

Механика

Научная статья

УДК 534-16

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17310>

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ КОРОТКОВОЛНОВЫХ И ДЛИННОВОЛНОВЫХ АСИМПТОТИК ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН ЛЭМБА В ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ

Я. К. Астапов, А. В. Лукин , И. А. Попов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

 lukin_av@spbstu.ru

Аннотация. В работе анализируются точные и асимптотические приближенные решения для симметричных и антисимметричных волн Лэмба в однородном изотропном упругом слое. При помощи численного аппарата теории продолжения решений нелинейных уравнений вычислены дисперсионные кривые для волн с различной изменяемостью по толщине слоя. На основе полученных результатов исследован характер поля перемещений и изменчивость форм колебаний в зависимости от величины волнового числа. Проведен анализ асимптотической корректности балочных моделей Тимошенко, Бернулли – Эйлера как длинноволновых асимптотик волн Лэмба.

Ключевые слова: волны Лэмба, модель балки Бернулли – Эйлера, модель балки Тимошенко, теория бифуркации

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-4577.2022.1.1).

Для цитирования: Астапов Я. К., Лукин А. В., Попов И. А. Анализ точности коротковолновых и длинноволновых асимптотик для стационарных волн Лэмба в изотропном слое // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 3. С. 105–117. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17310>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17310>

AN ANALYSIS OF THE ACCURACY OF SHORT-WAVE AND LONG-WAVE ASYMPTOTICS FOR STATIONARY LAMB WAVES IN THE ISOTROPIC LAYER

Ya. K. Astapov, A. V. Lukin , I. A. Popov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

 lukin_av@spbstu.ru

Abstract. In the paper, the exact and asymptotic approximate solutions for symmetric and antisymmetric Lamb waves in the homogeneous isotropic elastic film have been analyzed. Using the numerical methods of the theory of continuation of solutions of nonlinear equations, the dispersion curves were calculated for waves with different variability across the layer thickness. Based on the results obtained, the nature of the displacement field and the variability of oscillation forms depending on the wave number were studied. The asymptotic correctness of

the Timoshenko and Euler – Bernoulli beam models as long-wave asymptotics of Lamb waves was analyzed.

Keywords: Lamb waves, Euler – Bernoulli beam model, Timoshenko beam model, bifurcation theory

Funding: The research was supported by the Council on Grants of the President of the Russian Federation for state support of young scientists (Grant No. MK-4577.2022.1.1).

For citation: Astapov Ya. K., Lukin A. V., Popov I. A., An analysis of the accuracy of short-wave and long-wave asymptotics for stationary Lamb waves in the isotropic layer, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (3) (2024) 105–117. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17310>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Согласно современным требованиям к устройствам теле- и радиокommunikаций нового поколения 5G, ожидается расширение диапазона частот, используемых для получения и передачи сигнала. Для этой цели рассматривается область сверхвысоких частот (СВЧ) (свыше 6 ГГц). Однако современные модели резонаторов, используемых для генерации и фильтрации сигналов, не способны работать при столь высоких частотах. Тем самым возникает необходимость в разработке новых моделей, обеспечивающих бесперебойную связь в задаваемом диапазоне. Среди многих типов упругих волн в твердых телах перспективными в решении данной проблемы являются волны Лэмба, генерируемые в тонком слое [1]. Исследования показывают, что определенные формы колебаний такого типа способны передавать СВЧ-сигнал с минимальными потерями [2 – 4]. Множество работ ежегодно публикуется на данную тему [5]. Проектирование акустоэлектронных преобразователей заданного частотного диапазона в условиях ограничений микросистемной технологии требует проведения многопараметрических расчетов по выбору оптимальной конфигурации резонатора: толщины слоя, межэлектродного расстояния во встречно-штыревом преобразователе, ориентации монокристалла и т. п. [6 – 9]. Кроме того, необходимо определять конкретные рабочие формы колебаний резонатора (индекс их изменяемости по направлению толщины слоя), обеспечивающие требуемые значения коэффициента электромеханической связи и при этом допускающие эффективное возбуждение электрическим полем. Решение подобных задач можно получить на основе совместного проведения как качественных аналитических оценок на упрощенных моделях, так и подробных численных расчетов на основе верифицированных методик.

Настоящая работа посвящена качественному исследованию стационарных упругих волн Лэмба в однородном упругом изотропном слое. Выполняется строгое аналитическое исследование дисперсионных кривых симметричных и антисимметричных волн Лэмба, их асимптотический анализ, а также прямое численное решение поставленной задачи и сравнение с известными моделями механики конструкций.

Используемая математическая модель

Рассматривается упругий изотропный однородный слой, расположенный вдоль оси x_1 по длине и вдоль оси x_3 по толщине. Слой считается бесконечно длинным и обладающим толщиной $2h$ ($-h \leq x_3 \leq h$). Задача рассматривается в плоско-деформированной постановке. Схема модели приведена на рис. 1.

Рассматривается система уравнений эластодинамики:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div}(\mathbf{u})) = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1)$$

где λ , μ – коэффициенты Ламе, ρ – плотность материала, \mathbf{u} – вектор поля перемещений.

Известно [10], что систему уравнений (1) путем представления

$$\mathbf{u} = \text{grad} \Phi + \text{rot} \psi \quad (2)$$

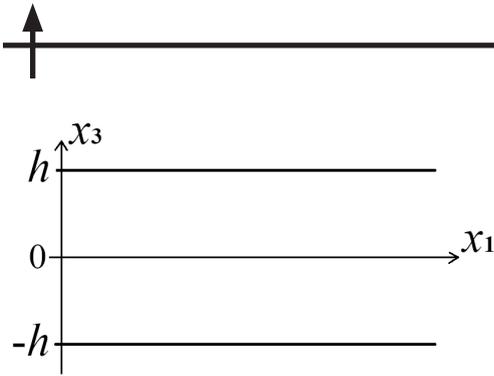


Рис. 1. Схема изотропного однородного тонкого слоя; $2h$ – его толщина

можно свести к системе волновых уравнений:

$$\square_1^2 \Phi = 0, \quad \square_1^2 \Psi = 0, \quad (3)$$

где $\square_\alpha^2 = (\partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_3^2) - 1/c_\alpha^2 \cdot \partial^2 / \partial t^2$ – оператор Д'Аламбера ($\alpha = 1, 2$); c_1, c_2 – скорости волны дилатации и поперечной волны, соответственно; Φ, Ψ – функции потенциалов.

