

Научная статья

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16312>

## АНТИПЛОСКАЯ ТРЕЩИНА, ВЫХОДЯЩАЯ ИЗ ВЕРШИНЫ СОСТАВНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО КЛИНА

**В. В. Тихомиров** ✉

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Россия

✉ [victikh@mail.ru](mailto:victikh@mail.ru)

**Аннотация.** Рассматривается задача об интерфейсной трещине продольного сдвига, расположенной между двумя функционально-градиентными клиновидными областями и выходящей из их общей вершины. Модули сдвига материалов областей являются квадратичными функциями полярного угла. Такой вид функциональной неоднородности позволяет выразить все компоненты упругого поля через одну гармоническую функцию. С помощью интегрального преобразования Меллина проблема сведена к скалярному уравнению Винера – Хопфа, для которого получено точное решение. Изучено влияние градиентов упругих свойств материалов и геометрических параметров структуры на коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины.

**Ключевые слова:** функционально-градиентный клин, интерфейсная трещина продольного сдвига, коэффициент интенсивности напряжений

**Для цитирования:** Тихомиров В. В. Антиплоская трещина, выходящая из вершины составного функционально-градиентного клина // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 3. С. 150–159. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16312>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16312>

## AN ANTIPLANE CRACK EMERGING FROM THE TOP OF A COMPOSITE FUNCTIONAL GRADIENT WEDGE

**V. V. Tikhomirov** ✉

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

✉ [victikh@mail.ru](mailto:victikh@mail.ru)

**Abstract.** In the paper, the problem on an interface longitudinal shear crack located between two functionally graded wedge-shaped regions and emerging from their common vertex has been considered. The shear modules of the materials are quadratic functions of the polar angle. This kind of functional inhomogeneity made it possible to express all the components of the elastic field through a single harmonic function. Using the Mellin integral transform, the problem was reduced to the Wiener – Hopf scalar equation, for which an exact solution was obtained. The influence of gradients of elastic properties of materials and geometric parameters of the structure on the stress intensity factor was studied.

**Keywords:** functionally graded wedge, interface crack of longitudinal shear, stress intensity factor



**For citation:** Tikhomirov V. V., An antiplane crack emerging from the top of a composite functional gradient wedge, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (3) (2023) 150–159. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16312>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

Как известно, угловые точки упругих структур являются зонами повышенной концентрации напряжений и, следовательно, могут служить источниками появления и роста трещин. В рамках антиплоской задачи, трещины, выходящие из вершины изотропного, анизотропного, а также составного (композиционного) клина, рассматривались во многих работах [1 – 5]. Однако в случае, когда материал клиновидной области обладает градиентными свойствами, подобный анализ пока еще не проводился.

Функционально-градиентные материалы (ФГМ) представляют собой композиты, механические свойства которых непрерывно изменяются пространственным образом. Используемые в качестве покрытий, они обеспечивают защиту от термически и химически агрессивной окружающей среды. Распространенными формами механического повреждения тонких покрытий являются их растрескивание или отслоение. Разрушение слоистых градиентных покрытий с интерфейсной трещиной или с трещиной, ортогональной поверхности раздела материалов, исследовались, например, в работах [6, 7]. Градиентные материалы, применяемые как интерфейсные зоны, обеспечивают непрерывное изменение материальных свойств и тем самым увеличивают прочность сцепления разнородных материалов [8]. Анализ клиновидной структуры с переходным ФГМ выполнен в работе [9].

Исследования, проведенные Чж. Джином и Р. Батра [10], показали, что упругие поля вблизи вершины трещины, находящейся в ФГМ, аналогичны полям в однородном материале, если упругие модули непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы. При анализе ФГМ, имеющих дефекты в виде трещин, для упругих модулей обычно используются линейные или экспоненциальные зависимости от координат, обеспечивающие аналитические решения уравнений равновесия. В работе [9] для градиентного материала предложена квадратичная зависимость модуля сдвига от полярного угла, которая в условиях антиплоской задачи позволяет выразить все компоненты упругого поля через одну гармоническую функцию. Такая зависимость упругого модуля использовалась в статье [11] при анализе составного градиентного клина, ослабленного полубесконечной трещиной.

В настоящей работе исследуется напряженное состояние составного функционально-градиентного клина с трещиной, распространяющейся из его вершины. В зависимости от градации материалов рассматриваются эффекты увеличения или уменьшения коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины, по сравнению с однородным случаем.

### Постановка задачи

Рассмотрим составной клин, содержащий интерфейсную антиплоскую трещину длины  $\varepsilon$ , растущую из его вершины (рис. 1).

