

Научная статья

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17306>

## МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МЕХАНОДИФФУЗИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО СО СМЕШАННЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ ПО КРАЯМ

**А. В. Земсков**<sup>1,2</sup> ✉, **А. В. Вестяк**<sup>1</sup>, **Д. В. Тарлаковский**<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия;

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
✉ [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru)

**Аннотация.** В работе анализируются связанные упругие и диффузионные процессы, возникающие в результате нестационарных изгибных колебаний ортотропной пластины, имеющей консольное закрепление с одной стороны и шарнирное опирание по сторонам, примыкающим к консоли. Для математического описания физико-механических процессов используется модель пластины Тимошенко, дополненная уравнениями массопереноса с учетом конечной скорости распространения диффузионных потоков. Алгоритм решения основан на использовании метода эквивалентных граничных условий, позволяющего выразить решение поставленной задачи через известное решение некоторой вспомогательной задачи данного класса. На примере изгибаемой трехкомпонентной пластины промоделирован характер взаимодействия в ней механического и диффузионного полей.

**Ключевые слова:** упругая диффузия, консольно-закрепленная пластина, метод эквивалентных граничных условий, пластина Тимошенко

**Финансирование:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 20-19-00217, <https://rscf.ru/project/20-19-00217/>).

**Для цитирования:** Земсков А. В., Вестяк А. В., Тарлаковский Д. В. Модель нестационарных механодиффузионных колебаний прямоугольной ортотропной пластины Тимошенко со смешанным закреплением по краям // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 3. С. 57–75. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17306>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17306>

## A MODEL OF UNSTEADY MECHANODIFFUSION VIBRATIONS OF A RECTANGULAR ORTHOTROPIC TIMOSHENKO PLATE WITH MIXED EDGE FIXING

**A. V. Zemskov**<sup>1,2</sup> ✉, **A. V. Vestyak**<sup>1</sup>, **D. V. Tarlakovskii**<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia;

<sup>2</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

✉ [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru)

**Abstract.** In the paper, the coupled elastic-diffusion processes arising as a result of unsteady bending vibrations of an orthotropic plate that has a cantilever fastening on one side and hinged support on the sides adjacent to the cantilever have been analyzed. For a mathematical

description of physical and mechanical processes, the Timoshenko plate model supplemented with mass transfer equations taking into account the finite speed of propagation of diffusion flows was used. The solution algorithm was based on the use of the equivalent boundary conditions method allowing to express the solution to the problem posed through a known solution to some auxiliary problem of a given class. The nature of the interaction between mechanical and diffusion fields was simulated using the example of a bendable three-component plate.

**Keywords:** elastic diffusion, cantilever plate, method of equivalent boundary conditions, Timoshenko plate

**Funding:** The reported study was funded by Russian Science Foundation (Grant No. 20-19-00217, <https://rscf.ru/project/20-19-00217/>).

**For citation:** Zemskov A. V., Vestyak A. V., Tarlakovskii D. V., A model of unsteady mech-anodiffusion vibrations of a rectangular orthotropic Timoshenko plate with mixed edge fixing, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (3) (2024) 57–75. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.17306>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

## Введение

В работе рассматривается вопрос о взаимодействии механического и диффузионного полей, возникающий при расчетах тонкостенных элементов конструкций (балок, пластин или оболочек), которые эксплуатируются в условиях нестационарных внешних воздействий, при наличии агрессивных сред и высокой температуры (нефте- и газопроводы, системы отопления и пр.).

Известно, что механодиффузионные процессы проявляются особенно ярко в высокоэластичных полимерах. Однако взаимодействие механических и диффузионных полей в таких материалах носит существенно нелинейный характер, и для их описания требуются модели, основанные на соотношениях, позволяющих рассматривать процессы массопереноса для произвольных упругих деформаций с учетом геометрической и физической нелинейности свойств материала [1].

Экспериментальные исследования в области механодиффузии широко проводятся с середины XX века. Из работ, наиболее близких к рассматриваемой теме, следует отметить статью [2], где анализируется влияние деформаций на массоперенос в пластине из поликристаллического никеля, покрытой медью, к краям которой приложена растягивающая нагрузка. В результате экспериментов было выявлено значительное различие (до 53 %) средних концентраций по толщине пластины при наличии и в отсутствие нагрузок.

Несмотря на стойкий интерес к задачам упругости с учетом диффузии (а также с учетом температурных и прочих полей), отмеченный со второй половины XX века, математическому моделированию механодиффузионных процессов в стержнях, пластинах и оболочках посвящено сравнительно небольшое число работ.

Следует выделить публикации [3 – 6], в которых изучается влияние температурных и диффузионных факторов на напряженно-деформированное пологой трансверсально-изотропной оболочки. При этом в работе [6] дается вариационная постановка термодиффузионной задачи для контактирующих гладких слоистых оболочек. Исследование в квазистатическом приближении осесимметричного напряженного состояния нагретой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием при диффузионном насыщении предложено в статьях [7, 8]. Публикации [9 – 16] посвящены решению краевых задач, описывающих термомеханодиффузионные явления в балках Бернулли – Эйлера и пластинах Кирхгофа.

Из приведенного краткого обзора можно сделать вывод, что основное внимание уделялось преимущественно анализу квазистатических термомеханодиффузионных процессов. Нестационарные модели, рассмотренные в работах [11, 14], посвящены лишь решениям задач для пластин Кирхгофа [11] и балок Бернулли – Эйлера [14].

В данной работе предложена модель нестационарных упругодиффузионных колебаний пластины, основанная на гипотезах Тимошенко [17 – 20].

Учитывая известные сложности с решением задач для консольно-закрепленных балок и пластин, предлагается использовать метод эквивалентных граничных условий, основанный на замене рассматриваемой сложной задачи некоторой вспомогательной, которая отличается от исходной только граничными условиями. Эти условия подбираются так, чтобы имелась возможность получить аналитическое решение вспомогательной задачи, которое, в данном случае, находится с помощью рядов Фурье и преобразования Лапласа. Затем строятся соотношения, связывающие между собой правые части граничных условий обеих задач. Решение же исходной задачи выражается через решение вспомогательной.

Предложенный подход ранее применялся при решении задач о нестационарных упругодиффузионных колебаниях консольно-закрепленных балок Бернулли – Эйлера [21, 22] и Тимошенко [23], а также при моделировании механодиффузионных процессов в цилиндрических телах.

В качестве еще одного практического применения следует отметить, что датчики на основе микроконсолей в виде балок и пластинок малого размера (микрорантеливеры) широко используются для физических, химических и биологических измерений [24 – 26]. Принцип их действия основан на том, что форма колебаний этих балок изменяется, когда определенная масса вещества адсорбируется на их поверхности. Такие устройства широко применяются в медицине, в частности для анализа заболеваний, обнаружения точечных мутаций, мониторинга уровня глюкозы в крови и пр.

### Постановка основной задачи

Рассматривается задача о нестационарных колебаниях прямоугольной ортотропной многокомпонентной пластины Тимошенко, консольно-закрепленной с одной стороны. Примыкающие к консоли стороны являются шарнирно опертными. Пластина имеет размеры  $l_1^* \times l_2^*$  и толщину  $h^*$ . Схема нагружения и закрепления краев пластины показана на рис. 1.

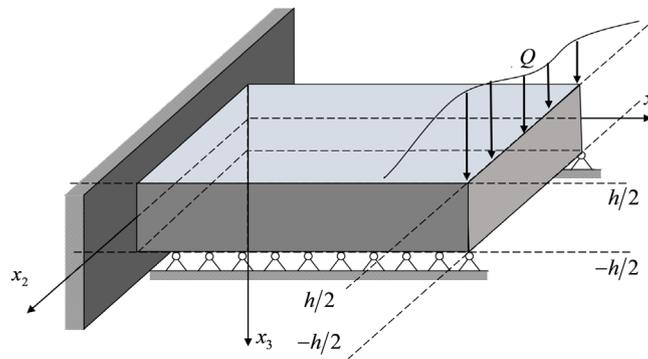


Рис. 1. Иллюстрация к постановке основной задачи:  
 $h$  – толщина консольно-закрепленной пластины;  $Q$  – поперечная сила, распределенная по свободному краю

Уравнение поперечных колебаний пластины с учетом диффузии имеет следующий вид [17, 18]:

$$\begin{aligned} \ddot{\chi}_1 &= \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1^2} + C_{66} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_2^2} + \frac{12C_{55}k_T^2}{h^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} - \chi_1 \right) + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \frac{\partial H_j}{\partial x_1}, \\ \ddot{\chi}_2 &= C_{66} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_2^2} + \frac{12C_{44}k_T^2}{h^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} - \chi_2 \right) + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} \frac{\partial H_j}{\partial x_2}, \\ \dot{w} &= C_{55}k_T^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \right) + C_{44}k_T^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} \right), \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{\tau_q^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\partial^k H_q}{\partial \tau^k} = D_1^{(q)} \frac{\partial^2 H_q}{\partial x_1^2} + D_2^{(q)} \frac{\partial^2 H_q}{\partial x_2^2} + \Lambda_{11}^{(q)} \frac{\partial^3 \chi_1}{\partial x_1^3} + \Lambda_{12}^{(q)} \frac{\partial^3 \chi_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \Lambda_{21}^{(q)} \frac{\partial^3 \chi_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \Lambda_{22}^{(q)} \frac{\partial^3 \chi_2}{\partial x_2^3}. \quad (1)$$

