нормализованы). Следует отметить, что в случае $p\tau = 3\pi/2$ в соотношениях (7) отсутствуют корни уравнения амплитуды как при $\gamma_3 = 0$, так и при $\gamma_3 \neq 0$.

Были также численно решены дифференциальные уравнения (6). Характеристика источника энергии была принята в виде

$$M = M_0 - Qu,$$

где $0 < Q < \infty$.

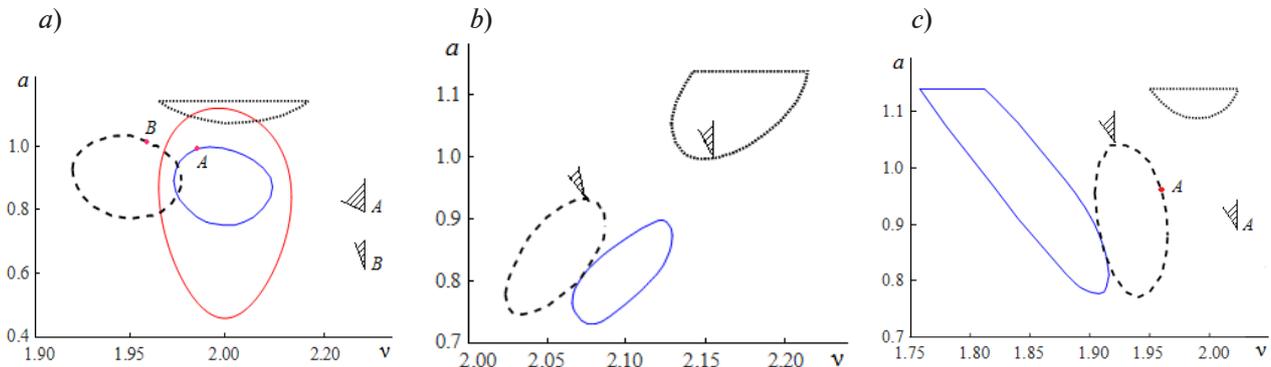


Рис. 2. Амплитудно-частотные кривые при скорости $u=1,14$ и значениях $\gamma = 0$ (a), $+0,2$ (b), $-0,2$ (c). Нелинейное параметрическое возбуждение выражено синими ($c_\tau=0$, запаздывание отсутствует) и черными кривыми; черные – для двух случаев запаздывания: $p\tau = \pi/2$ (пунктир) и $p\tau = \pi$ (штрих). Кривая красного цвета на рис. 2,а приведена для сравнения и имеет место для линейного параметрического возбуждения ($x \cos vt$) в отсутствие запаздывания. Заштрихованные секторы отражают крутизну $Q = dM(u/r_0)/du$ характеристики источника энергии и соответствуют устойчивым амплитудам

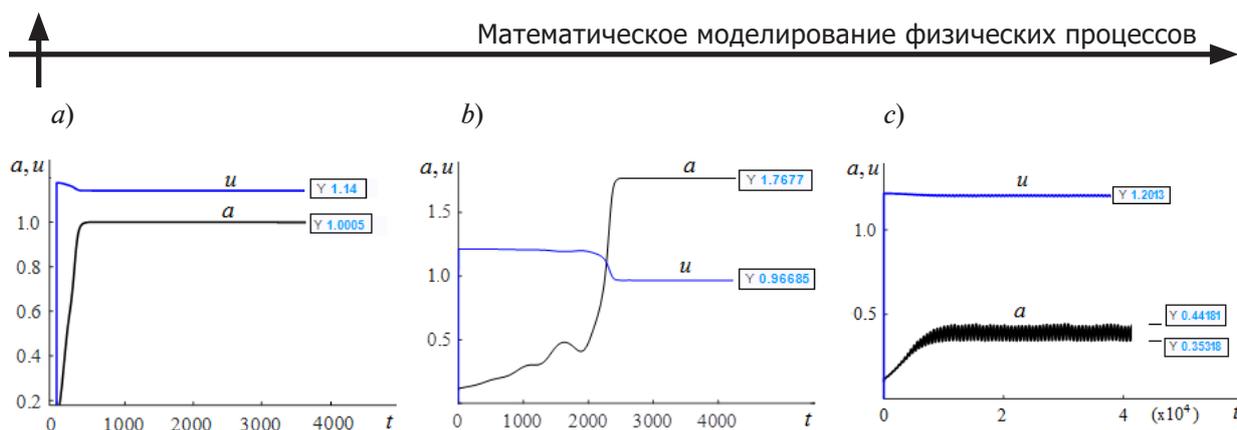


Рис. 3. Зависимости амплитуды a и скорости u от времени при разных значениях исходной моментной характеристики двигателя M_0 и ее крутизны Q :

$a - M_0 = 6,039, Q = 5$; $b - M_0 = 2,580, Q = 2$; $c - M_0 = 2,584, Q = 2$.

Получены при $\gamma_3 = 0, p\tau = \pi, p = 0,981$.

