

Научная статья  
УДК 532.5.032  
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16314>

## ЗАДАЧА СТОКСА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КОНТУРА

Е. Н. Афанасов<sup>1</sup> ✉, С. Г. Кадыров<sup>2</sup>, В. В. Певзнер<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ООО «Эволюция морских цифровых технологий», Санкт-Петербург, Россия;

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,  
Санкт-Петербург, Россия

✉ [zhenya.afanasov@yandex.ru](mailto:zhenya.afanasov@yandex.ru)

**Аннотация.** В работе рассмотрена задача о малых гармонических колебаниях эллиптического контура, погруженного в несжимаемую вязкую жидкость. Предложены аналитический и асимптотические методы решения этой задачи. Приведено сопоставление результатов, полученных при численной реализации аналитического метода, с результатами асимптотических решений. Показано, что совместное использование предложенных методов позволяет описать решение почти во всем диапазоне значений безразмерного параметра вязкости.

**Ключевые слова:** задача Стокса, вязкая несжимаемая жидкость, колебания твердого тела, эллиптический цилиндр

**Для цитирования:** Афанасов Е. Н., Кадыров С. Г., Певзнер В. В. Задача Стокса для эллиптического контура // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 3. С. 177–188. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16314>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article  
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16314>

## THE STOKES PROBLEM FOR AN ELLIPTIC CONTOUR

E. N. Afanasov<sup>1</sup> ✉, S. G. Kadyrov<sup>2</sup>, V. V. Pevzner<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LLC "Evolution Marine Digital", St. Petersburg, Russia;

<sup>2</sup> State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia

✉ [zhenya.afanasov@yandex.ru](mailto:zhenya.afanasov@yandex.ru)

**Abstract.** The paper considers the problem on small harmonic oscillations of an elliptical contour immersed in the incompressible viscous fluid. Analytical and asymptotic methods for solving this problem have been proposed. The results obtained in the numerical implementation of the analytical method and the results of asymptotic solutions were compared. The possibilities of describing the solution in almost the entire range of values of the dimensionless viscosity parameter by joint application of the proposed methods were shown.

**Keywords:** Stokes problem, viscous incompressible fluid, solid body vibrations, elliptical cylinder

**For citation:** Afanasov E. N., Kadyrov S. G., Pevzner V. V., The Stokes problem for an elliptic contour, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (3) (2023) 177–188. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16314>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

Расчеты гидродинамических сил, действующих на твердые и упругие конструкции, совершающие колебания в вязкой несжимаемой жидкости, являются весьма важными и актуальными в различных приложениях, например, в нанотехнологиях, в технике измерений вязкости, в гидромеханике морских сооружений.

Поскольку обычно конструкции имеют сложную геометрическую форму, для решения таких задач используют методы вычислительного эксперимента на основе сеточных методов численного моделирования, которые реализованы в известных коммерческих пакетах инженерного анализа (например, Ansys Fluent, STAR-CCM+ и др.). Вычислительный подход универсален, однако весьма дорог и трудоемок.

Ввиду этих обстоятельств, важно иметь возможность решать сравнительно простые «эталонные» задачи, для которых удастся построить их явное, асимптотическое или численное решения. Полученные решения можно использовать как первое и часто хорошее приближение для более трудных по постановке проблем.

Единственной плоской задачей (кроме модельной задачи о колебаниях плоскости), допускающей точное аналитическое решение, остается до сих пор задача о малых колебаниях кругового цилиндра в покоящейся вязкой несжимаемой жидкости, решение которой получено Стоксом в 1851 году.

Такая упрощенная модель достаточно длительное время использовалась для решения гидродинамических задач, например, в теории атомно-силовых микроскопов, и по-прежнему остается популярной. Однако очевидно, что оценка гидродинамической реакции конструкций, имеющих сложную геометрическую форму, является весьма приближенной, если она основана на результатах Стокса для кругового цилиндра.

В настоящей работе рассмотрена задача Стокса для эллиптического контура, совершающего малые гармонические колебания в несжимаемой вязкой жидкости, и предложены методы, которые в совокупности позволяют описать ее решение почти во всем диапазоне значений безразмерного параметра вязкости.

### Постановка задачи

Пусть произвольный плоский контур, погруженный в несжимаемую вязкую жидкость с кинематической вязкостью  $\nu$  и плотностью  $\rho$ , совершает малые гармонические колебания в своей плоскости с заданной частотой  $\omega$ . Амплитуда колебаний предполагается много меньшей размеров контура.

