

Научная статья

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17312>

АЛГОРИТМ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

А. Д. Новокшенов , И. Абдулин, Д. В. Вершинин

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

 novoksh_ad@spbstu.ru

Аннотация. Исследована проблема применения топологической оптимизации к упругим деформируемым телам, находящимся в условиях воздействия связанных электрических и механических полей. Основная задача состояла в оптимизации распределения электрических и механических свойств материала в заданной области с учетом ограничения на итоговый объем конструкции. Сформулирован и реализован алгоритм топологической оптимизации (в виде программного кода на языке Python) для тел, находящихся под действием связанных электрических и механических полей. Алгоритм включал в себя решение связанной задачи электроупругости с помощью метода конечных элементов, анализ производных целевой функции и оптимизацию двойственным методом в рамках метода скользящих асимптот. Алгоритм был опробован в численных экспериментах на задаче оптимизации пьезоэлектрического актуатора, помещенного в однородное либо в линейно-распределенное электрические поля. В итоге получены распределения механических и электрических свойств для различных значений коэффициента жесткости.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, метод конечных элементов, метод скользящих асимптот, пьезоэлектрический актуатор

Финансирование: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00108, <https://rscf.ru/project/22-71-00108/>.

Для цитирования: Новокшенов А. Д., Абдулин И., Вершинин Д. В. Алгоритм топологической оптимизации для связанных задач электроупругости // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 3. С. 134–147. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17312>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17312>

A TOPOLOGY OPTIMIZATION ALGORITHM FOR ELECTROELASTICITY COUPLED PROBLEMS

A. D. Novokshenov , I. Abdulin, D. V. Vershinin

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

 novoksh_ad@spbstu.ru

Abstract. A problem of applying topology optimization to elastic deformable bodies exposed to coupled electric and mechanical fields has been studied. The main goal was to find the optimal distribution of electric and mechanical properties in the given area, taking into account restrictions on the final volume of the structure. A topology optimization algorithm was formulated and implemented (as program code in Python) for bodies under the action of the coupled electric and mechanical fields. The algorithm included solving the coupled electroelasticity problem using the finite element method, analyzing derivatives of the objective function,



and optimizing by the dual procedure within the method of moving asymptotes. The algorithm was tested in numerical experiments on the optimization problem of a piezoelectric actuator exposed to uniform or linearly distributed electric fields. As a result, the distributions of mechanical and electrical properties were obtained for various values of the stiffness coefficient.

Keywords: topology optimization, finite element method, method of moving asymptotes, piezoelectric actuator

Funding: The reported study was funded by Russian Science Foundation (Grant No. 22-71-00108), <https://rscf.ru/project/22-71-00108/>

For citation: Novokshenov A. D., Abdulin I., Vershinin D. V., A topology optimization algorithm for electroelasticity coupled problems, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (3) (2024) 134–147. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17312>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Области структурной и топологической оптимизации (ТО) имеют глубокие корни исторического развития. Так, еще Ж. Л. Лагранжем была решена задача оптимизации веса колонны, к свободному концу которой была приложена сжимающая сила [1]. Одна из первых работ по структурной оптимизации была написана Э. Мичеллом в 1904 г. [2]. С развитием численных методов, в частности метода конечных элементов (МКЭ) в 1960-х гг., началось активное развитие структурной, в том числе топологической, оптимизации [3]. В 1980-е гг. на их основе были разработаны законченные теории, широко представленные в работах М. Бендсоу [4, 5].

В научных публикациях можно найти множество методов для анализа и улучшения производительности пьезоэлектрических структур по критериям размера и геометрии [6 – 9], по критериям структуры и количества слоев [10], оптимизация по субпараметрам [11 – 13]. В ходе развития методов ТО они применялись для различных областей физики [14, 15], включая пьезоэлектричество. При введении корректных целевых функций и новых параметров удалось создать алгоритмы для задач оптимизации пьезоактуаторов [16, 17], датчиков [18] и накопителей энергии [19 – 21]. Также существуют различные модификации этих методов, например, с учетом ограничения по механическим напряжениям [22].

В ранних работах для решения задачи ТО использовался метод гомогенизации [23, 24]. В последующие годы были представлены другие подходы: метод пенализации для твердого изотропного тела (*англ.* Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)) [25], метод двунаправленной эволюционной оптимизации конструкций (*англ.* Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO)) [26] и метод фиксации уровня (*англ.* Level-Set Method (LSM)) [27].

В ходе анализа публикаций выявлено, что существующие алгоритмы топологической оптимизации можно разделить на три класса:

- основанные на критерии оптимальности (эвристические);
- основанные на анализе производных (методы математического программирования);
- генетические алгоритмы топологической оптимизации.

Одним из наиболее универсальных и стабильных методов, используемых авторами при оптимизации конструкций, является метод скользящих асимптот (*англ.* Method of Moving Asymptotes (MMA)) [28], поэтому именно он был выбран нами в качестве основного алгоритма оптимизации.

В настоящей работе на основе анализа публикаций сформулирован и представлен алгоритм решения задачи топологической оптимизации для связанной задачи электроупругости.

Алгоритм основан на методе скользящих асимптот, конечно-элементном решении связанной задачи электроупругости и параметризации свойства материала с помощью модифицированного SIMP-метода. Алгоритм реализован на языке Python и опробован на задаче оптимизации пьезоэлектрического актуатора для случая постоянного электрического поля.

Топологическая оптимизация

Топологическая оптимизация – это математический метод, который позволяет получать оптимальное распределение материала в пределах заданного пространства при заданных конфигурации внешних нагрузок, граничных условий и ограничениях с целью достижения максимальной производительности системы.

