

Научная статья

УДК 532.5.032

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17311>

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТОКСА ДЛЯ ПЛОСКОГО КОНТУРА

Е. Н. Афанасов<sup>1</sup> ✉, С. Г. Кадыров<sup>2</sup>, В. Н. Сорокин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ООО «Эволюция морских цифровых технологий», Санкт-Петербург, Россия;

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,  
Санкт-Петербург, Россия

✉ [zhenya.afanasov@yandex.ru](mailto:zhenya.afanasov@yandex.ru)

**Аннотация.** В работе излагаются асимптотические методы решения задачи о малых гармонических колебаниях плоского контура, погруженного в несжимаемую вязкую жидкость. В случае больших значений безразмерного параметра вязкости получены асимптотические формулы вплоть до третьего порядка. В случае малых значений этого параметра вязкости построен главный член асимптотики гидродинамической силы на произвольном гладком контуре и доказано, что его вид не зависит от формы контура. Полученные результаты подтверждены примером задачи о колебаниях эллиптического цилиндра.

**Ключевые слова:** задача Стокса, вязкая несжимаемая жидкость, колебания твердого тела, эллиптический цилиндр

**Для цитирования:** Афанасов Е. Н., Кадыров С. Г., Сорокин В. Н. Асимптотические методы решения задачи Стокса для плоского контура // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 3. С. 118–133. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17311>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17311>

## ASYMPTOTIC METHODS FOR SOLVING THE STOKES PROBLEM FOR A FLAT CONTOUR

E. N. Afanasov<sup>1</sup> ✉, S. G. Kadyrov<sup>2</sup>, V. N. Sorokin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LLC "Evolution Marine Digital", St. Petersburg, Russia;

<sup>2</sup> State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia

✉ [zhenya.afanasov@yandex.ru](mailto:zhenya.afanasov@yandex.ru)

**Abstract.** The paper presents asymptotic methods for solving the problem of small harmonic oscillations of a flat contour immersed in an incompressible viscous liquid. In the case of large values of the dimensionless viscosity parameter, asymptotic approximations up to the third order have been obtained. In the case of small values of this viscosity parameter, the main term of the asymptotic of the hydrodynamic force on an arbitrary smooth contour was constructed and its form was proved not to depend on the shape of the contour. The results obtained were confirmed by an example of the problem of oscillations of an elliptical cylinder.

**Keywords:** Stokes problem, viscous incompressible fluid, solid body vibrations, elliptical cylinder



**For citation:** Afanasov E. N., Kadyrov S. G., Sorokin V. N., Asymptotic methods for solving the Stokes problem for a flat contour, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (3) (2024) 118–133. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17311>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

## Введение

Теоретическая модель консольной балки произвольного поперечного сечения (рис. 1), которая возбуждается произвольной движущей силой и погружена в вязкую жидкость, является основной при создании и проектировании приборов в нанотехнологиях и в технике измерений вязкости. Жидкость, как правило, предполагается несжимаемой, длина балки значительно превышает ее другие размеры. Формулировка для поперечного сечения общего вида приводит к понятию гидродинамической функции [1 – 3], которая описывает гидродинамическую нагрузку и учитывает геометрию поперечного сечения балки. В зависимости от поперечного сечения балки эта гидродинамическая функция должна быть рассчитана численно или (что желательнее) аналитически.

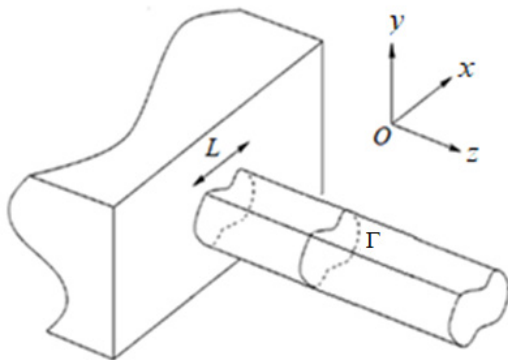


Рис. 1. Схематическое изображение консольной балки произвольного поперечного сечения:  $\Gamma$  – контур,  $L$  – его характерный размер

Для записи уравнений движения в безразмерном виде введем характерный размер контура  $L$ , характерную скорость  $\omega L$  и характерное давление  $\rho\omega^2 L^2$ . Линеаризованные уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости при сделанных выше предположениях имеют следующий вид [9]:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v} - \beta \nabla p + i\beta \mathbf{v} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  – вектор скорости жидкости;  $p$  – давление;  $\beta$  – безразмерный параметр,  $\beta = \frac{\omega L^2}{\nu}$ .

В приложениях параметр  $\beta$  может изменяться в чрезвычайно широком диапазоне: от  $10^{-3}$  [1, 10, 11] до  $10^5$  [12]. В дальнейшем, для удобства записи, безразмерная амплитуда скорости  $u_0$  принята равной 1.

Сформулируем граничные условия задачи.

На линии контура  $\Gamma$  условия «прилипания» имеют следующий вид:

$$v_n|_{\Gamma} = u_n, \quad v_{\tau}|_{\Gamma} = u_{\tau}, \quad (2)$$

где  $v_n, v_\tau$  – нормальная и касательная составляющие вектора скорости жидкости,  $u_n, u_\tau$  – (заданные) составляющие вектора скорости точек контура  $\Gamma$ .

Кроме того, возмущения поля скоростей, вызванные колебаниями, затухают при удалении от  $\Gamma$ :

$$\mathbf{v} \rightarrow 0, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Если использовать представление компонент вектора скорости через две скалярные функции (называемые далее потенциалами для краткости [13]), а именно –

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

то можно записать систему уравнений (1) и граничные условия (2), (3) в виде

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \Delta\psi + i\beta\psi = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$p = i\varphi.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{\partial\psi}{\partial \tau} = u_n, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial \tau} - \frac{\partial\psi}{\partial n} = u_\tau, \\ \varphi, \psi \rightarrow 0, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Как показано в статье [14], гидродинамическая сила  $\mathbf{R}$ , действующая на плоский контур с нормалью  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ , совершающий малые гармонические колебания, определяется через потенциалы формулой

$$\mathbf{R} = i\rho\omega \int_{\Gamma} [-\varphi\mathbf{n} - \psi(\mathbf{n} \times \mathbf{k})] dl, \quad (6)$$

где  $l$  – длина контура  $\Gamma$ ;  $\mathbf{k}$  – единичный вектор,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

Задачу, описываемую системой уравнений (4) и граничными условиями (5), будем называть задачей Стокса. Соотношения (4), (5) описывают любой вид плоского движения контура. В примерах, которые рассматриваются далее в этой статье, колебания происходят в направлении, параллельном оси  $Ox$ .