Для записи уравнений движения в безразмерном виде характерный размер контура  $L$  используется как единица длины, амплитуды скоростей  $v_x$ ,  $v_y$  жидкости и вынужденных колебаний контура  $u_0$  отнесены к величине  $\omega L$ , давление — к  $\rho \omega^2 L^2$ , гидродинамическая сила  $F_x$  — к  $\rho \omega^2 L^3$ .

Уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости при сделанных выше предположениях имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial p}{\partial x} + i\beta v_x &= 0, \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial p}{\partial y} + i\beta v_y &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\beta = \frac{\omega L^2}{\nu}$  — безразмерный параметр.

Граничные условия на линии контура  $\Gamma$  формулируются как условия «прилипания»:

$$v_n|_{\Gamma} = u_n, \quad v_{\tau}|_{\Gamma} = u_{\tau}, \quad (2)$$



где  $(v_n, v_\tau), (u_n, u_\tau)$  – нормальная и касательная составляющие векторов скоростей жидкости и контура соответственно.

Возмущения поля скоростей, вызванные колебаниями, затухают при удалении от контура  $\Gamma$ :

$$v_x \rightarrow 0, v_y \rightarrow 0, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Если использовать представление компонент вектора скорости через две скалярные функции  $\varphi$  и  $\psi$ , называемые далее для краткости потенциалами [2], а именно

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

то можно записать систему уравнений (1) и граничные условия (2), (3) в виде

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, \\ \Delta \psi + i\beta \psi = 0, \\ p = i\varphi; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = u_n, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{\partial \psi}{\partial n} = u_\tau, \\ \varphi, \psi \rightarrow 0, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Как показано в статье [3], гидродинамическая сила  $F_x$ , действующая на плоский контур с нормалью  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ , совершающий малые гармонические колебания вдоль оси  $Ox$ , определяется через потенциалы формулой

$$F_x = -i \int_{\Gamma} \varphi n_x dl - i \int_{\Gamma} \psi n_y dl. \quad (6)$$

Поставленная задача представляет как теоретический, так и практический интерес в различных областях: при проектировании микросистем (сканирующая зондовая микроскопия [4 – 6]), приборов для измерений вязкости [7], в задачах гидромеханики морских сооружений [8]. Значения безразмерного параметра  $\beta$  на практике могут изменяться в широком диапазоне: от  $10^{-3}$  до  $10^5$ .

Точное решение задачи о колебаниях кругового цилиндра в вязкой несжимаемой покоящейся жидкости, а также формула для расчета гидродинамического сопротивления цилиндра получены Джорджем Стоксом в 1851 г. [9]. Впоследствии этот труднодоступный для ознакомления результат был повторен в статье [10] и подтвержден экспериментально (см., например, работы [11, 12]).

По аналогии с этой классической задачей будем называть задачу о колебаниях произвольного плоского контура, помещенного в безграничную несжимаемую жидкость, задачей Стокса для этого контура.

### Задача Стокса для кругового цилиндра

Приведем результаты решения задачи, полученные с помощью метода потенциалов в монографии [2]. Для случая несжимаемой жидкости, в полярных координатах  $r, \theta$ , решение имеет следующий вид:

$$\varphi(r, \theta) = u_0 \frac{H(1, \beta) - 1}{H(1, \beta) + 1} \frac{1}{r} \cos \theta, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) &= u_0 \frac{2H(r, \beta)}{H(1, \beta) + 1} \sin \theta, \\ F_x(\beta) &= -i\pi u_0 \frac{3H(1, \beta) - 1}{1 + H(1, \beta)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где введена функция

$$H(r, \beta) = \frac{H_1^{(1)}(r\sqrt{i\beta})}{\sqrt{i\beta} H_1^{(1)}(r\sqrt{i\beta})|_{r=1}}. \quad (8)$$

При больших значениях  $\beta$ , из формулы (7) для гидродинамической силы следует, что

$$F_x(\beta) \underset{\beta \rightarrow \infty}{\sim} i\pi u_0 \left[ 1 + 2(1+i) \sqrt{\frac{2}{\beta}} \right]. \quad (9)$$

Формулу (9) часто называют формулой Стокса [10 – 12].

Видно, что при  $\beta \rightarrow \infty$   $F_x(\beta) \rightarrow i\pi u_0$ , что соответствует представлениям «присоединенной» массы несжимаемой идеальной жидкости.

При малых  $\beta$  потенциалы имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &\underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} \frac{4iu_0}{\beta \left( 2\gamma - \frac{i\pi}{2} - 2 \ln 2 + \ln \beta \right)} \frac{1}{r} \cos \theta, \\ \psi(r, \theta) &\underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} \frac{4iu_0}{\beta \left( 2\gamma - \frac{i\pi}{2} - 2 \ln 2 + \ln \beta \right)} \frac{1}{r} \sin \theta, \end{aligned} \quad (10)$$

и, в соответствии с формулой (6),

$$F_x \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} \frac{8\pi u_0}{\beta \left( 2\gamma - \frac{i\pi}{2} - 2 \ln 2 + \ln \beta \right)} \quad (11)$$

(здесь  $\gamma$  – постоянная Эйлера).