Наиболее типичной задачей топологической оптимизации является минимизация податливости конструкции. В математическом отношении она эквивалентна минимизации работы внешних сил [5], т. е.

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} A^{ex}(\mathbf{u}) \quad (1)$$

при заданных ограничениях:

$$\begin{aligned} A^{ex}(\delta \mathbf{u}) &= \delta(\rho_b \psi(\varepsilon(\mathbf{u}))), \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \\ V &\leq \alpha V_0, 0 < \alpha < 1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $A^{ex}(\delta \mathbf{u})$ – работа внешних сил на достигнутых перемещениях; $\psi(\varepsilon(\mathbf{u}))$ – плотность свободной энергии; $\delta \mathbf{u}$ – возможные перемещения; \mathbf{U} – допустимые перемещения; ρ_b – плотность тела; V, V_0 – конечный и начальный объемы конструкции; α – доля конечного материала.

Первое ограничение в формулах (2) – условие равновесия в вариационной форме.

Данную задачу обычно решают с помощью дискретизации области и использования МКЭ. Поэтому необходимо переформулировать задачу для соответствующей конечно-элементной постановки, а именно –

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (3)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(E_e) \mathbf{u} &= \mathbf{f}, E_e \in E_{per}, \\ \mathbf{K}(E_e) &= \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e(E_e), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum_{e=1}^N \rho_e v_e = V = \alpha V_0, 0 < \alpha < 1,$$

где \mathbf{f} – столбец сил; \mathbf{u} – столбец перемещений; \mathbf{K} – матрица жесткости системы; v_e – объем конечного элемента с номером e ; ρ_e, E_e – плотность и модуль Юнга конечного элемента с номером e ; E_{per} – допустимые значения модуля Юнга.

В качестве инструмента для решения данной задачи используется метод скользящих асимптот (ММА).

Алгоритм решения связанной задачи электроупругости (СЗЭУ)

Определяющие уравнения для СЗЭУ. Указанные соотношения для линейной СЗЭУ для пьезоэлектрического материала, без учета температурного эффекта, можно записать в следующей форме [29]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{e}^T \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e} \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (5)$$

где \mathbf{T} – вектор механических напряжений; \mathbf{S} – вектор механических деформаций; \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля; \mathbf{D} – вектор электрического смещения; \mathbf{c}^E – матрица жесткости при постоянной напряженности электрического поля \mathbf{E} ; $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ – матрица

диэлектрической проницаемости при постоянных деформациях \mathbf{S} ; \mathbf{e} – матрица пьезоэлектрических коэффициентов связи; верхний индекс T означает транспонирование.

Напряженность электрического поля \mathbf{E} определяется соотношением

$$\mathbf{E} = - \text{grad}\phi \tag{6}$$

где ϕ – электрический потенциал.

Для представленной в данной работе модели рассматривается пьезоэлектрический материал класса тетрагональных кристаллов [30], обладающий ортотропной анизотропией. Этот класс включает большую часть пьезоэлектрических материалов, в частности хорошо известные материалы, например цирконат-титанат свинца $\text{PbZr}_{1-x}\text{Ti}_x\text{O}_3$ (PZT).

С учетом указанного выше, тензор механической жесткости \mathbf{c}^E , пьезоэлектрическая матрица \mathbf{e}^T и диэлектрическая проницаемость $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ для полного трехмерного случая имеют следующий вид:

$$\mathbf{c}^E = \begin{pmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{pmatrix}, \mathbf{e}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^S = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим пластину, состоящую из пьезоэлектрического материала, распределенного между двумя электродами (рис. 1).

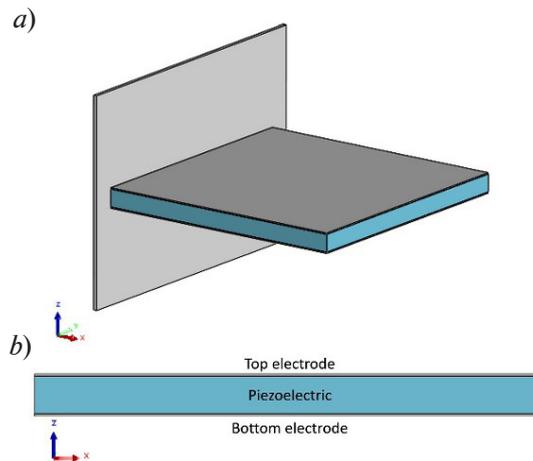


Рис. 1. Изображения пластины из пьезоэлектрического материала (Piezoelectric) с верхним (Top) и нижним (Bottom) электродами (electrode) в изометрическом виде (a) и виде сбоку (b)

Исходя из конфигурации рассматриваемой системы, целесообразно сделать следующие предположения [31]:

- отношение длины или ширины пластины к ее толщине должно быть менее 0,1;
- перемещения и нагрузки в системе могут возникать только в плоскости пластины;
- толщина электродов пренебрежимо мала, по сравнению с толщиной пластины;
- механическая часть рассматриваемой задачи – линейная;
- электроды идеально проводят ток;

вектор пьезоэлектрической поляризации направлен перпендикулярно плоскости пластины (вдоль оси OZ);

значение потенциала φ на нижнем электроде пластины полагается равным нулю;

электрическое поле \mathbf{E} вдоль толщины пластины (в направлении оси OZ) является однородным;

электрический потенциал φ вдоль толщины пластины (в направлении оси OZ) следует линейному закону.