Решение системы уравнений (3) представимо в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi &= (A \sinh(v_1 x_3) + B \cosh(v_1 x_3)) e^{ik(x_1 - ct)}, \\ \Psi &= (C \sinh(v_2 x_3) + D \cosh(v_2 x_3)) e^{ik(x_1 - ct)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где k – волновое число, $v_\alpha = \sqrt{k^2 - k_\alpha^2}$ ($k_\alpha = \omega/c_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, ω – частота), c – фазовая скорость.

Граничные условия диктуются отсутствием напряжений на гранях пластины:

$$\sigma_{13}(x_1, \pm h, t) = 0, \quad \sigma_{33}(x_1, \pm h, t) = 0. \quad (5)$$

Применив к решению (4) граничные условия (5), получим:

$$\begin{cases} 2i\beta_1 [\cosh(v_1 h)A + \sinh(v_1 h)B] - (1 + \beta_2^2) [\sinh(v_2 h)C + \cosh(v_2 h)D] = 0, \\ 2i\beta_1 [\cosh(v_1 h)A - \sinh(v_1 h)B] + (1 + \beta_2^2) [\sinh(v_2 h)C - \cosh(v_2 h)D] = 0, \\ [(\lambda + 2\mu)\beta_1^2 - \lambda] [\sinh(v_1 h)A + \cosh(v_1 h)B] + 2i\mu\beta_2 [\cosh(v_2 h)C + \sinh(v_2 h)D] = 0, \\ [(\lambda + 2\mu)\beta_1^2 - \lambda] [-\sinh(v_1 h)A + \cosh(v_1 h)B] + 2i\mu\beta_2 [\cosh(v_2 h)C - \sinh(v_2 h)D] = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь введено обозначение $\beta_\alpha = v_\alpha/k$, ($\alpha = 1, 2$).

Решением данной системы алгебраических уравнений является семейство дисперсионных кривых для волн Лэмба.

Симметричные волны

Рассмотрим частный случай симметричной волны. Волна называется симметричной, когда частицы среды совершают симметричные горизонтальные и антисимметричные вертикальные движения относительно средней линии сечения. Тем самым вертикальные перемещения в верхней и нижней полуобластях направлены в противоположные стороны и средняя линия сечения ($x_3 = 0$) остается недеформированной. Симметричные волны принято обозначать как S_0, S_1, S_2, \dots .

Тогда решение (4) примет вид:

$$\begin{aligned} \Phi &= B \cosh(v_1 x_3) e^{ik(x_1 - ct)}, \\ \Psi &= C \sinh(v_2 x_3) e^{ik(x_1 - ct)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (6) упростится и примет вид

$$\begin{cases} 2i\beta_1 \sinh(v_1 h)B - (1 + \beta_2^2) \sinh(v_2 h)C = 0, \\ [(\lambda + 2\mu)\beta_1^2 - \lambda] \cosh(v_1 h)B + 2i\mu\beta_2 \cosh(v_2 h)C = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Из условия существования нетривиального решения системы (8) получим трансцендентное уравнение вида

$$\frac{\tanh(v_1 h)}{\tanh(v_2 h)} = \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{4\beta_1\beta_2}. \quad (9)$$

Данное уравнение приобретет безразмерный вид

$$\frac{\tanh(\tilde{k}\sqrt{1 - \delta^2\tilde{c}^2})}{\tanh(\tilde{k}\sqrt{1 - \tilde{c}^2})} = \frac{(2 - \tilde{c}^2)^2}{4\sqrt{1 - \delta^2\tilde{c}^2}\sqrt{1 - \tilde{c}^2}}, \quad (10)$$

если ввести следующие обозначения:

$$\tilde{k} = kh, \quad \tilde{c} = \frac{c}{c_2}, \quad \tilde{\omega} = \tilde{k} \cdot \tilde{c} = \frac{khc}{c_2}, \quad \delta = \frac{c_2}{c_1}. \quad (11)$$

Уравнение (10) является трансцендентным относительно безразмерной фазовой скорости волны и волнового числа. Для уравнения (10) известны предельные случаи [11].

Рассмотрим первый предельный случай, когда длина бегущей волны значительно больше толщины пластины, т. е. $\lambda_\omega = 2\pi/k \gg 2h$. Тогда гиперболические тангенсы уравнения (10) заменяются их аргументами. Преобразовав уравнение (10), получим:

$$4(1 - \delta^2 \tilde{c}^2) = 2 - \tilde{c}^2, \\ \tilde{c} = 2\sqrt{1 - \delta^2}.$$

Пусть $\mu = \lambda$ (т. е. коэффициент Пуассона $\nu = 1/4$). Тогда можно утверждать, что $\delta^2 = 1/3$. В результате получим предельное значение безразмерной фазовой скорости:

$$\tilde{c} = \tilde{c}_p = 2\sqrt{2/3} \approx 1,633... \quad (12)$$

Рассмотрим второй предельный случай, при котором длина волны гораздо меньше толщины, т. е. $\lambda_\omega = 2\pi/k \ll 2h$; тогда отношение тангенсов можно считать равным единице. Результат преобразования уравнения (10) будет следующий:

$$(2 - \tilde{c}^2)^2 = 4\sqrt{1 - \delta^2 \tilde{c}^2} \sqrt{1 - \tilde{c}^2}. \quad (13)$$

Данное равенство является характеристическим уравнением поверхностных волн Рэлея [10]. При $\delta^2 = 1/3$ значение фазовой скорости составит

$$\tilde{c} = \tilde{c}_R \approx 0,9194... \quad (14)$$

Решение трансцендентного уравнения (10) было получено при помощи численного аппарата теории продолжения решений нелинейных уравнений [11]. На рис. 2 представлены дисперсионные кривые и зависимости значения фазовой скорости от волнового числа для первых трех ветвей волнового решения при различных значениях коэффициента Пуассона.

Из рис. 2, *b* следует корректность обеих асимптотических оценок (длинноволновой и коротковолновой).