Для каждого уравнения системы (4) можно, учитывая граничные условия (5), сформулировать соответствующее граничное интегральное уравнение и, тем самым построить систему двух граничных интегральных уравнений [14]:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(M_0) - \int_{\Gamma} \varphi(M)\varphi_n^*(M, M_0) dl = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial\psi(M)}{\partial \tau} - u_n(M) \right] \varphi^*(M, M_0) dl, \\ \frac{1}{2}\psi(M_0) - \int_{\Gamma} \psi(M)\psi_n^*(M, M_0) dl = \int_{\Gamma} \left[ u_\tau(M) - \frac{\partial\varphi(M)}{\partial \tau} \right] \psi^*(M, M_0) dl. \end{cases} \quad (7)$$

где  $\varphi^*(M, M_0), \psi^*(M, M_0)$  – функции Грина для уравнений системы (4);  $\varphi_n^*(M, M_0), \psi_n^*(M, M_0)$  – их производные в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}$  в точке интегрирования;  $H_0^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка;  $r(M, M_0)$  – расстояние между точками интегрирования  $M$  и наблюдения  $M_0$ , лежащими на контуре;

$$\varphi^*(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(M, M_0)}, \psi^*(M, M_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} [r(M, M_0) \sqrt{i\beta}],$$

$$\varphi_n^*(M, M_0) = \frac{\partial\varphi^*(M, M_0)}{\partial n}, \psi_n^*(M, M_0) = \frac{\partial\psi^*(M, M_0)}{\partial n}.$$

### Асимптотика задачи Стокса для кругового контура

Точное решение задачи о колебаниях кругового цилиндра в вязкой несжимаемой покоящейся жидкости вдоль оси  $Ox$ , а также формула для расчета гидродинамического сопротивления цилиндра получены Дж. Стоксом [4].

Приведем асимптотические формулы, полученные с помощью метода потенциалов в статье [15]. В полярных координатах  $r, \theta$  при  $\beta \rightarrow \infty$  они имеют вид

$$\begin{cases} \varphi(1, \theta) \underset{\beta \rightarrow \infty}{\sim} \varphi_{\infty}(1, \theta) + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \varphi_{\infty}(1, \theta) = \left(-1 + \frac{2}{i\sqrt{i\beta}} + \frac{1}{i\beta} - \frac{1}{4\beta\sqrt{i\beta}}\right) \cos \theta, \\ \psi(1, \theta) \underset{\beta \rightarrow \infty}{\sim} \psi_{\infty}(1, \theta) + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \psi_{\infty}(1, \theta) = \left(\frac{2}{i\sqrt{i\beta}} + \frac{1}{i\beta} - \frac{1}{4\beta\sqrt{i\beta}}\right) \sin \theta; \end{cases} \quad (8)$$

при  $\beta \rightarrow 0$  и конечном  $r$  –

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{(i\sqrt{i\beta})^2 \left[ \ln(i\sqrt{i\beta})^2 + 2\gamma - 2\ln 2 \right]} \tilde{\varphi}(r, \theta) + O(\beta), \\ \psi(r, \theta) \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{(i\sqrt{i\beta})^2 \left[ \ln(i\sqrt{i\beta})^2 + 2\gamma - 2\ln 2 \right]} \tilde{\psi}(r, \theta) + r \sin \theta + O(\beta), \\ \tilde{\varphi}(r, \theta) = \frac{4}{r} \cos \theta, \quad \tilde{\psi}(r, \theta) = \frac{4}{r} \sin \theta. \end{cases} \quad (9)$$

и, согласно формуле (6), получаем следующие выражения для  $R(\beta)$  :

$$\begin{cases} R(\beta) \underset{\beta \rightarrow \infty}{\sim} R_{\infty}(\beta), \quad R_{\infty}(\beta) = i\pi \left( 1 - \frac{4}{i\sqrt{i\beta}} - \frac{2}{i\beta} + \frac{1}{2\beta\sqrt{i\beta}} \right), \\ R(\beta) \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} R_0(\beta), \quad R_0(\beta) = -\frac{8i\pi}{(i\sqrt{i\beta})^2 \left[ \ln(i\sqrt{i\beta})^2 + 2\gamma - 2\ln 2 \right]}. \end{cases} \quad (10)$$

Точное же выражение для  $R(\beta)$  приведено в работах [4, 5, 8].

На рис. 2 показаны результаты расчета модуля относительных погрешностей

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{|R_0(\beta)| - |R(\beta)|}{|R(\beta)|} \right|, \quad \varepsilon_2 = \left| \frac{|R_{\infty}(\beta)| - |R(\beta)|}{|R(\beta)|} \right|$$

(в процентах) по формулам (8), (9).

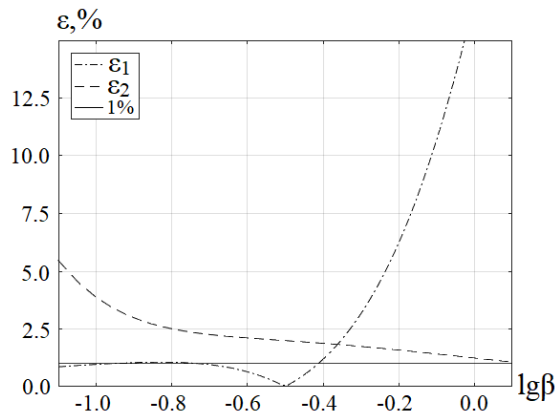


Рис. 2. Результаты расчета модуля относительных погрешностей по формулам (8), (9). Сплошной линией показан уровень погрешности, равный 1% (для сравнения)

Для наглядности на рис. 2 сплошной линией показан уровень погрешности, равный 1%. Видно, что вне диапазона  $\lg\beta \in (-0,8, 0,0)$ , т. е. при  $\beta \notin (0,16, 1,00)$ , вычисления гидродинамической силы на контуре цилиндра можно производить с ошибкой, не превышающей 1 %, если использовать соответствующую асимптотику.

### Асимптотическое решение задачи Стокса при больших значениях $\beta$

Классические формулы, полученные Дж. Стоксом, наводят на мысль выполнять асимптотическое разложение искомых потенциалов в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{i\sqrt{i\beta}}$ :

$$\varphi(M_0) \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \varphi^{(k)}(M_0), \quad \psi(M_0) \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \psi^{(k)}(M_0). \quad (11)$$

Введем локальную декартову систему координат  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  с началом в точке наблюдения  $M_0$  и осью  $M_0\tilde{x}$ , направленной по касательной к контуру  $\Gamma$  (рис. 3).