Первые два предположения позволяют использовать постановку для плоской напряженной задачи теории упругости. Предположение о малости толщины электродов позволяет пренебречь их влиянием на жесткость системы. Кроме того, при ориентации оси поляризации пьезоэлектрического материала вдоль направления OZ , его поведение в плоскости оказывается изотропным. Более того, в таком случае единственное воздействие на материал будет оказывать электрическое поле в направлении OZ .

Таким образом, сокращенная (2D) форма пьезоэлектрического определяющего уравнения может быть записана в следующем виде [7]:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & 0 & -e_{31}^* \\ c_{12}^* & c_{12}^* & 0 & -e_{31}^* \\ 0 & 0 & c_{33}^* & 0 \\ c_{31}^* & c_{31}^* & 0 & \varepsilon_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где компоненты матрицы можно выразить через представленные ранее:

$$\begin{aligned} c_{11}^* &= c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, \quad c_{12}^* = c_{12}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, \quad c_{33}^* = c_{66}^E; \\ e_{31}^* &= e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E}, \quad \varepsilon_{33}^* = \varepsilon_{33}^S + \frac{(e_{33})^2}{c_{33}^E}. \end{aligned} \quad (9)$$

Определяющее соотношение (8) используется для последующего конечно-элементного моделирования системы.

Конечно-элементная модель системы. Для конечно-элементного моделирования пьезоэлектрической пластины использовалось разбиение области на плоские прямоугольные линейные элементы с двумя гауссовыми точками интегрирования.

Вектор деформаций элемента может быть представлен как

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}_u \mathbf{U}, \quad (10)$$

где \mathbf{B}_u – матрица частных производных для вычисления вектора деформаций.

Напряженность электрического поля в общем случае является векторной величиной, вычисляемой как градиент электрического потенциала по формуле (6). Однако последние два предположения о характере электрического поля и ориентация пьезоэлектрического материала (см. выше) дают возможность свести рассмотрение напряженности поля к скалярной величине – ее проекции на ось OZ . Тогда величина напряженности электрического поля вычисляется как

$$E = -B_\varphi \varphi, \quad B_\varphi = \frac{1}{h}, \quad (11)$$

где h – толщина пластины.

Далее используем вариационный принцип Гамильтона без учета диссипативных сил в системе; при этом можем записать линейное дифференциальное уравнение для одного элемента в матричной форме [29]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{uu} & \mathbf{k}_{u\varphi} \\ \mathbf{k}_{\varphi u} & -\mathbf{k}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad (12)$$



где \mathbf{m} – матрица инерционных коэффициентов; \mathbf{k}_{uu} – локальная матрица жесткости; \mathbf{f} – вектор внешнего механического воздействия; q – электрический заряд; $\mathbf{k}_{u\varphi}$ – матрица пьезоэлектрической связи.

Матрица $\mathbf{k}_{u\varphi}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{k}_{u\varphi} = h \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_{\varphi} |J| d\xi d\eta, \quad (13)$$

где ξ, η – локальные координаты элемента; J – Якобиан элемента.

В соответствии с алгоритмом МКЭ, локальные матрицы и векторы нагрузок должны быть собраны в глобальные, после чего можем записать уравнение для всей рассматриваемой области:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\Phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Будем рассматривать квазистатическую задачу о нажимном механизме под действием внешнего электрического поля. Такая постановка дает нулевые производные величин по времени. Кроме того, предполагается, что внешний электрический заряд в системе отсутствует ($\mathbf{Q} = 0$). Такая постановка задачи приводит нас к следующей системе уравнений для МКЭ:

$$\mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \Phi = \mathbf{F}. \quad (15)$$

Эта система используется для вычисления поля перемещений под действием внешнего электрического поля. Теперь, после вывода уравнения связанной задачи для МКЭ, мы можем его использовать, чтобы перейти к параметризации этой задачи для топологической оптимизации.

Схема интерполяции пьезоэлектрического материала. В данной работе для интерполяции указанного материала используется расширение схемы SIMP, для которой необходимы следующие зависимости локальных матриц от фиктивной плотности и поляризации [31]:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{uu}(\rho) &= (E_{\min} + \rho^{p_{uu}} (E_0 - E_{\min})) \mathbf{k}_{uu}^0, \\ \mathbf{k}_{u\varphi}(\rho, P) &= (e_{\min} + \rho^{p_{u\varphi}} (e_0 - e_{\min})) (2P - 1)^{p_P} \mathbf{k}_{u\varphi}^0, \end{aligned} \quad (16)$$

где E_0, e_0 – числа, используемые для определения исходных характеристик материала элемента, $E_0 = e_0 = 1$; ρ – фиктивная плотность материала элемента (может принимать значения от 0 до 1); P – переменная поляризации, определяющая направление поляризации пьезоэлектрического материала (принимает значения от 0 до 1); $p_{uu}, p_{u\varphi}, p_P$ – штрафные факторы для жесткости, пьезоэлектрической связи и поляризации, соответственно; E_{\min}, e_{\min} – малые числа для определения минимально возможных значений для жесткости и коэффициента пьезоэлектрической связи.

Наличие малых чисел E_{\min} и e_{\min} необходимо для устранения численных неопределенностей, возникающих при итеративном процессе оптимизации.

Представленная в формуле (16) схема интерполяции известна как PEMP-P (piezoelectric material with penalization and polarization) и была представлена в работе М. Кёгля и Е. Сильвы в 2005 году [25], посвященной оптимизации адаптивных материалов и, в частности, пьезоэлектрических пластин.