Точки означают производную по времени. Все величины в уравнениях (1) и на рис. 1 являются безразмерными. Для них используются следующие обозначения:

$$x_i = \frac{x_i^*}{l}, \quad w = \frac{w^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{C_{\alpha\alpha\beta\beta}}{C_{1111}}, \quad C_{44} = \frac{C_{2323}}{C_{1111}}, \quad C_{55} = \frac{C_{1313}}{C_{1111}}, \quad C_{66} = \frac{C_{1212}}{C_{1111}},$$

$$l_m = \frac{l_m^*}{l}, \quad m_i = \frac{lm_i^*}{C_{1111}}, \quad z_q = \frac{lz^{(q)}}{C}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad h = \frac{h^*}{l}, \quad C_{11} = C_{22} = C_{12} + 2C_{66},$$

$$\alpha_i^{(q)} = \frac{\alpha_{ii}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad D_i^{(q)} = \frac{D_{ii}^{(q)}}{Cl}, \quad \Lambda_{ij}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_{ii}^{(q)} \alpha_{jj}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho RT_0 Cl}, \quad Q = \frac{lQ^*}{C_{1111}}, \quad \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l},$$

где  $t$  – время;  $x_i^*$  – прямоугольные декартовы координаты;  $w^*$  – прогиб пластины;  $\chi_i$  – углы поворота волокна, нормального к срединной поверхности;  $l$  – характерный линейный масштаб задачи;  $H_q$  – плотность приращения концентрации  $q$ -й компоненты вещества в составе  $(N+1)$ -компонентной среды;  $n_0^{(q)}$  – начальная концентрации  $q$ -го вещества;  $C_{ijkl}$  – упругие постоянные;  $\rho$  – плотность вещества пластины;  $\alpha_{ij}^{(q)}$  – коэффициенты, характеризующие связь механического и диффузионного полей;  $D_{ij}^{(q)}$  – коэффициенты диффузии;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T_0$  – начальная температура среды;  $Q$  – поперечная сила, распределенная по свободному краю  $x_1 = l_1$ ;  $\tau^{(q)}$  – время релаксации диффузионных потоков [27];  $k_T = \sqrt{5/6}$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по толщине пластины [19, 28].

Уравнения (1) дополняются нулевыми начальными условиями и краевыми условиями, которые для случая консольного закрепления вдоль края  $x_1 = 0$  имеют вид

$$w|_{x_1=0} = 0, \quad \chi_1|_{x_1=0} = 0, \quad H_q|_{x_1=0} = 0, \quad \chi_2|_{x_1=0} = 0, \quad \chi_2|_{x_1=l_1} = 0,$$

$$\left( C_{12} \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} H_j \right) \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi_1}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_1=l_1} = 0,$$

$$\left( D_1^{(q)} \frac{\partial H_q}{\partial x_1} + \Lambda_{11}^{(q)} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1^2} + \Lambda_{12}^{(q)} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=l_1} = 0, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} - \chi_1 \right) \Big|_{x_1=l_1} = \frac{Q}{hC_{55}},$$

$$\left( C_{12} \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} H_j \right) \Big|_{x_2=l_2} = 0, \quad \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} + C_{12} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right) \Big|_{x_1=l_1} = 0, \quad (2)$$

$$\chi_1|_{x_2=0} = 0, \quad w|_{x_2=0} = 0, \quad H_q|_{x_2=0} = 0, \quad \chi_1|_{x_2=l_2} = 0, \quad w|_{x_2=l_2} = 0, \quad H_q|_{x_2=l_2} = 0.$$

### Формулировка и решение вспомогательной задачи

Для решения сформулированной задачи используется метод эквивалентных граничных условий [21 – 23], в соответствии с которым вместо задачи (1), (2) вначале рассматривается вспомогательная задача, описываемая теми же уравнениями (1), но с другими граничными условиями (геометрия рассматриваемой области при этом сохраняется). Эти граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 w|_{x_1=0} = 0, \quad \chi_1|_{x_2=0} = 0, \quad w|_{x_2=0} = 0, \quad H_q|_{x_2=0} = 0, \quad H_q|_{x_1=0} = 0, \quad \chi_2|_{x_1=0} = 0, \\
 \left( C_{12} \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} H_j \right) \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} + C_{12} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} H_j \right) \Big|_{x_1=0} = f_2, \\
 \left( D_1^{(q)} \frac{\partial H_q}{\partial x_1} + \Lambda_{11}^{(q)} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1^2} + \Lambda_{12}^{(q)} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=l_1} = 0, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} - \chi_1 \right) \Big|_{x_1=l_1} = f_3 = \frac{Q}{hC_{55}}, \\
 \left( \frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi_1}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_1=l_1} = 0, \quad \left( C_{12} \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} H_j \right) \Big|_{x_2=l_2} = 0, \\
 \chi_1|_{x_1=l_1} = f_1, \quad \chi_1|_{x_2=l_2} = 0, \quad w|_{x_2=l_2} = 0, \quad H_q|_{x_2=l_2} = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $f_1(x_2, \tau)$ ,  $f_2(x_2, \tau)$  – неизвестные функции, в дальнейшем подлежащие определению. Начальные условия остаются нулевыми.

Решение задачи (1), (2) ищется в интегральной форме ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{bmatrix} \chi_i(x_1, x_2, \tau) \\ w(x_1, x_2, \tau) \\ H_q(x_1, x_2, \tau) \end{bmatrix} = \int_0^\tau \int_0^{l_2} \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} G_{ik}(x_1, x_2, \xi, \tau - t) \\ G_{3k}(x_1, x_2, \xi, \tau - t) \\ G_{q+3,k}(x_1, x_2, \xi, \tau - t) \end{bmatrix} f_k(\xi, t) d\xi dt, \tag{4}$$

где  $G_{ik}$  – функции Грина, удовлетворяющие начально-краевой задаче:

$$\begin{aligned}
 \ddot{G}_{1k} &= \frac{\partial^2 G_{1k}}{\partial x_1^2} + C_{66} \frac{\partial^2 G_{1k}}{\partial x_2^2} + \frac{12C_{55}k_T^2}{h^2} \left( \frac{\partial G_{3k}}{\partial x_1} - G_{1k} \right) + \\
 &+ (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 G_{2k}}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \frac{\partial G_{j+3,k}}{\partial x_1}, \\
 \ddot{G}_{3k} &= C_{55}k_T^2 \left( \frac{\partial^2 G_{3k}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial G_{1k}}{\partial x_1} \right) + C_{44}k_T^2 \left( \frac{\partial^2 G_{3k}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial G_{2k}}{\partial x_2} \right), \\
 \ddot{G}_{2k} &= C_{66} \frac{\partial^2 G_{2k}}{\partial x_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 G_{2k}}{\partial x_2^2} + \frac{12C_{44}k_T^2}{h^2} \left( \frac{\partial G_{3k}}{\partial x_2} - G_{2k} \right) + \\
 &+ (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 G_{1k}}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} \frac{\partial G_{j+3,k}}{\partial x_2},
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^K \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\partial^k G_{q+3,k}}{\partial \tau^k} &= D_1^{(q)} \frac{\partial^2 G_{q+3,k}}{\partial x_1^2} + D_2^{(q)} \frac{\partial^2 G_{q+3,k}}{\partial x_2^2} + \\
 &+ \Lambda_{11}^{(q)} \frac{\partial^3 G_{1k}}{\partial x_1^3} + \Lambda_{12}^{(q)} \frac{\partial^3 G_{2k}}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \Lambda_{21}^{(q)} \frac{\partial^3 G_{1k}}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \Lambda_{22}^{(q)} \frac{\partial^3 G_{2k}}{\partial x_2^3}; \\
 \left( \frac{\partial G_{1k}}{\partial x_1} + C_{12} \frac{\partial G_{2k}}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+3,k} \right) \Big|_{x_1=0} &= \delta_{2k} \delta(\tau) \delta(x_2 - \xi), \quad G_{3k}|_{x_1=0} = 0, \\
 G_{1k}|_{x_2=0} = 0, \quad G_{2k}|_{x_1=0} = 0, \quad G_{q+3,k}|_{x_1=0} = 0, \quad G_{q+3,k}|_{x_2=0} = 0, \quad G_{q+3,k}|_{x_2=l_2} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( C_{12} \frac{\partial G_{1k}}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial G_{2k}}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} G_{j+3,k} \right) \Big|_{x_2=0} = 0, \quad G_{3k} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad G_{3k} \Big|_{x_2=l_2} = 0, \\
 & \left( C_{12} \frac{\partial G_{1k}}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial G_{2k}}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} G_{j+3,k} \right) \Big|_{x_2=l_2} = 0, \quad G_{1k} \Big|_{x_2=l_2} = 0, \\
 & \left( \frac{\partial G_{3k}}{\partial x_1} - G_{1k} \right) \Big|_{x_1=l_1} = \delta_{3k} \delta(\tau) \delta(x_2 - \xi), \quad G_{1k} \Big|_{x_1=l_1} = \delta_{1k} \delta(\tau) \delta(x_2 - \xi), \\
 & \left( D_1^{(q)} \frac{\partial G_{q+3,k}}{\partial x_1} + \Lambda_{11}^{(q)} \frac{\partial^2 G_{1k}}{\partial x_1^2} + \Lambda_{12}^{(q)} \frac{\partial^2 G_{2k}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=l_1} = 0, \quad \left( \frac{\partial G_{1k}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{2k}}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=l_1} = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