### Методы решения задачи Стокса для эллиптического цилиндра

**Аналитическое решение.** Для эллиптического контура в статье [13] получены некоторые асимптотические результаты, а в [14] построено формальное решение.

Итак, в качестве масштаба длины примем большую полуось эллипса ( $L = a$ ). Уравнение эллипса в декартовых (безразмерных) координатах имеет вид

$$\Gamma: x^2 + \frac{y^2}{\varepsilon^2} = 1 \quad \left( \varepsilon = \frac{b}{a} \right).$$

Перейдем к эллиптическим координатам:

$$x = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta,$$

где  $h = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$  – половина фокусного расстояния,

$$\xi \in [\xi_0, +\infty), \quad \eta \in [0, 2\pi].$$

Тогда уравнение эллипса записывается в виде

$$\xi = \xi_0, \quad \left( \operatorname{ch} \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad \operatorname{sh} \xi_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right).$$



Единичные нормальный ( $\mathbf{n}$ ) и касательный ( $\boldsymbol{\tau}$ ) векторы к контуру эллипса выражаются как

$$\mathbf{n} = \frac{(\varepsilon \cos \eta, \sin \eta)}{\sqrt{\sin^2 \eta + \varepsilon^2 \cos^2 \eta}}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{(-\sin \eta, \varepsilon \cos \eta)}{\sqrt{\sin^2 \eta + \varepsilon^2 \cos^2 \eta}}.$$

Производные по нормали и по касательной следуют выражениям

$$\frac{\partial}{\partial n} = \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{\frac{\partial}{\partial \xi}}{\sqrt{\sin^2 \eta + \varepsilon^2 \cos^2 \eta}}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\frac{\partial}{\partial \eta}}{\sqrt{\sin^2 \eta + \varepsilon^2 \cos^2 \eta}}.$$

Граничные условия для потенциалов при  $\xi = \xi_0$  задаются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= \varepsilon u_0 \cos \eta, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= -u_0 \sin \eta. \end{aligned} \tag{12}$$

Уравнение Лапласа для потенциала  $\varphi$  в эллиптических координатах дается равенством

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0.$$

Его решение, убывающее на бесконечности, имеет следующий вид:

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k-1} e^{-(2k-1)(\xi-\xi_0)} \cos(2k-1)\eta. \tag{13}$$

Уравнение для потенциала  $\psi$  в эллиптических координатах выражается формулой

$$\frac{1}{(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) + (1 - \varepsilon^2) i \beta \psi = 0. \tag{14}$$

Как известно (см. монографию [15]), уравнение (14) допускает разделение переменных и его решение, убывающее на бесконечности и нечетное с периодом  $2\pi$ , имеет вид

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k-1} H_{2k-1}(\xi, \xi_0, q) s e_{2k-1}(\eta, q). \tag{15}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{4} i (1 - \varepsilon^2) \beta; \\ H_{2k-1}(\xi, \xi_0, q) &= \frac{N e_{2k-1}^{(1)}(\xi, q)}{\left. \frac{d N e_{2k-1}^{(1)}(\xi, q)}{d \xi} \right|_{\xi=\xi_0}}; \end{aligned} \tag{16}$$

использованы следующие функции:

$s e_{2k-1}(b_{2k-1}(q), \eta, q)$  – нечетная функция Матье с периодом  $2\pi$ ;

$N e_{2k-1}^{(1)}(b_{2k-1}(q), \xi, q)$  – модифицированная функция Матье 3-го рода (применяется тер-

минология, принятая в монографии [15]).

Обе функции отвечают собственному числу  $b_{2k-1}(q)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Отметим, что, помимо  $(\xi, \eta)$  остальные аргументы во всех функциях в дальнейшем опускаются для краткости записи.