Переменные поляризации P отражают поведение материала при наличии электростатического поля: при P от 0 до 0,5 материал под действием поля сжимается, а при P от 0,5 до 1,0 – расширяется.

Постановка задачи для пьезоактуатора. Рассмотрим задачу топологической оптимизации электроактуатора (рис.2). Исходная конструкция представляет собой квадратную пьезоэлектрическую пластину (PE.-С. Plate) (рис. 2, см. также подраздел «Конечно-элементная модель системы»), левый конец которой закреплен по всем степеням свободы. Под действием электрического поля материал расширяется либо сжимается, в зависимости от его поляризации.

Цель проводимой оптимизации – обеспечить максимальное перемещение или нажимное усилие, создаваемое средней точкой правой грани пластины при ограничении объема:

$V = 0,4 V_0$. Серая область (см. рис. 2 слева) показывает исходную область для последующей оптимизации.

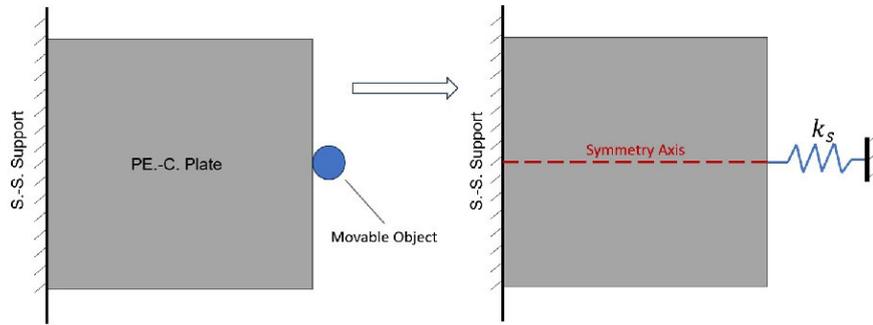


Рис. 2. Схема нажимного механизма к постановке задачи:
 S.-S. Support – консольные закрепления; PE.-C. Plate – пьезоэлектрическая пластина;
 Movable Object – передвигаемый объект; Symmetry Axis – ось симметрии;
 k_s – жесткость пружины

Для моделирования взаимодействия нажимного механизма с перемещаемым объектом (Movable Object) к средней точке правой стороны присоединяется дополнительная пружина с жесткостью k_s :

$$k_s = K_s k_0, \quad (17)$$

где K_s – параметр, характеризующий силу взаимодействия с перемещаемым объектом; k_0 – наибольшее значение в матрице жесткости системы, т. е. $k_0 = \max K_{ij}$.

По изменению параметра K_s можно делать выбор: либо необходимо большее перемещение интересующей точки, либо приоритетным является создаваемое нажимное усилие. Например, при $K_s = 1,0$ $k_s = k_0$ (см. формулу (17)), и таким образом на оптимизированной топологии будет достигаться максимальное нажимное усилие. И наоборот, определяя малые значения для данного параметра, например $K_s = 0,01$, пластина будет оптимизирована соответствующим образом для обеспечения максимально возможного перемещения.

Следуя классическому подходу к решению задач оптимизации для податливых механизмов, изложенному в монографии [5], можем записать формулировку для данной задачи как минимизацию следующей целевой функции:

$$J = -\mathbf{L}^T \mathbf{U}, \quad (18)$$

при ограничениях вида

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_e} \rho_e v_e &= V = \alpha V_0, \quad 0 < \alpha < 1, \\ 0 < \rho_e &\leq 1; \\ 0 < P_e &\leq 1, \end{aligned} \quad (19)$$

где \mathbf{L} – вектор (равен 1 у компоненты, которая соответствует степени свободы перемещений, нас интересующей, и равен 0 у всех других компонент); \mathbf{U} – вектор перемещений; ρ_e , v_e , P_e – плотность, объем и поляризация элемента с номером e .

Вычисление производных целевой функции. При использовании методов, основанных на градиентном спуске, к которым относится и метод скользящих асимптот (он применяется в данной работе), необходимо на каждой итерации процесса вычислять производные целевой функции по переменным оптимизации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \rho_e} &= \frac{\partial}{\partial \rho_e} \left[-\mathbf{L}^T \mathbf{U} + \Lambda^T (\mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\phi} \Phi - \mathbf{F}) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho_e} \left[(-\mathbf{L}^T + \Lambda^T \mathbf{K}_{uu}) \mathbf{U} + \Lambda^T \mathbf{K}_{u\phi} \Phi - \Lambda^T \mathbf{F} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$



Чтобы избежать вычисления производных целевой функции по перемещениям, применяют метод сопряженных векторов (adjoint method), при котором для нахождения значений производных необходимо решить дополнительную сопряженную задачу:

$$-L^T + \Lambda^T \mathbf{K}_{uu} = 0, \quad (21)$$

где Λ^T – глобальный сопряженный вектор, $\Lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{ndof}]^T$.

С помощью Λ^T находят производные целевой функции:

$$\frac{\partial J}{\partial \rho_e} = \lambda_e^T \frac{\partial \mathbf{k}_{uu}}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_e + \lambda_e^T \frac{\partial \mathbf{k}_{u\varphi}}{\partial \rho_e} \varphi_e, \quad (22)$$

где λ_e^T – элементный сопряженный вектор (состоит из компонент λ_i сопряженного вектора Λ^T , принадлежащих элементу с номером e); \mathbf{u}_e – вектор перемещений, который состоит из перемещений узлов элемента с номером e .