Уравнение кривой в локальной системе координат имеет вид  $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x})$ , причем  $\tilde{y}(0) = \left. \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=0} = 0$ .

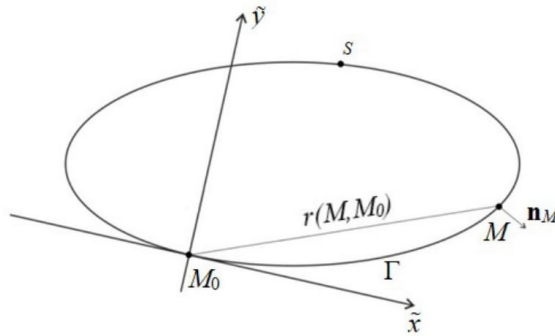


Рис. 3. Введенная локальная система декартовых координат:  
 $\Gamma$  – контур;  $M_0$  – точка наблюдения;  $s$  – длина дуги, отсчитываемая от точки наблюдения  $M_0$  против часовой стрелки

Контур  $\Gamma$  зададим с помощью естественной параметризации  $\tilde{x} = \tilde{x}(s)$ ,  $\tilde{y} = \tilde{y}(s)$ , где  $s \in [0, L]$  – длина дуги, отсчитываемая от точки наблюдения  $M_0$  против часовой стрелки.

Для представления интегралов, содержащих функцию  $\psi^*$  и ее производные в системе уравнений (7), в форме, удобной для получения асимптотик, используем интегральные представления функций Ханкеля [16]:

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{i\beta}r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{\lambda r \operatorname{ch} t} dt, \quad \frac{i}{4} H_1^{(1)}(\sqrt{i\beta}r) = \frac{i\lambda r}{2\pi} \int_0^\infty e^{\lambda r \operatorname{ch} t} sh^2 t dt. \quad (12)$$

Запишем интегралы, входящие в уравнения (12), в следующем виде:

$$I(\lambda) = \int_0^L f(s) e^{\lambda S(s)} ds = I_1(\lambda) + I_2(\lambda) = \int_0^{s_0} f(s) e^{\lambda S(s)} ds + \int_{s_0}^L f(s) e^{\lambda S(s)} ds,$$

где  $s_0$  – произвольная фиксированная внутренняя точка промежутка изменения параметра  $s$ :  $s_0 \in [0, L]$ .

Согласно сведениям в монографии [17], справедливы следующие выражения:

$$I_1(\lambda) \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{\sim} \left( \frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2} + \frac{c_2}{\lambda^3} + \dots \right) e^{\lambda S(s)} \Big|_{s=0+0}, c_k = \left[ -D^k \frac{f(s)}{S'(s)} \right] \Big|_{s=0+0},$$

$$I_2(\lambda) \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{\sim} - \left( \frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2} + \frac{c_2}{\lambda^3} + \dots \right) e^{\lambda S(s)} \Big|_{s=L-0}, c_k = \left[ -D^k \frac{f(s)}{S'(s)} \right] \Big|_{s=L-0}, \quad (13)$$

$$D = -\frac{1}{S'(s)} \frac{d}{ds}.$$

Для вычисления коэффициентов  $c_k$  можно использовать односторонние разложения в ряд Тейлора, известные из курса дифференциальной геометрии [18]:

$$\tilde{x}(s) = \pm s \mp \frac{\kappa^2 s^3}{6} + \dots, \tilde{y}(s) = \frac{\kappa s^2}{2} \pm \kappa'(s) \frac{s^3}{6} + \dots, r = \pm s \mp \frac{\kappa^2 s^3}{24} + \dots \quad (14)$$

В этих формулах  $\kappa$  – кривизна кривой в точке  $M_0$ ,  $\kappa = -|\mathbf{r}''(s)|$ ; комбинация знаков плюс-минус соответствуют тейлоровским разложениям справа в точке  $s = 0$  и слева в точке  $s = L$ .

Если использовать приведенные выше формулы и выполнить несложные (но трудоемкие) вычисления, то можно убедиться, что для любой функции  $f(s)$ , заданной на контуре, выполняются следующие соотношения:

$$\int_{\Gamma} f(s) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{i\beta}r) ds \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2\lambda} f(s) - \frac{1}{4\lambda^3} \left[ \frac{\partial^2 f(s)}{\partial s^2} + \frac{1}{4} f(s) \kappa^2 \right], \quad (15)$$

$$\int_{\Gamma} f(s) \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(\sqrt{i\beta}r) ds \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\kappa}{4\lambda} f(s). \quad (16)$$

Теперь остается, используя эти соотношения и подставляя асимптотические ряды (11) в правые и левые части уравнений (7), приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\frac{1}{\lambda}$  и получить окончательно следующие группы уравнений и соотношений:

граничных интегральных уравнений для  $\varphi^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) – приближений потенциала  $\varphi$  –

$$\frac{1}{2} \varphi^{(0)}(M_0) - \int_{\Gamma} \varphi^{(0)}(M) \varphi_n^*(M, M_0) dl = - \int_{\Gamma} u_n(M) \varphi^*(M, M_0) dl, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \varphi^{(k)}(M_0) - \int_{\Gamma} \varphi^{(k)}(M) \varphi_n^*(M, M_0) dl = \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi^{(k)}(M)}{\partial s} \varphi^*(M, M_0) dl, \quad k = 1, 2, 3; \quad (18)$$

соотношений в точках контура для  $\psi^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – приближений потенциала  $\psi$  (далее для простоты записи указание на точку  $M_0$  опускается) –

$$\psi^{(1)} = -u_{\tau} + \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial s}, \quad (19)$$

$$\psi^{(2)} = \frac{\kappa \psi^{(1)}}{2} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial s}, \quad (20)$$

$$\psi^{(3)} = \frac{\kappa \psi^{(2)}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial s^2} + \frac{\kappa^2}{8} \psi^{(1)} + \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial s}. \quad (21)$$

Соотношения для  $k = 0, 1$  соответствуют известной (линейной) формуле Морисона [19, 20]; для  $k = 2$  были получены и доказаны в статье [21]; что же касается соотношений для  $k = 3$ , то они получены впервые.