Материалы подобластей

$$\Omega_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \alpha_1\},$$

$$\Omega_2 = \{(r, \theta) : 0 \leq r < \infty, -\alpha_2 \leq \theta \leq 0\}$$

( $r, \theta$  – полярные координаты) предполагаются функционально-градиентными.

Модули сдвига материалов являются функциями полярного угла и на границах  $\theta = \alpha_1$  и  $\theta = -\alpha_2$  принимают значения  $\tilde{\mu}_1$  и  $\tilde{\mu}_3$  соответственно. На интерфейсе модули сдвига материалов имеют одинаковую величину, равную  $\tilde{\mu}_2$ . Контакт материалов вне трещины предполагается идеальным. К берегам трещины приложена самоуравновешенная нагрузка  $g(r)$ .

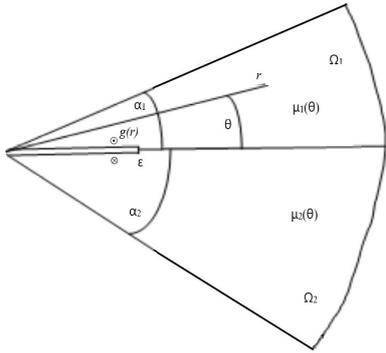


Рис. 1. Составной функционально-градиентный клин с интерфейсной трещиной продольного сдвига, распространяющейся из его вершины:  $\mu_1(\theta), \mu_2(\theta)$  – модули сдвига градиентных материалов областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \theta, r, \varepsilon$  – геометрические параметры;  $g(r)$  – самоуравновешенная нагрузка, приложенная к берегам трещины

При зависимости модулей сдвига материалов областей  $\Omega_j$  от полярного угла уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{1}{\mu_j(\theta)r^2} \frac{d\mu_j}{d\theta} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} = 0, \quad (1)$$

а напряжения выражаются через перемещения  $w_j$  по формулам

$$\tau_{\theta z j} = \frac{\mu_j}{r} \frac{\partial w_j}{\partial \theta}, \quad \tau_{r z j} = \mu_j \frac{\partial w_j}{\partial r} \quad (j = 1, 2). \quad (2)$$

Для модулей сдвига материалов принимаем квадратичные зависимости от угловой координаты:

$$\mu_j(\theta) = (a_j \theta + b_j)^2,$$

коэффициенты которых, определяемые значениями на границах, имеют вид

$$a_1 = (\sqrt{\tilde{\mu}_1} - \sqrt{\tilde{\mu}_2}) / \alpha_1,$$

$$a_2 = (\sqrt{\tilde{\mu}_3} - \sqrt{\tilde{\mu}_2}) / \alpha_2,$$

$$b_1 = -b_2 = \sqrt{\tilde{\mu}_2}.$$

Если полагать, что перемещения в областях  $\Omega_j$  представимы в форме

$$w_j(r, \theta) = \frac{1}{a_j \theta + b_j} \tilde{w}_j(r, \theta), \quad (3)$$

то из уравнений (1) вытекает, что функции  $\tilde{w}_j(r, \theta)$  являются гармоническими, а напряжения определяются формулами

$$\tau_{\theta z j} = -\frac{a_j}{r} \tilde{w}_j(r, \theta) + \frac{a_j \theta + b_j}{r} \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial \theta}, \quad (4)$$

$$\tau_{r z j} = (a_j \theta + b_j) \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial r}.$$

Компоненты упругих полей (3), (4) должны удовлетворять смешанным условиям на границе раздела материалов и отсутствию напряжений на внешних краях композита:

$$\tau_{\theta z 1}(r, +0) = \tau_{\theta z 2}(r, -0) = g(r) \quad (0 \leq r < \varepsilon) \quad (5)$$

$$\tau_{\theta z 1}(r, +0) = \tau_{\theta z 2}(r, -0), \quad w_1(r, +0) = w_2(r, -0) \quad (\varepsilon < r < \infty)$$

$$\tau_{\theta z 1}(r, \alpha_1) = 0, \quad \tau_{\theta z 2}(r, -\alpha_2) = 0 \quad (0 \leq r < \infty)$$

### Сведение задачи к уравнению Винера – Хопфа и его решение

Применяя интегральное преобразование Меллина, для перемещений и напряжений получим следующие представления:

$$w_j(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L W_j(p, \theta) r^{-p} dp, \quad (6)$$

$$\tau_{\theta z j}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L T_{\theta z j}(p, \theta) r^{-p-1} dp,$$