Используем аналогичную процедуру и записываем производные целевой функции по поляризациям P_e :

$$\frac{\partial J}{\partial P_e} = \lambda_e^T \frac{\partial \mathbf{k}_{u\varphi}}{\partial P_e} \varphi_e. \quad (23)$$

Производные элементных матриц жесткости и пьезоэлектрической связи вычисляются путем непосредственного дифференцирования выражений (16):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{k}_{uu}}{\partial \rho_e} &= p_{uu} (E_0 - E_{\min}) \rho_e^{(p_{uu}-1)} \mathbf{k}_{uu}^0, \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{u\varphi}}{\partial \rho_e} &= p_{u\varphi} (e_0 - e_{\min}) \rho_e^{(p_{u\varphi}-1)} (2P_e - 1)^{p_p} \mathbf{k}_{u\varphi}^0, \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{u\varphi}}{\partial P_e} &= 2p_p (e_0 - e_{\min}) (2P_e - 1)^{(p_p-1)} \rho_e^{p_{u\varphi}} \mathbf{k}_{u\varphi}^0. \end{aligned} \quad (24)$$

После нахождения выражений для вычисления производных, их можно использовать в ходе решения оптимизационной задачи методом скользящих асимптот.

Программная реализация алгоритма. Построенный алгоритм топологической оптимизации для связанной задачи электроупругости, учитывающий распределение плотности пьезоэлектрического материала, а также его поляризации состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Изменение всех проектных переменных (фиктивных плотностей), для удовлетворения ограничения на объемную долю.

Шаг 2. Конечно-элементный расчет напряженно-деформированного состояния пластины под действием электрического поля.

Шаг 3. Решение сопряженной задачи.

Шаг 4. Вычисление производных целевой функции по переменным проектирования (плотностям и поляризации).

Шаг 5. Построение выпуклой аппроксимации функции, нахождение минимума через двойственную функцию (внутренний цикл метода скользящих асимптот).

Шаг 6. Обновление вектора проектных переменных (найденное решение – следующий шаг точки аппроксимации).

Шаг 7. Проверка на сходимость. При отсутствии сходимости необходим возврат к Шагу 2.

Представленный алгоритм был реализован на языке Python. Был написан конечно-элементный решатель для решения связанной задачи электроупругости, а также модуль вычисления производных. Разработанные модули были интегрированы с алгоритмом метода скользящих асимптот, находящимся в открытом доступе.

Тестирование разработанного алгоритма

Для тестирования алгоритма были рассмотрены два случая с различными распределениями напряженности электрических полей: однородное и линейное вдоль оси OX .

Случай однородного электрического поля. В результате задания на правой и левой границах пластины одинаковых значений потенциала получено однородное распределение поля.

На рис. 3 представлены полученные результаты распределения плотности материала и его поляризации для различных значений параметра K_s как в случае однородного электрического поля, так и в случае поля, линейного вдоль оси OX (см. следующий подраздел).

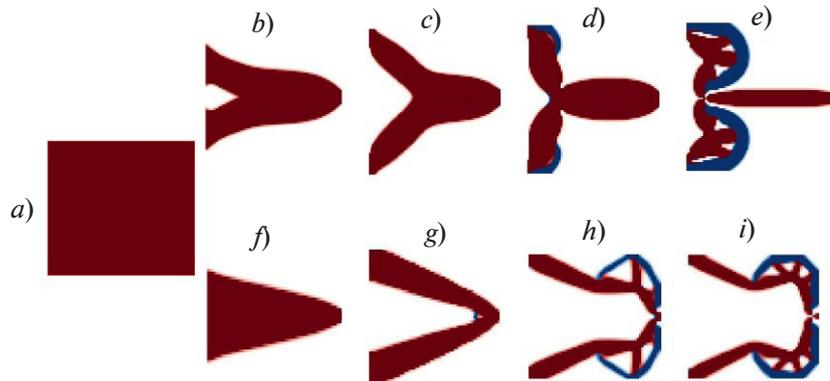


Рис. 3. Оптимизированные распределения плотности материала и его поляризации при различных значениях параметра K_s .

Материал помещен в однородное электрическое поле (homogenous field) ($b - e$) либо в поле, линейное (linear field) вдоль оси OX ($f - i$); a – исходная топология (initial topology); значения K_s : 1,0000 (b, f), 0,1000 (c, g), 0,0125 (d), 0,0150 (h), 0,0050 (e, i).

Расширение материала показано коричневым цветом, сжатие – синим

Таблица

Результаты оптимизации нажимного механизма для пьезоэлектрической пластины, помещенной в электрические поля двух видов (см. рис. 3)

Параметр K_s	Коэффициент усиления перемещений η	
	Однородное поле	Поле, линейное вдоль оси OX
1,0000	0,84	0,78
0,1000	1,04	0,93
0,0125	1,51	–
0,0150	–	1,84
0,0050	2,70	3,08

Примечание. K_s – параметр, характеризующий силу взаимодействия с перемещаемым объектом.

Кроме того, в таблице представлены коэффициенты усиления перемещения η , по сравнению с исходной системой. Видно, что с уменьшением жесткости пружины коэффициент усиления η растет, однако не стоит забывать, что нажимное усилие при этом снижается. При больших значениях параметра K_s оптимальное распределение материала обладает довольно простой односвязной структурой одной поляризации (рис. 3, b, c). При уменьшении этого параметра оптимальными становятся более сложные распределения материала с различными областями расширения и сжатия (рис. 3, d, e), что позволяет сделать конструкцию более гибкой и податливой.

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, представленными в статье [31]; это позволяет сделать вывод о корректности разработанного алгоритма.