Периодическая функция Матье  $se_{2k-1}(\eta)$  и ее производная представимы в виде ряда Фурье:

$$se_{2k-1}(\eta) = \sum_{r=1}^{\infty} B_{2k-1,2r-1} \sin(2r-1)\eta, \tag{17}$$

$$\frac{d}{d\eta} se_{2k-1}(\eta) = \sum_{r=1}^{\infty} (2r-1) B_{2k-1,2r-1} \cos(2r-1)\eta,$$

$$B_{2k-1,2r-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se_{2k-1}(\eta) \sin(2r-1)\eta d\eta. \tag{18}$$

Для непериодической функции Матье  $Ne_{2k-1}^{(1)}(\xi)$  используются формулы, приведенные в монографии [15]:

$$Ne_{2k-1}^{(1)}(\xi) = \frac{s_{2k-1}}{\sqrt{q}} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} B_{2k-1,2r-1} [J_{r-1}(v_1) H_r^{(1)}(v_2) - J_r(v_1) H_{r-1}^{(1)}(v_2)], \tag{19}$$

$$s_{2k-1} = se'_{2k-1}(0) se_{2k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right), v_1 = \sqrt{q}e^{-\xi}, v_2 = \sqrt{q}e^{\xi}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} H_{2k-1}(\xi, \xi_0) &= \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} B_{2k-1,2s-1} [J_{s-1}(v_1) H_s^{(1)}(v_2) - J_s(v_1) H_{s-1}^{(1)}(v_2)]}{\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} B_{2k-1,2s-1} [J_{s-1}(v_1) H_s^{(1)}(v_2) - J_s(v_1) H_{s-1}^{(1)}(v_2)] \Big|_{\xi=\xi_0}}, \\ &= \frac{[J_{s-1}(v_1) H_s^{(1)}(v_2) - J_s(v_1) H_{s-1}^{(1)}(v_2)] \Big|_{\xi=\xi_0}}{[J_{s-1}(v_1) H_s^{(1)}(v_2) - J_s(v_1) H_{s-1}^{(1)}(v_2)] \Big|_{\xi=\xi_0}} = \\ &= e^{-\xi_0} [-J'_{s-1}(v_1^0) H_s^{(1)}(v_2^0) + e^{2\xi_0} J_{s-1}(v_1^0) H_s^{(1)}(v_2^0) + J'_s(v_1^0) H_{s-1}^{(1)}(v_2^0) - e^{2\xi_0} J_s(v_1^0) H_{s-1}^{(1)}(v_2^0)], \\ &v_1^0 = \sqrt{q}e^{-\xi_0}, v_2^0 = \sqrt{q}e^{\xi_0}. \end{aligned}$$

Подстановка решений (13), (15) в граничные условия (12) дает следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) C_{2k-1} \cos(2k-1)\eta + \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k-1} H_{2k-1}(\xi_0, \xi_0) se'_{2k-1}(\eta) = \varepsilon u_0 \cos \eta, \\ -\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) C_{2k-1} \sin(2k-1)\eta - \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k-1} se_{2k-1}(\eta) = -u_0 \sin \eta. \end{cases} \tag{20}$$

Если использовать представление  $se_{2k-1}(\eta)$ ,  $se'_{2k-1}(\eta)$  в виде ряда Фурье по функциям  $\sin(2k-1)\eta$ ,  $\cos(2k-1)\eta$ , то можно свести систему уравнений (20) относительно коэффициентов  $C_{2k-1}$ ,  $D_{2k-1}$  к бесконечной системе линейных уравнений, т. е.

$$\begin{cases} -C_{2r-1} + \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k-1} B_{2r-1,2k-1} H_{2k-1}(\xi_0, \xi_0, q) = \varepsilon u_0 \delta_r^1, \\ C_{2r-1} + \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k-1} B_{2r-1,2k-1} = u_0 \delta_r^1, \end{cases}$$

где  $\delta_r^1$  – символ Кронекера, который означает следующее:

$$\delta_r^1 = \begin{cases} 1, & r = 1, \\ 0, & r \neq 1. \end{cases}$$

Исключая коэффициенты  $C_{2r-1}$ , окончательно имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_{2k-1} B_{2r-1, 2k-1} [1 + H_{2k-1}(\xi_0, \xi_0, q)] = (1 + \varepsilon) u_0 \delta_r^1. \quad (21)$$

Бесконечную систему линейных уравнений (21) можно решать методом редукции. Наконец, согласно формуле (6), имеем:

$$\begin{aligned} F_x &= -i \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k-1} \cos(2k-1)\eta \varepsilon \cos \eta d\eta - \\ &- i \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k-1} H_{2k-1}(\xi_0, \xi_0, q) s e_{2k-1}(\eta, q) \sin \eta d\eta = \\ &= i\pi \left[ -\varepsilon C_1 - \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k-1} H_{2k-1}(\xi_0, \xi_0, q) B_{2k-1, 1} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

**Асимптотика решения для больших значений  $\beta$ .** Как показано в статье [16], с помощью метода граничных интегральных уравнений при  $\beta \rightarrow \infty$  можно построить асимптотическое решение задачи Стокса для произвольного гладкого выпуклого контура в виде асимптотических рядов по степеням  $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ .

