Математическая физика

Научная статья
УДК 517.982.42
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.17204

О ПРИСОЕДИНЕННЫХ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЯХ ГЕЛЬФАНДА

А. С. Бердников [1], А. Л. Буляница [1, 2] ✉, К. В. Соловьев [2,1]

[1] Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия;

[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

✉ antbulyan@yandex.ru

Аннотация. В статье предлагаются уточненные определения для присоединенных однородных функций (ПОФ) вещественных переменных, имеющих большое прикладное значение для широкого круга задач. Понятие ПОФ было впервые сформулировано И. М. Гельфандом и З. Я. Шапиро в 1955 году, но возможности использования этих функций в разнообразных приложениях не исчерпаны и поныне. Предлагаемые определения наследуют базовую идею оригинальной статьи: определять цепочки новых функций с помощью рекуррентных линейных функциональных соотношений, начиная с некоторой одиночной однородной функции Эйлера; это позволяет использовать соответствующие результаты не только для дифференцируемых и непрерывных функций, но и для разрывных, в том числе разрывных во всех точках. Показана возможность построения развернутой непротиворечивой теории ПОФ вещественных переменных, определяемых с помощью цепочки линейных рекуррентных функциональных соотношений общего вида. Формулируются и доказываются базовые теоремы теории рассматриваемых функций. Обсуждаются дальнейшие пути обобщения указанного класса функций.

Ключевые слова: присоединенные однородные функции Гельфанда, однородные функции Эйлера, рекуррентные линейные функциональные соотношения

Финансирование: Работа выполнена в Институте аналитического приборостроения Российской академии наук (Санкт-Петербург) при частичной поддержке в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 075-00439-24-00 от 27.12.2023 г.

Для цитирования: Бердников А. С., Буляница А. Л., Соловьев К. В. О присоединенных однородных функциях Гельфанда // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 17. № 2. С. 39–60. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.17204

Original article
DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.17204

ON ASSOCIATED HOMOGENEOUS GELFAND FUNCTIONS

A. S. Berdnikov [1], A. L. Bulyanitsa [1, 2] ✉, K. V. Solovyev [2,1]

[1] Institute for Analytical Instrumentation, RAS, St. Petersburg, Russia;

[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

✉ antbulyan@yandex.ru

Abstract. The paper proposes refined definitions for associated homogeneous functions (AHFs) of real variables, which are of great practical importance for a wide range of problems. I. M. Gelfand and Z. Ya. Shapiro were the first in 1955 to introduce AHFs into scientific use. However, the possibilities of using these functions in various applications have not been exhausted to this day. The proposed definitions inherit the basic idea of the original paper to define chains of new functions using the recurrent linear functional relations, where some homogeneous Euler function is the starting point. This makes it possible to apply the corresponding results not only for differentiable and continuous functions, but also for discontinuous functions, including discontinuous ones at all points. The possibility of constructing a detailed consistent theory of AHFs of real variables, defined by a chain of linear recurrent functional relations of a general form, is shown. The basic theorems are formulated and proven. Further ways of generalizing the functions under consideration are discussed.

Keywords: associated homogeneous Gelfand functions, homogeneous Euler function, recurrent linear functional relations

Funding: The reported study was carried out at Institute for Analytical Instrumentation, RAS (St. Petersburg, Russia) within the framework of the State Assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, No. 075-00439-24-00, dated 27.12.2023.

For citation: Berdnikov A. S., Bulyanitsa A. L., Solovyev K. V., On associated homogeneous Gelfand functions, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 17 (2) (2024) 39–60. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.17204

Введение

В 1955 году в фундаментальной работе И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро [1] наряду с другими важными категориями была введена концепция бесконечных цепочек присоединенных однородных функций, которая была использована ее авторами также при конструировании обобщенных функций специального вида. В дальнейшем это понятие было использовано, практически без изменений, в монографии [2]. Это было, возможно, первое существенное продвижение общей теории однородных функций (см. §§187, 188 в книге [3]), полученное со времен Эйлера[1].

Подобно многим, внешне абстрактным математическим конструкциям, однородные функции Эйлера и, вследствие этого, присоединенные однородные функции Гельфанда, оказываются полезным инструментом для решения разнообразных прикладных задач, в том числе и достаточно далеких от первоначальных целей, для которых математическая конструкция предназначалась ее авторами. К таким приложениям относится и принцип подобия нерелятивистских траекторий заряженных частиц в электростатических полях, однородных по Эйлеру, который был предложен Ю. К. Голиковым [5 – 10]. В цитированных работах доказывается, что при надлежащем масштабировании начальных координат и начальной кинетической энергии (с сохранением начальных углов вылета) траектория заряженной частицы в рассматриваемом электростатическом поле масштабируется как единое целое. С практическими примерами использования этого эффективного инструмента при синтезе разнообразных электронно- и ионно-оптических систем можно ознакомиться в работах [11 – 21].

Новая идея, предложенная в статье [1], быстро получила развитие в трудах других математиков (см., например, работы [22 – 33]). К сожалению, в отличие от оригинальной работы [1], где для конструирования цепочки функций применялось дифференцирование по степени однородности, присоединенные однородные функции в последующих публикациях определяются аксиоматически с помощью двучленных рекуррентных

[1] В этой связи стоит упомянуть также теорию сферических функций – однородных гармонических функций трех переменных [4], которая была создана в XIX веке.

функциональных соотношений [2]. Но при таком подходе вместо предполагаемой бесконечной цепочки присоединенных однородных функций f_k исследователи фактически имеют дело лишь с узким подмножеством функций Гельфанда (а именно, случаями $k = 0$ и $k = 1$, см. далее). В результате доказываемые утверждения, вообще говоря, без серьезной ревизии определений и доказательств оказываются справедливыми только для этого узкого подмножества.

Однако это важное замечание не относится к результатам, полученным в исходной работе И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро. Как нам представляется, логика определения нового класса функций вещественных переменных [3] выглядит в работах [1, 2] следующим образом (более точное изложение соответствующих рассуждений вынесено в Приложение).

Как известно, однородные функции Эйлера степени p удовлетворяют функциональному соотношению

$$\forall\lambda \in R, \forall \mathbf{x} \in R^n:\ f_p\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\right) = \lambda^p f_p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right). \tag{1}$$

При $x_1 > 0$ эти функции можно представить в самом общем виде как

$$f_p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \left(x_1\right)^p h\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ \ldots\ , \frac{x_n}{x_1}\right), \tag{2}$$

где h – произвольная функция $(n - 1)$ вещественных переменных (см. §§187, 188 в книге [3]).

При k-кратном дифференцировании однородных функций (2) по параметру p (степень однородности функции) получаются функции $f_{p,k}$ с логарифмически-степенными особенностями. Действительно, с учетом формулы (2), при $x_1 > 0$ и $k \geq 0$ эти функции можно представить с точностью до вспомогательного множителя $1/k!$ как

$$f_{p,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{1}{k!}\left(x_1\right)^p \left(\ln x_1\right)^k h\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ \ldots\ , \frac{x_n}{x_1}\right), \tag{3}$$

где k – неотрицательное целое число (порядок функции) [4].

Основным содержанием публикации [1] является исследование интегралов вида

$$\int_0^b x^p \ln^k x \cdot \varphi(x)\, dx, \quad \int_{-a}^0 |x|^p \ln^k |x| \cdot \varphi(x)\, dx,$$

где $\varphi(x)$ – функции без особенностей, в том числе в нуле, которые можно дифференцировать по переменной x достаточное число раз.

Кроме того, важны исследования аналогичных многомерных интегральных выражений. Очевидно, что при $p \leq -1$ представленные интегралы расходятся, однако с помощью процедуры аналитического продолжения и аппарата теории обобщенных функций авторы публикации [1] показывают, как можно придать указанным интегралам осмысленное числовое значение, определив тем самым новый класс обобщенных функций.

Функции вида (3) образуют базис для функций с логарифмически-степенными особенностями, с помощью которого рассматриваемую задачу можно решить особенно эффективно. Дифференцирование по параметру p, а также разложение в ряды Лорана и в степенные ряды по параметру p служат в статье [1] (и особенно в монографии [2]) основным инструментом при конструировании новых обобщенных функций, значения которых ассоциируются с данными интегралами.

Цепочки функций $f_{p,k}$ представляют несомненный интерес и сами по себе. Авторы статьи [1] называют функции $f_{p,k}$ присоединенными однородными, по аналогии с

[2] Этот подход к определению присоединенных однородных функций упоминается в работах [1, 2] как альтернативный вариант, но фактически не используется, см. Приложение.

[3] В данной статье изложение ориентировано на функции вещественных переменных, хотя, конечно же, для функций комплексных переменных все эти результаты в основном также сохраняют силу.

[4] Отметим, что процедура дифференцирования требует осторожности, так как функция h в формуле (2) может зависеть явным или неявным образом от степени однородности p. Также требуется аргументированный переход от фиксированной степени однородности к континуально меняющемуся параметру, по которому возможно дифференцирование. В частности, степень однородности в формуле (2) может рассматриваться как функция $\omega(p)$ абстрактного параметра p, по которому выполняется дифференцирование, причем тождество $\omega(p) \equiv p$, вообще говоря, не гарантировано.

присоединенными собственными векторами линейных операторов [5], а дифференцирование по параметру p используют в качестве основного рабочего инструмента.

Однако наряду с определением присоединенных однородных функций как результата дифференцирования однородных функций по степени однородности p, в работах [1, 2] рассматривается также положение (не вполне точное и не слишком существенное для дальнейших рассуждений авторов), что цепочки функций $f_{p,k}$ можно рассматривать как частные решения следующих рекуррентных линейных функциональных соотношений:

$$\begin{aligned} &\text{при } k=0 \;\; f_{p,0}(\lambda\mathbf{x})=a(\lambda)f_{p,0}(\mathbf{x}),\\ &\text{при } k\ge 1 \;\; f_{p,k}(\lambda\mathbf{x})=a(\lambda)f_{p,k}(\mathbf{x})+b(\lambda)f_{p,k-1}(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{4}$$

с коэффициентами $a(\lambda)=\lambda^p,\ b(\lambda)=\lambda^p\ln\lambda.$

Из приведенного в работах [1, 2] анализа соотношений (4) для частных случаев $k = 0$ и $k = 1$ следует, что функции

$$a(\lambda) = \lambda^p,\ b(\lambda) = c\lambda^p\ln\lambda,$$

где $c \neq 0$ – произвольная константа, будут единственным вариантом, когда у системы (4) возможны (но не обязательно существуют) нетривиальные непрерывные решения.