Случай электрического поля с линейным распределением по оси OX . С целью решения задачи для условия неоднородного электрического поля, на левой границе пластины было задано нулевое значение потенциала, на правой – ненулевое. В результате расчета было обеспечено электрическое поле, линейно распределенное вдоль оси OX .



На рис. 3, $f-i$ представлены полученные результаты распределения плотности и поляризации для различных значений параметра K_s для случая поля, линейного вдоль оси OX .

Кроме того, в сводной таблице представлены для сравнения коэффициенты усиления перемещения η (также по сравнению с исходной системой).

Приведенное сравнение позволяет утверждать, что для данной постановки задачи результаты оптимизации оказываются весьма схожими с соответствующими результатами для однородного электрического поля. При больших K_s наблюдаются более однородные структуры (рис. 3, f, g), что обеспечивается увеличением силы нажатия. Малые значения параметра K_s приводят к более сложным распределениям материала с областями растяжения и сжатия (рис. 3, h, i), что обеспечивает увеличение коэффициента усиления перемещений η .

Заключение

Проведено исследование возможностей применения топологической оптимизации к телам, находящимся под действием связанных полей. На основе анализа научных публикаций сформулирован и реализован алгоритм в виде программного кода на языке Python для нахождения оптимального распределения механических и электрических свойств материала в постановке максимизации податливости конструкции или нажимного усилия в заданном направлении с ограничением на объем. Разработанный алгоритм включает решение связанной задачи электроупругости с помощью метода конечных элементов, параметризацию электрических и механических свойств материала с помощью модифицированного SIMP-метода, нахождение производных целевой функции по параметрам проектирования, построение выпуклой аппроксимации и решение двойственной задачи оптимизации в рамках метода скользящих асимптот. Алгоритм апробирован на решении задачи оптимизации пьезоэлектрической пластины с однородным электрическим полем. Получены также результаты для случая линейно-распределенного электрического поля. Показано, что при больших значениях коэффициента жесткости пружины наблюдаются более однородные структуры, чем обеспечивается увеличение силы нажатия.

Представленные результаты хорошо согласуются с приведенными в литературе. Результаты для линейно-распределенного электрического поля получены впервые.

Результаты работы могут быть использованы при проектировании различных микро-электромеханических систем элементов, однако для этого необходимо доработать алгоритм с точки зрения учета технологических ограничений. Одним из возможных вариантов в этом случае является добавление в алгоритм фильтра производных, а также фильтра проектных переменных.

Дальнейшую работу планируется направить на внедрение методов машинного обучения для ускорения процесса схождения при решении с помощью метода скользящих асимптот (ММА), а также для безытерационного решения задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров Ю. В. О задаче Лагранжа об оптимальной форме колонны // Доклады Академии наук. 2003. Т. 392. № 5. С. 598–602.
2. Michell A. G. M. The limits of economy of material in frame structures // Philosophical Magazine. 1904. Series 6. Vol. 8. No. 47. November. Pp. 589–597.
3. Prager W., Taylor J. E. Problems of optimal structural design // Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 35. No. 1. Pp. 102–106.
4. Bendsøe M. P., Díaz A. R., Kikuchi N. Topology and generalized layout optimization of elastic structures (Chapter) // Bendsøe M. P., Soares C. A. M. (Eds.) Topology design of structures, NATO ASI Book Series. Vol. 227. Dordrecht (Netherlands): Springer, 1993. Pp. 159–205.
5. Bendsøe M. P., Sigmund O. Topology optimization: Theory, methods, and applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. 370 p.
6. Schlinquer T., Mohand-Ousaid A., Rakotondrabe M. Optimal design of a unimorph piezoelectric cantilever devoted to energy harvesting to supply animal tracking devices // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50. No. 1. Pp. 14600–14605.