Важно отметить, что граничные интегральные уравнения (17), (18) абсолютно эквивалентны краевым задачам Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi^{(0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial n} \right|_{\Gamma} = u_n \quad (22)$$

$$\Delta\varphi^{(k)} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial n} \right|_{\Gamma} = -\left. \frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial s} \right|_{\Gamma}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (23)$$

**Асимптотика задачи Стокса для кругового контура (пример).** Последовательно производя вычисления по формулам (22), (23) для потенциала  $\varphi$  и (19) – (21) для потенциала  $\psi$ , имеем:

$$\begin{cases} \Delta\varphi^{(0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \cos\theta, \quad \varphi^{(0)}(r, \theta) = -\frac{1}{r}\cos\theta; \\ \psi^{(1)}(1, \theta) = 2\sin\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi^{(1)} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=1} = -2\cos\theta, \quad \varphi^{(1)}(r, \theta) = \frac{2}{r}\cos\theta; \\ \psi^{(2)}(1, \theta) = -\sin\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi^{(2)} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=1} = \cos\theta, \quad \varphi^{(2)}(r, \theta) = -\frac{1}{r}\cos\theta; \\ \psi^{(3)}(1, \theta) = -\frac{1}{4}\sin\theta. \end{cases}$$

$$\Delta\varphi^{(3)} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi^{(3)}}{\partial r} \right|_{r=1} = -\frac{1}{4}\cos\theta, \quad \varphi^{(3)}(r, \theta) = -\frac{1}{4r}\cos\theta.$$

Полученные результаты при  $r = 1$  совпадают с формулами (8).

**О задаче Неймана для потенциалов  $\varphi^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ).** В некоторых случаях, возможно, решения уравнений (22), (23) удастся найти методом Фурье [21], но можно использовать и численные методы. Однако такие решения можно получить с помощью конформного преобразования.

Единственное решение задачи Неймана, т. е.

$$\Delta\varphi^{(k)} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial r} \right|_{r=R} = \Phi(\eta), \quad (24)$$

для внешности круга  $r = R$  дается формулой Дини [22]:

$$\varphi^{(k)}(\eta) = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(t) \ln \left| \sin \frac{\eta-t}{2} \right| dt, \quad (25)$$

где  $\eta, t$  – угловые координаты точки наблюдения и точек интегрирования.

Отобразим конформным преобразованием  $z = z(\zeta)$  – внешность круга радиуса  $R$  на внешность контура  $\Gamma$ .

Пусть контур  $\Gamma$ , определяемый параметрическим образом, а именно –

$$z(\eta) = x(\eta) + iy(\eta),$$

соответствует окружности  $\zeta = Re^{i\eta}$ .

Существует единственное конформное отображение, для которого точке  $\zeta = R$  на окружности соответствует точка  $z = 1$  на контуре  $\Gamma$  и при этом луч  $\text{Re}\zeta \geq R, \text{Im}\zeta = 0$  на плоскости  $\zeta$  перейдет в луч  $\text{Re}z \geq 1, \text{Im}z = 0$  на плоскости  $z$ . Тогда решение задачи Неймана в точках этого контура можно найти с помощью следующей формулы [22]:



$$\varphi^{(k)}(\eta)\Big|_{\Gamma} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} \Big|_{\zeta=R e^{it}} \left| z'(\zeta) \right|_{\zeta=R e^{it}} \ln \left| \sin \frac{\eta-t}{2} \right| dt. \quad (26)$$

Но поскольку

$$\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} \Big|_{\zeta=R e^{it}} = \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} \Big|_{\Gamma} \frac{1}{\left| z'(\zeta) \right|_{\zeta=R e^{it}}},$$

окончательно имеем:

$$\varphi^{(k)}(\eta)\Big|_{\Gamma} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} \Big|_{\Gamma} \ln \left| \sin \frac{\eta-t}{2} \right| dt. \quad (27)$$

Это и есть формула, восстанавливающая значения  $\varphi^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) на контуре  $\Gamma$  по известным значениям  $\psi^{(k)}\Big|_{\Gamma}$ .

Как известно, конформное отображение сохраняет углы между кривыми, поэтому косинусы углов между нормальными к контуру  $\Gamma$  и осями координат (на плоскости  $z$ ) и косинусы углов между нормальными к окружности и осями координат (на плоскости  $\zeta$ ) совпадают в соответствующих друг другу точках.

Докажем, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi^{(k)}(\eta) \begin{Bmatrix} \cos m\eta \\ \sin m\eta \end{Bmatrix} d\eta = \pm \int_0^{2\pi} \psi^{(k)}(\eta) \begin{Bmatrix} \sin m\eta \\ \cos m\eta \end{Bmatrix} d\eta, \quad m = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Действительно, из формул (27) следует, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi^{(k)}(\eta) \begin{Bmatrix} \cos m\eta \\ \sin m\eta \end{Bmatrix} d\eta = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} dt \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos m\eta \\ \sin m\eta \end{Bmatrix} \ln \left| \sin \frac{\eta-t}{2} \right| dt, \quad m = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Но поскольку справедливо равенство (см. формулы в книге [23]):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos m\eta \\ \sin m\eta \end{Bmatrix} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\eta-t}{2} \right| dt = -\frac{1}{m} \begin{Bmatrix} \cos m\eta \\ \sin m\eta \end{Bmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (30)$$

то, интегрируя уравнение (29) по частям, получаем искомое равенство (28). Доказательство получено.

Таким образом, ряды Фурье для функций  $\varphi^{(k)}$ ,  $\psi^{(k)}$  являются гармоническими сопряженными друг другу вне контура [24].

В частности, при  $m = 1$ ,  $\cos \eta = n_x$ ,  $\sin \eta = n_y$ , из равенства (28) следует свойство потенциалов  $\varphi^{(k)}$ ,  $\psi^{(k)}$ , полезное при вычислении силы:

$$\int_{\Gamma} \varphi^{(k)} n_x dl = \int_{\Gamma} \psi^{(k)} n_y dl. \quad (31)$$

Вследствие этой формулы, при вычислении силы достаточно найти функции  $\varphi^{(k)}$  и затем получить информацию о функции  $\psi^{(k)}$  в точках контура с помощью локальных формул (19) – (21).

### Асимптотическое решение задачи Стокса при «малых» значениях $\beta$

Формулы (9) для решения задачи о колебаниях цилиндра при малых значениях  $\beta$  подсказывают структуру асимптотики подобных решений для произвольного контура.

Из них следует, что при  $\beta \rightarrow 0$  потенциалы  $\varphi$ ,  $\psi$  представляют собой сумму гармонических во внешности круга функций, пропорциональных  $(\lambda^2 \ln \lambda^2)^{-1}$  и слагаемых вида  $0$ ,  $y = r \cdot \sin \theta$ , которые описывают однородный поток колеблющейся жидкости.