С помощью преобразования Лапласа и разложения в ряды Фурье задача (5), (6) приводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 & k_{1nm}(s) G_{1knm}^L(\xi, s) + K_{nm} G_{2knm}^L(\xi, s) - C_{55} k_T^2 \lambda_n G_{3knm}^L(\xi, s) - \\
 & \quad - \lambda_n \sum_{q=1}^N \alpha_1^{(q)} G_{q+3, knm}^L(\xi, s) = F_{1knm}(\xi), \\
 & K_{nm} G_{1knm}^L(\xi, s) + k_{2nm}(s) G_{2knm}^L(\xi, s) - C_{44} k_T^2 \mu_m G_{3knm}^L(\xi, s) - \\
 & \quad - \mu_m \sum_{q=1}^N \alpha_2^{(q)} G_{q+3, knm}^L(\xi, s) = F_{2knm}(\xi), \\
 & -C_{55} k_T^2 \lambda_n G_{1knm}^L(\xi, s) - C_{44} k_T^2 \mu_m G_{2knm}^L(\xi, s) + k_3(s) G_{3knm}^L(\xi, s) = F_{3knm}(\xi), \\
 & k_{q+3, nm}(s) G_{q+3, knm}^L(\xi, s) - M_{1qnm} G_{1knm}^L(\xi, s) - M_{2qnm} G_{2knm}^L(\xi, s) = F_{q+3, knm}(\xi),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 k_{1nm}(s) &= s^2 + \frac{12}{h^2} C_{55} k_T^2 + \lambda_n^2 + C_{66} \mu_m^2, \quad k_{2nm}(s) = s^2 + \frac{12}{h^2} C_{44} k_T^2 + C_{66} \lambda_n^2 + C_{22} \mu_m^2, \\
 k_{3nm}(s) &= s^2 + C_{55} k_T^2 \lambda_n^2 + C_{44} k_T^2 \mu_m^2, \quad K_{nm} = (C_{12} + C_{66}) \lambda_n \mu_m, \\
 M_{1qnm} &= \lambda_n \left( \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^2 + \Lambda_{21}^{(q)} \mu_m^2 \right), \quad M_{2qnm} = \mu_m \left( \Lambda_{12}^{(q)} \lambda_n^2 + \Lambda_{22}^{(q)} \mu_m^2 \right), \\
 F_{1knm}(\xi) &= \frac{4}{l_1 l_2} \left[ \lambda_n (-1)^n \delta_{1k} - \delta_{2k} \right] \sin \mu_m \xi, \quad k_{q+3, nm}(s) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\tau^k}{k!} s^{k+1} + D_1^{(q)} \lambda_n^2 + D_2^{(q)} \mu_m^2, \\
 F_{2knm}(\xi) &= \frac{4}{l_1 l_2} C_{12} \mu_m (-1)^n \delta_{1k} \sin \mu_m \xi, \quad F_{3knm}(\xi) = \frac{4}{l_1 l_2} C_{55} k_T^2 (-1)^n \delta_{3k} \sin \mu_m \xi, \\
 F_{q+3, knm}(\xi) &= \frac{4}{l_1 l_2} \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n \left[ \delta_{2k} - \lambda_n (-1)^n \delta_{1k} \right] \sin \mu_m \xi, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{l_1} \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad \mu_m = \frac{\pi m}{l_2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} G_{1k}^L(x_1, x_2, \xi, s) \\ G_{2k}^L(x_1, x_2, \xi, s) \\ G_{pk}^L(x_1, x_2, \xi, s) \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} G_{1knm}^L(\xi, s) \cos \lambda_n x_1 \sin \mu_m x_2 \\ G_{2knm}^L(\xi, s) \sin \lambda_n x_1 \cos \mu_m x_2 \\ G_{pknm}^L(\xi, s) \sin \lambda_n x_1 \sin \mu_m x_2 \end{bmatrix}, \quad p \geq 3. \tag{8}$$

В результате решения системы (7) получаем:

$$\begin{aligned}
 G_{iknm}^L(\xi, s) &= G_{iknm}^{Ls}(s) \sin \mu_m \xi, \quad G_{iknm}^{Ls}(s) = \frac{P_{iknm}(s)}{P_{nm}(s)} \quad (i = 1, 2), \\
 G_{3knm}^L(\xi, s) &= \frac{F_{3knm}(\xi)}{k_{3nm}(s)} + G_{3knm}^{Ls}(s) \sin \mu_m \xi, \quad G_{3knm}^{Ls}(s) = \frac{P_{3knm}(s)}{Q_{0nm}(s)}, \\
 G_{q+3, knm}^L(\xi, s) &= \frac{F_{q+3, knm}(\xi)}{k_{q+3, nm}(s)} + G_{q+3, knm}^{Ls}(s) \sin \mu_m \xi, \quad G_{q+3, knm}^{Ls}(s) = \frac{P_{q+3, knm}(s)}{Q_{qnm}(s)}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь  $P_{iknm}(s)$ ,  $P_{nm}(s)$ , и  $Q_{pnm}(s)$  – многочлены от  $s$ , имеющие вид

$$\begin{aligned}
 P_{nm}(s) &= [k_{1nm}(s)S_{1nm}(s) + k_{2nm}(s)S_{2nm}(s) - K_{nm}S_{3nm}(s)]\Pi_{nm}(s) + \\
 &+ \left[ \frac{12}{h^2} K_{nm} C_{44} C_{55} k_T^4 \mu_m \lambda_n - k_{1nm}(s)k_{2nm}(s)k_{3nm}(s) \right] \Pi_{nm}(s) - \\
 &- \mu_m S_{2nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} M_{2jnm} \Pi_{jnm}(s) - \lambda_n S_{1nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} M_{1jnm} \Pi_{jnm}(s) + \\
 &+ S_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N (\mu_m \alpha_2^{(j)} M_{1j} + \lambda_n \alpha_1^{(j)} M_{2j}) \Pi_{jnm}(s) + \\
 &+ \lambda_n \mu_m k_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N M_{1i} M_{2j} A_{ij} \Pi_{ijnm}(s),
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\Pi_{nm}(s) = \prod_{q=1}^n k_{q+3, nm}(s), \quad \Pi_{inm}(s) = \prod_{q=1, q \neq i}^n k_{q+3, nm}(s),$$

$$\Pi_{ijnm}(s) = \prod_{q=1, q \neq i, j}^n k_{q+3, nm}(s), \quad \Pi_{ijnm}(s) = \Pi_{jinm}(s),$$

$$Q_{0nm}(s) = k_{3nm}(s)P_{nm}(s), \quad Q_{qnm}(s) = k_{q+3, nm}(s)P_{nm}(s),$$

$$P_{3knm}(\xi, s) = C_{55} k_T^2 \lambda_n P_{1knm}(\xi, s) + C_{44} k_T^2 \mu_m P_{2knm}(\xi, s),$$

$$P_{q+3, knm}(\xi, s) = M_{1qnm} P_{1knm}(\xi, s) + M_{2qnm} P_{2knm}(\xi, s),$$