Для эллиптического контура первые два члена такого разложения дают выражения для потенциалов в точках контура [16]:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_0, \eta) &\underset{\beta \rightarrow \infty}{\sim} -u_0 \varepsilon \cos \eta + \frac{1}{i\sqrt{i\beta}} \frac{u_0 (1 + \varepsilon) \varepsilon^2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_m(\varepsilon)}{m} \cos m\eta, \\ I_m(\varepsilon) &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \eta \cos m\eta}{(\varepsilon^2 \cos^2 \eta + \sin^2 \eta)^{3/2}} d\eta, \\ \psi(\xi_0, \eta) &\underset{\beta \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{i\sqrt{i\beta}} \frac{(1 + \varepsilon) u_0 \sin \eta}{\sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 \eta + \sin^2 \eta}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подстановка формул (23) в выражение (6) для гидродинамической силы приводит к следующей записи:

$$F_x = i\pi u_0 \varepsilon^2 + \frac{4(1 + \varepsilon) \varepsilon u_0}{\sqrt{i\beta} (1 - \varepsilon)} \left[ K\left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2}\right) - E\left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2}\right) \right], \quad (24)$$

где  $K, E$  – полные эллиптические интегралы.

При  $\varepsilon \rightarrow 1$  эллипс вырождается в окружность и формула (24) переходит в формулу (9).

**Асимптотика решения для малых значений  $\beta$ .** При  $\beta \rightarrow 0$  имеем [15]:

$$q \rightarrow 0, \quad s e_{2k-1}(\eta, q) \rightarrow \sin(2k-1)\eta, \quad B_{2k-1, 2r-1} \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \delta_{2r-1}^{2k-1},$$

и тогда первый член в формулах (13), (15) становится главным. Следовательно, система уравнений (20) позволяет получить следующие зависимости:

$$\varphi(\xi, \eta) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{H_1(\xi_0, \xi_0, q) - \varepsilon}{H_1(\xi_0, \xi_0, q) + 1} e^{-(\xi - \xi_0)} u_0 \cos \eta,$$

$$\psi(\xi, \eta) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{(1+\varepsilon)H_1(\xi, \xi_0, q)}{H_1(\xi_0, \xi_0, q)+1} u_0 \sin \eta.$$

Разложением в ряды по малому параметру  $\beta$  находим:

$$\begin{aligned} \varphi \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} & \frac{8ie^{-\xi-\xi_0}}{(1-\varepsilon)\beta \left\{ -e^{-4\xi_0} - e^{-2\xi_0} + \left[ 2\gamma - i\pi + \ln \beta + 2 \ln \left( e^{\xi_0} \frac{1}{4} \sqrt{i(1-\varepsilon^2)} \right) \right] \right\}} u_0 \cos \eta, \\ \psi \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} & \frac{8ie^{-\xi-\xi_0}}{(1-\varepsilon)\beta \left\{ -e^{-4\xi_0} - e^{-2\xi_0} + \left[ 2\gamma - i\pi + \ln \beta + 2 \ln \left( e^{\xi_0} \frac{1}{4} \sqrt{i(1-\varepsilon^2)} \right) \right] \right\}} u_0 \sin \eta, \end{aligned}$$

и сила, соответственно, по формуле (6) выражается как

$$F_x \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} \frac{8(1+\varepsilon)\pi u_0 e^{-2\xi_0}}{(1-\varepsilon)\beta \left\{ -e^{-4\xi_0} - e^{-2\xi_0} + \left[ 2\gamma - i\pi + \ln \beta + 2 \ln \left( e^{\xi_0} \frac{1}{4} \sqrt{i(1-\varepsilon^2)} \right) \right] \right\}}. \quad (25)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 1$

$$2 \ln \left( e^{\xi_0} \frac{1}{4} \sqrt{i(1-\varepsilon^2)} \right) = 2 \ln \left( \frac{1+\varepsilon}{4} \sqrt{i} \right) = \frac{i\pi}{2} - 2 \ln 2, \quad e^{-2\xi_0} \sim \frac{1-\varepsilon}{2} + O(1-\varepsilon)^2,$$

и предельным переходом из выражения (25) получается формула (11) для окружности.

**Метод конечных разностей.** Численный алгоритм решения поставленной задачи подробно описан в статье [17]. Сопоставление результатов, полученных разными методами в работах [16, 17], позволяет заключить, что предлагаемый метод конечных разностей может применяться в достаточно широком диапазоне значений  $\beta \in [0, 1, 25]$ , т. е. даже в диапазоне «умеренных» значений  $\beta \in [1, 10]$ , где применимость асимптотических решений оказывается сомнительной.