Без ограничения общности можно использовать значение $c = 1$, так как параметр $c \neq 0$ сокращается при подстановке $f_{p,k}(\mathbf{x})\to c^k f^*_{p,k}(\mathbf{x})$. Можно убедиться, что цепочки функций $f_{p,k}$ вида (3) с индексом k, сдвинутым на величину $m \geq 0$, которые дополнены нулями, а именно –

$$f^{(m)}_{p,k}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{(k-m)!}(x_1)^p(\ln x_1)^{k-m}h_m\left(\dfrac{x_2}{x_1},\dfrac{x_3}{x_1},\ \ldots\ ,\dfrac{x_n}{x_1}\right) & \text{при } k\ge m\\ 0 & \text{при } k<m\end{cases} \tag{5}$$

а также их линейные комбинации [6] – это тоже решения функциональных соотношений (4), если таким решением является цепочка функций $f_{p,k}$.

В дальнейшем авторы работ [1, 2] ограничиваются функциями вида (3), так как для исследования интегралов с логарифмически-степенными особенностями и придания этим интегралам разумного смысла при отрицательных степенях не требуются более сложные конструкции.

Как уже упоминалось ранее, в отличие от оригинальных публикаций [1, 2], в последующих работах других авторов [22 – 33] в качестве формального определения присоединенных однородных функций используются двучленные функциональные соотношения (4), где $a(\lambda) = \lambda^p$, $b(\lambda) = \lambda^p \ln\lambda$. Но, к сожалению, прямая подстановка показывает, что, например, присоединенные однородные функции (3), которые получаются из однородных функций (2) при помощи многократного дифференцирования по параметру p (как это сделано в работах [1, 2]), не являются решениями функциональных соотношений (4) уже при $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} &f_{p,0}(\lambda\mathbf{x})=\lambda^p f_{p,0}(\mathbf{x}),\\ &f_{p,1}(\lambda\mathbf{x})=\lambda^p\ln\lambda f_{p,0}(\mathbf{x})+\lambda^p f_{p,1}(\mathbf{x}),\\ &f_{p,2}(\lambda\mathbf{x})=\frac{\lambda^p\ln^2\lambda}{2}f_{p,0}(\mathbf{x})+\lambda^p\ln\lambda f_{p,1}(\mathbf{x})+\lambda^p f_{p,2}(\mathbf{x}),\\ &f_{p,3}(\lambda\mathbf{x})=\frac{\lambda^p\ln^3\lambda}{6}f_{p,0}(\mathbf{x})+\frac{\lambda^p\ln^2\lambda}{2}f_{p,1}(\mathbf{x})+\lambda^p\ln\lambda f_{p,2}(\mathbf{x})+\lambda^p f_{p,3}(\mathbf{x}),\ldots\ . \end{aligned} \tag{6}$$

[5] Однородные функции Эйлера степени p можно рассматривать как собственные функции линейного оператора масштабирования $L[f]$: $f(\mathbf{x}) \to f(\lambda\mathbf{x})$, соответствующие собственным значениям λ^p.

[6] Других решений быть не может. При подстановке $t = x_1$, $t_2 = x_2/x_1$, $t_3 = x_3/x_1$, ..., $t_n = x_n/x_1$, после дифференцирования уравнений (4) по параметру λ в точке $\lambda = 1$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной t. Решением общего вида будут линейные комбинации функций вида (5), где константы h_m, определяющие начальные условия, – это произвольные функции от t_2, t_3 ..., t_n. Проделанные операции не являются обратимыми и поэтому нужно убедиться, что функции (5) действительно удовлетворяют соотношениям (4); однако проверка показывает, что при $k > 1$ это условие не выполняется.

Стоит отметить, что множитель $1/k!$ в формуле (3) важен и обеспечивает для нижней треугольной матрицы линейных соотношений (6) равенство коэффициентов

$$a_{k,j}(\lambda) = \lambda^p \ln^{k-j}(\lambda) / (k-j)!$$

вдоль диагоналей $k - j = \text{const}$, как это имеет место для двучленных соотношений (4).

Можно показать, что у двучленных систем функциональных соотношений вида (4) нетривиальные решения в принципе возможны лишь при $k = 0$ и $k = 1$ (см. статью [31]). Однако то обстоятельство, что в работах [1, 2] присоединенным однородным функциям (3) предписываются двучленные функциональные соотношения (4), а не функциональные соотношения (6) в виде нижней треугольной матрицы, следует рассматривать как досадную неточность, которая никак не влияет на дальнейшие результаты, полученные авторами работ [1, 2].

Действительно, при дифференцировании по параметру p соотношений (4) важно учитывать, что не только функции $f_{p,k}$, но и функциональные коэффициенты $a(\lambda) = \lambda^p$ и $b(\lambda) = \lambda^p \ln\lambda$ зависят от параметра p. Однако, как уже отмечено ранее, при фактическом конструировании новых обобщенных присоединенных функций соотношения (4) в публикациях [1, 2] не используются, а лишь играют роль формального определения, не получающего, впрочем, дальнейшего развития.

Таким образом, авторы многочисленных последующих публикаций, которые используют форму (4) как исходную при формулировке и доказательстве новых теорем, на наш взгляд, не вполне правы.

К сожалению, это усеченное определение присоединенных однородных функций вот уже более полувека встречается в разных публикациях (см., например, работы [22 − 30]). По этой причине соответствующие теоремы обладают гораздо меньшей общностью, чем предполагали их авторы, и, как уже было отмечено выше, имеют смысл лишь для вырожденных случаев $k = 0$ и $k = 1$, если не предпринимать аккуратной ревизии как для определений, так и для доказательств соответствующих теорем.

Возможно, что проблемы с определением присоединенных однородных функций в форме (4) хорошо известны соответствующим специалистам (согласно мнению отдельных экспертов), хотя обсуждения данного вопроса в доступных литературных источниках нам не удалось обнаружить. Однако довольно убедительное предположение упомянутых экспертов об очевидности и даже тривиальности как самой проблемы, так и способа ее исправления, к сожалению, противоречит тому положению вещей, что в течение долгого времени форму (4) используют в многочисленных публикациях и даже в авторитетных справочниках (см., например, справочник под ред. С. Г. Крейна [34], даже переизданного за границей).

По-видимому, любой математик, обративший внимание на несогласованность определений в работах [1, 2], будет ее исправлять на основе собственных субъективных представлений и предпочтений, с которыми не всегда могут согласиться другие исследователи. Например, альтернативный подход, который исследуется в статье [31], а также без лишнего акцентирования на проблеме используется в работах С. А. Альбеверио и др. [32, 33], равно как и похожие результаты в монографии [35], вероятно, не были оценены математическим сообществом в должной степени, так как работы с двучленными соотношениями (4) в качестве исходной посылки продолжают быть популярными (см., например, монографию [30], опубликованную в 2012 г.). Существует также опасность, что вместо единого направления исследований возникнет ряд разрозненных определений для близких, но не вполне совпадающих друг с другом математических объектов, для которых условия эквивалентности друг другу придется специально устанавливать и доказывать.

Стоит отметить, что вызывает определенные сомнения предложение (внесено в статье [31]) сохранить термин «присоединенные однородные функции» для двучленных соотношений (4), имеющих смысл лишь при $k = 0$ и $k = 1$, и использовать для математических объектов с нижней треугольной матрицей коэффициентов термин «квазиприсоединенные однородные функции». При этом двучленные соотношения Гельфанда, справедливые при $k = 0$ и $k = 1$, должны стать частными случаями предлагаемых квазиприсоединенных однородных функций. На наш взгляд, такой подход к проблеме основательно принизил бы ценность новаторских идей, предложенных в публикациях [1, 2], и определенно противоречит тому факту, что в оригинальных публикациях [1, 2] присоединенные однородные функции успешно используются при любых порядках k в явной форме. Переосмысление рассматриваемого понятия в статье [31] по сравнению с публикациями [1, 2] не настолько велико, чтобы было целесообразно вводить новый термин (см. также комментарии в Приложении).

Цель нашей статьи – показать, что линейные функциональные соотношения пригодны для корректного определения присоединенных однородных функций нескольких вещественных переменных как отдельного класса функций. Эти соотношения можно использовать как замену дифференцирования по степени однородности, которое требует определенной аккуратности, не вполне однозначно определено и не всегда осуществимо.

Для выполнения поставленной цели доказывается ряд теорем, которые должны продемонстрировать, что этот подход вполне продуктивен и заслуживает дальнейшего развития.

Элементарные определения и теоремы

Определение 1. Конечная либо бесконечная цепочка функций $f_k(\mathbf{x})$ ($k = 0, 1, 2, ...$) называется присоединенными однородными функциями общего вида степени p и порядка k, если существуют такие функции $a_{k,j}(\lambda)$ и $a(\lambda) \not\equiv 0$, образующие нижнюю треугольную матрицу коэффициентов с одинаковыми коэффициентами $a(\lambda)$ вдоль главной диагонали, что для $\forall \lambda > 0$ и $\forall \mathbf{x} \in R^n$ выполнены следующие линейные функциональные соотношения:

$$\begin{aligned} &\text{при } k = 0 \quad f_0(\lambda \mathbf{x}) = a(\lambda) f_0(\mathbf{x}), \\ &\text{при } k \geq 1 \quad f_k(\lambda \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j}(\lambda) f_j(\mathbf{x}) + a(\lambda) f_k(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{7}$$

Определение 2. Конечная либо бесконечная цепочка функций $f_k(\mathbf{x})$ ($k = 0, 1, 2, ...$) называется нормированными присоединенными однородными функциями степени p и порядка k, если для $\forall \lambda > 0$ и $\forall \mathbf{x} \in R^n$ выполнены соотношения (7), в которых коэффициенты $a_{k,j}(\lambda) = a_{k-j}(\lambda)$ и $a(\lambda) = a_0(\lambda) \not\equiv 0$ образуют нижнюю треугольную матрицу с одинаковыми коэффициентами вдоль любых диагоналей $k - j = \text{const}$.

Определение 3. Конечная либо бесконечная цепочка функций $f_k(\mathbf{x})$ ($k = 0, 1, 2, ...$) называется фундаментальными присоединенными однородными функциями степени p и порядка k, если для $\forall \lambda > 0$ и $\forall \mathbf{x} \in R^n$ выполнены соотношения (7), в которых коэффициенты задаются явными формулами

$$a_{k,j}(\lambda) = a_{k-j}(\lambda) = \lambda^p \ln^{k-j}(\lambda) / (k-j)!\,, \quad a(\lambda) = a_0(\lambda) = \lambda^p.$$

Определение 1 задает максимально широкие условия типа (4), когда решениями будут линейные комбинации, составленные из функций (3) с постоянными, но не вполне произвольными коэффициентами (см. далее Теоремы 1 и 4).