Пусть функции  $\Phi(x, y)$ ,  $\Psi(x, y)$  представляют собой потенциал и функцию тока, однородного во всей плоскости колебательного потока идеальной несжимаемой жидкости. Комплексный потенциал такого потока следует выражению [25]:



$$W(x, y) = \Phi(x, y) - i\Psi(x, y).$$

Введем потенциалы

$$\varphi = \varphi' + \Phi, \quad \psi = \psi' + \Psi$$

(штрихи далее опускаются).

Теперь система дифференциальных уравнений (4) имеет вид

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \Delta\psi + i\beta\psi = -i\beta\Psi. \end{cases} \quad (32)$$

Уравнение для функции  $\psi$  не является однородным, хотя краевые условия для системы (32) выражаются как

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma} = - \left. \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \right|_{\Gamma}, \\ \left. \frac{\partial\psi}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \right|_{\Gamma}. \end{cases} \quad (33)$$

они однородны, условия затухания на бесконечности следующие:

$$\varphi + \Phi \rightarrow 0, \quad \psi + \Psi \rightarrow 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty.$$

Пусть  $\Omega_R$  – часть плоскости  $z = x + iy$  с внутренней границей  $\Gamma$  и произвольной по форме внешней границей  $\gamma_R$ , имеющей диаметр  $2R$ . Применяя вторую формулу Грина [22] к паре функций  $\psi, \psi^*$  в ограниченной области  $\Omega_R$  и размещая точку наблюдения на контуре  $\Gamma$ , построим интегральное уравнение для потенциала  $\psi$ :

$$\frac{1}{2}\psi - \int_{\Gamma} \psi \psi_n^* dl = - \int_{\Gamma} \psi^* \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} dl + \int_{\gamma_R} \left( \psi \psi_n^* - \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) dl + i\beta \iint_{\Omega_R} \psi^* (\psi + \Psi) dx dy. \quad (34)$$

При выводе этого уравнения использовано второе из граничных условий (33), аргументы всех функций опущены для краткости записи.

Будем искать асимптотическое представление потенциалов  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$  при  $\beta \rightarrow 0$  в виде

$$\varphi = \frac{1}{\lambda^2 \ln \lambda^2} \tilde{\varphi}(x, y), \quad \psi = \frac{1}{\lambda^2 \ln \lambda^2} \tilde{\psi}(x, y), \quad (35)$$

где  $\tilde{\varphi}(x, y), \tilde{\psi}(x, y)$  – неизвестные вещественные гладкие функции, ограниченные в области  $\Omega_R$ , которые подлежат определению.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \psi^*(M_0, M) &\underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{4\pi} \ln \lambda^2 + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(M_0, M)} = -\frac{1}{4\pi} \ln \lambda^2 + \varphi^*(M_0, M), \\ \psi_n^*(M_0, M) &\underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} \varphi_n^*(M_0, M). \end{aligned} \quad (36)$$

при конечных  $r(M_0, M)$ .

Подставим соотношения (35), (36) в интегральное уравнение (34), умножим его на  $\lambda^2 \ln \lambda^2$  и перейдем к пределу при  $\beta \rightarrow 0$ . Тогда при конечном  $R$  получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \tilde{\psi} \psi_n^* dl &\underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} \int_{\Gamma} \tilde{\psi} \varphi_n^* dl, \\ \int_{\Gamma} \psi^* \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tau} dl &= \int_{\Gamma} \left( -\frac{1}{4\pi} \ln \lambda^2 + \varphi^* \right) \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tau} dl = -\frac{1}{4\pi} \ln \lambda^2 \int_{\Gamma} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tau} dl + \int_{\Gamma} \varphi^* \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tau} dl = \int_{\Gamma} \varphi^* \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tau} dl, \\ i\beta \iint_{\Omega_R} \psi^* (\psi + \Psi) dx dy &\underset{\beta \rightarrow 0}{\rightarrow} 0. \end{aligned}$$

Что касается слагаемого

$$\int_{\gamma_R} \left[ \tilde{\psi} \varphi_n^* - \left( -\frac{1}{4\pi} \ln \lambda^2 + \varphi^* \right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} \right] dl,$$

то при произвольном фиксированном значении  $\beta$  и  $R \rightarrow \infty$  его можно считать сколь угодно малым.

Аналогичным образом поступим и с потенциалом  $\varphi$ . В результате получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \tilde{\varphi} - \int_{\Gamma} \tilde{\varphi} \varphi_n^* dl = \int_{\Gamma} \varphi^* \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tau} dl, \\ \frac{1}{2} \tilde{\psi} - \int_{\Gamma} \tilde{\psi} \varphi_n^* dl = - \int_{\Gamma} \varphi^* \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} dl. \end{cases} \quad (37)$$

Граничные интегральные уравнения (37) указывают, что функции  $\tilde{\varphi}(x, y), \tilde{\psi}(x, y)$  являются сопряженными гармоническими функциями во внешности контура  $\Gamma$ , а функция

$$F(z) = \frac{1}{\lambda^2 \ln \lambda^2} [\tilde{\varphi}(x, y) - i \tilde{\psi}(x, y)]$$

является аналитической в этой области.

Таким образом, задача свелась к отысканию комплексного потенциала некоторого фиктивного течения идеальной несжимаемой жидкости, происходящего во внешности контура  $\Gamma$  плоскости  $z = x + iy$ , помещенного в однородный поток с комплексным потенциалом  $W$ . Решение этой классической задачи легко получить, если использовать конформное преобразование такой области на внешность единичного круга [25].

Пусть  $z = z(\zeta)$ ,  $\zeta = \zeta(z)$  – известные аналитические функции, реализующие это преобразование.