$$\begin{aligned}
 P_{11nm}(s) &= \frac{4}{l_1 l_2} \lambda_n (-1)^n \left[ S_{1nm}(s) \Pi_{nm}(s) - \mu_m k_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} M_{2jnm} \Pi_{jnm}(s) \right] - \\
 &- \frac{4}{l_1 l_2} C_{12} \mu_m (-1)^n \left[ S_{3nm}(s) \Pi_{nm}(s) - \lambda_n k_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} M_{2jnm} \Pi_{jnm}(s) \right] - \\
 &- \frac{4}{l_1 l_2} \lambda_n^2 (-1)^n \left[ \lambda_n S_{1nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jnm}(s) - \mu_m S_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jnm}(s) \right] + \\
 &+ \frac{4}{l_1 l_2} (-1)^n \lambda_n^3 \mu_m k_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N A_{ji} \Lambda_{11}^{(j)} M_{2j} \Pi_{jinm}(s),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{12nm}(\xi, s) &= -\frac{4}{l_1 l_2} \left[ S_{1nm}(s) \Pi_{nm}(s) - \mu_m k_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} M_{2jnm} \Pi_{jnm}(s) \right] + \\
 &+ \frac{4}{l_1 l_2} \lambda_n \left[ \lambda_n S_{1nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jnm}(s) - \mu_m S_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jnm}(s) \right] + \\
 &+ \frac{4}{l_1 l_2} \lambda_n^2 \mu_m k_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N A_{ij} \Lambda_{11}^{(j)} M_{2jnm} \Pi_{ijnm}(s), \\
 P_{13nm}(s) &= \frac{4}{l_1 l_2} \frac{12}{h^2} C_{55} k_T^2 (-1)^n \left[ S_{4nm}(s) \Pi_{nm}(s) - \lambda_n \mu_m \sum_{j=1}^N A_j M_{2jnm} \Pi_{jnm}(s) \right], \\
 P_{21nm}(s) &= -\frac{4}{l_1 l_2} \lambda_n (-1)^n \left[ S_{3nm}(s) \Pi_{nm}(s) - \mu_m k_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} M_{1jnm} \Pi_{jnm}(s) \right] + \\
 &+ \frac{4}{l_1 l_2} C_{12} \mu_m (-1)^n \left[ S_{2nm}(s) \Pi_{nm}(s) - \lambda_n k_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} M_{1jnm} \Pi_{jnm}(s) \right] - \\
 &- \frac{4}{l_1 l_2} \lambda_n^2 (-1)^n \left[ \mu_m S_{2nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jnm}(s) - \lambda_n S_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jnm}(s) \right] - \\
 &- \frac{4}{l_1 l_2} (-1)^n \lambda_n^3 \mu_m k_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N A_{ji} \Lambda_{11}^{(j)} M_{1jnm} \Pi_{jinm}(s), \\
 P_{23nm}(s) &= \frac{4}{l_1 l_2} \frac{12}{h^2} C_{55} k_T^2 (-1)^n \left[ S_{5nm}(s) \Pi_{nm}(s) + \lambda_n \mu_m \sum_{j=1}^N A_j M_{1j} \Pi_{jnm}(s) \right], \\
 P_{22nm}(s) &= \frac{4}{l_1 l_2} \left[ S_{3nm}(s) \Pi_{nm}(s) - \mu_m k_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} M_{1j} \Pi_{jnm}(s) \right] + \\
 &+ \frac{4}{l_1 l_2} \lambda_n \left[ \mu_m S_{2nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_2^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jnm}(s) - \lambda_n S_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jnm}(s) \right] + \\
 &+ \frac{4}{l_1 l_2} \lambda_n^2 \mu_m k_{3nm}(s) \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N A_{ji} \Lambda_{11}^{(j)} M_{1jnm} \Pi_{jinm}(s), \\
 S_{1nm}(s) &= k_{2nm}(s) k_{3nm}(s) - \frac{12}{h^2} C_{44} k_T^4 \mu_m^2, \quad A_{ji} = \alpha_1^{(j)} \alpha_2^{(i)} - \alpha_2^{(j)} \alpha_1^{(i)}, \\
 S_{2nm}(s) &= k_{1nm}(s) k_{3nm}(s) - \frac{12}{h^2} C_{55} k_T^4 \lambda_n^2, \quad A_j = k_T^2 (C_{55} \alpha_2^{(j)} - C_{44} \alpha_1^{(j)}), \\
 S_{3nm}(s) &= K_{nm} k_{3nm}(s) - \frac{12}{h^2} C_{44} C_{55} k_T^4 \mu_m \lambda_n, \\
 S_{4nm}(s) &= k_T^2 [C_{55} \lambda_n k_{2nm}(s) - K_{nm} C_{44} \mu_m], \quad S_{5nm}(s) = k_T^2 [k_{1nm}(s) C_{44} \mu_m - K_{nm} C_{55} \lambda_n].
 \end{aligned}$$

Переход в пространство оригиналов по Лапласу для рациональных функций  $G_{pknm}^{Ls}(s)$ , определенных равенствами (9), осуществляется с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления [29]. Численный анализ показывает, что эти функции имеют только простые полюсы. Таким образом, их оригиналы запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 G_{iknm}^s(\tau) &= \sum_{j=1}^{\Sigma} A_{iknm}^{(j)} e^{s_{jnm} \tau} \quad (\Sigma = (K+1)N + K + 5, \quad i = \overline{1,2}, \quad q = \overline{1,N}, \quad k = \overline{1,3}), \\
 G_{3knm}^s(\tau) &= \sum_{j=1}^{\Sigma+2} A_{3knm}^{(j)} e^{s_{jnm} \tau} + \frac{4C_{55}k_T^2(-1)^n \delta_{3k}}{l_1 l_2} \sum_{j=\Sigma+1}^{\Sigma+2} \frac{e^{s_{jnm} \tau}}{k'_{3nm}(s_{jnm})}, \\
 G_{q+3,knm}^s(\tau) &= \sum_{j=1}^{\Sigma} A_{q+3,knm}^{(j)} e^{s_{jnm} \tau} + \sum_{j=1}^{K+1} A_{q+3,knm}^{(\Sigma+j)} e^{\gamma_{jnm}^{(q)} \tau} + \frac{4\Lambda^{(q)} \lambda_n [\delta_{2k} - \lambda_n (-1)^n \delta_{1k}]}{l_1 l_2} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{\gamma_{jnm}^{(q)} \tau}}{k'_{j+3,nm}(\gamma_{jnm}^{(q)})}, \\
 A_{iknm}^{(j)} &= \frac{P_{iknm}(s_{jnm})}{P'_{nm}(s_{jnm})}, \quad A_{3knm}^{(r)} = \frac{P_{iknm}(s_{rnm})}{Q'_{0nm}(s_{rnm})} \quad (j = \overline{1,\Sigma}, \quad r = \overline{1,\Sigma+2}), \\
 A_{q+3,kl}^{(j)} &= \frac{P_{q+3,knm}(s_{jnm})}{Q'_{qnm}(s_{jnm})}, \quad A_{q+3,knm}^{(\Sigma+i)} = \frac{P_{q+3,knm}(\gamma_{jnm}^{(q)})}{Q'_{qnm}(\gamma_{jnm}^{(q)})},
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

где  $s_{jnm}$ ,  $j = \overline{1,\Sigma}$  – нули полинома  $P_{nm}(s)$ ;  $\gamma_{jnm}^{(q)}$  – нули многочлена  $k_{q+3,nm}(s)$ ;  $s_{\Sigma+i,nm}$  – нули многочлена  $k_{3nm}(s)$ , определяемые по формулам

$$s_{\Sigma+1,nm} = -ik_T \sqrt{C_{55}\lambda_n^2 + C_{44}\mu_m^2}, \quad s_{\Sigma+2,nm} = ik_T \sqrt{C_{55}\lambda_n^2 + C_{44}\mu_m^2}.$$

Таким образом, с учетом решения (8) и (9) функции Грина вспомогательной задачи (1), (2) имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_{1k}(x_1, x_2, \xi, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{1knm}^s(\tau) \cos \lambda_n x_1 \sin \mu_m x_2 \sin \mu_m \xi, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{l_1} \left( n + \frac{1}{2} \right), \\
 G_{2k}(x_1, x_2, \xi, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{2knm}^s(\tau) \sin \lambda_n x_1 \cos \mu_m x_2 \sin \mu_m \xi, \quad \mu_m = \frac{\pi m}{l_2}, \\
 G_{pk}(x_1, x_2, \xi, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{pknm}^s(\tau) \sin \lambda_n x_1 \sin \mu_m x_2 \sin \mu_m \xi, \quad p \geq 3,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где функции  $G_{iknm}^s(\tau)$  находятся по формулам (11) и (12).

Полагая в формулах (10)  $\alpha_i^{(q)} = 0$ , получаем функции Грина для упругой пластины Тимошенко.

### Решение основной задачи

Далее, решение задачи (1), (3) подставляем в граничные условия (2). В результате приходим к системе интегральных уравнений относительно функций  $f_1(x_2, \tau)$  и  $f_2(x_2, \tau)$ , введенных в граничные условия (3):

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\tau} \int_0^{l_2} \sum_{k=1}^2 G_{1k}(0, x_2, \xi, \tau-t) f_k(\xi, t) d\xi dt &= - \int_0^{\tau} \int_0^{l_2} G_{13}(0, x_2, \xi, \tau-t) f_3(\xi, t) d\xi dt, \\
 \int_0^{\tau} \int_0^{l_2} \sum_{k=1}^2 \left[ \frac{\partial G_{1k}(l_1, x_2, \xi, \tau-t)}{\partial x_1} + C_{12} \frac{\partial G_{2k}(l_1, x_2, \xi, \tau-t)}{\partial x_2} \right] f_k(\xi, t) d\xi dt &+ \\
 + \int_0^{\tau} \int_0^{l_2} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+3,k}(l_1, x_2, \xi, \tau-t) f_k(\xi, t) d\xi dt &=
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$= - \int_0^{\tau} \int_0^{l_2} \left[ \frac{\partial G_{13}(l_1, x_2, \xi, \tau - t)}{\partial x_1} + C_{12} \frac{\partial G_{23}(l_1, x_2, \xi, \tau - t)}{\partial x_2} \right] f_3(\xi, t) d\xi dt - \int_0^{\tau} \int_0^{l_2} \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+3,3}(l_1, x_2, \xi, \tau - t) f_3(\xi, t) d\xi dt. \quad (14)$$