Определение 2 приводит к более узкому классу функций, зато позволяет формулировать и доказывать дополнительные утверждения, которые в общем виде не выполняются. Оно использует идею авторов работ [1, 2] о заранее неизвестных функциональных коэффициентах, одинаковых вдоль диагоналей матрицы. В этом случае решениями будут линейные комбинации, составленные из функций (3) с более узким набором постоянных, но не вполне произвольных коэффициентов.

Определение 3 задает максимально тесные ограничения для линейных функциональных соотношений (7), когда одним из возможных решений, если не единственным (к сожалению, это требование недостижимо), будут функции вида (3).

Отдельные утверждения для нормированных присоединенных однородных функций и фундаментальных присоединенных однородных функций здесь не приводятся, если они являются следствиями соответствующих Теорем для присоединенных однородных функций общего вида.

Замечание 1. Функции в Определении 1 представляют собой, по-видимому, наиболее общий случай рассматриваемого подхода, когда разрабатываемая теория еще имеет обозримый вид.

Функции в Определении 2 названы нормированными ввиду наличия нормирующих множителей $1/k!$ в формуле (3). Эти множители необходимы для того, чтобы коэффициенты $a_{k,j}(\lambda)$ для нижней треугольной матрицы были одинаковыми вдоль диагоналей $k - j = \mathrm{const}$ (сравните с обозначениями в работах [31 – 33], где нормирующий множитель авторами не используется, а множители перед функциональными коэффициентами, возникающие по этой причине, игнорируются).

Функции в Определении 3 названы фундаментальными, так как любые присоединенные однородные функции общего вида из Определения 1 представляют собой линейные комбинации функций вида (3), хотя и с не вполне произвольными коэффициентами, выбранными специальным образом (см. далее Теоремы 1 и 4).

Замечание 2. Условия вида $\forall\lambda > 0$ и $\forall\mathbf{x} \in R^n$ могут показаться слишком жесткими для некоторых приложений (например, при рассмотрении электронно- и ионно-оптических систем с электрическими и магнитными полями, однородными по Эйлеру [5 – 21]). Эти условия можно заменить более практичными. Пусть $\Omega \subset R^n$ – это некоторая область n-мерного пространства, причем для $\forall\mathbf{x} \in \Omega$ определены такие числа $\lambda_a(\mathbf{x})$ и $\lambda_b(\mathbf{x})$, удовлетворяющие условиям

$$0 < \lambda_a(\mathbf{x}) < 1 < \lambda_b(\mathbf{x}),$$

для которых точки $\lambda\mathbf{x} \in \Omega$ при

$$\lambda_a(\mathbf{x}) \le \lambda \le \lambda_b(\mathbf{x}).$$

Тогда условия $\forall\mathbf{x} \in R^n$ и $\forall\lambda > 0$ можно с минимальными изменениями определений, а также формулировок и доказательств теорем, заменить условиями

$$\forall\mathbf{x} \in \Omega \ \text{ и } \ \forall\lambda \in \left[\lambda_a(\mathbf{x}), \lambda_b(\mathbf{x})\right].$$

Замечание 3. Если в соотношениях (7) функция $f_0(\mathbf{x})$ непрерывна хотя бы в одной точке, в которой ее значение не равно нулю, то функция $a(\lambda)$ отлична от нуля при $\lambda = 1$, непрерывна в точке $\lambda = 1$ и тем самым непрерывна и строго положительна на всей положительной полуоси $\lambda > 0$. Кроме того,

$$\forall\lambda, \mu > 0 : \ a(\lambda\mu) = a(\lambda)a(\mu)$$

(см. далее Теорему 2).

В этом случае $a(\lambda) = \lambda^p$ является единственно возможным вариантом (см. монографию [36]), а $f_0(\mathbf{x})$ будет положительно-однородной функцией Эйлера степени p (см. §§ 187, 188 в работе [3]). Всюду разрывные функции $f_0(\mathbf{x})$ образуют особый класс функций, которые рассматриваются отдельно от положительно-однородных функций Эйлера, и их исследованию посвящена Теорема 6. Теоремы 1 и 2 формулируются таким образом, чтобы они были применимы как для непрерывных, так и для всюду разрывных функций.

Теорема 1. *Пусть при* $\forall\lambda, \mu > 0$ *коэффициенты* $a(\lambda)$ *и* $a_{k,j}(\lambda)$ *в соотношениях (7) удовлетворяют равенствам*

$$\begin{aligned} & a(\lambda\mu) = a(\lambda)a(\mu), \\ & \forall\, k \ge 1, j < k : \ a_{k,j}(\lambda\mu) = \sum_{s=j}^{k} a_{k,s}(\lambda)\, a_{s,j}(\mu), \end{aligned} \tag{8}$$

где $a(\lambda) \not\equiv 0$, $a_{k,k}(\lambda) = a(\lambda)$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. У системы соотношений (7) существуют решения, отличные от тождественного нуля, которые можно представить в виде

$$f_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} a(x_1)\, h_0\!\left(\dfrac{x_2}{x_1}, \dfrac{x_2}{x_1}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_1}\right), & x_1 > 0, \\[2ex] a(|x_1|)\, g_0\!\left(\dfrac{x_2}{x_1}, \dfrac{x_2}{x_1}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_1}\right), & x_1 < 0; \end{cases} \tag{9}$$

$$f_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} a(x_1)\, h_k\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j}(x_1)\, h_j\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right), & x_1 > 0, \\ a(|x_1|)\, g_k\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j}(|x_1|)\, g_j\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right), & x_1 < 0, \end{cases} \tag{10}$$

где h_j, g_j – произвольные функции (n – 1) переменных.

2. *Других решений у системы соотношений (7) нет: любое ее решение можно представить в виде (9), (10) при надлежащем выборе функций h_j, g_j.*

3. *Для функций, заданных в формах (9) и (10), выполнены условия*

$$\begin{gathered} h_j(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f_j(1, t_2, t_3, \ldots, t_n), \\ g_j(t_2, t_3, \ldots, t_n) = f_j(-1, -t_2, -t_3, \ldots, -t_n). \end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство. Формула (9) для случаев $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$ по отдельности для положительно-однородных функций следует из рассуждений, использованных в работе [3,§§ 187, 188] для однородных функций Эйлера.

Следуем методу индукции: пусть для $x_1 > 0$ параметризация (10) справедлива для функций f_j при j = 0, 1, ..., k – 1. Запишем функцию f_k в виде (11), где функции h_j при j = 0, 1, ..., k – 1 унаследованы от предыдущих шагов, а в качестве h_k используется произвольная функция h_k (x_1, x_2/x_1, ..., x_n/x_1) от n переменных. Очевидно, что на этом шаге свобода выбора функции f_k никак не ограничивается. После подстановки этого выражения в соотношение (7) с индексом k и дополнительных алгебраических преобразований получаем условие

$$\forall\lambda > 0:\ h_k\left(\lambda x_1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_2}{x_1}\right) = h_k\left(x_1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_2}{x_1}\right).$$

Из него следует, что функция h_k от первого аргумента не зависит, а значит, для функции f_k, удовлетворяющей соотношениям (7), обязано выполняться условие (10). Все алгебраические преобразования обратимы, поэтому из представления функции f_k в виде (10), где функция h_k от первого аргумента не зависит, следует выполнение соотношений (7) для индекса k. Рассуждения для $x_1 < 0$ дублируют рассуждения для $x_1 > 0$.

Теорема 1 доказана.

Замечание 4. Условия (8) – достаточные, но не необходимые для того, чтобы у соотношений (8) были нетривиальные решения. Однако, как показывают Теоремы 2 и 3 (см. далее), условия (8) носят вполне общий характер, а примеры, когда они не выполняются, – это редкие исключения из общего правила. Для нормированных присоединенных однородных функций (см. Определение 2) условия (8) являются не только достаточными, но и необходимыми, если функция f_0 – не тождественный нуль. Функции $a_{k,j}(\lambda)$ и $a(\lambda)$ в Определении 3 сами по себе удовлетворяют соотношениям (8). В частности, поэтому для фундаментальных присоединенных однородных функций самая общая форма записи имеет вид (9) и (10) после подстановки в эти формулы функций

$$a_{k,j}(\lambda) = \lambda^p \ln^{k-j}(\lambda) / (k-j)!\,,\ a(\lambda) = a_{k,k}(\lambda) = \lambda^p.$$

Теорема 2. *Если у соотношений (7) имеется решение в виде линейно-независимых функций $f_k(\mathbf{x})$, то при $\forall\lambda,\mu > 0$ коэффициенты $a(\lambda)$ и $a_{k,j}(\lambda)$ определяются единственно возможным образом и обязаны удовлетворять соотношениям (8).*

Доказательство. Если $f_0(\mathbf{x}) \neq 0$ хотя бы в одной точке, то при k = 0 условия (7) приводят к равенствам вида

$$f_0(\lambda\mu\mathbf{x}) = a(\lambda\mu) f_0(\mathbf{x}) = a(\lambda) f_0(\mu\mathbf{x}) = a(\lambda) a(\mu) f_0(\mathbf{x}),$$

т. е. для $\forall\lambda,\mu > 0: a(\lambda\mu) = a(\lambda) a(\mu)$.

Отсюда, в частности, следует, что $a(\lambda)$ – либо тождественный нуль, либо строго больше нуля во всех точках.

По индукции, при $k > 0$ из соотношений (7), рассматриваемых в точке $\lambda\mu\mathbf{x}$, получаются остальные соотношения (8). Если же предположить, что для некоторого набора линейно-независимых функций $f_k(\mathbf{x})$ соотношения (7) выполняются сразу для двух наборов функций $a_{k,j}(\lambda)$ и $\bar{a}_{k,j}(\lambda)$, то немедленно следуют равенства $a(\lambda) \equiv \bar{a}(\lambda), \forall k > j:\ a_{k,j}(\lambda) \equiv \bar{a}_{k,j}(\lambda)$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если в соотношениях (7) $a(\lambda) \neq 0$ и при $\forall k \geq 1$ коэффициенты $a_{k,k-1}(\lambda)$ не являются тождественными нулями, то любая цепочка функций $f_k(\mathbf{x})$, удовлетворяющая соотношениям (7), состоит из линейно-независимых функций, если начальная функция $f_0(\mathbf{x})$ – не тождественный нуль.*

Доказательство. Допустим, что f_k – это первая функция, линейно-зависимая от предыдущих функций f_j ($j = 0, 1, ..., k - 1$) . Представим f_k как линейную комбинацию функций f_j с постоянными коэффициентами и подставим ее в соотношение (7) с индексом k. Сгруппируем множители при разных функциях f_j. Множитель при функции f_{k-1} окажется равным $a_{k,k-1}(\lambda)$ и должен быть равным нулю в силу линейной независимости функций f_j; но это приводит к противоречию, при условии, что $a_{k,k-1}(\lambda)$ не равно нулю хотя бы при одном значении λ.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если каждый из коэффициентов $a(\lambda)$ и $a_{k,j}(\lambda)$ в соотношениях (8) непрерывен хотя бы в одной точке, причем $a(\lambda) \not\equiv 0$, то справедливы следующие утверждения.*

1. Эти коэффициенты имеют вид

$$a(\lambda) = \lambda^p \quad и \quad a_{k,j}(\lambda) = \lambda^p b_{k,j}(\ln\lambda),$$

где $b_{k,j}(t)$ – полиномы степени $k - j$, чем обеспечивается дифференцируемость любого порядка для функций $a(\lambda)$ и $a_{k,j}(\lambda)$.