Комплексная скорость «на бесконечности», на плоскости  $\zeta$  определяется формулой

$$\begin{cases} \left( \frac{dW}{d\zeta} \right)_{\infty} = k \left( \frac{dW}{dz} \right)_{\infty}, \\ k = \left( \frac{dz}{d\zeta} \right)_{\infty}. \end{cases} \quad (38)$$

По известной функции  $F(z)$  можно найти и гидродинамическую силу. Ограничимся случаем движения контура вдоль оси  $Ox$ . Тогда, согласно формуле (6),

$$R \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} -i \frac{1}{\lambda^2 \ln \lambda^2} \oint_{\Gamma} (\tilde{\varphi} dy - \tilde{\psi} dx). \quad (39)$$

С другой стороны (см. работу [24]),

$$\oint_{\Gamma} F(z) dz = \frac{1}{\lambda^2 \ln \lambda^2} \oint_{\Gamma} (\tilde{\varphi} - i \tilde{\psi})(dx + i dy) = \frac{1}{\lambda^2 \ln \lambda^2} \oint_{\Gamma} (\tilde{\varphi} dx + \tilde{\psi} dy) + i \frac{1}{\lambda^2 \ln \lambda^2} \oint_{\Gamma} (\tilde{\varphi} dy - \tilde{\psi} dx).$$

В результате получаем соотношение

$$R \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} -i \operatorname{Im} \oint_{\Gamma} F(z) dz = 2\pi i \operatorname{Re} s F(z) \Big|_{z=\infty}. \quad (40)$$

В случае кругового контура единичного радиуса на плоскости комплексного переменного  $\zeta = \xi + i\eta$ , из асимптотических формул (9) следует, что

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\zeta, \eta) = 4 \frac{\xi}{|\zeta|^2}, \quad \tilde{\psi}(\zeta, \eta) = 4 \frac{\eta}{|\zeta|^2}, \\ F(\zeta) = \frac{4}{\lambda^2 \ln \lambda^2} \frac{1}{\zeta} \end{cases}$$

и

$$R(\beta) \sim \frac{8\pi i}{\lambda^2 \ln \lambda^2} \operatorname{Res} \frac{1}{\zeta} \Big|_{\zeta=\infty}.$$

Но  $\operatorname{Res} \frac{1}{\zeta} \Big|_{\zeta=\infty} = -1$ , поэтому окончательно получаем:

$$R_0(\beta) = -\frac{8i\pi}{\lambda^2 \ln \lambda^2}. \quad (41)$$

Формула (41) есть решение задачи об асимптотике гидродинамической силы при  $\beta \rightarrow \infty$ . В соответствии с этой формулой, главный член асимптотики гидродинамической силы при малых значениях  $\beta$  имеет такой вид и не зависит от формы гладкого контура. Этот эффект упомянут в статье [1] для контуров в виде окружности и пластины. Однако оказывается, что он имеет место всегда. Проверить этот факт можно лишь на задаче Стокса для эллиптического контура, у которой имеется аналитическое решение [15].

#### Асимптотика задачи Стокса для эллиптического контура

Продemonстрируем применение построенных асимптотик на примере задачи Стокса для эллиптического контура.

**Асимптотическое решение при «больших» значениях  $\beta$ .** Асимптотика решения этой задачи в первом приближении получена в статье [21]. Для построения следующих приближений обратимся к формулам (19) – (21) и (27). Их применение требует численного вычисления подинтегральных выражений, содержащих функции и их производные, а также численного определения интегралов с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Для этой процедуры использовалась квадратурная формула, предложенная в статье [26]. Опуская технические подробности, приведем здесь лишь некоторые результаты расчета.

На рис. 4 сопоставлены результаты расчетов модуля силы  $R_x(\beta)$ , полученных в статье [21] численным решением задачи Стокса о колебаниях эллиптического контура вдоль большей оси (параметр  $\varepsilon = 0,2$ ), с результатами расчетов  $R_x^{(k)}(\beta)$  ( $k = 1, 2, 3$ ), учитывающих одно, два и три слагаемых по асимптотическим зависимостям (19) – (21) и (27), соответственно. Отметим, что в качестве характерной длины  $L$  выбрана полусумма полуосей эллипса.

На рис. 4 видно, что второе и третье приближения значительно улучшают результат в диапазоне «умеренных» значений  $\beta$ . При больших значениях параметра  $\beta$  хорошее совпадение с численным решением дает уже первое приближение [21].

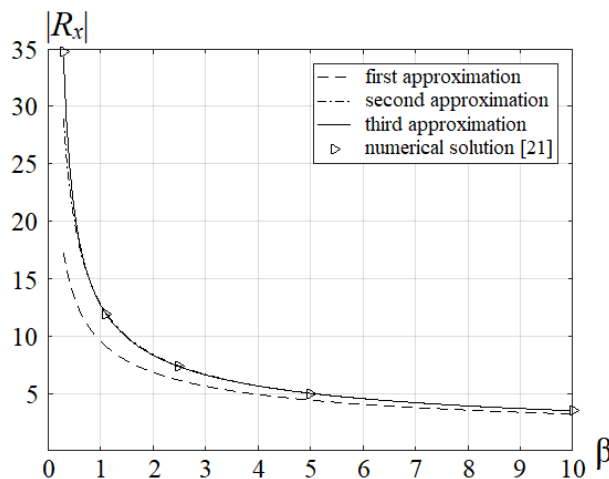


Рис. 4. Сопоставление результатов расчетов модуля  $R_x(\beta)$ , полученных в статье [21], с результатами расчетов модуля  $R_x^{(k)}(\beta)$  ( $k = 1, 2, 3$ )

**Асимптотическое решение при «малых» значениях  $\beta$ .** Два слагаемых асимптотических разложений потенциалов при  $\beta \rightarrow 0$  и конечных значениях  $\xi$  имеют вид (первые слагаемые были приведены в статье [15]):

$$\begin{cases} \varphi(\xi, \eta) \sim \frac{8e^{-\xi-\xi_0}}{(1-\varepsilon)\lambda^2 \ln \lambda^2} \cos \eta - \frac{1}{2} e^{-\xi-\xi_0} (1 + \varepsilon - e^{2\xi_0} + \varepsilon e^{2\xi_0}) \cos \eta, \\ \psi(\xi, \eta) \sim \frac{8e^{-\xi-\xi_0}}{(1-\varepsilon)\lambda^2 \ln \lambda^2} \sin \eta + \frac{1}{2} e^{-\xi-\xi_0} (e^{2\xi} - 1)(1 + \varepsilon) \sin \eta, \end{cases} \quad (42)$$

где  $\varepsilon$  – отношение полуосей эллипса,  $\varepsilon \in [0, 1]$ ;  $\xi, \eta$  – эллиптические координаты,  $\xi \in [\xi_0, +\infty)$ ,  $\eta \in [0, 2\pi)$ ;  $x = hch\xi \cos \eta$ ,  $y = hsh\xi \sin \eta$ ,  $h = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ ,  $z = x + iy = hch(\xi + i\eta)$ .

Контур эллипса соответствует значение  $\xi_0 = \operatorname{ar}th \varepsilon$ .