Для полученных результатов были построены поля перемещений в слое. Их вид был получен путем подстановки решения (7) в уравнение (2). На рис. 3 представлены поля перемещений первых трех форм при различных значениях волнового числа: *a*, *d*, *g* –

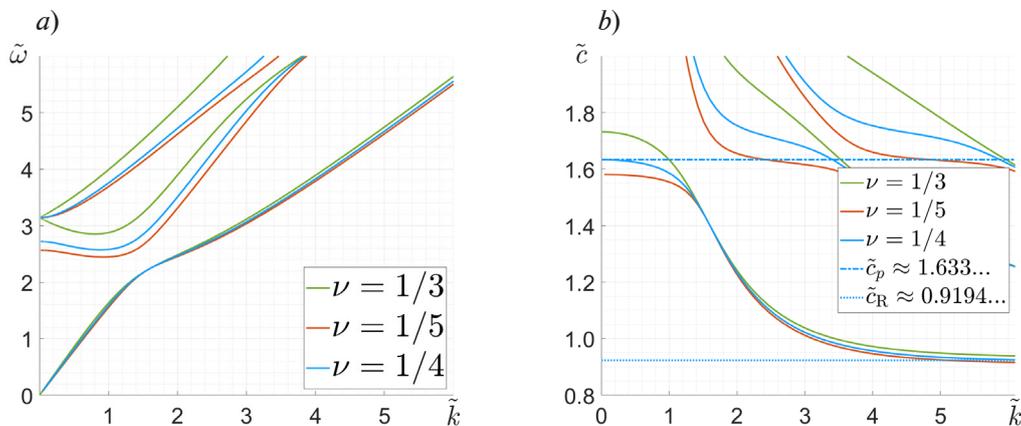


Рис. 2. Графики решения уравнения (10): *a* – дисперсионные кривые симметричных волн Лэмба; *b* – зависимости фазовой скорости от волнового числа



вблизи длинноволнового приближения ($\tilde{k}=1$); b, e, h – произвольное значение ($\tilde{k}=2$); c, f, i – вблизи коротковолнового приближения ($\tilde{k}=6$). Поля перемещений построены для сегмента бесконечно длинной пластинки (см. рис. 1); его сегмент $\lambda_\omega = 2\pi/k$ соответствует одному периоду колебания волны. Эта величина отложена по оси абсцисс, толщина пластинки – по оси ординат.

Цветовой гаммой обозначены вертикальные перемещения u_3 , горизонтальные перемещения u_1 визуализированы при помощи сетки.

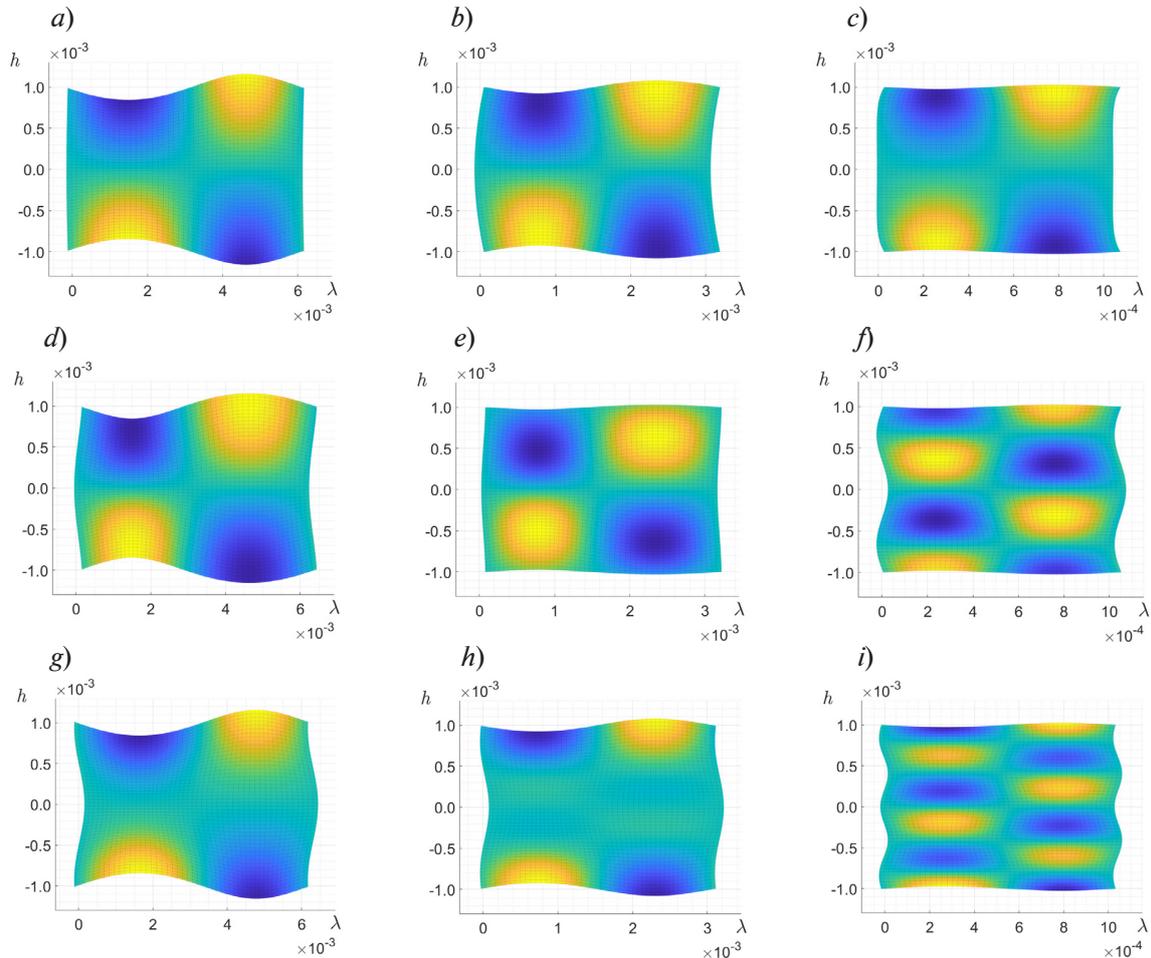


Рис. 3. Поля перемещений первых трех форм (S_0, S_1, S_2) симметричных волн при различных значениях волнового числа \tilde{k} : a, b, c – форма S_0 ; d, e, f – форма S_1 ; g, h, i – форма S_2

Анализ рисунков позволяет заключить, что при увеличении значения волнового числа в слое возрастает число неподвижных узлов. Стоит отметить, что материальная точка за период колебания описывает эллиптическую траекторию [12] и при увеличении значения волнового числа форма колебаний пластинки видоизменяется неочевидным образом. Отсюда возникает задача исследования изменчивости формы волны при варьировании значения волнового числа. Результаты для первых трех форм симметричных волн представлены на рис. 4.