7. **Bafumba Liseli J., Agnus J., Lutz P., Rakotondrabe M.** Optimal design of piezoelectric cantilevered actuators for charge-based self-sensing application // *Sensors*. 2019. Vol. 19. No. 11. P. 2582.
8. **Homayouni-Amlashi A., Mohand-Ousaid A., Rakotondrabe M.** Analytical modelling and optimization of a piezoelectric cantilever energy harvester with in-span attachment // *Micromachines*. 2020. Vol. 11. No. 6. P. 591.
9. **Muthalif A. G. A., Nordin N. H. D.** Optimal piezoelectric beam shape for single and broadband vibration energy harvesting: Modeling, simulation and experimental results // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2015. Vol. 54–55. March. Pp. 417–426.
10. **Rabenorosa K., Rakotondrabe M.** Performances analysis of piezoelectric cantilever based energy harvester devoted to mesoscale intra-body robot // *Proceedings of SPIE. Vol. 9494: Next-Generation Robotics II; and Machine Intelligence and Bio-inspired Computation: Theory and Applications*. Baltimore, US, 2016. Pp. 95–107.
11. **Rakotondrabe M.** Combining self-sensing with an unknown input-observer to estimate the displacement, the force and the state in piezoelectric cantilevered actuator // *American Control Conference*. 17–19 June, 2013. Washington, DC, USA. Pp. 4523–4530.
12. **Khadraoui S., Rakotondrabe M., Lutz P.** Optimal design of piezoelectric cantilevered actuators with guaranteed performances by using interval techniques // *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 2014. Vol. 19. No. 5. Pp. 1660–1668.
13. **Rakotondrabe M.** Performances inclusion for stable interval systems // *American Control Conference*. 29 June – 1 July 2011, San Francisco, California, USA. Pp. 4367–4372.
14. **Alexandersen J., Andreasen C. S.** A review of topology optimization for fluid-based problems // *Fluids*. 2020. Vol. 5. No. 1. P. 29.
15. **Deaton J. D., Grandhi R. V.** A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000 // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2014. Vol. 49. No. 1. Pp. 1–38.
16. **Moretti M., Silva E. C.** Topology optimization of piezoelectric bimaterial actuators with velocity feedback control // *Frontiers in Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 14. No. 2. Pp. 190–200.
17. **Goncalves J. F., De Leon D. M., Perondi E. A.** Simultaneous optimization of piezoelectric actuator topology and polarization // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2018. Vol. 58. No. 3. Pp. 1139–1154.
18. **Menuzzi O., Fonseca J. S., Perondi E. A., Goncalves J. F., Padoin E., Silveira O. A.** Piezoelectric sensor location by the observability Gramian maximization using topology optimization // *Computational Applied Mathematics*. 2018. Vol. 37. No. 1. Pp. 237–252.
19. **Homayouni-Amlashi A., Mohand-Ousaid A., Rakotondrabe M.** Topology optimization of 2DOF piezoelectric plate energy harvester under external in-plane force // *Journal of Micro-Bio Robotics*. 2020. Vol. 16. 16 March. Pp. 1–13.
20. **Homayouni-Amlashi A., Mohand-Ousaid A., Rakotondrabe M.** Multidirectional piezoelectric plate energy harvesters designed by topology optimization algorithm // *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2019. Vol. 5. No. 2. Pp. 462–469.
21. **Townsend S., Grigg S., Picelli R., Featherston C., Kim H. A.** Topology optimization of vibrational piezoelectric energy harvesters for structural health monitoring applications // *Journal of Intellectual Material Systems and Structures*. 2019. Vol. 30. No. 18–19. Pp. 2894–2907.
22. **Wein F., Kaltenbacher M., Stingl M.** Topology optimization of a cantilevered piezoelectric energy harvester using stress norm constraints // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2013. Vol. 48. No. 1. Pp. 173–185.
23. **Suzuki K., Kikuchi N.** A homogenization method for shape and topology optimization // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1991. Vol. 93. No. 3. Pp. 291–318.
24. **Bendsøe M. P., Sigmund O.** Optimization of structural topology, shape, and material. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1995. 370 p.
25. **Kögl M., Silva E. C. N.** Topology optimization of smart structures: Design of piezoelectric plate and shell actuators // *Smart Materials and Structures*. 2005. Vol. 14. No. 2. Pp. 387–399.
26. **De Almeida B. V.** Topology optimization of bimorph piezo-electric energy harvesters considering variable electrode location // *Smart Materials and Structures*. 2019. Vol. 28. No. 8. P. 085030.
27. **Chen S., Gonella S., Chen W., Liu W. K.** A level set approach for optimal design of smart energy harvesters // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010. Vol. 199. No. 37–40. Pp. 2532–2543.



28. **Svanberg K.** The method of moving asymptotes – A new method for structural optimization // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987. Vol. 24. No. 2. Pp. 359 – 373.
29. **Lerch R.** Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 1990. Vol. 37. No. 3. Pp. 233–247.
30. **Piefort V.** Finite element modelling of piezoelectric active structures: PhD thesis, Bruxelles, Belgium: Universite Libre de Bruxelles, 2001. 125 p.
31. **Homayouni-Amlashi A., Schlienger T., Mohand-Ousaid A., Rakotondrabe M.** 2D topology optimization MATLAB codes for piezoelectric actuators and energy harvesters // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2020. Vol. 63. No. 2. Pp. 983–1014.

REFERENCES

1. **Egorov Yu. V.**, On the Lagrange problem about the optimal form for circular hollow columns, *Comptes Rendus Mécanique*. 331 (10) (2003) 699–704.
2. **Michell A. G. M.**, The limits of economy of material in frame structures, *Phil. Mag. Ser. 6*. 8 (47) (1904) 589–597.
3. **Prager W., Taylor J. E.**, Problems of optimal structural design, *J. Appl. Mech.* 35 (1) (1968) 102–106.
4. **Bendsøe M. P., Díaz A. R., Kikuchi N.**, Topology and generalized layout optimization of elastic structures, Chapter in book: Bendsøe M. P., Soares C. A. M. (Eds.), *Topology design of structures*, NATO ASI Book Ser. Vol. 227, Springer, Dordrecht (1993) 159–205.
5. **Bendsøe M. P., Sigmund O.**, *Topology optimization: Theory, methods, and applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.
6. **Schlienger T., Mohand-Ousaid A., Rakotondrabe M.**, Optimal design of a unimorph piezoelectric cantilever devoted to energy harvesting to supply animal tracking devices, *IFAC-PapersOnLine*. 50 (1) (2017) 14600–14605.
7. **Bafumba Liseli J., Agnus J., Lutz P., Rakotondrabe M.**, Optimal design of piezoelectric cantilevered actuators for charge-based self-sensing application, *Sensors*. 19 (11) (2019) 2582.
8. **Homayouni-Amlashi A., Mohand-Ousaid A., Rakotondrabe M.**, Analytical modelling and optimization of a piezoelectric cantilever energy harvester with in-span attachment, *Micromachines*. 11 (6) (2020) 591.
9. **Muthalif A. G. A., Nordin N. H. D.**, Optimal piezoelectric beam shape for single and broadband vibration energy harvesting: Modeling, simulation and experimental results, *Mech. Syst. Signal Process.* 54–55 (March) (2015) 417–426.
10. **Rabenorosa K., Rakotondrabe M.**, Performances analysis of piezoelectric cantilever based energy harvester devoted to mesoscale intra-body robot, *Proc. SPIE. Vol. 9494: Next-Generation Robotics II; and Machine Intelligence and Bio-inspired Computation: Theory and Applications*. Baltimore, US, (2016) 95–107.
11. **Rakotondrabe M.**, Combining self-sensing with an unknown input-observer to estimate the displacement, the force and the state in piezoelectric cantilevered actuator, *American Control Conference*. 17–19 June, 2013, Washington, DC, USA. (2013) 4523–4530.
12. **Khadraoui S., Rakotondrabe M., Lutz P.**, Optimal design of piezoelectric cantilevered actuators with guaranteed performances by using interval techniques, *IEEE/ASME Trans. Mechatron.* 19 (5) (2014) 1660–1668.
13. **Rakotondrabe M.**, Performances inclusion for stable interval systems, *American Control Conference*. 29 June – 1 July 2011, San Francisco, California, USA (2011) 4367–4372.
14. **Alexandersen J., Andreasen C. S.**, A review of topology optimization for fluid-based problems, *Fluids*. 5 (1) (2020) 29.
15. **Deaton J. D., Grandhi R. V.**, A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000, *Struct. Multidiscip. Optim.* 49 (1) (2014) 1–38.
16. **Moretti M., Silva E. C.**, Topology optimization of piezoelectric bimaterial actuators with velocity feedback control, *Front. Mech. Eng.* 14 (2) (2019) 190–200.
17. **Goncalves J. F., De Leon D. M., Perondi E. A.**, Simultaneous optimization of piezoelectric actuator topology and polarization, *Struct. Multidiscip. Optim.* 58 (3) (2018) 1139–1154.