### Численная реализация методов решения

Для численной реализации формул аналитического решения необходимо вычислить собственные числа  $b_{2k-1}(q)$  уравнения Матье и коэффициенты  $B_{2k-1, 2r-1}$ . Методика их вычисления описана давно [15, 18]. Хотя теоретическую работу по методам вычисления этих чисел принято считать завершенной [19], в реальности многие результаты до сих пор не получены, в особенности это касается случая чисто мнимых и больших по модулю значений  $q$ . Поэтому приходится опираться на применение пакета Mathematica, в котором имеются функции расчета периодических функций Матье, и находить коэффициенты  $B_{2k-1, 2r-1}$  численным интегрированием по формулам (18).

Опыт расчетов по изложенным выше методам показал, что диапазон чисел  $\beta$  можно условно разделить на три части: малые ( $\beta < 1$ ), большие ( $\beta > 10$ ) и умеренные ( $\beta \in [1, 10]$ ). В диапазоне малых  $\beta$  метод редукции для системы (21) сходится быстро (за 3 – 5 итераций). Результаты расчета модуля силы  $|F_x|$  для различных значений  $\varepsilon$  приведены на рис. 1.

Анализ показал, что при  $\beta > 1$  сходимость метода замедляется, порядок матрицы коэффициентов  $B_{2k-1, 2r-1}$  возрастает, число обусловленности быстро растет, а при  $\beta > 10$  вычисление коэффициентов  $B_{2k-1, 2r-1}$  по формуле (18) становится практически невозможным, так как подинтегральная функция быстро осциллирует. Проблемы реализации расчетной схемы в этом диапазоне в целом сходны с аналогичными в теории дифракции и рассеяния высокочастотных звуковых волн.

В случае задачи Стокса для кругового цилиндра применение асимптотик при  $\beta < 1$  и  $\beta > 10$  в совокупности с методом конечных разностей позволяет охватить весь возможный диапазон изменения значений параметра  $\beta$ .



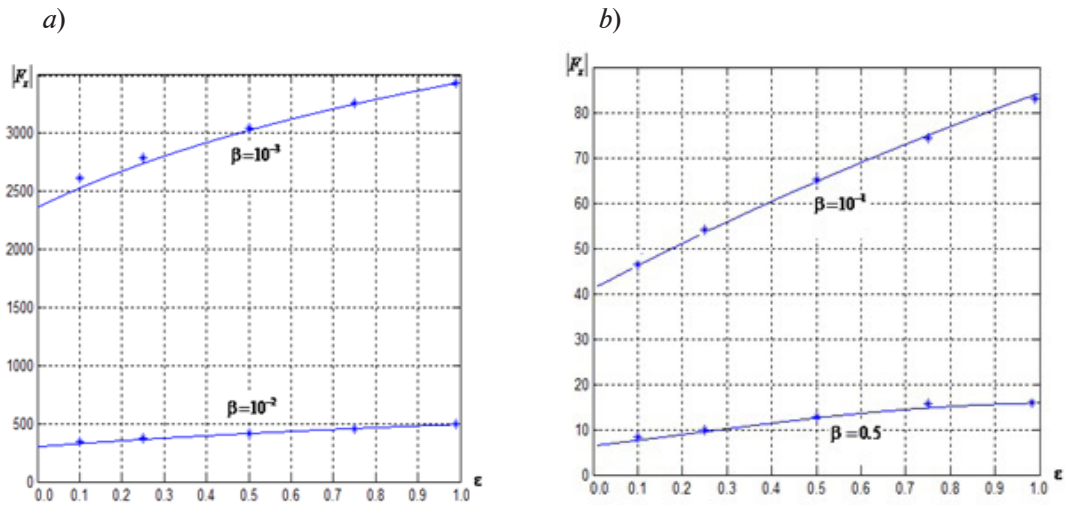


Рис. 1. Расчетные зависимости модуля силы  $|F_x|$  от параметра  $\epsilon$  при различных малых значениях числа  $\beta$ :  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$  (a) и  $10^{-1}$ , 0,5 (b).

Использованы формула (25) (сплошные линии) и аналитическое решение (символы)

Для эллиптического контура, по-видимому, можно надеяться на такой же эффект. В работе [16] методом конечных разностей установлено, что асимптотика (24) дает приемлемые результаты уже при  $\beta > 10$ .

На рис. 2 показаны результаты расчета по формуле (24) и по аналитическому решению для  $\beta \in [1, 10]$ . «Выход» решения на указанную асимптотику очевиден.