На рис. 4, b видно, что характер поля перемещений u_3 остается практически неизменным при вариации значения волнового числа: наблюдаются средняя линия, перемещения на которой отсутствуют, а также верхняя и нижняя полуобласти пластины, совершающие противофазные перемещения вдоль оси x_3 . В то же время форма перемещений u_1 изменяется: изначально наблюдаются строго продольные колебания в горизонтальном направлении, но при достижении значения волнового числа \tilde{k} , близкого к 1,75, возникает новый узел, так что в сечении наблюдаются противофазные колебания в горизонтальном направлении. Также хорошо видно, что выполняется условие коротковолнового

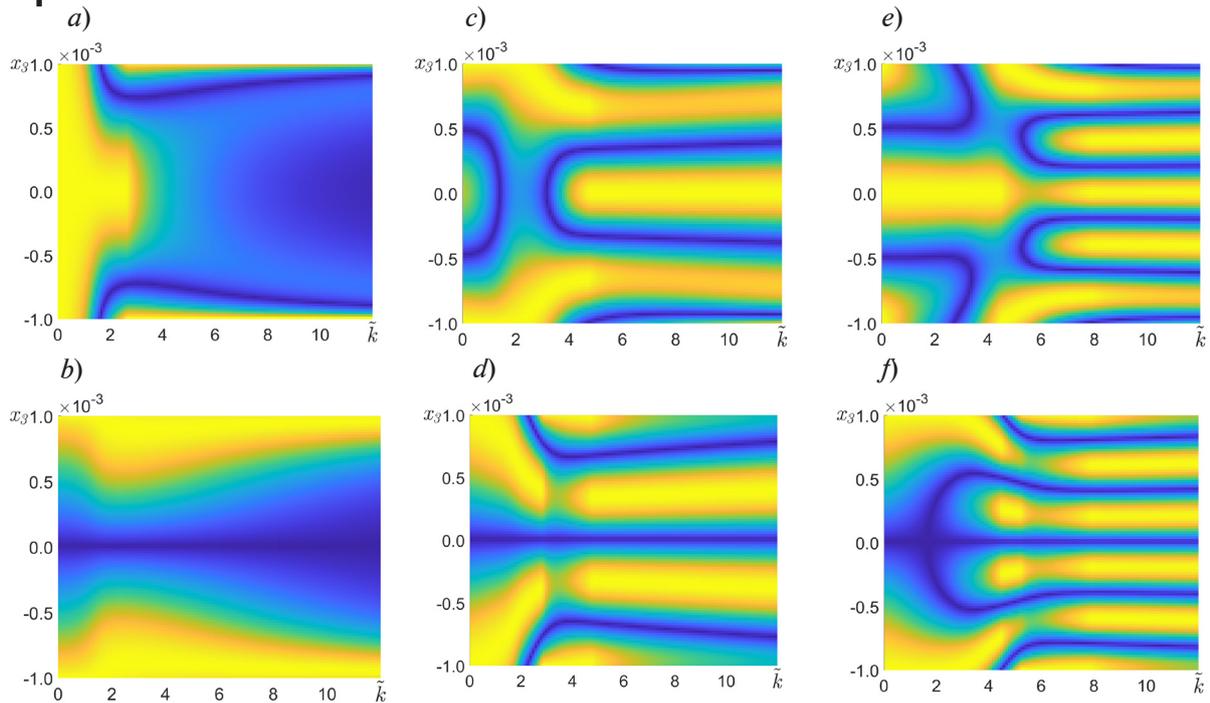


Рис. 4. Зависимости полей перемещений u_1 (a, c, e) и u_3 (b, d, f) трех ветвей решений (S_0, S_1, S_2) симметричной волны от волнового числа; a, b – ветвь S_0 ; c, d – ветвь S_1 ; e, f – ветвь S_2

приближения, а именно – с увеличением волнового числа наблюдается сильное затухание колебаний вглубь слоя. Для второй (см. рис. 4, c, d) и третьей (рис. 4, e, f) форм колебаний происходит сильное изменение форм в длинноволновом режиме. Наряду с этим наблюдается сохранение формы при значении волнового числа $\tilde{k} > 6$.

Антисимметричные волны

Рассмотрим случай антисимметричных волн. Волна называется антисимметричной, когда частицы среды совершают антисимметричные горизонтальные и симметричные вертикальные движения относительно средней линии сечения. При этом вертикальные колебания полуобластей происходят в одном направлении, и средняя линия деформируется. Решение (4) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi &= A \sinh(v_1 x_3) e^{ik(x_1 - ct)}, \\ \psi &= D \cosh(v_2 x_3) e^{ik(x_1 - ct)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для полученных решений (15) система уравнений (8) примет вид

$$\begin{cases} 2i\beta_1 \cosh(v_1 h) A - (1 + \beta_2^2) \cosh(v_2 h) D = 0, \\ [(\lambda + 2\mu)\beta_1^2 - \lambda] \sinh(v_1 h) A + 2i\mu\beta_2 \sinh(v_2 h) D = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Если взять определитель системы (16) и провести обезразмеривание (11), то получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{\tanh(v_1 h)}{\tanh(v_2 h)} = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1 + \beta_2^2)^2}. \quad (17)$$

Рассмотрим предельные случаи для уравнения (17). Пусть длина волны значительно превышает толщину слоя и выполняется неравенство $\tilde{c} < 1 < 1/\delta$. После всех преобразований (в соответствии с представленными в работе [10]) трансцендентное уравнение примет следующий вид:

$$\tilde{c}^2 = \frac{4}{3} \tilde{k}^2 (1 - \delta^2). \quad (18)$$

Пусть $\mu = \lambda$ (т. е. $\nu = 1/4$); тогда $\delta^2 = 1/3$, откуда следует, что

$$\tilde{c}_p = \frac{2\sqrt{2}}{3} \tilde{k}. \quad (19)$$

Таким образом, из уравнения (19) получаем линейную асимптоту для длинноволнового приближения.

Рассмотрим другой предельный случай, при котором длина волны гораздо меньше толщины пластины и выполняется неравенство $\tilde{c} < 1 < 1/\delta$. Преобразовав уравнение (17), вновь приходим к характеристическому уравнению поверхностных волн Рэлея (13), (14). Для случая $\tilde{c} > 1$ фазовая скорость стремится к 1.