Числа в рамочках (голубой шрифт) указывают стационарные значения величин, выданные программой вычисления

С повышением значения Q характеристика источника энергии становится круче. Величина M определяется на основе третьего соотношения (7), которое позволяет найти и задать значения величин M_0 и Q .

Один из результатов численного решения дифференциальных уравнений (6) представлен на рис. 3. Нами была поставлена цель – выйти на режим $u = 1,14$ и $a = 1$. Решение получено при значениях параметров $\gamma_3 = 0, p\tau = \pi, p = 0,981$. На рис. 3,а видна стабильность амплитуды a колебаний и скорости u источника энергии при довольно крутой характеристике источника (крутизна $Q = 4$ соответствует углу приблизительно 76°). Это означает, что получено очень хорошее соответствие результатам расчетов по уравнению амплитуды в соотношениях (7). Однако для значений $M_0 = 2,580, Q = 2$ (см. рис.3,б), расчетный результат, полученный на основе третьего соотношения (7), для выхода на режим при скорости $u = 1,14$, составляет $u \approx 0,96, a \approx 1,76$, а значит, характеристика источника с такой крутизной не позволяет реализовать амплитуду $a \approx 1$, которая представлена на рис.3,а. Графики решений, полученных при $Q = 2$ и значении $M_0 = 2,584$, почти не отличающемся от $M_0 = 2,580$ (см. рис. 3,с), отражают очень высокую чувствительность системы к значениям параметров. Видно, что устанавливается режим со скоростью $u \approx 1,2$ и амплитудой, колеблющейся в интервале примерно от 0,35 до 0,44, т. е. в среднем амплитуда $a \approx 0,4$.

Заключение

При нелинейном (кубическом) параметрическом возбуждении запаздывание в силе упругости приводит к ряду явлений, которые зависят от величины этого запаздывания. Можно отметить следующие:

- происходит смещение амплитудных кривых в амплитудно-частотной области и изменение величин амплитуд;
- изменяется ширина резонансной области либо в сторону расширения, либо сужения;
- изменяется устойчивость колебаний.

При наличии запаздывания, в системе возникают явления такого же характера, что и при его отсутствии (см., например, работы [3, 18, 20]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифов А. А. Взаимодействия в Природе. Единая теория. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 472 с.
2. Челомей В. Н. (председатель). Вибрации в технике: Справочник. В 6 тт. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. Под ред. И. И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.

3. **Alifov A. A., Frolov K. V.** Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. New York: Taylor & Francis Group, 1990. 352 p.
4. **Шмидт Г.** Параметрические колебания. Пер. с нем. М.: Мир, 1978. 336 с.
5. **Матвеев М. Г., Семенов М. Е.** Устойчивость решений уравнений динамики с гистерезисными нелинейностями // Вестник Воронежской государственной технологической академии. 2005. № 10. С. 155–157.
6. **Красносельский М. А., Покровский А. В.** Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 271 с.
7. **Рубаник В. П.** Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
8. **Золотухин Ю. Н., Котов К. Ю., Мальцев А. С., Нестеров А. А., Филиппов М. Н., Ян А. П.** Коррекция транспортного запаздывания в системе управления мобильным роботом // Автоматика. 2011. Т. 47. № 2. С. 46–57.
9. **Третьякова Т. В., Вильдеман В. Э.** Пространственно-временная неоднородность процессов неупругого деформирования металлов. М.: Физматлит, 2017. 120 с.
10. **Тхан В. З., Берчук Д. Ю.** Системы автоматического управления объектами с запаздыванием: робастность, быстродействие, синтез // Программные продукты и системы. 2017. № 1. С. 45–50.
11. **Цыкунов А. М.** Робастное управление объектом с распределенным запаздыванием и неизвестным порядком математической модели // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. № 4. С. 219–227.
12. **Padhan D. G., Reddy B. R.** A new tuning rule of cascade control scheme for processes with time delay // Proceedings of the 2015 Conference on Power, Control, Communication and Computational Technologies for Sustainable Growth (PCCCTSG). 11–12 December, Kurnool, India, 2015. Pp.102–105.
13. **Otto A., Just W., Radons G.** Nonlinear dynamics of delay systems: an overview // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2019. Vol. 377. No. 2153. P. 20180389.
14. **Алифов А. А.** Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2015. 74 с.
15. **Алифов А. А.** Метод прямой линеаризации нелинейностей смешанного типа // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 47–50.
16. **Алифов А. А.** О расчете колебательных систем с ограниченным возбуждением методами прямой линеаризации // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2017. № 4. С. 92–97.
17. **Алифов А. А.** Колебания при нелинейном параметрическом воздействии и комбинации запаздываний // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 1. С. 47–55.
18. **Конonenko В. О.** Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 236 с.
19. **Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.** Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
20. **Фролов К. В.** Избранные труды. В 2 тт. Т. 1. Вибрация и техника. М.: Наука, 2007. 351 с.
21. **Климов Д. М.** Об одном виде автоколебаний в системе с сухим трением // Известия РАН. Механика твердого тела. 2003. № 3. С. 6–13.
22. **Броновец М. А., Журавлёв В. Ф.** Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 3–11.
23. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