Нетрудно убедиться, что

$$1 + \varepsilon - e^{2\xi_0} + \varepsilon e^{2\xi_0} = 0, \quad \frac{e^{-\xi-\xi_0} (e^{2\xi} - 1)(1 + \varepsilon)}{2} \sin \eta = y.$$

Тогда из формул (42) следует, что

$$\begin{cases} \varphi(\xi, \eta) \sim \frac{8e^{-\xi-\xi_0}}{(1-\varepsilon)\lambda^2 \ln \lambda^2} \cos \eta, \\ \psi(\xi, \eta) \sim \frac{8e^{-\xi-\xi_0}}{(1-\varepsilon)\lambda^2 \ln \lambda^2} \sin \eta + y; \end{cases}$$

$$F(\xi, \eta) = \frac{8e^{-\xi-\xi_0}}{(1-\varepsilon)\lambda^2 \ln \lambda^2} (\cos \eta - i \sin \eta) = \frac{8}{\lambda^2 \ln \lambda^2} \frac{1}{he^{\xi+i\eta}}.$$

Далее,

$$he^{\xi+i\eta} = he^{\operatorname{ar}ch \frac{z}{h}} = z + \sqrt{z^2 - h^2}.$$

Таким образом,

$$F(z) = \frac{8}{\lambda^2 \ln \lambda^2} \frac{1}{\zeta(z)}. \quad (43)$$

Известное конформное отображение [24] вида

$$z = \frac{1}{2} \left[ (1 + \varepsilon)\zeta + \frac{(1 - \varepsilon)}{\zeta} \right] \quad (44)$$

переводит внешность окружности  $|\zeta| = 1$  во внешность эллипса с полуосями 1 и  $\varepsilon$ .

Из выражения (44) следует, что

$$\zeta(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - h^2}}{1 + \varepsilon}.$$

В результате отображения (43) на внешность единичного круга

$$F(\zeta) = \frac{8k}{\lambda^2 \ln \lambda^2} \frac{1}{(1 + \varepsilon)\zeta}$$

и, согласно формуле (40), получаем (как и ожидалось), что

$$R_0(\beta) = -\frac{8i\pi}{\lambda^2 \ln \lambda^2}. \quad (45)$$

### Заключение

В результате проведенного исследования построены асимптотические формулы для задачи о малых гармонических колебаниях плоского контура, погруженного в несжимаемую вязкую жидкость. Показано, что при малых значениях параметра  $\beta$  главный член асимптотики гидродинамической силы не зависит от формы гладкого контура. При больших значениях  $\beta$  (см. рис. 4) полученные второе и третье асимптотические приближения позволяют значительно улучшить результаты расчета гидродинамической силы в диапазоне «умеренных» чисел  $\beta$ .

Таким образом, вычисления гидродинамической силы на произвольном гладком контуре в широком диапазоне значений  $\beta$  можно выполнять, используя соответствующую асимптотику.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sader J. E.** Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // *Journal of Applied Physics*. 1998. Vol. 84. No. 1. Pp. 64–76.
2. **Maali A., Hurth C., Boisgard R., Jai C., Cohen-Bouhacina T., Aimé J.-P.** Hydrodynamics of oscillating atomic force microscopy cantilevers in viscous fluids // *Journal of Applied Physics*. 2005. Vol. 97. No. 7. P. 074907.
3. **Quiñones M., Camargo H., Baquero H.** Frequency response of a microcantilever immersed in fluid // *Proceedings of the 4th World Congress on New Technologies (NewTech'-18)*. Madrid, Spain. August 19–21, 2018. P. 122.
4. **Stokes G. G.** On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*. 1851. Vol. 9. Part 2. Pp. 8–106.
5. **Rosenhead L.** (Editor). *Laminar boundary layers*. Oxford (UK): Oxford University Press, 1963. 688 p.
6. **Ray M.** Vibration of an infinite elliptic cylinder in a viscous liquid // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1936. Vol. 16. No. 2. Pp. 99–108.
7. **Kanwal R. P.** Vibrations of an elliptic cylinder and a flat plate in a viscous fluid // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1955. Vol. 35. No. 1–2. Pp. 17–22.
8. **Tanahashi T.** Force acting on an oscillating cylinder in incompressible viscous fluid // *Keio Engineering Reports*. 1972. Vol. 25. No. 11. Pp. 129–140.
9. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. В 10 тт. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. **Ricci A., Giuri E.** Fluid Structure Interaction (FSI) analysis of microcantilevers vibrating in fluid environment // *Proceedings of the European COMSOL Conference*. March 30, 2009. Milan, Italy. 2009. Pp. 1–11.
11. **Kirstein S., Mertesdorf M., Schoenhoff M.** The influence of a viscous fluid on the vibration dynamics of scanning near-field optical microscopy fiber probes and atomic force microscopy cantilevers // *Journal of Applied Physics*. 1998. Vol. 84. No. 4. Pp. 1782–1790.
12. **Chaplin J. R., Subbiah K.** Hydrodynamic damping of a cylinder in still water and a transverse current // *Applied Ocean Research*. 1998. Vol. 20. No. 4. Pp. 251–259.
13. **Гузь А. Н.** Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
14. **Кадыров С. Г.** Метод граничных интегральных уравнений в задаче о малых колебаниях тел в сжимаемой вязкой жидкости // *Морской вестник*. 2013. Апрель. Спецвыпуск. № 1 (10). С. 85–87.
15. **Афанасов Е. Н., Кадыров С. Г., Певзнер В. В.** Задача Стокса для эллиптического контура // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2023. Т. 16. № 3. С. 177–188.
16. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. Изд. 4-е. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
17. **Федорюк М. В.** Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1987. 544 с.
18. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. Изд. 6-е. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1974. 176 с.



19. **Troesch A. W., Kim S. K.** Hydrodynamic forces acting on cylinders oscillating at small amplitudes // *Journal of Fluids and Structures*. 1991. Vol. 5. No. 1. Pp. 113–126.
20. **Bearman P. W., Downie M. J., Graham J. M. R., Obasaju E. D.** Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan–Carpenter numbers // *Journal of Fluid Mechanics*. 1985. Vol. 154. May. Pp. 337–356.
21. **Афанасов Е. Н., Кадыров С. Г.** Граничные интегральные уравнения и асимптотика решения плоской задачи о малых колебаниях тела в вязкой несжимаемой жидкости // *Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках*. 2016. № 4. С. 4–18.
22. **Михлин С. Г.** Курс математической физики. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1968. 576 с.
23. **Лифанов И. К.** Особые интегральные уравнения и методы их численного решения. М.: МАКС Пресс, 2006. 70 с.
24. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 4-е. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1973. 736 с.
25. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. Часть 1. Изд. 6-е. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
26. **Мелешко И. Н., Ласый П. Г., Довга Ю. А.** Приближенный метод вычисления интегралов с логарифмической особенностью специального вида // *Наука и техника*. 2012. № 3. С. 47–50.