в которых трансформанты, согласно формулам (3) и (4), имеют вид

$$W_j(p, \theta) = [A_j(p) \sin p\theta + B_j(p) \cos p\theta] / (a_j\theta + b_j),$$

$$T_{0z_j}(p, \theta) = -a_j [A_j(p) \sin p\theta + B_j(p) \cos p\theta] + (a_j\theta + b_j) p [A_j(p) \cos p\theta - B_j(p) \sin p\theta].$$

В соответствии с условиями регулярности, контур интегрирования  $L$  в формулах (6) расположен параллельно мнимой оси в полосе  $-\delta_1 < \operatorname{Re} p < \delta_2$  ( $\delta_1, \delta_2 > 0$ ). Величины, зависящие от параметра интегрального преобразования,  $A_j(p)$  и  $B_j(p)$  ( $j = 1, 2$ ), определяются из условий (5).

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$U_+(p) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} [w_1(\varepsilon\rho, +0) - w_2(\varepsilon\rho, -0)] \rho^p d\rho, \quad (7)$$

$$T_-(p) = \int_1^\infty \tau_{0z1}(\varepsilon\rho, +0) \rho^p d\rho, \quad G_+(p) = \int_0^1 g(\varepsilon\rho) \rho^p d\rho.$$

При этом  $W_+(p)$  и  $G_+(p)$  регулярны и не имеют нулей в правой от контура  $L$  полуплоскости  $\Omega_+$ , а  $T_-(p)$  – в левой полуплоскости  $\Omega_-$  [12]. Выражая величины  $A_j(p)$  и  $B_j(p)$  через функции (7) в граничных условиях (5), преобразованных по Меллину, приходим к скалярному уравнению Винера – Хопфа:

$$F(p)[T_-(p) + G_+(p)] + \tilde{\mu}_2 \varepsilon^{-1} U_+(p) = 0 \quad (p \in L), \quad (8)$$

где

$$F(p) = \operatorname{ctg}(\alpha_1 p) \frac{v_1(\alpha_1 p)}{u_1(\alpha_1 p)} + \operatorname{ctg}(\alpha_2 p) \frac{v_2(\alpha_2 p)}{u_2(\alpha_2 p)}, \quad (9)$$

$$u_j(x) = 1 + m_j^{-1} (m_j - 1)^2 x^{-2} [1 - x \operatorname{ctg}(x)], \quad (10)$$

$$v_j(x) = 1 + (m_j - 1)x^{-1} \operatorname{tg}(x) \quad (j = 1, 2),$$

$$m_1 = \sqrt{\tilde{\mu}_2 / \tilde{\mu}_1}, \quad m_2 = \sqrt{\tilde{\mu}_2 / \tilde{\mu}_3},$$

$$\tilde{\mu}_1 = \mu_1(\alpha_1), \quad \tilde{\mu}_2 = \mu_1(0) = \mu_2(0), \quad \tilde{\mu}_3 = \mu_2(-\alpha_2).$$

В формулы (10) входят два безразмерных параметра  $m_j$  ( $0 < m_j < \infty$ ), характеризующие относительные сдвиговые жесткости материалов на линии трещины по отношению к материалам на внешних гранях клина. При  $0 < m_j < 1$  трещина будет находиться в области локально мягкого материала композита, а при  $1 < m_j < \infty$  – в области локально жесткого материала. Значение  $m_j = 1$  отвечает однородному материалу в области  $\Omega_j$ . В случае однородного клина, когда  $m_1 = m_2 = 1$ , из формул (9) и (10) для коэффициента уравнения (8) имеем выражение, полученное в работе [13]. Если  $m_1 = m_2$ , то функция  $F(p)$  принимает вид, найденный в работе [11].

Для факторизации функции (9) представим ее в следующей форме:

$$F(p) = \frac{2}{p} K(p), \quad (11)$$

$$K(p) = X(p)\Phi(p), \quad X(p) = p \operatorname{ctg}(\alpha_1 p),$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{2} F_1(p) F_2(p), \quad F_1(p) = \frac{v_1(\alpha_1 p)}{u_1(\alpha_1 p)},$$

$$F_2(p) = 1 + \operatorname{tg}(\alpha_1 p) \operatorname{ctg}(\alpha_2 p) \frac{u_1(\alpha_1 p) v_2(\alpha_2 p)}{u_2(\alpha_2 p) v_1(\alpha_1 p)}.$$