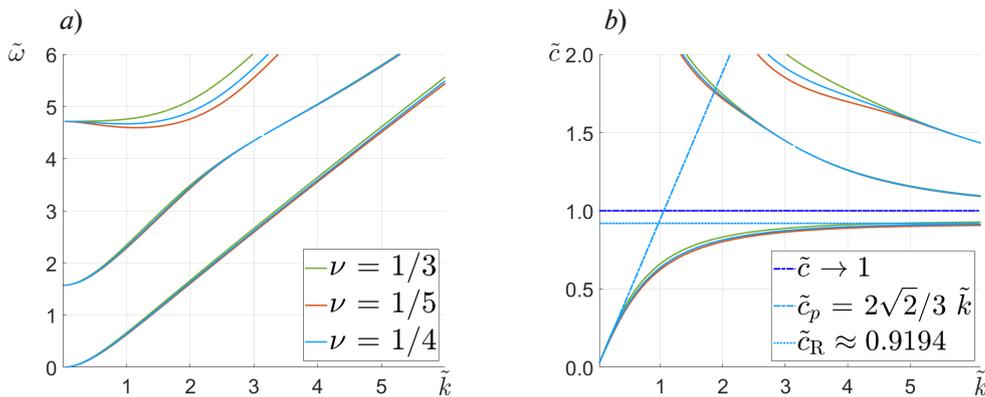


Рис. 5. Графики решения уравнения (17): *a* – дисперсионные кривые антисимметричных волн Лэмба; *b* – зависимости фазовой скорости от волнового числа

На рис. 5 приведены дисперсионные кривые антисимметричных колебаний и зависимости фазовой скорости от волнового числа. Видно (см. рис. 5, *b*), что полученные результаты для первой ветви антисимметричных волн удовлетворяют обоим приближениям. Предполагается [10], что для остальных форм значение фазовой скорости в случае коротковолнового приближения будет стремиться к единице.

Как и для симметричных колебаний, были построены поля перемещений антисимметричных колебаний (рис. 6).

Как видно на рис. 6, *a*, первая форма антисимметричных колебаний напоминает изгибные колебания балки. Также, аналогично симметричному случаю, наблюдается изменение формы колебаний при увеличении волнового числа. Исходя из этого, мы проанализировали изменчивость формы колебаний при варьировании значения волнового числа (рис. 7).

На рис. 7, *b* отчетливо видно, как с увеличением волнового числа амплитуда колебаний резко затухает вглубь слоя, что соответствует коротковолновому приближению. Видно, кроме того, что при малых значениях параметра \tilde{k} колебания совершаются всем сечением, тогда как в коротковолновом случае колебания возникают в верхней и нижней прослойках пластины, фактически не взаимодействуя друг с другом [13]. Такой эффект объясняется типом волны, поскольку при больших значениях волнового числа (как было указано выше) волна становится подобной по своему характеру поверхностной волне Рэлея, для которой свойственно резкое затухание вглубь полупространства [10]. Помимо этого, наблюдается интересный эффект разветвления узловой кривой на рис. 7, *a*. Можно заметить, что разветвление происходит при тех же значениях волнового числа, при которых происходит упомянутое разделение антисимметричной волны на две составляющие, которые формируются в верхней и нижних полуобластях пластины. Исходя из этих соображений, можно ожидать, что аналогичных разветвлений более наблюдаться не будет при дальнейшем увеличении волнового числа: наоборот, будет проявляться полное затухание колебаний вглубь материала.

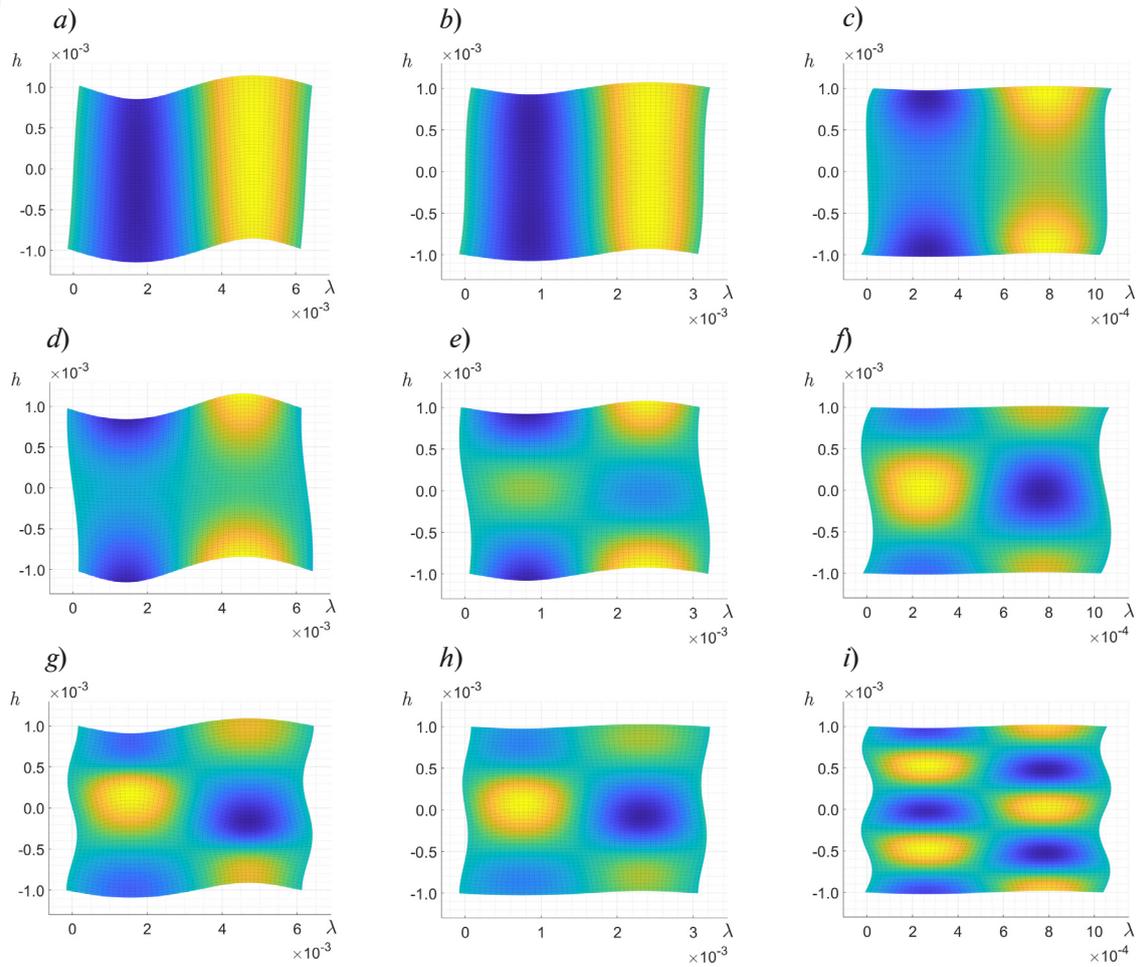


Рис. 6. Поля перемещений первых трех форм (A_0 , A_1 , A_2) антисимметричных волн при различных значениях волнового числа \tilde{k} :
 a , b , c – форма A_0 ; d , e , f – форма A_1 ; g , h , i – форма A_2