2. *Полиномы $b_{k,j}$ однозначным образом определяются из следующих рекуррентных дифференциальных соотношений:*

$$\begin{aligned} &при\ \ \forall k \geq 0\ \ b_{k,k}(t) \equiv 1, \\ &при\ \ \forall k \geq 1,\ \ j = k-1,\ k-2,\ \ldots,\ 0\ \ b'_{k,j}(t) = \sum_{s=j}^{k-1} p_{k,s} b_{s,j}(t);\ b_{k,j}(0) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

либо (что приводит к тому же самому результату) из следующих рекуррентных дифференциальных соотношений:

$$\begin{aligned} &при\ \ \forall k \geq 0\ \ b_{k,k}(t) \equiv 1, \\ &при\ \ \forall k \geq 1,\ \ j = k-1, k-2,\ \ldots,\ 0\ \ b'_{k,j}(t) = \sum_{s=j+1}^{k} b_{k,s}(t)\, p_{s,j};\ \ b_{k,j}(0) = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $p_{k,j}$ – произвольные константы, причем $a'_{k,j}(1) = b'_{k,j}(0) = p_{k,j}$.

3. *Эквивалентные друг другу рекуррентные условия (12) и (13) будут как необходимыми, так и достаточными для выполнения соотношений (8) с функциями $a(\lambda)$ и $a_{k,j}(\lambda)$.*

Доказательство. Из условия $a(\lambda\mu) = a(\lambda)a(\mu)$ для функций $a(\lambda)$, не равных нулю и непрерывных хотя бы в одной точке, следует условие $a(\lambda) = \lambda^p$ с некоторым вещественным показателем степени p. После перехода от функций $a_{k,j}$ к новым функциям $b_{k,j}$ в соответствии с равенствами:

$$при\ j < k\ \ a_{k,j}(\lambda) = \lambda^p b_{k,j}(\ln\lambda),$$

$$при\ j = k\ \ a(\lambda) = a_{k,k}(\lambda) = \lambda^p b_{k,k}(\ln\lambda) = \lambda^p,$$

из мультипликативных соотношений (8) после подстановки $y = \ln\lambda$, $z = \ln\mu$ получаются эквивалентные аддитивные соотношения для функций $b_{k,j}$:

$$\begin{aligned} &\text{при } \forall k \ge 1, 0 \le j < k \;\; b_{k,j}(y+z) = \sum_{s=j}^{k} b_{k,s}(y) b_{s,j}(z), \\ &\text{при } \forall k \ge 0 \;\; b_{k,k}(y) = 1, \end{aligned} \tag{14}$$

где для функций $b_{k,k}$ и $b_{k,j}$ также выполняются начальные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при } \forall k \ge 1, \; 0 \le j < k \;\; b_{k,j}(0) = 0, \\ &\text{при } \forall k \ge 0 \;\; b_{k,k}(0) = 1 \end{aligned} \tag{15}$$

(равенства (15) выводятся по индукции из условия $b_{k,k}(y) \equiv 1$ и соотношений (14), рассматриваемых при $y = z = 0$).

Для дифференцируемых функций соотношения (12) и (13) являются необходимыми условиями: соотношения (12) получаются при дифференцировании соотношений (14) по y в точке $y = 0$ и подстановке $z \to t$, а соотношения (13) – при их дифференцировании по z в точке $z = 0$ и подстановке $y \to t$. С помощью системы условий (12) либо системы условий (13) функции (полиномы) $b_{k,j}$ с последовательно перебираемыми индексами $k = 0, 1, 2, ..., j = k, k - 1, ..., 0$ восстанавливаются единственным образом, как только зафиксирован набор констант $p_{k,j}$ ($k > 0$, $0 \le j \le k - 1$).

Для обратного перехода от соотношений (12) к соотношениям (14) рассмотрим при $k \ge 0$ и $0 \le j \le k$ функции

$$\Phi_{k,j}(y,z) = b_{k,j}(y+z) - \sum_{s=j}^{k} b_{k,s}(y) b_{s,j}(z).$$

При выполнении соотношений (12) производная функции $\Phi_{k,j}(y, z)$ по переменной y при $j < k$ в силу условия $b'_{k,k}(y) \equiv 0$ подчиняется равенству

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{k,j}(y,z)}{\partial y} &= b'_{k,j}(y+z) - \sum_{m=j}^{k} b'_{k,m}(y) b_{m,j}(z) = \\ &= \sum_{s=j}^{k-1} p_{k,s} b_{s,j}(y+z) - \sum_{m=j}^{k-1} \left(\sum_{s=m}^{k-1} p_{k,s} b_{s,m}(y) b_{m,j}(z) \right) = \\ &= \sum_{s=j}^{k-1} p_{k,s} b_{s,j}(y+z) - \sum_{s=j}^{k-1} \left(\sum_{m=j}^{s} p_{k,s} b_{s,m}(y) b_{m,j}(z) \right) = \\ &= \sum_{s=j}^{k-1} p_{k,s} \left(b_{s,j}(y+z) - \sum_{m=j}^{s} b_{s,m}(y) b_{m,j}(z) \right) = \\ &= \sum_{s=j}^{k-1} p_{k,s} \Phi_{s,j}(y,z). \end{aligned}$$

Если $\partial\Phi_{k,j}(y, z)/\partial y \equiv 0$, то $\Phi_{k,j}(y, z) \equiv \Phi_{k,j}(0, z) \equiv 0$. Кроме того, $\Phi_{k,k}(y, z) \equiv 0$ при $\forall k \ge 0$. Поэтому по индукции, $\Phi_{k,j}(y, z) \equiv 0$ при любых $k \ge 0$, $0 \le j \le k$. Это означает, что соотношения (14) справедливы, если выполнены соотношения (12).

Аналогичным образом, при дифференцировании функции $\Phi_{k,j}(y, z)$ по z доказывается достаточность соотношений (13) для соотношений (14). Поскольку из условий (12) следуют условия (14), а из условий (14) – условия (13) и наоборот, то системы рекуррентных соотношений (12) и (13) эквивалентны друг другу (что не всегда очевидно с первого взгляда).

Пусть теперь функции $b_{k,j}$ – всего лишь непрерывны в отдельных точках. Требуется доказать, что в этом случае функции $b_{k,j}(t)$, если они подчиняются условиям (14), дифференцируемы во всех точках и вследствие этого определяются рекуррентными соотношениями (12) либо (13).

По определению, $b_{k,k}(t) = 1$, а для $k \ge 1$, $j = k - 1$ соотношение (8) сводится к аддитивному функциональному уравнению Коши относительно функции $b_{k,k-1}$. Его решение, ввиду своей непрерывности хотя бы в одной точке, обязано быть линейной и тем самым всюду дифференцируемой функцией: $b_{k,k-1}(t) = p_{k,k-1}t$ [36]. Такая функция $b_{k,k-1}(t)$ подчиняется соотношениям (12) и (13) с константой $p_{k,k-1}$.

Следуем методу индукции: пусть $0 \le j \le k-2$ и требуемое утверждение доказано для функций $b_{k,k}(t)$, $b_{k,k-1}(t)$, …, $b_{k,j+1}(t)$. Воспользуемся рекуррентными соотношениями (12) (при использовании соотношений (13) рассуждения аналогичны).

Сконструируем функцию $\tilde{b}_{k,j}(t)$, с помощью условия

$$\tilde{b}'_{k,j}(t) = \sum_{s=j+1}^{k-1} b_{k,s}(t)\, p_{s,j};\ \tilde{b}_{k,j}(0) = 0.$$

Оно соответствует условию (12) с константой $p_{k,j} = 0$ и константами $p_{s,j}$, унаследованными от предыдущих шагов индукции. Такая функция $\tilde{b}_{k,j}(t)$ бесконечно дифференцируема и удовлетворяет условию (14):

$$\tilde{b}_{k,j}(y+z) = \tilde{b}_{k,j}(y) b_{j,j}(z) + \sum_{s=j+1}^{k-1} b_{k,s}(y) b_{s,j}(z) + b_{k,k}(y)\tilde{b}_{k,j}(z) =$$

$$= \tilde{b}_{k,j}(y) + \sum_{s=j+1}^{k-1} b_{k,s}(y) b_{s,j}(z) + \tilde{b}_{k,j}(z).$$

Пусть $b_{k,j}(t) = \tilde{b}_{k,j}(t) + c(t)$, где вспомогательная функция $c(t)$ обязана быть непрерывной в тех же точках, что и функция $b_{k,j}(t)$. Для функции $b_{k,j}(t)$ выполняется условие (14). Это означает, что функция $c(t)$ удовлетворяет аддитивному уравнению Коши и, в силу своей непрерывности, будет всюду дифференцируемой линейной функцией: $c(t) = p_{k,j}t$ [36]. Поэтому функция $b_{k,j}(t)$ бесконечно дифференцируема во всех точках и удовлетворяет соотношениям (12) и (13), где к списку констант добавляется константа $p_{k,j}$.

Теорема 4 доказана.