18. **Menuzzi O., Fonseca J.S., Perondi E.A., et al.**, Piezoelectric sensor location by the observability gramian maximization using topology optimization. *Comput. Appl. Math.* 37 (1) (2018) 237–252.
19. **Homayouni-Amlashi A., Mohand-Ousaid A., Rakotondrabe M.**, Topology optimization of 2DOF piezoelectric plate energy harvester under external in-plane force, *J. Micro-Bio Robot.* 16 (16 March) (2020) 1–13.
20. **Homayouni-Amlashi A., Mohand-Ousaid A., Rakotondrabe M.**, Multidirectional piezoelectric plate energy harvesters designed by topology optimization algorithm, *IEEE Robotics and Automation Letters.* 5 (2) (2019) 462–469.
21. **Townsend S., Grigg S., Picelli R., et al.**, Topology optimization of vibrational piezoelectric energy harvesters for structural health monitoring applications, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 30 (18–19) (2019) 2894–2907.
22. **Wein F., Kaltenbacher M., Stingl M.**, Topology optimization of a cantilevered piezoelectric energy harvester using stress norm constraints, *Struct. Multidiscipl. Optim.* 48 (1) (2013) 173–185.
23. **Suzuki K., Kikuchi N.**, A homogenization method for shape and topology optimization, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 93 (3) (1991) 291–318.
24. **Bendsøe M. P., Sigmund O.**, Optimization of structural topology, shape, and material, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
25. **Kögl M., Silva E. C. N.**, Topology optimization of smart structures: Design of piezoelectric plate and shell actuators, *Smart Mater. Struct.* 14 (2) (2005) 387–399.
26. **De Almeida B. V.**, Topology optimization of bimorph piezo-electric energy harvesters considering variable electrode location, *Smart. Mater. Struct.* 28 (8) (2019) 085030.
27. **Chen S., Gonella S., Chen W., Liu W. K.**, A level set approach for optimal design of smart energy harvesters, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 199 (37–40) (2010) 2532–2543.
28. **Svanberg K.**, The method of moving asymptotes – A new method for structural optimization, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 24 (2) (1987) 359–373.
29. **Lerch R.**, Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 37 (3) (1990) 233–247.
30. **Piefort V.**, Finite element modelling of piezoelectric active structures: PhD thesis, Bruxelles, Belgium: Universite Libre de Bruxelles, 2001, 125 p.
31. **Homayouni-Amlashi A., Schlinquer T., Mohand-Ousaid A., Rakotondrabe M.**, 2D topology optimization MATLAB codes for piezoelectric actuators and energy harvesters, *Struct. Multidiscipl. Optim.* 63 (2) (2020) 983–1014.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

НОВОКШЕНОВ Алексей Дмитриевич – кандидат технических наук, доцент Высшей школы механики и процессов управления, старший научный сотрудник Центра компьютерного инжиниринга Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 novoksh_ad@spbstu.ru
 ORCID: 0000-0001-5874-5994

АБДУЛИН Илья – инженер отдела кросс-отраслевых технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 abdulini.2001@gmail.com
 ORCID: 0009-0008-6553-4077

ВЕРШИНИН Денис Вячеславович – инженер отдела кросс-отраслевых технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 vershinindv42@gmail.com
 ORCID: 0009-0004-9552-3433

**THE AUTHORS****NOVOKSHENOV Aleksei D.**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
novoksh_ad@spbstu.ru
ORCID: 0000-0001-5874-5994

ABDULIN Илья

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
abdulin.i.2001@gmail.com
ORCID: 0009-0008-6553-4077

VERSHININ Denis V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
vershinindv42@gmail.com
ORCID: 0009-0004-9552-3433

*Статья поступила в редакцию 08.04.2024. Одобрена после рецензирования 23.04.2024.
Принята 23.04.2024.*

Received 08.04.2024. Approved after reviewing 23.04.2024. Accepted 23.04.2024.