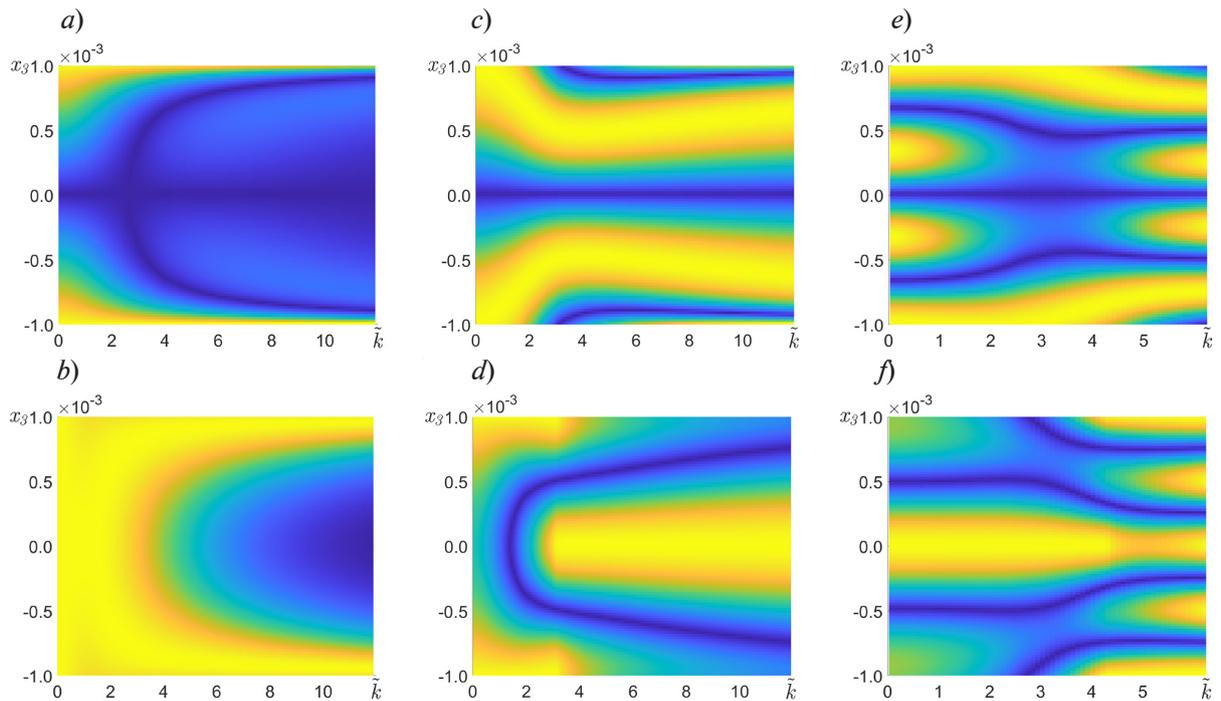


Рис. 7. Зависимости полей перемещений u_1 (a , c , e) и u_3 (b , d , f) трех ветвей решений (A_0 , A_1 , A_2) антисимметричной волны от волнового числа;
 a , b – ветвь A_0 ; c , d – ветвь A_1 ; e , f – ветвь A_2

Анализ асимптотической корректности балочных моделей

Как было отмечено выше, длинноволновое приближение первой формы колебаний антисимметричной волны по своей форме напоминает поперечные колебания балки. В инженерной практике распространены и хорошо изучены две модели изгибных колебаний балки: балка Бернулли – Эйлера и балка Тимошенко. Исходя из данного замечания, целесообразно сравнить полученные результаты с дисперсионными соотношениями для указанных моделей.

Известно [12], что для модели балки Бернулли – Эйлера задача в случае шарнирного опирания определяется системой:

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (0 < x < l), \\ w(x, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, l), \\ w(x, 0) = W(x), \end{cases} \quad (20)$$

где w – вертикальные перемещения, E – модуль Юнга, I – момент инерции сечения, A – площадь сечения, $W(x)$ – начальные распределения перемещения, ρ – поверхностная плотность, l – длина балки.

Решение системы (20) можно представить в виде бесконечной суммы бегущих волн:

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}x - \omega_n t\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}x + \omega_n t\right) \right], \quad (21)$$

где частота ω_n определяется выражением

$$\omega_n = (n\pi/l)^2 \sqrt{EI/\rho A}.$$

Длина волны при этом составляет $\lambda_n = 2l/n$. Таким образом, фазовая скорость выражается как

$$c_n = \frac{\omega_n \lambda_n}{2\pi} = n\pi \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^2}}. \quad (22)$$

Для модели балки Тимошенко система имеет вид:

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k'AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) - \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \\ k'AG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ w(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = 0, \quad (x = 0, l), \end{cases} \quad (23)$$

где ψ – изгибное вращение, $k' = 5/6$ – поправочный коэффициент для прямоугольного сечения, G – модуль сдвига.

Из системы (23) следует выражение для спектра собственных частот:

$$\tilde{\omega}_n^2 = \frac{(\eta^2 + \alpha^2)n^2\pi^2 + 1 \pm \sqrt{[(\eta^2 + \alpha^2)n^2\pi^2 + 1]^2 - 2\eta^2\alpha^2 n^4 \pi^4}}{2\eta^2\alpha^2}, \quad (24)$$

где $\tilde{\omega}_n$ – безразмерная частота, $\tilde{\omega}_n^2 = \omega^2(\rho A l^4)/(EI)$; η – безразмерный параметр, выражающий соотношение между изгибной и сдвиговой жесткостями, $\eta^2 = (EI)/(k'AGl^2)$; α – безразмерный параметр, выражающий соотношение между силами инерции сечения на поворот и на поперечное смещение, $\alpha^2 = I/(Al^2)$.