На мнимой оси при  $p = it$  функция  $\Phi(it)$  непрерывна, не имеет нулей и полюсов, ее индекс равен нулю и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к единице. Поэтому, согласно выкладкам, приведенным в работе [12], получим:

$$\Phi(p) = \Phi_+(p) \Phi_-(p), \quad (12)$$

$$\Phi_{\pm}(p) = \exp \left[ \mp \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \Phi(t)}{t-p} dt \right] \quad (p \notin L),$$

$$X(p) = X_+(p) X_-(p), \quad X_{\pm}(p) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}} \frac{\Gamma(1 \pm p \alpha_1 / \pi)}{\Gamma(1/2 \pm p \alpha_1 / \pi)}.$$

Используя формулы (11), (12) и применяя теоремы Лиувилля [12], из уравнения (8) получаем:

$$X_-(p) \Phi_-(p) T_-(p) + Q_-(p) = -\frac{\tilde{\mu}_2 p}{2\varepsilon} U_+(p) X_+^{-1}(p) \Phi_+^{-1}(p) - Q_-(p) = J(p), \quad (13)$$

где

$$Q_{\pm}(p) = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q(t)}{t-p} dt, \quad Q(t) = \frac{t}{2} \Phi_+^{-1}(t) X_+^{-1}(t) F(t) G_+(t). \quad (14)$$

Если провести оценку членов в равенстве (13) при  $p \rightarrow \infty$ , то мы приходим к выводу о постоянстве единой аналитической функции:

$$J(p) = \operatorname{const} = C.$$

Эту постоянную можно найти из уравнения (13) при значении  $p = 0$ .

С учетом формул (12) и (14), а также равенства  $T_-(0) = -G_+(0)$ , вытекающего из уравнения равновесия области  $\Omega_1$ , находим, что

$$C = -C_* G_+(0) + \frac{1}{4\pi i} \int_L X_+^{-1}(p) \Phi_+^{-1}(t) F(t) G_+(t) dt, \quad (15)$$

$$C_* = \Phi_-(0) X_-(0) = \left[ \frac{3}{2\alpha_1 \alpha_2} \left( \frac{\alpha_2 m_1^2}{m_1^2 + m_1 + 1} + \frac{\alpha_1 m_2^2}{m_2^2 + m_2 + 1} \right) \right]^{1/2}.$$

Для вычисления интеграла в формуле (15) воспользуемся теоремой Коши о вычетах. Полюсы подынтегральной функции, расположенные в полуплоскости  $\Omega_+$  (правой от контура  $L$ ), являются полюсами  $F(t)$ ; эту функцию, исходя из формулы (9), удобно представить в следующем виде:

$$F(t) = m_1 \alpha_1 t \frac{\tilde{v}_1(\alpha_1 t)}{\tilde{u}_1(\alpha_1 t)} + m_2 \alpha_2 t \frac{\tilde{v}_2(\alpha_2 t)}{\tilde{u}_2(\alpha_2 t)}, \quad (16)$$

где

$$\tilde{v}_j(x) = x \cos x + (m_j - 1) \sin x, \quad x = \alpha_j t,$$

$$\tilde{u}_j(x) = m_j x^2 \sin x + (m_j - 1)^2 (\sin x - x \cos x) \quad (j = 1, 2). \quad (17)$$

Отсюда вытекает, что полюсы функции (16) определяются положительными корнями уравнений  $\tilde{u}_j(x) = 0$ , находящимися в интервалах  $n\pi < x_{nj} < (n + 0,5)\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Следует отметить, что существуют две группы полюсов:  $t_{nj} = x_{nj} / \alpha_j$  ( $j = 1, 2$ ). Можно показать, что функции (17) не имеют комплексных нулей. Кроме того, при замене  $m_j$  на  $m_j^{-1}$  рассматриваемые полюсы будут идентичными.

В результате, из формулы (15) получаем, что

$$C = -C_* G_+(0) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\pi}} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} G_+(t_{nj}), \quad (18)$$

где

$$a_{nj} = \frac{1}{\alpha_j} \frac{\Gamma(1/2 + \alpha_1 t_{nj}/\pi)}{\Gamma(1 + \alpha_1 t_{nj}/\pi)} \Phi_+^{-1}(t_{nj}) b(x_{nj}),$$

$$\Phi_+^{-1}(t_{nj}) = \exp \left[ -\frac{t_{nj}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln \Phi(i\xi)}{\xi^2 + t_{nj}^2} d\xi \right],$$

$$b(x_{nj}) = \frac{x_{nj} \cos x_{nj} + (m_j - 1) \sin x_{nj}}{x_{nj} \cos x_{nj} + (m_j + m_j^{-1}) \sin x_{nj}}.$$