REFERENCES

1. **Alifov A. A.**, Interactions in the Nature. The uniform theory, “Regular & Chaotic Dynamics” Publishing, Moscow, Izhevsk, 2008 (in Russian).
2. **Chelomey V. N.** (Chairman), Vibratsii v tehnike: spravochnik [Vibrations in machinery: Handbook], in 6 Vols., Vol. 2; Edited by Blekhman I. I., Publishing House of Mechanical Engineering, Moscow, 1979 (in Russian).
3. **Alifov A. A., Frolov K. V.**, Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources, Taylor & Francis Group, New York, 1990.
4. **Schmidt G., Schulz R.**, Parametererregte Schwingungen, Deutscher Verlag d. Wiss., VEB, Berlin, 1975.

5. **Matveev M. G., Semenov M. E.**, Stability of dynamics equation with hysteretic non-linear decisions, *Bulletin of the Voronezh State Technological Academy*. (10) (2005) 155–157 (in Russian).
6. **Krasnoselskiĭ M., Pokrovskiĭ A.**, *Systems with hysteresis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1989.
7. **Rubanik V. P.**, *Kolebaniya kvazilineynykh sistem s zapazdyvaniyem* [Oscillations of quasilinear systems having delay], Nauka Publishing, Moscow, 1969 (in Russian).
8. **Zolotukhin Y. N., Kotov K. Y., Maltsev A. S., et al.**, Correction of transportation lag in the mobile robot control system, *Optoelectron. Instrument. Proc.* 47 (2) (2011) 141–150.
9. **Tretyakova T. V., Wildemann V. E.**, *Prostranstvenno-vremennaya neodnorodnost protsessov neuprugogo deformirovaniya metallov* [Spatial-temporal inhomogeneity of the processes of inelastic deformation of metals], Fizmatlit Publishing, Moscow, 2017 (in Russian).
10. **Tkhan V. D., Berchuk D. Yu.**, Time delay automatic control systems: robustness, response time, synthesis, *Software & Systems*. (1) (2017) 45–50 (in Russian).
11. **Tsykunov A. M.**, Robust control of object with distributed delay and unknown order of mathematical model, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 17 (4) (2016) 219–227 (in Russian).
12. **Padhan D. G., Reddy B. R.**, A new tuning rule of cascade control scheme for processes with time delay, *Proc. 2015 Conf. on Power, Control, Communication and Computational Technologies for Sustainable Growth (PCCCTSG)*. 11–12 Dec., 2015, Kurnool, India (2015) 102–105.
13. **Otto A., Just W., Radons G.**, Nonlinear dynamics of delay systems: an overview, *Phil. Trans. R. Soc. A*. 377 (2153) (2019) 20180389.
14. **Alifov A. A.**, *Metody pryamoy linearizatsii dlya rascheta nelineynykh system* [Methods of direct linearization for calculation of nonlinear systems], Research Center “Regular and Chaotic Dynamics”, Moscow, 2015 (in Russian).
15. **Alifov A. A.**, Method of the direct linearization of mixed nonlinearities, *J. Mach. Manuf. Reliab.* 46 (2) (2017) 128–131.
16. **Alifov A. A.**, About calculation of oscillatory systems with limited excitement by methods of direct linearization, *Eng. Autom. Problem*. (4) (2017) 92–97 (in Russian).
17. **Alifov A. A.**, Oscillations under a nonlinear parametric action and combinations of delays, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 17 (1) (2024) 47–55 (in Russian).
18. **Kononenko V. O.**, *Vibrating systems with limited power-supply*, Iliffe, London, 1969.
19. **Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E.**, *Theory of vibration*, Nauka Publishing, Moscow, 1981 (in Russian).
20. **Frolov K. V.**, *Selected works, in 2 Vols., Vol. 1. Vibration and Technique*, Nauka Publishing, Moscow, 2007 (in Russian).
21. **Klimov D. M.**, On one type of self-excited vibrations in a system with dry friction, *Mech. Solids*. 38 (3) (2003) 1–7.
22. **Bronovets M. A., Zhuravlev V. F.**, On self-excited vibrations in friction source measurement systems, *Mech. Solids*. 47 (3) (2012) 261–268.
23. **Bogoliubov N. N., Mitropolsky Y. A.**, *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*, CRC Press, Florida, USA, 1961.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

АЛИФОВ Алишир Али оглы — доктор технических наук, главный научный сотрудник Лаборатории динамических процессов Института машиноведения имени А. А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия.

101000, Россия, г. Москва, Малый Харитоньевский пер., 4

alishir@mail.ru

ORCID: 0000-0003-2327-068X

THE AUTHOR

ALIFOV Alishir Ali

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS

4 Malij Haritonjevskij lane, Moscow, 101000, Russia

alishir@mail.ru

ORCID: 0000-0003-2327-068

*Статья поступила в редакцию 12.04.2024. Одобрена после рецензирования 10.07.2024.
Принята 10.07.2024.*

Received 12.04.2024. Approved after reviewing 10.07.2024. Accepted 10.07.2024.