Уравнение (24) дает две ветви решений для изгибных ($\tilde{\omega}_{n,1}$) и сдвиговых ($\tilde{\omega}_{n,2}$) колебаний.

Представляло интерес построить конечно-элементные (КЭ) модели балок Бернулли – Эйлера и Тимошенко. Построение было выполнено в среде COMSOL Multiphysics. С целью сравнения на рис. 8 приведены результаты аналитического и КЭ-моделирования балки Бернулли – Эйлера и балки Тимошенко, а также ранее представленные результаты расчетов по модели упругих волн Лэмба в тонком слое.

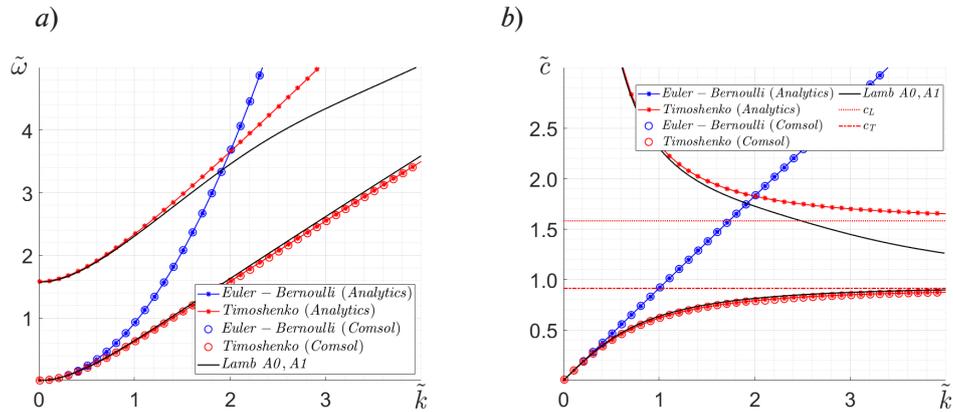


Рис. 8. Сравнение расчетных результатов для трех моделей: балки Бернулли – Эйлера, балки Тимошенко и упругих волн Лэмба: *a* – дисперсионные кривые, *b* – зависимости фазовой скорости от волнового числа

Анализ данных рис. 8 показывает, что нижняя ветвь решения для модели балки Тимошенко совпадает с первой ветвью волнового решения антисимметричных волн Лэмба. При этом стоит отметить, что данное совпадение не является закономерностью. Как отмечено выше, фазовая скорость нижней ветви решения волн Лэмба при коротковолновом приближении стремится к фазовой скорости поверхностных волн Рэлея c_R , которая, в свою очередь, зависит от значения коэффициента Пуассона (14). В то же время фазовая скорость волны для модели балки Тимошенко при увеличении волнового числа стремится к значению скорости поперечных колебаний $c_T = \sqrt{k'G/\rho}$. В безразмерном виде данные асимптотики являются результатом взятия квадратного корня от поправочного коэффициента k' .

Ранее было указано, что значение поправочного коэффициента задается как $k' = 5/6$, что было предложено Э. Рейсснером. Иным, часто используемым значением поправочного коэффициента, является предложение Р. Миндлина: $k' = \pi^2 / 12$. В работе П. А. Жилина [14] им было предложено следующее определение:

$$k' = \frac{5}{6 - \nu}, \quad (25)$$

оно было получено в ходе решения частотного уравнения колебания пластины с точностью до второго поправочного слагаемого.

На рис. 9 приведено сравнение безразмерных предельных значений фазовых скоростей поверхностных волн Рэлея c_R и поперечных колебаний c_T при различных значениях коэффициента Пуассона ν и поправочного коэффициента k' . Видно, что представленные предложения не совпадают с исследуемой моделью поверхностных волн Рэлея. При этом

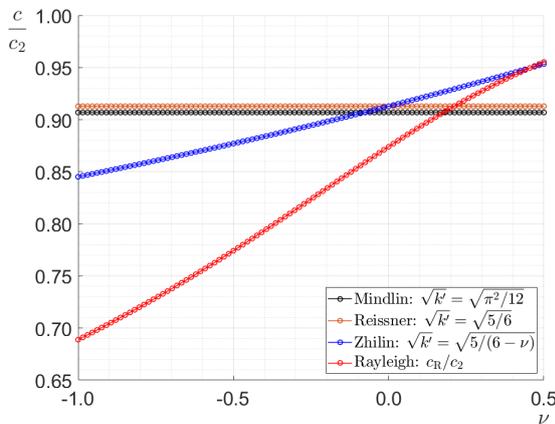


Рис. 9. Сравнение зависимостей предельных фазовых скоростей от коэффициента Пуассона



можно выделить определенные значения коэффициента Пуассона, при которых асимптотики совпадают.

Исходя из этого, можно сделать вывод, что совпадение характеристик упругих волн Лэмба и волн в балке Тимошенко наблюдается только при длинноволновом приближении, а при значении безразмерного волнового числа $\tilde{k} = k \cdot h \approx 1$ наблюдается расхождение результатов.

Заключение

Выполнено качественное аналитическое исследование стационарных волн Лэмба в тонком однородном изотропном слое. В соответствии с полученными решениями были построены дисперсионные кривые и зависимости фазовой скорости от волнового числа для симметричных и антисимметричных волн. Вычислены поля перемещений и видоизменения формы колебаний первой ветви волнового решения при варьировании значения волнового числа. Проведено сравнение характеристик антисимметричных волн Лэмба с волновыми характеристиками балок Бернулли – Эйлера и Тимошенко. Полученные результаты обеспечили конкретное представление о точности длинноволновых и коротковолновых асимптотических приближений для симметричных и антисимметричных волн Лэмба, в том числе приближений, основанных на применении балочных моделей механики конструкций.