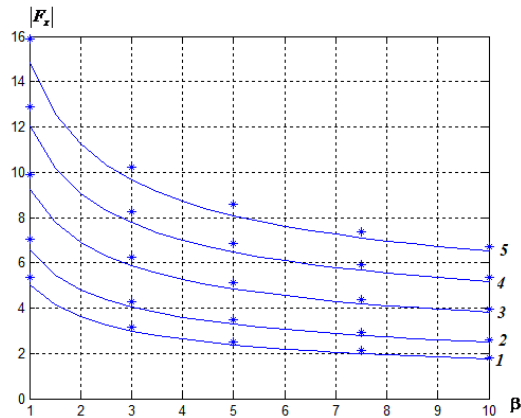


Рис. 2. Расчетные зависимости модуля силы  $|F_x|$  от параметра  $\beta$  при различных значениях параметра  $\epsilon$ : 0,10 (1), 0,25 (2), 0,50 (3), 0,75 (4), 0,99 (5).

Использованы формула (24) (сплошные линии) и аналитическое решение (символы)

### Заключение

Рассмотренные в работе методы можно применять для решения задачи о малых гармонических колебаниях эллиптического контура, погруженного в несжимаемую вязкую жидкость, и, как показывает сопоставление результатов, в совокупности они позволяют описать решение почти во всем диапазоне значений параметра  $\beta$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 тт. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Гузь А. Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
3. Кадыров С. Г. Метод граничных интегральных уравнений в задаче о малых колебаниях тел в сжимаемой вязкой жидкости // Морской вестник. 2013. Спец. выпуск № 1 (10). С. 85–87.
4. Ricci A., Giuri E. Fluid Structure Interaction (FSI) analysis of microcantilevers vibrating in fluid environment // Proceedings of the European COMSOL Conference. March 30, 2009. Milan. 2009. Pp. 1–11.
5. Kirstein S., Mertesdorf M., Schoenhoff M. The influence of a viscous fluid on the vibration dynamics of scanning near-field optical microscopy fiber probes and atomic force microscopy cantilevers // Journal of Applied Physics. 1998. Vol. 84. No. 4. Pp. 1782–1790.
6. Sader J. E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // Journal of Applied Physics. 1998. Vol. 84. No. 1. Pp. 64–76.
7. Badiane D., Gasser A., Blond E., Belliere L. Vibrating beam in viscous fluid for viscosity sensing: Application to an industrial vibrating viscometer // Proceedings of the 12th Pan American Congress of Applied Mechanics (PACAM XII), Port of Spain, Trinidad, 2–6 January, 2012. 6 p.
8. Chaplin J. R., Subbiah K. Hydrodynamic damping of a cylinder in still water and a transverse current // Applied Ocean Research. 1998. Vol. 20. No. 4. Pp. 251–259.
9. Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1851. Vol. 9. No. 2. Pp. 8–106.
10. Tanahashi T. Force acting on an oscillating cylinder in incompressible viscous fluid // Keio Engineering Reports. 1972. Vol. 25. No. 11. Pp. 129–140.
11. Bearman P. W., Downie M. J., Graham J. M. R. Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan – Carpenter numbers // Journal of Fluid Mechanics. 1985. Vol. 154. May. Pp. 337–356.
12. Sarpkaya T. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan – Carpenter numbers // Journal of Fluid Mechanics. 1986. Vol. 165. April. Pp. 61–71.
13. Ray M. Vibration of an infinite elliptic cylinder in a viscous liquid // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1936. Vol. 16. No. 2. Pp. 99–108.
14. Kanwal R. P. Vibrations of an elliptic cylinder and a flat plate in a viscous fluid // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1955. Vol. 35. No. 1–2. Pp. 17–22.
15. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матъе. Пер. с англ. под ред. И. Н. Денисюка. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
16. Афанасов Е. Н., Кадыров С. Г. Граничные интегральные уравнения и асимптотика решения плоской задачи о малых колебаниях тела в вязкой несжимаемой жидкости // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 4. С. 4–18.
17. Афанасов Е. Н. Малые колебания твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости // Морские интеллектуальные технологии. 2014. № 4-1 (26). С. 103–109.
18. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе. Пер. с англ. (Справочная математическая библиотека). М.: Наука. Гл. редакция физ.-мат. лит.-ры, 1967. 300 с.
19. Meixner J., Schäfer F. W., Wolf G. Mathieu functions // Mathieu functions and spheroidal functions and their mathematical foundations, Lecture Notes in Mathematics. Vol. 837. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1980. Pp. 63–101.

## REFERENCES

1. Landau L. D., Lifshitz E. M., Course of theoretical physics, in 10 Vols. Vol. 6. Fluid Mechanics, Pergamon Press, Oxford, UK, 1959.
2. Guz A. N., Dinamika szhimayemoy vyazkoy zhidkosti [Dynamics of compressible viscous fluid], A.S.K. Publishing, Kiev, 1998 (in Russian).
3. Kadyrov S. G., The method of boundary integral equations in the issue of small oscillations of



bodies in a viscous compressible fluid, *Morskoy Vestnik*. (S1 (10)) (2013) 85–87 (in Russian).