Исходя из вида функций Грина (13), внешнюю нагрузку  $f_3(x_2, \tau)$  представляем в виде ряда

$$f_3(x_2, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{3m}(\tau) \sin \mu_m x_2. \quad (15)$$

В аналогичной форме будем искать функции  $f_k(x_2, \tau)$  ( $k = 1, 2$ ):

$$f_k(x_2, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{km}(\tau) \sin \mu_m x_2. \quad (16)$$

Если подставить ряд (15) и функции (16) в систему (14), то приходим к системе интегральных уравнений Вольтерры 1-го рода:

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^{\tau} a_{ijm}(\tau - t) f_{jm}(t) dt = \varphi_{im}(\tau), \quad (17)$$

где использованы следующие обозначения:

$$a_{11m}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{11mn}^s(\tau), \quad a_{12m}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{12mn}^s(\tau),$$

$$a_{21m}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ -C_{12} \mu_m G_{21mn}^s(\tau) - \lambda_n G_{11mn}^s(\tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+3,1mn}^s(\tau) \right],$$

$$a_{22m}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ -C_{12} \mu_m G_{22mn}^s(\tau) - \lambda_n G_{12mn}^s(\tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+3,2mn}^s(\tau) \right],$$

$$\varphi_{1m}(\tau) = - \int_0^{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} G_{13mn}^s(\tau - t) f_{3m}(t) dt,$$

$$\varphi_{2m}(\tau) = \int_0^{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ C_{12} \mu_m G_{23mn}^s(\tau - t) + \lambda_n G_{13mn}^s(\tau - t) \right] f_{3m}(t) dt - \int_0^{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+3,3mn}^s(\tau - t) f_{3m}(t) dt.$$

Путем интегрирования по частям система (17) приводится к виду

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^{\tau} A_{ijm}(\tau - t) \frac{\partial f_{jm}^*(t)}{\partial t} dt = \varphi_{im}(\tau), \quad A_{ijm}(\tau) = \int_0^{\tau} a_{ijm}(t) dt \quad (19)$$

и далее решается численно. Для аппроксимации интегралов в системе (19) используется формула средних прямоугольников [21 – 23]:

$$\int_0^{t_k} A_{ijm}(t_k - t) \frac{\partial f_{jm}^*(t)}{\partial t} dt = h_t A_{ij}^{(1/2)} y_{jm}^{(k-1/2)} + h_t S_{ijm}^{(k-1/2)},$$

где  $h_t = \tau / N_t$  – шаг разбиения,  $N_t$  – количество точек разбиения отрезка  $[0, \tau]$ . Остальные величины определяются как

$$t_k = kh_t, \quad t_{k-1/2} = \left(k - \frac{1}{2}\right) h_t, \quad S_{ijm}^{(k-1/2)} = \sum_{r=1}^{k-1} A_{ij}^{(k-r+1/2)} y_{jm}^{(r-1/2)},$$

$$y_{jm}^{(k)} = \frac{\partial f_{jm}^*(t_k)}{\partial \tau}, \quad y_{jm}^{(k-1/2)} = \frac{\partial f_{jm}^*(t_k - t_{1/2})}{\partial \tau}, \quad A_{ijm}^{(k)} = A_{ijm}(t_k) \quad (k = \overline{0, N_t}). \quad (20)$$

Таким образом, система интегральных уравнений (19) сводится к последовательности систем линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}_m \mathbf{y}_m^{(k-1/2)} = \mathbf{b}_m^{(k-1/2)}, \quad \mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} A_{11m}^{(1/2)} & A_{12m}^{(1/2)} \\ A_{21m}^{(1/2)} & A_{22m}^{(1/2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_m^{(k-1/2)} = \begin{pmatrix} y_{1m}^{(k-1/2)} \\ y_{2m}^{(k-1/2)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_m^{(k-1/2)} = \begin{pmatrix} b_{1m}^{(k-1/2)} \\ b_{2m}^{(k-1/2)} \end{pmatrix}, \quad b_{im}^{(k-1/2)} = \frac{1}{h_t} \left[ \varphi_{im}(t_k) - h_t S_{i1m}^{(k-1/2)} - h_t S_{i2m}^{(k-1/2)} \right],$$

решения которых находятся по правилу Крамера:

$$y_{1m}^{(k-1/2)} = \frac{b_{1m}^{(k-1/2)} A_{22m}^{(1/2)} - b_{2m}^{(k-1/2)} A_{12m}^{(1/2)}}{A_{11m}^{(1/2)} A_{22m}^{(1/2)} - A_{12m}^{(1/2)} A_{21m}^{(1/2)}}, \quad y_{2m}^{(k-1/2)} = \frac{b_{2m}^{(k-1/2)} A_{11m}^{(1/2)} - b_{1m}^{(k-1/2)} A_{21m}^{(1/2)}}{A_{11m}^{(1/2)} A_{22m}^{(1/2)} - A_{12m}^{(1/2)} A_{21m}^{(1/2)}}. \quad (21)$$

Теперь, если представить свертки (4) в виде

$$\begin{bmatrix} \chi_i(x_1, x_2, t_j) \\ w(x_1, x_2, t_j) \\ H_q(x_1, x_2, t_j) \end{bmatrix} = \int_0^{t_j} \int_0^{t_j} \begin{bmatrix} G_{i3}(x_1, x_2, \xi, t_j - t) \\ G_{33}(x_1, x_2, \xi, t_j - t) \\ G_{q+3,3}(x_1, x_2, \xi, t_j - t) \end{bmatrix} f_3(\xi, t) d\xi dt +$$

$$+ h_t \int_0^{t_j} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^j \begin{bmatrix} \tilde{G}_{iknm}(t_{j-l+1/2}) \cos \lambda_n x_1 \sin \mu_m x_2 \\ \tilde{G}_{3knm}(t_{j-l+1/2}) \sin \lambda_n x_1 \cos \mu_m x_2 \\ \tilde{G}_{q+3,knm}(t_{j-l+1/2}) \sin \lambda_n x_1 \sin \mu_m x_2 \end{bmatrix} y_{km}^{(l-1/2)} \sin \mu_m \xi d\xi,$$

$$\tilde{G}_{pknm}(\tau) = \int_0^{\tau} G_{pknm}^s(t) dt$$

и подставить туда равенства (21), то получаем решение исходной задачи (1), (2) об изгибе консольно-закрепленной пластины Тимошенко.

### Предельный переход к статической задаче

Если положить в граничных условиях (3), что

$$f_k(\tau) = \tilde{f}_k H(\tau) \quad (k=1, 2), \quad f_3(\tau) = \tilde{f}_3 H(\tau),$$

( $H(\tau)$  – функция Хевисайда), и перейти к пределу при  $\tau \rightarrow \infty$ , то получим решение задачи об изгибе пластины под действием статической нагрузки, приложенной к свободному краю.

Функции Грина статической задачи  $G_{mk}^{(st)}(x_1, x_2, \xi)$  выражаются через функции Грина  $G_{mk}(x_1, x_2, \xi, \tau)$  динамической задачи с помощью соотношений, приведенных в работах [22, 30]:

$$G_{mk}^{(st)}(x_1, x_2, \xi) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [G_{mk}(x_1, x_2, \xi, \tau) * H(\tau)] =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s G_{mk}^L(x_1, x_2, \xi, s) \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} G_{mk}^L(x_1, x_2, \xi, s), \quad (23)$$

где звездочкой обозначена свертка по времени.

Выполняя этот предельный переход в свертках (4), получаем решение статической задачи в виде

$$\begin{bmatrix} \chi_i^{(st)}(x_1, x_2, \tau) \\ w^{(st)}(x_1, x_2, \tau) \\ H_q^{(st)}(x_1, x_2, \tau) \end{bmatrix} = \int_0^{t_j} \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} G_{ik}^{(st)}(x_1, x_2, \xi) \\ G_{3k}^{(st)}(x_1, x_2, \xi) \\ G_{q+3,k}^{(st)}(x_1, x_2, \xi) \end{bmatrix} \tilde{f}_k(\xi) d\xi, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} G_{1k}^{(st)}(x_1, x_2, \xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{1knm}^{Ls}(0) \cos \lambda_n x_1 \sin \mu_m x_2 \sin \mu_m \xi, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{l_1} \left( n + \frac{1}{2} \right), \\ G_{2k}^{(st)}(x_1, x_2, \xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{2knm}^{Ls}(0) \sin \lambda_n x_1 \cos \mu_m x_2 \sin \mu_m \xi, \quad \mu_m = \frac{\pi m}{l_2}, \\ G_{pk}^{(st)}(x_1, x_2, \xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{pknm}^{Ls}(0) \sin \lambda_n x_1 \sin \mu_m x_2 \sin \mu_m \xi, \quad p \geq 3. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь учтены соотношения (8) и решение (9).