Замечание 5. Полиномы $b_{k,j}(t)$ определяются однозначным образом из рекуррентных дифференциальных соотношений (12) либо (13), как только зафиксированы константы $p_{k,j}$. Для нормированных присоединенных однородных функций справедливы равенства $b_{k,j}(t) = c_{k-j}(t)$ и $p_{k,j} = q_{k-j}$, где полиномы $c_k(t)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$c_0(t) = 1;\ \forall k \ge 1:\ c'_k(t) = \sum_{s=1}^{k} q_s c_{k-s}(t) = \sum_{s=0}^{k-1} q_{k-s} c_s(t),\ c_k(0) = 0$$

с участием констант q_k. Наконец, для фундаментальных присоединенных однородных функций $p_{k,j} = 0$ при $j = 0, 1, ..., k-2$, $p_{k,k-1} = 1$ и $b_{k,j}(t) = t^{k-j}/(k-j)!$

Теорема 5 (критерий Эйлера). *Пусть цепочка функций $f_k(\mathbf{x})$ ($k = 0, 1, 2, ...$) состоит из дифференцируемых функций, для которых при $\forall \mathbf{x} \in R^n$ (может быть, за исключением точки $\mathbf{x} = 0$) выполнены соотношения:*

$$\begin{aligned} &\text{при } k=0 \quad x_1 \frac{\partial f_0(\mathbf{x})}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_0(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f_0(\mathbf{x})}{\partial x_n} = p f_0(\mathbf{x}), \\ &\text{при } k \ge 1 \quad x_1 \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_n} = p f_k(\mathbf{x}) + \sum_{j=0}^{k-1} p_{k,j} f_j(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{16}$$

с некоторыми константами p и $p_{k,j}$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Функции $f_k(\mathbf{x})$ удовлетворяют соотношениям (7), в которых*

$$a(\lambda) = \lambda^p \ \text{ и } \ a_{k,j}(\lambda) = \lambda^p b_{k,j}(\ln \lambda),$$

где функции $b_{k,j}(y)$ — полиномы степени $k-j$, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям (12) и (13) с константами $p_{k,j}$, входящими в соотношения (16).

2. *Если дифференцируемые при $\forall \mathbf{x} \in R^n$ (может быть, за исключением точки $\mathbf{x} = 0$) функции $f_k(\mathbf{x})$ и дифференцируемые при $\forall \lambda \ge 0$ (может быть, за исключением $\lambda = 0$) функции $a(\lambda)$ и $a_{k,j}(\lambda)$ удовлетворяют системе функциональных соотношений (8), то выполнены соотношения (16) с константами $p = a'(1)$ и $p_{k,j} = a'_{k,j}(1)$.*

Доказательство. Как и дифференциальный критерий Эйлера для однородных функций (см. §§ 187, 188 в работе [3]), дифференциальные соотношения (16) необходимым образом следуют из соотношений (7) после их дифференцирования по λ в точке $\lambda = 1$. Для доказательства достаточности соотношений (16), по аналогии с выкладками в указанных параграфах работы [3], используются функции $\Omega_k(\lambda,\mathbf{x})$:

$$\Omega_k(\lambda,\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k} \lambda^{-p} b_{k,j}(-\ln\lambda) f_j(\lambda\mathbf{x}),$$

где функции $b_{k,j}(t)$ вычисляются в соответствии с соотношениями (12) и (13) при участии констант $p_{k,j}$ из соотношений (16).

При дифференцировании функций $\Omega_k(\lambda,\mathbf{x})$ по λ, в точках $\mathbf{x} \neq 0$ получается взвешенная сумма соотношений (16), вычисленных в точке $\lambda\mathbf{x}$, которые равны нулю при всех λ и $\mathbf{x}$. Поскольку производная функции $\Omega_k(\lambda,\mathbf{x})$ по параметру λ тождественно равна нулю, выполняется тождество $\Omega_k(\lambda,\mathbf{x}) \equiv \Omega_k(1,\mathbf{x})$; отсюда после подстановок $\lambda \to 1/\mu$, $\mathbf{x} \to \mu\mathbf{x}$, $\mu \to \lambda$ получаются соотношения (7) для индекса k с функциями $a(\lambda) = \lambda^p$ и $a_{k,j}(\lambda) = \lambda^p b_{k,j}(\ln\lambda)$.

Теорема 5 доказана.

Замечание 6. Теорема 5 для присоединенных однородных функций общего вида представляет собой аналог критерия Эйлера для однородных функций (см. §§ 187, 188 в работе [3]). Для нормированных присоединенных функций, у которых $a_{k,j}(t) = a_{k-j}(t)$ (см. Определение 2), в соотношениях (16) справедливо равенство $p_{k,j} = q_{k-j}$, где константы q_j определяются условиями $q_j = a'_j(1)$.

Следовательно критерий Эйлера для нормированных присоединенных однородных функций имеет вид

$$\text{при } k=0 \quad x_1\frac{\partial f_0(\mathbf{x})}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f_0(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f_0(\mathbf{x})}{\partial x_n} = pf_0(\mathbf{x}),$$

$$\text{при } k\geq 1 \quad x_1\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_n} = pf_k(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{k} q_j f_{k-j}(\mathbf{x}).$$

Соответственно для фундаментальных присоединенных функций (см. Определение 3) в соотношениях (16) справедливы равенства $p_{k,k-1} = 1$ и $p_{k,j} = 0$ при $0 \leq j \leq k-2$, а критерий Эйлера приобретает следующий вид:

$$\text{при } k=0 \quad x_1\frac{\partial f_0(\mathbf{x})}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f_0(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f_0(\mathbf{x})}{\partial x_n} = pf_0(\mathbf{x}),$$

$$\text{при } k\geq 1 \quad x_1\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_n} = pf_k(\mathbf{x}) + f_{k-1}(\mathbf{x}).$$

Замечание 7. Имеются примеры, когда одна и та же цепочка дифференцируемых функций $f_k(\mathbf{x})$ удовлетворяет сразу нескольким системам вида (7) с разными коэффициентами $a_{k,j}(\lambda)$. В этом случае функции

$$a(\lambda) = \lambda^p \text{ и } a_{k,j}(\lambda) = \lambda^p b_{k,j}(\ln\lambda)$$

соответствуют лишь одной из многих возможных систем вида (7) для рассматриваемых функций $f_k(\mathbf{x})$. При этом $b_{k,j}(y)$ определяются из рекуррентных соотношений (12) либо (13) с константами $p_{k,j}$, взятыми из равенств (16).

Однако если функции $f_k(\mathbf{x})$ – линейно-независимые (для чего достаточно, чтобы при $\forall k \geq 1$: $p_{k,k-1} \neq 0$ и чтобы функция $f_0(\mathbf{x})$ не была тождественным нулем (см. Теорему 3)), то коэффициенты $a(\lambda)$ и $a_{k,j}(\lambda)$ системы (7) определены единственно возможным образом (см. Теорему 2) и тем самым обязаны совпадать с выражениями

$$a(\lambda) \text{ и } a_{k,j}(\lambda) = \lambda^p b_{k,j}(\ln\lambda),$$

которые были использованы при доказательстве Теоремы 5.

Присоединенные однородные функции, разрывные во всех точках

Если каждый из коэффициентов $a(\lambda)$ и $a_{k,j}(\lambda)$ в соотношениях (7) непрерывен хотя бы в одной точке, то Теорема 4 дает исчерпывающий ответ на вопрос, какой вид должны иметь коэффициенты $a(\lambda)$ и $a_{k,j}(\lambda)$, для того чтобы выполнялись функциональные соотношения (8), а у системы (7) имелись нетривиальные решения (общий вид этих решений представлен в Теореме 1). При этом коэффициенты $a(\lambda)$ и $a_{k,j}(\lambda)$, непрерывные хотя бы в одной точке, будут бесконечно дифференцируемыми во всех точках $\lambda > 0$. Существуют, однако, всюду разрывные коэффициенты $a(\lambda)$ и $a_{k,j}(\lambda)$, для которых выполняются соотношения (8), и тем самым, в соответствии с Теоремой 1, имеются нетривиальные всюду разрывные решения системы (7).

Теорема 6. *Пусть* $\theta_0(t)$ и $\theta_{k,j}(t)$ − *произвольные (вообще говоря, всюду разрывные) решения аддитивного функционального уравнения Коши* [36]:

$$\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y).$$

Тогда решением общего вида для функциональных соотношений (8) будут функции

$$a(\lambda) = \exp\left[\theta_0(\ln\lambda)\right] \text{ и } a_{k,j}(\lambda) = \exp\left[\theta_0(\ln\lambda)\right]\varphi_{k,j}(\ln\lambda),$$

где функции $\varphi_{k,j}(t)$ *получаются через подстановки* $p_{k,j} \to \theta_{k,j}(t)$, $y \to 1$ *из функций* $b_{k,j}(y)$, *которые задаются рекуррентными соотношениями (12) либо (13). При* $\theta_0(t) = pt$ и $\theta_{k,j}(t) = p_{k,j}t$ *эти решения совпадают с функциями, используемыми в Теореме 4.*

К сожалению, в нашем распоряжении нет достаточно короткого доказательства Теоремы 6, чтобы изложить его в данной статье хотя бы в сжатом виде. Оно выходит за рамки настоящей статьи и требует отдельного рассмотрения. Доказательству этой теоремы будет посвящена отдельная публикация.

Взаимно-однородные присоединенные функции

Функции, рассмотренные в статье [39], выражают случай, когда фундаментальные присоединенные однородные функции являются комплекснозначными и могут быть представлены как сумма вещественной и мнимой частей, функционально не зависящих друг от друга, а степень однородности есть комплексное число. И тогда каждое из уравнений (7) превращается в пару линейных функциональных соотношений одинаковой длины, записанных для пар взаимно-однородных присоединенных функций. Аналогичным образом при переходе к комплекснозначным функциям и комплексным степеням однородности будут преобразовываться и уравнения (7) общего вида.

По всей видимости, из подобных парных соотношений, записанных в самом общем виде, не удастся получить никаких других классов функций, однако эта проблема нуждается в отдельном исследовании. Вопрос о возможности получать интересные математические объекты, если аналогичным образом объединять в единое целое тройки, четверки и т. д. функций, для которых характерны плотные матрицы линейных функциональных соотношений общего вида [37], а затем распространять полученные уравнения на бесконечную блочно-треугольную структуру присоединенных линейных функциональных соотношений, также остается открытым. Частный случай, когда матрица коэффициентов является блочно-треугольной (вместо нижней треугольной матрицы коэффициентов, соответствующей линейным функциональным соотношениям (7)), а «зародышем» цепочки присоединенных функций выступает несколько однородных функций с разными степенями однородности, кратко рассмотрен далее в разделе «Векторно-присоединенные однородные функции».

Обобщенные присоединенные однородные функции

Если применить подход, предложенный в работах [1, 2], то результаты, полученные в предыдущем разделе, можно перенести на обобщенные функции (линейные непрерывные функционалы, заданные в соответствующем линейном пространстве пробных функций). Это позволяет правильно определить обобщенные присоединенные однородные функции общего вида, обобщенные нормированные присоединенные однородные функции и обобщенные фундаментальные однородные функции.