4. **Ricci A., Giuri E.**, Fluid Structure Interaction (FSI) analysis of microcantilevers vibrating in fluid environment, *Proc. Europ. COMSOL Conf.*, March 30, 2009. Milan (2009) 1–11.

5. **Kirstein S., Mertesdorf M., Schoenhoff M.**, The influence of a viscous fluid on the vibration dynamics of scanning near-field optical microscopy fiber probes and atomic force microscopy cantilevers, *J. Appl. Phys.* 84 (4) (1998) 1782–1790.

6. **Sader J. E.**, Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope, *J. Appl. Phys.* 84 (1) (1998) 64–76.

7. **Badiane D., Gasser A., Blond E., Belliere L.**, Vibrating beam in viscous fluid for viscosity sensing: Application to an industrial vibrating viscometer, *Proc. 12th Pan American Congress of Applied Mechanics (PACAM XII)*, Port of Spain, Trinidad, 2–6 Jan. (2012).

8. **Chaplin J. R., Subbiah K.**, Hydrodynamic damping of a cylinder in still water and a transverse current, *Appl. Ocean Res.* 20 (4) (1998) 251–259.

9. **Stokes G. G.**, On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Trans. Camb. Phil. Soc.* 9 (2) (1851) 8–106.

10. **Tanahashi T.**, Force acting on an oscillating cylinder in incompressible viscous fluid, *Keio Eng. Rep.* 25 (11) (1972) 129–140.

11. **Bearman P. W., Downie M. J., Graham J. M. R.**, Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan – Carpenter numbers, *J. Fluid Mech.* 154 (May) (1985) 337–356.

12. **Sarpkaya T.**, Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan – Carpenter numbers, *J. Fluid Mech.* 165 (April) (1986) 61–71.

13. **Ray M.**, Vibration of an infinite elliptic cylinder in a viscous liquid, *Z. Angew. Math. Mech.* 16 (2) (1936) 99–108.

14. **Kanwal R. P.**, Vibrations of an elliptic cylinder and a flat plate in a viscous fluid, *Z. Angew. Math. Mech.* 35 (1–2) (1955) 17–22.

15. **McLachlan N.**, *Theory and application of Mathieu functions*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1947.

16. **Afanasov E. N., Kadyrov S. G.**, Boundary integral equations and asymptotic solutions of the plane problem of small oscillations of body in a viscous incompressible fluid, *Simulation, Computer and Full-Scale Experiment in Natural Sciences*. (4) (2016) 4–18.

17. **Afanasov E. N.**, Small oscillations of a rigid body in a viscous incompressible fluid, *Marine Intellectual Technologies*. (4-1 (26)) (2014) 103–109 (in Russian).

18. **Bateman H., Erdélyi A.**, *Higher transcendental functions*. In 3 Vols. Vol. III. McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

19. **Meixner J., Schäpfke F. W., Wolf G.**, *Mathieu functions*, In book: *Mathieu functions and spheroidal functions and their mathematical foundations*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 837, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1980) 63–101.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**АФАНАСОВ Евгений Николаевич** – инженер-гидродинамик ООО «Эволюция морских цифровых технологий», Санкт-Петербург, Россия.

197198, Россия, г. Санкт-Петербург, Александровский парк, 4, к. 3  
zhenya.afanasov@yandex.ru

**КАДЫРОВ Сергей Газимурович** – кандидат технических наук, доцент кафедры математики Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, Санкт-Петербург, Россия.

190008, Россия, г. Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3  
skadyrov@gmail.com

**ПЕВЗНЕР Виталий Владимирович** – старший преподаватель кафедры математики Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, Санкт-Петербург, Россия.

190008, Россия, г. Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3  
vpevzner@mail.ru

## THE AUTHORS

**AFANASOV Evgeny N.**

*LLC "Evolution Marine Digital"*

4-3 Alexandrovsky Park, St. Petersburg, 197198, Russia

zhenya.afanasov@yandex.ru

**KADYROV Sergey G.**

*State Marine Technical University*

3 Lotsmanskaya St., St. Petersburg, 190008, Russia

skadyrov@gmail.com

**PEVZNER Vitaliy V.**

*State Marine Technical University*

3 Lotsmanskaya St., St. Petersburg, 190008, Russia

vpevzner@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 28.04.2023. Одобрена после рецензирования 18.06.2023.  
Принята 18.06.2023.*

*Received 28.04.2023. Approved after reviewing 18.06.2023. Accepted 18.06.2023.*