Статический аналог системы уравнений (17) запишется как

$$\sum_{j=1}^2 \tilde{a}_{ijm} \tilde{f}_{jm} = \tilde{\varphi}_{im}. \quad (26)$$

В формуле (26), по аналогии с обозначениями (18), введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11m} &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{11nm}^{Ls}(0), \quad \tilde{a}_{12m} = \sum_{n=0}^{\infty} G_{12nm}^{Ls}(0), \\ \tilde{a}_{21m} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ -C_{12} \mu_m G_{21nm}^{Ls}(0) - \lambda_n G_{11nm}^{Ls}(0) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{q+3,1nm}^{Ls}(0) \right], \\ \tilde{a}_{22m} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ -C_{12} \mu_m G_{22nm}^{Ls}(0) - \lambda_n G_{12nm}^{Ls}(0) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{q+3,2nm}^{Ls}(0) \right], \\ \tilde{\varphi}_{1m} &= -\sum_{n=0}^{\infty} G_{13mn}^{Ls}(0) f_{3m}, \quad \tilde{f}_k(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_{km} \sin \mu_m \xi, \\ \tilde{\varphi}_{2m} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ C_{12} \mu_m G_{23mn}^{Ls}(0) + \lambda_n G_{13mn}^{Ls}(0) - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+3,3mn}^{Ls}(0) \right] \tilde{f}_{3m}. \end{aligned}$$

Решение системы (26) находится по формулам (21). При этом используются следующие соответствия:

$$y_{im}^{(k-1/2)} \leftrightarrow \tilde{f}_{jm}, \quad A_{ijm}^{(1/2)} \leftrightarrow \tilde{a}_{ijm}, \quad b_{im}^{(k-1/2)} \leftrightarrow \tilde{\varphi}_{im}.$$

### Расчетный пример

Для моделирования физико-механических процессов возьмем трехкомпонентную пластину ( $N = 2$ ), состоящую из сплава алюминия, цинка и меди (предполагается, что цинк и медь диффундируют в дюралюминии). Характеристики пластины и требуемые внешние условия представлены в таблице.

Полагаем, что пластина имеет размеры:  $l_1^* = 0,01$  м,  $l_2^* = 0,01$  м,  $h^* = 0,0005$  м. Нагрузку на свободный край  $x_1 = l_1$  задаем в следующем виде:

$$f_3(x_2, \tau) = -\varepsilon H(\tau) \sin x_2, \quad \varepsilon = 10^{-3}. \quad (27)$$

Подставив данные (27) в равенство (22), с учетом найденных функций Грина (13) и функций  $\partial f_{km}(\tau)/\partial \tau$  из решений (21), получаем прогибы пластины, повороты нормальных волокон и плотности приращений концентраций цинка и меди. Результаты вычислений представлены на рис. 2–4.

Для расчета нестационарных механических полей используется 40 членов ряда Фурье и 40 точек разбиения для решения интегрального уравнения (19). Численные расчеты показывают, что увеличение указанных параметров не приводит к видимым изменениям полученных результатов. Так например, для прогибов пластины разница между 20-м и 40-м членами ряда составляет менее 1 %, для поворотов нормальных

Таблица

Расчетные параметры и их значения [30]

Параметр	Обозначение	Единица измерения	Значение		
Упругие постоянные	$C_{1122}$	Н/м <sup>2</sup>	$6,93 \cdot 10^{10}$		
	$C_{1313} = C_{2323} = C_{1212}$		$2,56 \cdot 10^{10}$		
Плотность материала	$\rho$	кг/м <sup>3</sup>	2700		
Линейный масштаб задачи	$l = h^*$	м	$5,0 \cdot 10^4$		
Начальная концентрация		–	цинка	$n_0^{(1)}$	0,0084
			меди	$n_0^{(2)}$	0,0450
Начальная температура среды	$T_0$	К	700		
Коэффициенты диффузии	$D_{11}^{*(1)} = D_{22}^{*(1)}$	м <sup>2</sup> /с	$2,62 \cdot 10^{-12}$		
	$D_{11}^{*(2)} = D_{22}^{*(2)}$		$2,89 \cdot 10^{-15}$		
Молярная масса		кг/моль	цинка	$m^{(1)}$	0,027
			меди	$m^{(2)}$	0,064
Коэффициенты связанности полей	$\alpha_{11}^{*(1)} = \alpha_{22}^{*(1)}$	Дж/кг	$1,55 \cdot 10^7$		
	$\alpha_{11}^{*(2)} = \alpha_{22}^{*(2)}$		$6,14 \cdot 10^7$		

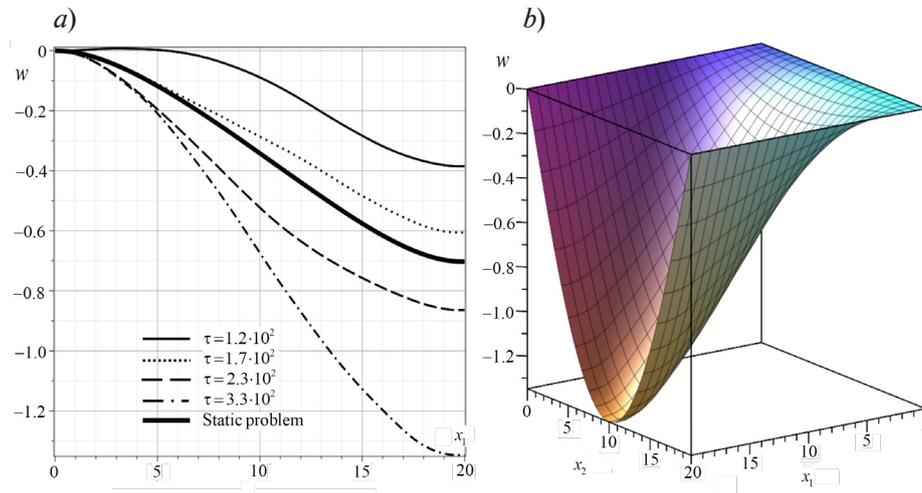


Рис. 2. Расчетные распределения прогиба пластины  $w$  на плоскости (a) и в пространстве (b):  $a$  – от закрепленного конца ( $x_1 = 0$ ) к свободному ( $x_1 = l_1$  – место приложения нагрузки) в разные моменты времени;  $b$  – в момент  $\tau = 3,3 \cdot 10^2$  ( $2,66 \cdot 10^{-5}$  с)

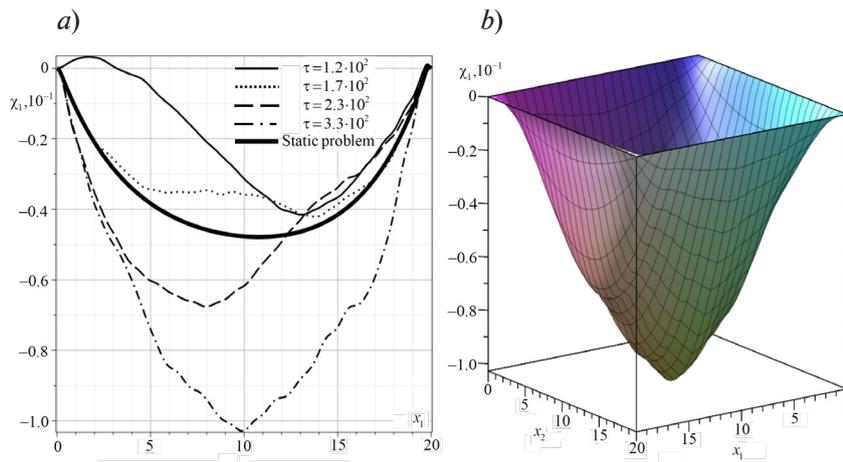


Рис. 3. Расчетные распределения поворотов  $\chi_1$  нормального волокна на плоскости (a) и в пространстве (b): a – от закрепленного конца ( $x_1 = 0$ ) к свободному ( $x_1 = 11$ ) в разные моменты времени; b – в момент  $\tau = 3,3 \cdot 10^2$  ( $2,66 \cdot 10^{-5}$  с)

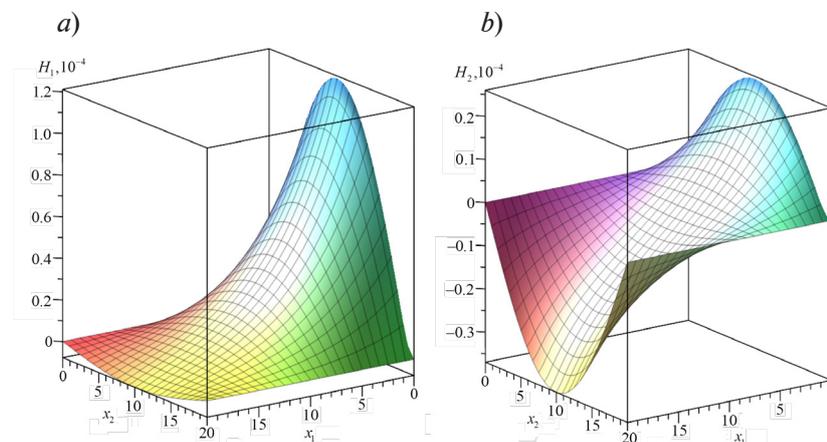


Рис. 4. Расчетные статические диффузионные поля, отражающие пространственные распределения плотности приращения концентраций цинка (a) и меди (b)

волокон – около 3 %. При расчете статических диффузионных полей использовалось 100 членов ряда Фурье.