Полученные результаты могут служить основой для верификации численных методов волновой механики, применяемых при моделировании волновых процессов в акустоэлектронных устройствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lu R., Gong S. RF acoustic microsystems based on suspended lithium niobate thin films: Advances and outlook // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2021. Vol. 31. No. 11. P. 114001.
2. Yang Y., Lu R., Gao L., Gong S. 10–60-GHz Electromechanical resonators using thin-film lithium niobate // IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques. 2020. Vol. 68. No. 12. Pp. 5211–5220.
3. Yang Y., Lu R., Gong S. Scaling acoustic filters towards 5G // Proceedings of the 2018 IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM). San Francisco, CA, USA. 01–05 December, 2018. Pp. 39.6.1–39.6.4.
4. Yang Y., Gao L., Gong S. X-band miniature filters using lithium niobate acoustic resonators and bandwidth widening technique // IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques. 2021. Vol. 69. No. 3. Pp. 1602–1610.
5. Wu J., Zhang Sh., Zhang L., Zhou H., Zheng P., Yao H., Li Zh., Huang K., Wu T., Ou X. Exploring low-loss surface acoustic wave devices on heterogeneous substrates // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2022. Vol. 69. No. 8. Pp. 2579–2584.
6. Naumenko N. F. Optimal orientations of LiTaO₃ for application in plate mode resonators // Journal of Applied Physics. 2015. Vol. 118. No. 3. P. 034505.
7. Naumenko N. F. Laterally excited bulk acoustic resonators (XBARs): Optimization method and application to resonators on LiTaO₃ // Proceedings of the 2022 IEEE MTT-S International Conference on Microwave Acoustics and Mechanics (IC-MAM). 18 – 20 July 2022, Munich, Germany. 2022. Pp. 70–73.
8. Naumenko N. F. Advanced numerical technique for analysis of surface and bulk acoustic waves in resonators using periodic metal gratings // Journal of Applied Physics. 2014. Vol. 116. No. 10. P. 104503.
9. Naumenko N. F. Temperature behavior of SAW resonators based on LiNbO₃/Quartz and LiTaO₃/Quartz substrates // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2021. Vol. 68. No. 11. Pp. 3430–3437.
10. Новацкий В. Теория упругости. Пер. с польского. М.: Мир, 1975. 872 с.
11. Govaerts W., Kuznetsov Yu. A., Meijer H. G. E., Al-Hdaibat B., de Witte V., Dhooge A., Mestrom W., Neirynek N., Riet A. M., Sautios B. MATCONT: Continuation toolbox for ODEs in Matlab. Utrecht (The Netherlands): Utrecht University, 2019. 124 p.

12. **Gérardin, M., Rixen D. J.** Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics. 3-rd edition. Chichester (West Sussex, UK): John Willey and Sons, 2015. 598 p.
13. **Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П.** Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука. Гл. редакция физ.-мат. лит.-ры, 1991. 416 с.
14. **Жилин П. А.** Прикладная механика: Основы теории оболочек. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2006.

REFERENCES

1. **Lu R., Gong S.**, RF acoustic microsystems based on suspended lithium niobate thin films: Advances and outlook, *J. Micromech. Microeng.* 31 (11) (2021) 114001.
2. **Yang Y., Lu R., Gao L., Gong S.**, 10–60-GHz Electromechanical resonators using thin-film lithium niobate, *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 68 (12) (2020) 5211–5220.
3. **Yang Y., Lu R., Gong S.**, Scaling acoustic filters towards 5G, *Proc. 2018 IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM)*, 01–05 Dec., San Francisco, CA, USA (2018) 39.6.1–39.6.4.
4. **Yang Y., Gao L., Gong S.**, X-band miniature filters using lithium niobate acoustic resonators and bandwidth widening technique, *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 69 (3) (2021) 1602–1610.
5. **Wu J., Zhang Sh., Zhang L., et al.**, Exploring low-loss surface acoustic wave devices on heterogeneous substrates, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 69 (8) (2022) 2579–2584.
6. **Naumenko N. F.**, Optimal orientations of LiTaO₃ for application in plate mode resonators, *J. Appl. Phys.* 118 (3) (2015) 034505.
7. **Naumenko N. F.**, Laterally excited bulk acoustic resonators (XBARs): Optimization method and application to resonators on LiTaO₃, *Proc. 2022 IEEE MTT-S Int. Conf. Microwave Acoustics and Mechanics (IC-MAM)*. 18–20 July 2022, Munich, Germany (2022) 70–73.
8. **Naumenko N. F.**, Advanced numerical technique for analysis of surface and bulk acoustic waves in resonators using periodic metal gratings, *J. Appl. Phys.* 116 (10) (2014) 104503.
9. **Naumenko N. F.**, Temperature behavior of SAW resonators based on LiNbO₃/Quartz and LiTaO₃/Quartz substrates, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 68 (11) (2021) 3430–3437.
10. **Novatski V.**, *Teoriya uprugosti [Elasticity theory]*, Mir Publishing, Moscow, 1975 (in Russian).
11. **Govaerts W., Kuznetsov Yu. A., Meijer H.G.E., et al.**, *MATCONT: Continuation toolbox for ODEs in Matlab*, Utrecht University, Utrecht (The Netherlands), 2019.
12. **Gérardin, M., Rixen D. J.**, Mechanical vibrations: Theory and application to structural dynamics. 3-rd Ed., John Willey and Sons, Chichester (West Sussex, UK), 2015.
13. **Biryukov S. V., Gulyaev Yu. V., Krylov V. V., Plessky V. P.**, Surface acoustic waves in inhomogeneous media (*Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 20*), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.
14. **Zhilin P. A.**, *Prikladnaya Mehanika: Osnovy teorii obolochek [Applied Mechanics: Basics of shell theory]*, Polytechnic University Publishing, Saint-Petersburg, 2006 (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АСТАПОВ Ярослав Константинович – студент Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

astapov.yaroslav.00@mail.ru

ORCID: 0009-0008-0216-462X

ЛУКИН Алексей Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

lukin_av@spbstu.ru

ORCID: 0000-0003-2016-8612



ПОПОВ Иван Алексеевич – ведущий инженер Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
popov_ia@spbstu.ru
ORCID: 0000-0003-4425-9172

THE AUTHORS

ASTAPOV Yaroslav K.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
astapov.yaroslav.00@mail.ru
ORCID: 0009-0008-0216-462X

LUKIN Aleksey V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
lukin_av@spbstu.ru
ORCID: 0000-0003-2016-8612

ПОПОВ Иван А.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
popov_ia@spbstu.ru
ORCID: 0000-0003-4425-9172

*Статья поступила в редакцию 31.01.2024. Одобрена после рецензирования 22.04.2024.
Принята 22.04.2024.*

Received 31.01.2024. Approved after reviewing 22.04.2024. Accepted 22.04.2024.