Очевидно, что всюду разрывные (и тем самым нигде не интегрируемые) присоединенные однородные функции не могут иметь аналогов в классе обобщенных функций. Более детальное рассмотрение этих интересных проблем (в частности, формулировка и доказательство дифференциального критерия Эйлера для обобщенных присоединенных однородных функций) планируется представить в отдельной специальной статье.

Векторно-присоединенные однородные функции

Дальнейшим развитием идеи И. М. Гельфанда о присоединенных однородных функциях являются векторно-присоединенные функции, где исходным «зародышем» для цепочки функций будут сразу несколько однородных по Эйлеру функций с разными степенями однородности.

Определение 4. Цепочка функций $f_k^{(i)}(\mathbf{x})$ (k = 0, 1, 2, ...; i = 1, 2, ... m) называется m-присоединенными (векторно-присоединенными) однородными функциями общего вида, если для $\forall\lambda > 0$ и $\forall \mathbf{x} \in R^n$ при i = 1, 2, ... m выполнены условия вида

$$\begin{aligned} &\text{при } k = 0 \quad f_0^{(i)}(\lambda\mathbf{x}) = a_i(\lambda) f_0^{(i)}(\mathbf{x}), \\ &\text{при } k \ge 1 \quad f_k^{(i)}(\lambda\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{s=1}^{m} a_{k,j}^{(i,s)}(\lambda) f_j^{(s)}(\mathbf{x}) + a_i(\lambda) f_k^{(i)}(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{17}$$

с некоторыми, заранее не определенными функциями

$$a_i(\lambda) \text{ и } a_{k,j}^{(i,s)}(\lambda) \ (k = 1, 2, \ldots; j = 0, 1, \ldots, k-1; i = 1, 2, \ldots, m; s = 1, 2, \ldots, m),$$

где для $\forall\lambda > 0$ $a_i(\lambda) \ne 0$ и $a_i(\lambda) \ne a_j(\lambda)$ при $i \ne j$.

Замечание 8. Если каждая из функций $a_i(\lambda)$ непрерывна хотя бы в одной точке, то $a_i(\lambda) = \lambda^{p_i}$ и $f_k^{(i)}(\mathbf{x})$ – положительно-однородные функции (см. §§ 187, 188 в работе [3]) с разными степенями однородности p_i, удовлетворяющими условию $p_i \ne p_s$ при $i \ne s$.

Для векторно-присоединенных однородных функций сохраняют силу (по большей части) аналоги утверждений, приведенных выше. В частности, понятие векторно-присоединенных однородных функций можно перенести без каких-либо потерь на класс обобщенных функций.

В данном исследовании не приведены ни формулировки этих аналогов, ни их доказательства, так как их рассмотрение выходит за рамки основной темы статьи.

Следует отметить с сожалением, что авторам этой статьи пока не удается решить вопрос об общем виде всюду разрывных решений для соотношений (17).

Заключение

Статья продолжает и обобщает исследования, представленные ранее в работах [37 – 39], и затрагивает базовые представления, относящиеся к общей теории функций вещественного переменного. Предполагается, что присоединенные однородные функции Гельфанда могут оказаться эффективными при обобщении принципа подобия траекторий Голикова в эйлеровых полях на более широкий класс электростатических потенциалов, если сосредоточиться на подобии параксиальных траекторий.

Теоремы, сформулированные и доказанные в данной статье, – это новые оригинальные результаты, впервые полученные авторами и ранее не публиковавшиеся в открытой печати.

Показано, что возможно построение развернутой непротиворечивой теории присоединенных однородных функций вещественных переменных, определяемых с помощью цепочки линейных рекуррентных функциональных соотношений общего вида, а также что этот подход вполне продуктивен и заслуживает дальнейшего развития.

Доказательства отдельных теорем статьи иногда приведены здесь в сжатом виде, поскольку они определенно имеют не столь наглядную прикладную направленность, как сами формулировки теорем. Предполагается, что в большинстве случаев полное доказательство можно восстановить во всех деталях читателем-математиком аспирантского уровня, тогда как подробности и аспекты доказательств, требующие особого внимания, интересны преимущественно узким специалистам. Публикация этих материалов (если и будет продолжена авторами) будет представлена, по-видимому, в соответствующих специальных журналах.

Приложение

Определение нового класса функций в оригинальной статье

В данном разделе в тезисной форме исследуется логика определения нового класса функций (присоединенные однородные функции Гельфанда – Шапиро, обычные и обобщенные), изложенная в работах [1, 2], как она представляется авторам данной статьи. Этот раздел представляется важным, так как вопрос о том, в какой форме допустим критический анализ данной фундаментальной работы [1] уже ушедших из нашего мира выдающихся математиков, которые в силу этого не могут предоставить свои возражения, неоднократно поднимался рецензентами и вызывал у авторов данной статьи определенные сомнения в уместности подобной публикации. В узловых точках рассуждений, которые нам показались важными, вставлены дополнительные комментарии.

Таким образом, фрагменты приложения, отмеченные как «Утверждения», представляют собой краткий пересказ соответствующих разделов оригинальной публикации [1] с максимальным уважением к этой работе классиков, тогда как содержание фрагментов Приложения, которые отмечены как «Комментарии», лежит целиком на совести авторов этой статьи.

Утверждение 1П. Для линейного оператора $Af(\mathbf{x}) = f(\lambda\mathbf{x})$, задающего подобное преобразование аргументов функции, однородные функции Эйлера степени p, которые удовлетворяют тождеству $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$, являются собственными функциями с собственными значениями λ^p. В типичном случае у линейного преобразования (оператора), наряду с собственной функцией f_0, отвечающей данному собственному значению α, также имеются присоединенные собственные функции $f_1, f_2, ..., f_k, ...$ различных порядков, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &Af_0 = \alpha f_0, \\ &Af_1 = \alpha f_1 + \beta f_0, \\ &Af_2 = \alpha f_2 + \beta f_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Af_k = \alpha f_k + \beta f_{k-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1П}$$

где k – порядок функции; α – рассматриваемое собственное значение; β – некоторая константа, которую при надлежащей нормировке присоединенных собственных функций можно положить равной единице (в общем случае $\beta \neq 0$).

Поэтому для однородных функций Эйлера можно попытаться определить аналог присоединенных собственных функций – присоединенные однородные функции.

Комментарий 1П. Строго говоря, с равным успехом при определении присоединенных собственных функций линейных операторов можно использовать нижнюю треугольную матрицу линейных соотношений с одинаковыми коэффициентами α вдоль главной диагонали. Действительно, по своему физическому смыслу, присоединенные собственные функции – это такие цепочки линейно-независимых функций, для которых результат воздействия данного линейного оператора будет линейной комбинацией, составленной из самой функции (с множителем, равным собственному значению) и предшествующих функций. При этом для фиксированного собственного значения α всегда можно перейти от нижней треугольной матрицы равенств

$$Af_k = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{k,j} f_j + \alpha f_k \quad (\text{где } \beta_{k,k-1} \neq 0)$$

к двучленным соотношениям (1П) с нормированными коэффициентами $\beta = 1$ вдоль диагонали $k - j = 1$, если при $\forall k \geq 2$ надлежащим образом вычесть из каждой функции f_k линейную комбинацию предшествующих функций $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ с соответствующими весовыми коэффициентами. Точно так же от двучленных соотношений (1П) (с которыми, безусловно, работать гораздо проще) всегда можно перейти к почти произвольной нижней треугольной матрице, для которой условие $\beta_{k,k-1} \neq 0$ – это единственное ограничение.

Однако однородные функции Эйлера, т. е. собственные функции, не содержащие параметра, но относящиеся к однопараметрическому семейству линейных операторов подобия с однопараметрическим же набором собственных значений, – это особый случай. В связи с этим необходимо рассматривать присоединенные собственные функции, не содержащие параметра и характеризуемые однопараметрическими линейными присоединенными соотношениями (если такие функции существуют).

Очевидным образом переход от однопараметрической нижней треугольной матрицы к двухдиагональной однопараметрической через линейную замену функций, не содержащих параметра, в этом случае выполнить нельзя. Два способа перестают быть эквивалентными, и приходится иметь дело с не столь удобной полноценной нижней треугольной матрицей коэффициентов. При этом содержательная разница между двучленными соотношениями и соотношениями в виде нижней треугольной матрицы не настолько принципиальна, чтобы имелась реальная необходимость вводить новый термин в дополнение к оригинальному термину Гельфанда – Шапиро, как это сделано в статье [31].

Утверждение 2П. Присоединенной однородной функцией первого порядка степени p называется функция f_1 вещественных переменных, которая для любого $\lambda > 0$ удовлетворяет равенству

$$f_1(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^p f_1(\mathbf{x}) + h(\lambda) f_0(\mathbf{x}), \tag{2П}$$

где $f_0(\mathbf{x})$ – однородная функция вещественных переменных степени p.

Доказывается, что непрерывная функция $h(\lambda)$ обязана иметь вид

$$h(\lambda) = c\lambda^p \ln\lambda,$$

где $c \neq 0$ – произвольная константа.

За счет же нормировки функции f_1 можно считать $c = 1$ без ограничения общности.

В качестве примера присоединенной однородной функции первого порядка и нулевой степени однородности приводится функция $\ln|\mathbf{x}|$, которая при $\lambda > 0$ удовлетворяет условию

$$\ln|\lambda\mathbf{x}| = \ln|\mathbf{x}| + \ln\lambda$$

(единица – однородная функция нулевой степени).

Утверждение 3П. Обобщенная однородная функция степени p определяется как линейный непрерывный функционал T_p, заданный над линейным пространством бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\mathbf{x})$ вещественных переменных размерности n, стремящихся к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$ быстрее, чем любая степенная функция $1/|\mathbf{x}|^k$ ($k > 0$), если указанный функционал подчиняется тождеству

$$T_p\left[\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right)\right] = \lambda^{p+n} T_p\left[\varphi(\mathbf{x})\right]. \tag{3П}$$

Условие (3П) конструируется по аналогии с соотношениями

$$T_p\left[\varphi(\mathbf{x})\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\, dx_1 \ldots dx_n,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\, dx_1 \ldots dx_n = \lambda^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{y})\varphi\left(\frac{\mathbf{y}}{\lambda}\right) dy_1 \ldots dy_n =$$

$$= \lambda^p \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\, dx_1 \ldots dx_n,$$

которые выполняются, когда прототипом обобщенной функции выступает однородная функция $f(\mathbf{x})$ вещественных переменных, характеризуемая степенью однородности p.

В качестве примера показано, что n-мерная дельта-функция является обобщенной однородной функцией степени $-n$ в смысле определения (3П).