Сравнение результатов для упругодиффузионной модели и упругой (при  $\alpha_{ij}^{*(q)} = 0$ ) для расчетов изгиба консольно-закрепленной пластины Тимошенко показывает, что влияние массопереноса на механическое поле пластины на рассматриваемом промежутке времени пренебрежимо мало. Таким образом, графики на рис. 2 и 3 одинаково применимы как для упругой, так и упругодиффузионной задач. С другой стороны, можно видеть, что прогибы и повороты нормальных волокон при нестационарных нагрузках примерно вдвое больше, чем при статических (выделены жирными линиями на рис. 2 и 3).

Исследованные предельные переходы к упругой и статической моделям, помимо прочего, служат для верификации предложенного в работе алгоритма решения нестационарной задачи для консольно-закрепленной пластины Тимошенко. При этом решение статической задачи является аналитическим, что тоже очень важно при оценке корректности выполненного расчета.

На рис. 4 показаны статические диффузионные поля цинка и меди в составе рассматриваемого сплава, инициированные изгибными деформациями пластины. При заданной нестационарной нагрузке (27) эти значения являются предельными для плотностей приращения концентраций диффузанта при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Найденные приращения концентраций имеют весьма небольшие значения, что подтверждается экспериментальными исследованиями [31], согласно которым влияние



механических нагрузок на диффузионное поле начинает существенно проявляться в основном при пластических деформациях. Таким образом, упругие деформации слабо влияют на кинетику массопереноса.

Ранее проводившиеся численные исследования на примере шарнирно-опертых балок [32] показали, что влияние диффузии на поле перемещений начинает сказываться по истечении определенного промежутка времени и проявляется, в основном, в виде фазовых сдвигов упругих и упругодиффузионных колебаний друг относительно друга. Однако эти различия наблюдаются на временном интервале, существенно превышающем указанный на рис. 2 и 3. В этом случае для расчетов требуется многократное увеличение количества точек разбиения при решении интегрального уравнения (19), что существенно увеличивает вычислительную емкость алгоритма и реально осуществимо только в тех случаях, когда задача может быть решена аналитически, как, например, в работе [32].

### Заключение

Предложена модель нестационарных механодиффузионных колебаний консольно-закрепленной пластины Тимошенко с шарнирным опиранием по бокам, примыкающим к консоли. Разработан комплексный алгоритм, сочетающий метод разделения переменных и метод эквивалентных граничных условий, позволяющий найти решение соответствующей начально-краевой задачи. Верификация предложенного алгоритма основана на исследовании предельного перехода к упругой задаче для изгибаемой пластины Тимошенко, а также на сравнении с решением статической упругодиффузионной задачи.

Выполненный на примере трехкомпонентной пластины расчет позволяет промоделировать характер взаимодействия механического и диффузионного полей в изгибаемой пластине. Отмечено, что нестационарный изгиб консоли инициирует диффузионные потоки каждого из компонентов. При этом интенсивность возникающего массопереноса крайне невелика и фактически не оказывает обратного влияния на механические поля в изгибаемой пластине, что проверено путем сравнения полученного решения с решением упругой задачи для пластины Тимошенко.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисюк Е. Я., Терешатов В. В. Нелинейная теория процессов набухания эластомеров в низкомолекулярных жидкостях // Высокомолекулярные соединения А. 2000. Т. 42. № 1. С. 71–83.
2. Миколайчук М. А., Князева А. Г., Грабовецкая Г. П., Мишин И. П. Изучение влияния механических напряжений на диффузию в пластине с покрытием // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета (ПНИПУ). 2012. № 3. С. 120–134.
3. Флячок В. М., Швец Р. Н. Некоторые теоремы теории механодиффузии анизотропных оболочек // Математические методы и физико-механические поля. 1985. № 21. С. 32–37.
4. Швец Р. Н., Флячок В. М. Уравнения механодиффузии анизотропных оболочек с учетом поперечных деформаций // Математические методы и физико-механические поля. 1984. № 20. С. 54–61.
5. Швец Р. Н., Флячок В. М. Вариационный подход к решению динамических задач механотермодиффузии анизотропных оболочек // Математическая физика и нелинейная механика. 1991. № 16. С. 39–43.
6. Раврик М. С. Об одной вариационной формуле смешанного типа для контактных задач термодиффузионной теории деформации слоистых оболочек // Математические методы и физико-механические поля. 1985. № 22. С. 40–44.
7. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // International Journal of Engineering and Technical Research. 2014. Vol. 2. No. 5. Pp. 151–159.
8. Раврик М. С., Бичуя А. Л. Осесимметричное напряженное состояние нагретой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием при диффузионном насыщении // Математические методы и физико-механические поля. 1983. № 17. С. 51–54.

9. **Aouadi M., Copetti M. I. M.** A dynamic contact problem for a thermoelastic diffusion beam with the rotational inertia // *Applied Numerical Mathematics*. 2018. Vol. 126. April. Pp. 113–137.
10. **Aouadi M., Copetti M. I. M.** Exponential stability and numerical analysis of a thermoelastic diffusion beam with rotational inertia and second sound // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2021. Vol. 187. September. Pp. 586–613.
11. **Aouadi M., Miranville A.** Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin – Pipkin’s model // *Asymptotic Analysis*. 2015. Vol. 95. No.1–2. Pp. 129–160.
12. **Шевчук П. Р., Шевчук В. А.** Механодиффузионный эффект при изгибе двухслойного бруса // *Физико-химическая механика материалов*. 1987. Т. 23. № 6. С. 75–79.
13. **Huang M., Wei P., Zhao L., Li Y.** Multiple fields coupled elastic flexural waves in the thermoelastic semiconductor microbeam with consideration of small scale effects // *Composite Structures*. 2021. Vol. 270. 15 August. P. 114104.
14. **Kumar R., Devi S., Sharma V.** Resonance of nanoscale beam due to various sources in modified couple stress thermoelastic diffusion with phase lags // *Mechanical and Mechanics Engineering*. 2019. Vol. 23. July. Pp. 36–49.
15. **Aouadi M.** On thermoelastic diffusion thin plate theory // *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*. 2015. Vol. 36. No. 5. Pp. 619–632.
16. **Aouadi M., Miranville A.** Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory // *Evolution Equations and Control Theory*. 2015. Vol. 4. No. 3. Pp. 241–263.
17. **Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V., Grigorevskiy N. V.** Modeling an unsteady elastic diffusion processes in a Timoshenko plate // *Proceedings of the IX International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (Coupled Problems 2021)*. 13–16 June 2021, Chia Laguna, Italy. DOI: 10.23967/coupled.2021.034.
18. **Vestyak V. A., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V.** Modeling of unsteady elastic diffusion transverse vibrations of the isotropic simply supported Timoshenko plate // *Materials Physics and Mechanics*. 2022. Vol. 50. No. 1. Pp. 141–157.
19. **Le K. C.** *Vibrations of shells and rods*. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 425 p.
20. **Le K. C.** An asymptotically exact theory of functionally graded piezoelectric shells // *International Journal of Engineering Science*. 2017. Vol. 112. March. Pp. 42–62.
21. **Земсков А. В., Тарлаковский Д. В., Файкин Г. М.** Нестационарный изгиб консольно-закрепленной балки Бернулли – Эйлера с учетом диффузии // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2021. Т. 14. № 1. С. 40–50.
22. **Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V., Faykin G. M.** Unsteady bending of the orthotropic cantilever Bernoulli – Euler beam with the relaxation of diffusion fluxes // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2022. Vol. 102. No. 10. P. e202100107.
23. **Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.** Нестационарный изгиб ортотропной консольно-закрепленной балки Тимошенко с учетом релаксации диффузионных потоков // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2022. Т. 62. № 11. С. 1895–1911.
24. **Kim B. H., Mader O., Weimar U., Brock R., Kern D. P.** Detection of antibody peptide interaction using microcantilevers as surface stress sensors // *Journal of Vacuum Science & Technology B*. 2003. Vol. 21. No. 4. Pp. 1472–1475.
25. **Alvarez M., Calle A., Tamayo J., Lechuga L. M., Abad A., Montoya A.** Development of nanomechanical biosensors for detection of the pesticide DDT // *Biosensors and Bioelectronics*. 2003. Vol. 18. No. 5–6. Pp. 649–653.
26. **Chen G.Y., Thundat T., Wachter E. A., Warmack R. J.** Adsorption-induced surface stress and its effects on resonance frequency of microcantilevers // *Journal of Applied Physics*. 1995. Vol. 77. No. 8. Pp. 3618–3622.
27. **Келлер И. Э., Дудин Д. С.** *Механика сплошной среды. Законы сохранения*. Пермь: Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2022. 142 с.
28. **Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В.** *Общая теория упругих оболочек*. М.: Изд-во МАИ, 2018. 112 с.
29. **Диткин В. А., Прудников А. П.** *Справочник по операционному исчислению*. М.: Высшая школа, 1965. 568 с.
30. **Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М.** *Физические величины: Справочник*. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

31. Nirano K., Cohen M., Averbach V., Ujiye N. Self-diffusion in alpha iron during compressive plastic flow // Transactions of the Metallurgical Society of AIME. 1963. Vol. 227. P. 950.