#### REFERENCES

1. **Sader J. E.**, Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope, *J. Appl. Phys.* 84 (1) (1998) 64–76.
2. **Maali A., Hurth C., Boisgard R., et al.**, Hydrodynamics of oscillating atomic force microscopy cantilevers in viscous fluids, *J. Appl. Phys.* 97 (7) (2005) 074907.
3. **Quiñones M., Camargo H., Baquero H.**, Frequency response of a microcantilever immersed in fluid, *Proc. 4th World Congress on New Technologies (NewTech'18)*, Madrid, Spain, August 19–21, 2018. (2018) 122.
4. **Stokes G. G.**, On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Trans. Camb. Phil. Soc.* 9 (2) (1851) 8–106.
5. **Rosenhead L.** (Ed.), *Laminar boundary layers*, Oxford University Press, Oxford (UK), 1963.
6. **Ray M.**, Vibration of an infinite elliptic cylinder in a viscous liquid, *Z. Angew. Math. Mech.* 16 (2) (1936) 99–108.
7. **Kanwal R. P.**, Vibrations of an elliptic cylinder and a flat plate in a viscous fluid, *Z. Angew. Math. Mech.* 35 (1–2) (1955) 17–22.
8. **Tanahashi T.**, Force acting on an oscillating cylinder in incompressible viscous fluid, *Keio Eng. Rep.* 25 (11) (1972) 129–140.
9. **Landau L. D., Lifshitz E. M.**, *Course of theoretical physics*, in 10 Vols. Vol. 6. Fluid Mechanics, Pergamon Press, Oxford, UK, 1959.
10. **Ricci A., Giuri E.**, Fluid Structure Interaction (FSI) analysis of microcantilevers vibrating in fluid environment, *Proc. Europ. COMSOL Conf.*, March 30, 2009. Milan, Italy (2009) 1–11.
11. **Kirstein S., Mertesdorf M., Schoenhoff M.**, The influence of a viscous fluid on the vibration dynamics of scanning near-field optical microscopy fiber probes and atomic force microscopy cantilevers, *J. Appl. Phys.* 84 (4) (1998) 1782–1790.
12. **Chaplin J. R., Subbiah K.**, Hydrodynamic damping of a cylinder in still water and a transverse current, *Appl. Ocean Res.* 20 (4) (1998) 251–259.
13. **Guz A. N.**, *Динамика сжимаемой вязкой жидкости [Dynamics of compressible viscous fluid]*, A.S.K. Publishing, Kiev, 1998 (in Russian).
14. **Kadyrov S. G.**, The method of boundary integral equations in the issue of small oscillations of bodies in a viscous compressible fluid, *Morskoy Vestnik*. (S1 (10)) (2013) 85–87 (in Russian).
15. **Afanasov E. N., Kadyrov S. G., Pevzner V. V.**, The Stokes problem for an elliptic contour, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 16 (3) (2023) 177–188 (in Russian).
16. **Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.**, *Table of integrals, series, and products*; Edited by D. Zwillinger and V. Moll, Academic Press, Elsevier Inc., New York, 2014.



17. **Fedoryuk M. V.**, Asimptotika: integraly i ryady [Asymptotics: Integrals and series]. Moscow, Nauka Publishing., 1987 (in Russian).
18. **Pogorelov A. V.**, Differential geometry, P. Noordhoff N. V., Groningen, Netherlands, 1954.
19. **Troesch A. W., Kim S. K.**, Hydrodynamic forces acting on cylinders oscillating at small amplitudes, J. Fluids Struct. 5 (1) (1991) 113–126.
20. **Bearman P. W., Downie M. J., Graham J. M. R., Obasaju E. D.**, Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan–Carpenter numbers, J. Fluid Mech. 154 (May) (1985) 337–356.
21. **Afanasov E. N., Kadyrov S. G.**, Boundary integral equations and asymptotic solutions of the plane problem of small oscillations of body in a viscous incompressible fluid; Simulation, Computer and Full-Scale Experiment in Natural Sciences. (4) (2016) 4–18 (in Russian).
22. **Mikhlin S. G.**, Mathematical physics: An advanced course, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1970.
23. **Lifanov I. K.**, Osobyie integralnyye uravneniya i metody ikh chislennogo resheniya [Special integral equations and methods for their numerical solution], MAKS Press, Moscow, 2006 (in Russian).
24. **Lavrent'ev M. A., Shabat B. V.**, Metody teorii funktsij kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of complex variable], Nauka Publishing, Moscow, 1973 (in Russian).
25. **Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V.**, Theoretical hydromechanics, Vol. 1, Interscience Publ., New York, 1964.
26. **Meleshko I. N., Lasyi P. G., Dovga Yu. A.**, Approximate calculation method for integrals with logarithmic peculiarity of special type, Science & Technique. (3) (2012) 47–50 (in Russian).

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**АФАНАСОВ Евгений Николаевич** – инженер-гидродинамик ООО «Эволюция морских цифровых технологий», Санкт-Петербург, Россия.

197198, Россия, г. Санкт-Петербург, Александровский парк, 4, к. 3

zhenya.afanasov@yandex.ru

ORCID: 0009-0001-6193-5083

**КАДЫРОВ Сергей Газимурович** – кандидат технических наук, доцент кафедры математики Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, Санкт-Петербург, Россия.

190008, Россия, г. Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3

skadyrov@gmail.com

ORCID: 0009-0004-3383-7613

**СОРОКИН Вадим Николаевич** – старший преподаватель кафедры математики Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, Санкт-Петербург, Россия.

190008, Россия, г. Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3

sorokin\_v\_n@mail.ru

ORCID: 0009-0000-2883-2763

#### THE AUTHORS

**AFANASOV Evgeny N.**

LLC "Evolution Marine Digital"

4-3 Alexandrovsky Park, St. Petersburg, 197198, Russia

zhenya.afanasov@yandex.ru

ORCID: 0009-0001-6193-5083

**KADYROV Sergey G.**

State Marine Technical University

3 Lotsmanskaya St., St. Petersburg, 190008, Russia

skadyrov@gmail.com

ORCID: 0009-0004-3383-7613





**SOROKIN Vadim N.**

*State Marine Technical University*

3 Lotsmanskaya St., St. Petersburg, 190008, Russia

sorokin\_v\_n@mail.ru

ORCID: 0009-0000-2883-2763

*Статья поступила в редакцию 09.04.2024. Одобрена после рецензирования 17.04.2024.  
Принята 17.04.2024.*

*Received 09.04.2024. Approved after reviewing 17.04.2024. Accepted 17.04.2024.*