Точно так же, по аналогии с равенством (2П), при $h(\lambda) = \lambda^p \ln\lambda$, которое должно выполняться для обычных присоединенных однородных функций первого порядка, обобщенная присоединенная функция первого порядка $T_{p,1}$ определяется как линейный непрерывный функционал, который подчиняется тождеству

$$T_{p,1}\left[\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right)\right] = \lambda^{p+n} T_{p,1}\left[\varphi(\mathbf{x})\right] + \lambda^{p+n} \ln\lambda\, T_{p,0}\left[\varphi(\mathbf{x})\right], \tag{4П}$$

где $T_{p,0}$ – некоторая обобщенная однородная функция степени p, не равная нулю.

Наконец, по аналогии с соотношениями (1П), цепочка линейных непрерывных функционалов $T_{p,k}$ называется обобщенными присоединенными функциями порядка k и степени p, если выполняются тождества

$$T_{p,k}\left[\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right)\right]=\lambda^{p+n}T_{p,k}\left[\varphi(\mathbf{x})\right]+\lambda^{p+n}\ln\lambda\cdot T_{p,k-1}\left[\varphi(\mathbf{x})\right]. \tag{5П}$$

Комментарий 2П. Здесь в рассуждениях имеется неточность, поскольку (как показано, в частности, в статье [31]) уже при $k\geq 2$ функционалов $T_{p,k}$ с такими свойствами не существует. Из цепочки равенств

$$T_{p,k+2}\left[\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda\mu}\right)\right]=\lambda^{p+n}T_{p,k+2}\left[\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\mu}\right)\right]+\lambda^{p+n}\ln\lambda\, T_{p,k+1}\left[\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\mu}\right)\right]=$$

$$=\lambda^{p+n}\left\{\mu^{p+n}T_{p,k+2}\left[\varphi(\mathbf{x})\right]+\mu^{p+n}\ln\mu\, T_{p,k+1}\left[\varphi(\mathbf{x})\right]\right\}+$$

$$+\lambda^{p+n}\ln\lambda\left\{\mu^{p+n}T_{p,k+1}\left[\varphi(\mathbf{x})\right]+\mu^{p+n}\ln\mu\, T_{p,k}\left[\varphi(\mathbf{x})\right]\right\},$$

$$T_{p,k+2}\left[\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda\mu}\right)\right]=(\lambda\mu)^{p+n}\,T_{p,k+2}\left[\varphi(\mathbf{x})\right]+(\lambda\mu)^{p+n}\left(\ln\lambda+\ln\mu\right)T_{p,k+1}\left[\varphi(\mathbf{x})\right]$$

следует, что обобщенная функция $T_{p,k}$ обязана быть нулем.

Утверждение 4П. По результатам сравнения выражений (3П) и (4П) делается вывод, что производная обобщенной однородной функции T_p степени p по степени однородности есть обобщенная присоединенная однородная функция $T_{p,1}$ первого порядка степени p.

Действительно, дифференцирование равенства (3П) по параметру p (если такое дифференцирование возможно) приводит к следующему тождеству:

$$\begin{aligned}\frac{dT_p}{dp}\left[\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right)\right]&=\lambda^{p+n}\frac{dT_p}{dp}\left[\varphi(\mathbf{x})\right]+\frac{d\left(\lambda^{p+n}\right)}{dp}T_p\left[\varphi(\mathbf{x})\right]=\\&=\lambda^{p+n}\frac{dT_p}{dp}\left[\varphi(\mathbf{x})\right]+\lambda^{p+n}\ln\lambda\, T_p\left[\varphi(\mathbf{x})\right],\end{aligned} \tag{6П}$$

которое совпадает с равенством (4П) с точностью до обозначений.

По аналогии с этим фактом, утверждается (уже без дополнительного обоснования данного тезиса), что производная по степени однородности от обобщенной присоединенной однородной функции порядка k всегда является обобщенной присоединенной однородной функцией порядка $k+1$.

Комментарий 3П. Это утверждение, к сожалению, оказывается неверным при $k\geq 1$, если в качестве определения обобщенной присоединенной функции $T_{p,k}$ порядка k брать равенство (5П). При дифференцировании условия (5П), в левой части равенства получается обобщенная функция $T_{p,k+1}$, а в правой части – трехчленное выражение с участием обобщенных функций $T_{p,k+1}$, $T_{p,k}$ и $T_{p,k-1}$, поскольку коэффициенты λ^{p+n} и $\lambda^{p+n}\ln\lambda$ также зависят от параметра p. Данное трехчленное выражение совпадает с двучленным (5П) для порядка $k+1$ тогда и только тогда, когда обобщенная функция $T_{p,k-1}$ в равенстве (5П) будет нулем либо когда порядок k равен нулю.

Точно так же, при справедливости предположения, вытекающего из данного тезиса, что обобщенная присоединенная однородная функция $T_{p,k}$ порядка k и степени p представляет собой k-ю производную однородной обобщенной функции T_p по параметру p, после многократного дифференцирования базового соотношения (3П) по степени однородности p, в соответствующих функциональных равенствах будет появляться все больше и больше предшествующих обобщенных функций $T_{p,j}$ с ненулевыми коэффициентами в качестве множителей.

Утверждение 5П. В дальнейшем, при конструировании новых обобщенных присоединенных однородных функций степени p и порядка k авторы публикации [1] последовательно применяют дифференцирование по параметру p, а также разложение соответствующих функционалов в ряд Лорана или в степенной ряд. Кроме того, в большинстве случаев они ограничиваются порядком $k = 1$, для которого справедливо двучленное тождество (6П), возникающее при дифференцировании. В общем же случае обобщенные функции, получаемые при дифференцировании, считаются присоединенными однородными функциями соответствующего порядка по факту их получения и без дополнительной проверки соотношения (5П).

Комментарий 4П. Таким образом, определение обобщенных присоединенных однородных функций с помощью соотношений (5П) оказывается боковой тупиковой ветвью как для исследования, представленного в статье [1], так и для более подробного исследования в монографии [2]. Фактически это определение никак не применяется сразу же после того, как было сформулировано. Все выкладки авторов публикаций [1, 2] оказываются безукоризненно точными с сохранением в неизменном виде полученных ими важных и уникальных научных результатов, если в качестве формального определения использовать дифференцирование по параметру p обобщенных присоединенных однородных функций более низкого порядка, а обобщенными присоединенными однородными функциями нулевого порядка считать обобщенные однородные функции, обеспечивающие выполнение условия (3П).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гельфанд И. М., Шапиро З. Я.** Однородные функции и их приложения // Успехи математических наук. 1955. Т. 10. № 3 (65). С. 3–70.

2. **Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.** Обобщенные функции и действия над ними (Серия «Обобщенные функции». Вып. 1). М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. 472 с.

3. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 тт. 8-е изд. Т. 1. М.: Физматлит, 2003. 607 с.

4. **Гобсон Е. В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. Пер. с англ. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.

5. **Голиков Ю. К., Краснова Н. К.** Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.

6. **Голиков Ю. К., Краснова Н. К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.

7. **Голиков Ю. К., Краснова Н. К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.

8. **Голиков Ю. К., Краснова Н. К., Абрамёнок О. А.** Электрические спектрографы потоков заряженных частиц с потенциалами эйлерова типа // Прикладная физика. 2011. № 5. С. 69–73.

9. **Аверин И. А., Бердников А. С., Галль Н. Р.** Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.

10. **Бердников А. С., Аверин И. А., Краснова Н. К., Соловьев К. В.** Об однородности скалярных и векторных потенциалов электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5. № 1. С. 10–27.

11. **Голиков Ю. К., Уткин К. Г., Чепарухин В. В.** Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Ленинград: Изд-во Ленинградского политехнического института, 1984. 79 с.

12. **Габдуллин П. Г., Голиков Ю. К., Краснова Н. К., Давыдов С. Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 2. С. 91–94.

13. **Габдуллин П. Г., Голиков Ю. К., Краснова Н. К., Давыдов С. Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44–47.

14. **Аверин И. А., Бердников А. С.** Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 5–8.

15. **Бердников А. С., Аверин И. А.** Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 89—95.

16. **Бердников А. С., Аверин И. А., Голиков Ю. К.** Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I. Общий принцип и однокаскадные схемы // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12. № 4. С. 272—281.

17. **Бердников А. С., Аверин И. А., Голиков Ю. К.** Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II. Условия двойной фокусировки высокого порядка у двухкаскадной схемы // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13. № 1. С. 11—20.

18. **Бердников А. С., Галль Л. Н., Антонов А. С., Соловьев К. В.** Синтез краевых магнитных полей для статических масс-анализаторов спектрографического типа // Масс-спектрометрия. 2018. Т. 15. № 1. С. 26—43.

19. **Голиков Ю. К., Бердников А. С., Антонов А. С., Краснова Н. К., Соловьев К. В.** Синтез электродных конфигураций, сохраняющих для краевых электрических полей свойство однородности по Эйлеру // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 4. С. 609—613.

20. **Голиков Ю. К., Бердников А. С., Антонов А. С., Краснова Н. К., Соловьев К. В.** Применение формулы Донкина в теории электростатических призм // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 11. С. 1711—1719.

21. **Голиков Ю. К., Бердников А. С., Антонов А. С., Краснова Н. К., Соловьев К. В.** Применение формулы Донкина в теории отражающих и поворотных устройств // Журнал технической физики. 2019. Т. 89. № 12. С. 1947—1964.

22. **Иванов В. К.** Об умножении однородных функций нескольких переменных // Доклады Академии наук СССР. 1981. Т. 257. № 1. С. 29—33.

23. **Иванов В. К.** Асимптотическое приближение к произведению обобщенных функций // Известия высших учебных заведений. Математика. 1981. Т. 25. № 1. С. 20—29.

24. **Estrada R., Kanwal R. P.** The asymptotic expansion of certain series considered by Ramanujan (Chapter) // Asymptotic analysis: A distributional approach. Boston, USA: Birkhäuser Boston, 1994. Pp. 195—232.

25. **Данилов В. Г., Маслов В. П., Шелкович В. М.** Алгебры особенностей сингулярных решений квазилинейных строго гиперболических систем первого порядка // Теоретическая и математическая физика. 1998. Т. 114. № 1. С. 3—55.

26. **Estrada R., Kanwal R. P.** A distributional approach to asymptotics: Theory and applications. Second Edition. Boston, USA: Birkhäuser Boston, 2002. 454 p.

27. **Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M.** Associated homogeneous *p*-adic distributions. Report 02133. MSI. Sweden, Vaxjo University, 2002.

28. **Альбеверио С., Хренников А. Ю., Шелкович В. М.** Присоединенные однородные *p*-адические обобщенные функции // Доклады Российской академии наук. 2003. Т. 393. № 3. С. 300—303.