32. Земсков А. В., Ле В. Х. Нестационарные термоупругодиффузионные колебания балки Бернулли – Эйлера под действием распределенной поперечной нагрузки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета (ПНИПУ). Механика. 2023. № 3. С. 75–85.

## REFERENCES

1. Denisjuk E. Ya., Tereshatov V. V., A nonlinear theory of the process of elastomer swelling in low molecular-mass liquids, *Polymer Sci. Ser. A.* 42 (1) (2000) 56–67.

2. Mikolajchuk M. A., Knyazeva A. G., Grabovetskaya G. P., Mishin I. P., Research of the stress influence on the diffusion in the coating plate, *Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics.* (3) (2012) 120–134 (in Russian).

3. Flyachok V. M., Shvets R. N., Nekotoryye teoremy teorii mekhanodiffuzii anizotropnykh obolochek [Some theorems of the theory of mechanodiffusion of anisotropic shells], *Math. Meth. & Phys. Mech. Fields.* (21) (1985) 32–37 (in Russian).

4. Shvets R. N., Flyachok V. M., Uravneniya mekhanodiffuzii anizotropnykh obolochek s uchetom poperechnykh deformatsiy [Mechanodiffusion equations of taking into account the transverse strains], *Math. Meth. & Phys. Mech. Fields.* (20) (1984) 54–61 (in Russian).

5. Shvets R. N., Flyachok V. M., Variatsionnyy podkhod k resheniyu dinamicheskikh zadach mekhanotermodiffuzii anizotropnykh obolochek [A variational approach to solving dynamic problems of mechanothermal diffusion of anisotropic shells], *Math. Phys. & Nonlinear Mech.* (16) (1991) 54–6. 39–43 (in Russian).

6. Ravrik M. S., Ob odnoy variatsionnoy formule smeshannogo tipa dlya kontaktnykh zadach termodiffuzionnoy teorii deformatsii sloistykh obolochek [On one variational formula of mixed type for contact problems in the thermal diffusion theory of deformation of layered shells], *Math. Meth. & Phys. Mech. Fields.* (22) (1985) 40–44 (in Russian).

7. Bhattacharya D., Kanoria M., The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell, *Int. J. Eng. Tech. Res.* 2 (5) (2014) 151–159.

8. Ravrik M. S., Bichuya A. L., Osesimmetrichnoye napryazhennoye sostoyaniye nagretoy transversalno-izotropnoy sfericheskoy obolochki s krugovym otverstiyem pri diffuzionnom nasyshchenii [Axisymmetric stressed state of the heated transversally isotropic spherical shell with a circular hole under diffusion saturation], *Math. Meth. & Phys. Mech. Fields.* (17) (1983) 51–54 (in Russian).

9. Aouadi M., Copetti M. I. M., A dynamic contact problem for a thermoelastic diffusion beam with the rotational inertia, *Appl. Numer. Math.* 126 (April) (2018) 113–137.

10. Aouadi M., Copetti M. I. M., Exponential stability and numerical analysis of a thermoelastic diffusion beam with rotational inertia and second sound, *Math. Comput. Simulat.* 187 (Sept) (2021) 586–613.

11. Aouadi M., Miranville A., Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin – Pipkin’s model, *Asymptot. Anal.* 95 (1–2) (2015) 129–160.

12. Shevchuk P. R., Shevchuk V. A., Mekhanodiffuzionnyy effekt pri izgibe dvukhsloynogo brusa [Mechanodiffusion effect under bending of a double-layer beam], *Phys. Chem. Mech. Mater.* 23 (6) (1987) 75–79 (in Russian).

13. Huang M., Wei P., Zhao L., Li Y., Multiple fields coupled elastic flexural waves in the thermoelastic semiconductor microbeam with consideration of small scale effects, *Compos. Struct.* 270 (15 Aug) (2021) 114104.

14. Kumar R., Devi S., Sharma V., Resonance of nanoscale beam due to various sources in modified couple stress thermoelastic diffusion with phase lags, *Mech. Eng.* 23 (July) (2019) 36–49.

15. Aouadi M., On thermoelastic diffusion thin plate theory, *Appl. Math. Mech. (Eng. Ed.)*. 36 (5) (2015) 619–632.

16. Aouadi M., Miranville A., Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory, *Evol. Equ. Control Theory.* 4 (3) (2015) 241–263.

17. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V., Grigorevskiy N. V., Modeling an unsteady elastic diffusion processes in a Timoshenko plate, *Proc. IX Int. Conf. on Comput. Meth. Coupl. Probl. Sci. Eng. (Coupled Problems 2021)*, Chia Laguna, Italy, 13–16 June 2021, DOI: 10.23967/coupled.2021.034.

18. Vestyak V. A., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V., Modeling of unsteady elastic diffusion transverse vibrations of the isotropic simply supported Timoshenko plate, Mater. Phys. Mech. 50 (1) (2022) 141–157.
19. Le K. C., Vibrations of shells and rods, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
20. Le K. C., An asymptotically exact theory of functionally graded piezoelectric shells, Int. J. Eng. Sci. 112 (March) (2017) 42–62.
21. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V., Faykin G. M., Unsteady bending of a cantilevered Euler – Bernoulli beam with diffusion, Comput. Continuum Mech. 14 (1) (2021) 40–50.
22. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V., Faykin G. M., Unsteady bending of the orthotropic cantilever Bernoulli – Euler beam with the relaxation of diffusion fluxes, Z. Angew. Math. Mech. 102 (10) (2022) e202100107.
23. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V., Unsteady bending of an orthotropic cantilever Timoshenko beam with allowance for diffusion flux relaxation, Comput. Math. Math. Phys. 62 (11) (2022) 1895–1911.
24. Kim B. H., Mader O., Weimar U., et al., Detection of antibody peptide interaction using microcantilevers as surface stress sensors, J. Vac. Sci. Technol. B. 21 (4) (2003) 1472–1475.
25. Alvarez M., Calle A., Tamayo J., et al., Development of nanomechanical biosensors for detection of the pesticide DDT, Biosens. Bioelectron. 18 (5–6) (2003) 649–653.
26. Chen G. Y., Thundat T., Wachter E. A., Warmack R. J., Adsorption-induced surface stress and its effects on resonance frequency of microcantilevers, J. Appl. Phys. 77 (8) (1995) 3618–3622.
27. Keller I. E., Dudin D. S., Механика сплошной среды. Законы сохранения [Continuum mechanics. Conservation laws], Perm National Research Polytechnic University Publishing, Perm, 2022 (in Russian).
28. Mikhaylova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V., Obshchaya teoriya uprugikh obolochek [General theory of elastic shells], MAI Publishing, Moscow, 2018 (in Russian).
29. Ditkin V. A., Prudnikov A. P., Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu [Operational calculus handbook], Vysshaya Shkola Publishing, Moscow, 1965 (in Russian).
30. Babichev A. P., Babushkina N. A., Bratkovskiy A. M., et al., Fizicheskiye velichiny: Spravochnik [Physical quantities: Handbook], Energoatomizdat Publishing, Moscow, 1991 (in Russian).
31. Nirano K., Cohen M., Averbach V., Ujjiye N., Self-diffusion in alpha iron during compressive plastic flow, Trans. Metallurg. Soc. AIME. 227 (1963) 950.
32. Zemskov A. V., Le V. H., Unsteady thermoelastic diffusion vibrations of the Bernoulli – Euler beam under the action of a distributed transverse load, Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. (3) (2023) 75–85.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ЗЕМСКОВ Андрей Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского отдела кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национальный исследовательский университет), ведущий научный сотрудник лаборатории динамических испытаний Научно-исследовательского института механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4

azemskov1975@mail.ru

ORCID: 0000-0002-2653-6378

**ВЕСТЯК Анатолий Васильевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национальный исследовательский университет), Москва, Россия.

125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4

kaf311@yandex.ru

ORCID: 0000-0002-1905-9438

**ТАРЛАКОВСКИЙ Дмитрий Валентинович** – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией динамических испытаний Научно-исследовательского института механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, профессор кафедры 902 «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института (национальный исследовательский университет), Москва, Россия.

119991, Россия, г. Москва, Ленинские Горы, 1  
tdvhome@mail.ru

ORCID: 0000-0002-5694-9253

## THE AUTHORS

### **ZEMSKOV Andrei V.**

*Moscow Aviation Institute (National Research University)*  
*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University*  
4 Volokolamskoe Ave., Moscow, 125993, Russia  
azemskov1975@mail.ru

ORCID: 0000-0002-2653-6378

### **VESTYAK Anatoly V.**

*Moscow Aviation Institute (National Research University)*  
4 Volokolamskoe Ave., Moscow, 125993, Russia  
kaf311@yandex.ru

ORCID: 0000-0002-1905-9438

### **TARLAKOVSKII Dmitry V.**

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University*  
*Moscow Aviation Institute (National Research University)*  
1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia  
tdvhome@mail.ru

ORCID: 0000-0002-5694-9253

*Статья поступила в редакцию 27.03.2024. Одобрена после рецензирования 21.05.2024.*  
*Принята 21.05.2024.*

*Received 27.03.2024. Approved after reviewing 21.05.2024. Accepted 21.05.2024.*