29. **Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M.** Associated homogeneous *p*-adic distributions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006. Vol. 313. No. 1. Pp. 64—83.

30. **Хренников А. Ю., Шелкович В. М.** Современный *p*-адический анализ и математическая физика: теория и приложения. М.: Физматлит, 2012. 452 с.

31. **Shelkovich V. M.** Associated and quasi associated homogeneous distributions (generalized functions) // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. Vol. 338. No. 1. Pp. 48—70.

32. **Альбеверио С. А., Хренников А. Ю., Шелкович В. М.** Нелинейные сингулярные проблемы *p*-адического анализа: ассоциативные алгебры *p*-адических распределений // Известия Российской академии наук. Серия Математическая. 2005. Т. 69. № 2. С. 3—44.

33. **Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M.** Theory of *p*-adic distributions: Linear and nonlinear models (London Mathematical Society Lecture Note Series. Vol. 370). Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 351 p.

34. Функциональный анализ. Справочник. 2-е изд. Ред. С. Г. Крейн (Справочная математическая библиотека). М.: Наука, 1972. С. 485.

35. **Von Grudzinski O.** Quasihomogeneous distributions (Mathematics Studies. Vol. 165). Amsterdam (North-Holland): Elsevier, 1991. 448 p.

36. **Kuczma M.** An introduction to the theory of functional equations and inequalities: Cauchy's equation and Jensen's inequality, Basel, Switzerland: Birkhäuser Basel, 2009. 595 p.

37. **Бердников А. С., Соловьев К. В., Краснова Н. К.** Взаимно-однородные функции с матрицами конечного размера // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 1. С. 42–53.

38. **Бердников А. С., Соловьев К. В., Краснова Н. К.** Цепочки фундаментальных присоединенных однородных функций с общим вещественным собственным числом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 53–71.

39. **Бердников А. С., Соловьев К. В., Краснова Н. К.** Общие формулы для цепочек фундаментальных присоединенных однородных функций с общей парой комплексно-сопряженных собственных чисел // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 2. С. 72–88.

REFERENCES

1. **Gel'fand I. M., Shapiro Z. Y.,** Homogeneous functions and their extensions, Uspekhi Matem. Nauk. 10 (3(65)) (1955) 3–70 (in Russian).

2. **Gelfand I. M., Shilov G. E.,** Generailzed functions. Vol. 1. Properties and operations. American Mathematical Society (AMS) Chealsea Publishing, Providence (USA), 1964.

3. **Fikhtengol'ts G. M.,** The fundamentals of mathematical analysis, Vol. 1, Pergamon Press, Oxford, New York, 1965.

4. **Hobson E. W.,** The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1931.

5. **Golikov Yu. K., Krasnova N. K.,** The generalized similarity principle and its application in electron spectrography, Appl. Phys. (2) (2007) 5–11 (in Russian).

6. **Golikov Y. K., Krasnova N. K.,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Techn. Phys. 56 (2) (2011) 164–170.

7. **Golikov Yu. K., Krasnova N. K.,** Teoriya sinteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [The theory of synthesis of electrostatic energy analyzers], Polytechnic University Publishing, SPb, 2010 (in Russian).

8. **Golikov Yu. K., Krasnova N. K., Abramyonok O. A.,** Electric spectrographs of charged particle flows with Euler-type potentials, Appl. Phys. (5) (2011) 69–73 (in Russian).

9. **Averin I. A., Berdnikov A. S., Gall N. R.,** The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Tech. Phys. Lett. 43 (2) (2017) 156–158.

10. **Berdnikov A. S., Averin I. A., Krasnova N. K., Solovyev K. V.,** Theorems on the homogeneity of scalar and vector potentials for 3D electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms, Usp. Prikl. Fiz. 5 (1) (2017) 10–27 (in Russian).

11. **Golikov Yu. K., Utkin K. G., Cheparukhin V. V.,** Raschet elementov elektrostaticheskikh elektronno-opticheskikh system [Calculation of elements of electrostatic electron-optical systems], Leningrad Polytechnic Institute Publishing, Leningrad, 1984 (in Russian).

12. **Gabdullin P. G., Golikov Yu. K., Krasnova N. K., Davydov S. N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers. I // Tech. Phys. 45 (2) (2000) 232–235.

13. **Gabdullin P. G., Golikov Yu. K., Krasnova N. K., Davydov S. N.,** Application of Donkin's formula in the theory of energy analyzers: Part II, Tech. Phys. 45 (3) (2000) 330–333.

14. **Averin I. A., Berdnikov A. S.,** Fringe fields of gridless electronic spectrographs with Euler's homogeneous electrostatic fields, Usp. Prikl. Fiz. 4 (1) (2016) 5–8 (In Russian).

15. **Berdnikov A. S., Averin I. A.,** A new approach to development of ion-optical systems for static mass spectrographs on the basis of the non-uniform Euler's homogeneous magnetic fields, Usp. Prikl. Fiz. 4 (1) (2016) 89–95 (in Russian).

16. **Berdnikov A. S., Averin I. A., Golikov Y. K.,** Static mass spectrometers of new type, using Euler's homogeneous electric and magnetic fields. I. General principle and single-stage systems, J. Anal. Chem. 71 (13) (2016) 1280–1287.

17. **Berdnikov A. S., Averin I. A., Golikov Y. K.,** Static mass spectrographs of a new type using Euler's homogeneous electric and magnetic fields. II: Conditions of high-order double focusing for two-cascade schemes, J. Anal. Chem. 71 (14) (2016) 1332–1340.

18. **Berdnikov A. S., Gall L. N., Antonov A. S., Solovyev K. V.,** Synthesis of fringing magnetic fields for static mass analyzers of the spectrographic type, J. Anal. Chem. 73 (14) (2018) 1301–1316.

19. **Golikov Yu. K., Berdnikov A. S., Antonov A. S., et al.,** Synthesis of electrode configurations that conserve fringing electric field homogeneity in Euler terms, Tech. Phys. 63 (4) (2018) 593–597.

20. **Golikov Yu. K., Berdnikov A. S., Antonov A. S., et al.,** Application of the Donkin formula in the theory of electrostatic prisms, Tech. Phys. 63 (11) (2018) 1659–1666.

21. **Golikov Yu. K., Berdnikov A. S., Antonov A. S., et al.,** Application of the Donkin formula in the theory of reflecting and turning devices, Tech. Phys. 64 (12) (2019) 1850–1865.

22. **Ivanov V. K.,** On the multiplication of homogeneous functions of several variables, Dokl. Akad. Nauk SSSR. 257 (1) (1981) 29–33 (in Russian).

23. **Ivanov V. K.,** Asymptotic approximation to a product of generalized functions, Soviet Math. (Izv. VUZ) 25 (1) (1981) 20–29.

24. **Estrada R., Kanwal R. P.,** The asymptotic expansion of certain series considered by Ramanujan (Chapter), In book: Asymptotic analysis: A distributional approach, Birkhäuser Boston, Boston, USA (1994) 195–232.

25. **Danilov V. G., Maslov V. P., Shelkovich V. M.,** Algebras of the singularirties of singular solutions to first-order quasi-linear strictly hyperbolic systems, Theoret. and Math. Phys. 114 (1) (1998) 1–42.

26. **Estrada R., Kanwal R. P.,** A distributional approach to asymptotics: Theory and applications, 2-nd Ed., Birkhäuser Boston, Boston, USA, 2002.

27. **Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M.,** Associated homogeneous *p*-adic distributions, Report 02133. MSI, Vaxjo University, Sweden, 2002.

28. **Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M.,** Prisoyedinennyye odnorodnyye *p*-adicheskiye obobshchennyye funktsii [Associated homogeneous *p*-adic distributions], Dokl. RAN. 393 (3) (2003) 300–303 (in Russian).

29. **Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M.,** Associated homogeneous *p*-adic distributions, J. Math. Anal. Appl. 313 (1) (2006) 64–83.

30. **Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M.,** Sovremennyy *p*-adicheskiy analiz i matematicheskaya fizika: teoriya i prilozheniya, [Modern *p*-adic analysis and mathematical physics: Theory and applications], Fizmatlit Publishing, Moscow, 2012 (in Russian).

31. **Shelkovich V. M.,** Associated and quasi associated homogeneous distributions (generalized functions), J. Math. Anal. Appl. 338 (1) (2008) 48–70.

32. **Albeverio S. A., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M.,** Non-linear singular problems of *p*-adic analysis: Associative algebras of *p*-adic distributions, Izvestiya: Mathematics. 69 (2) (2005) 221–263.

33. **Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M.,** Theory of *p*-adic distributions: Linear and nonlinear models (London Mathematical Society Lecture Note Series. Vol. 370), Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

34. **Kreyn S. G.,** Functional analysis. (Reference book), Library of University of Michigan, 1967 (Chap. X, §2, P. 8).

35. **Von Grudzinski O.,** Quasihomogeneous distributions (Book Series: Mathematics Studies, Vol. 165), Elsevier, Amsterdam (North-Holland), 1991.

36. **Kuczma M.,** An introduction to the theory of functional equations and inequalities: Cauchy's equation and Jensen's inequality, Birkhäuser Basel, Basel, Switzerland, 2009.

37. **Berdnikov A. S., Solovyev K. V., Krasnova N. K.,** Mutually homogeneous functions with finite-sized matrices, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (1) (2020) 42–53.

38. **Berdnikov A. S., Solovyev K. V., Krasnova N. K.,** Chains of fundamental mutually homogeneous functions with a common real eigenvalue, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 53–71 (in Russian).

39. **Berdnikov A. S., Solovyev K. V., Krasnova N. K.,** General formulas for chains of fundamental mutually homogeneous functions with a common pair of complex conjugate eigenvalues, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 13 (2) (2020) 72–88 (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич — *доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, главный научный сотрудник Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия.*
198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31—33, лит. А.
asberd@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-0985-5964

БУЛЯНИЦА Антон Леонидович — *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения Российской академии наук, профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.*
198095, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 31—33, лит. А.
antbulyan@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-9235-8549

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович — *кандидат физико-математических наук, доцент Высшей инженерно-физической школы Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия.*
195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru
ORCID: 0000-0003-3514-8577

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
31—33 Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
asberd@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-0985-5964

BULYANITSA Anton L.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
31—33 Ivan Chernykh St., St. Petersburg, 198095, Russia
antbulyan@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-9235-8549

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
k-solovyev@mail.ru
ORCID: 0000-0003-3514-8577

Статья поступила в редакцию 22.09.2023. Одобрена после рецензирования 16.02.2024. Принята 16.02.2024.
Received 22.09.2023. Approved after reviewing 16.02.2024. Accepted 16.02.2024.