На основании теоремы Абедева типа [12] заключаем, что асимптотика напряжений на линии трещины при  $r \rightarrow \varepsilon + 0$  имеет вид

$$\tau_{0z1}(r, 0) \sim C \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{r - \varepsilon}}. \quad (19)$$

Определим коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины формулой

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow \varepsilon + 0} \sqrt{2\pi(r - \varepsilon)} \tau_{0z1}(r, 0).$$

Тогда, используя асимптотику (19), получаем выражение

$$K_{III}(\alpha_1, \alpha_2, m_1, m_2, \varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon} C. \quad (20)$$

Формулами (18) и (20) определяется КИН для различных схем нагружения берегов трещины самоуравновешенной нагрузкой на основе нахождения интеграла, задающего функцию  $G_+(p)$  в равенствах (7).

Пусть к берегам трещины приложены сосредоточенные силы величиной  $T_0$  на расстоянии  $r_0$  от вершины клина. В этом случае

$$g(r) = -T_0 \delta(r - r_0),$$

$$G_+(p) = -T_0 / \varepsilon (r_0 / \varepsilon)^p$$

( $\delta(r - r_0)$  – дельта-функция Дирака).

Тогда, согласно формулам (18) и (20), получаем для КИНа следующее представление:

$$K_{III} = T_0 \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \left[ C_* + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\pi}} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} \left( \frac{r_0}{\varepsilon} \right)^{t_{nj}} \right]. \quad (21)$$

С целью выявления эффекта, вносимого градиентами материалов, введем в рассмотрение нормированный вариант КИНа:

$$N = K_{III} / K_{III}^0, \quad (22)$$

где  $K_{III}^0$  – КИН в вершине трещины, расположенной в однородном клине.

Значение  $K_{III}^0$  можно получить из формулы (21), положив  $m_1 = m_2 = 1$ . В этом случае, согласно формулам (10),

$$u_j(x) = v_j(x) = 1 \quad (j = 1, 2).$$

Следовательно, функции, входящие в представления (11), принимают вид

$$F_1(p) = 1, F_2(p) = 1 + \operatorname{tg}(\alpha_1 p) \operatorname{ctg}(\alpha_2 p),$$

а полюсы подынтегральной функции в выражении (15), в соответствии с представлением (9), определяются формулами

$$t_{nj} = \pi n / \alpha_j \quad (n = 1, 2, \dots, j = 1, 2).$$

В частности, при геометрической симметрии структуры, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , ряд (21) суммируется и КИН в однородном клине имеет вид

$$K_{III}^0 = T_0 \sqrt{\frac{2}{\alpha \varepsilon}} \frac{\varepsilon^{\pi/(2\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon^{\pi/\alpha} - r_0^{\pi/\alpha}}}.$$

### Численные результаты

Коэффициент интенсивности напряжений (21) зависит от пяти параметров: двух углов раствора  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  клиновидных областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , относительных жесткостей этих областей  $m_1$  и  $m_2$ , а также безразмерного параметра  $r_0 / \varepsilon$ , определяющего положения точек приложения сил к берегам трещины.

Влияние на КИН геометрического параметра  $r_0 / \varepsilon$  при его малых значениях является весьма слабым и возрастает при величинах  $r_0 / \varepsilon$ , близких к единице, когда сходимость рядов в формуле (21) ухудшается. Зависимость нормированного КИНа (22) от параметра  $r_0 / \varepsilon$ , например, в случае однородной области  $\Omega_2$ , для  $m_1 > 1$  является монотонно убывающей, а для  $m_1 < 1$  – монотонно возрастающей. При  $r_0 / \varepsilon \ll 1$  ряды (21) не вносят значительного вклада в КИН, и его значение в этом случае определяется величиной  $C_*$ . Аналогичная ситуация имеет место также в случае малых углов раствора клиновидных областей, когда  $\alpha_1$  и  $\alpha_2 \ll 1$ .

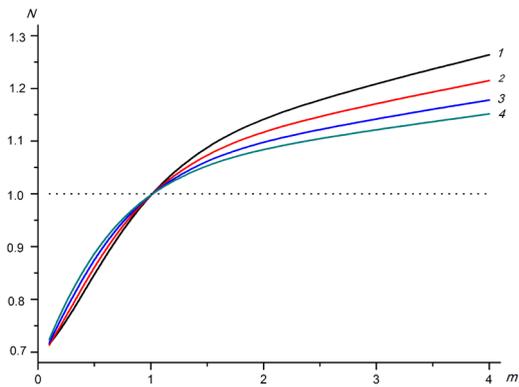


Рис. 2. Зависимости нормированного КИНа от относительной сдвиговой жесткости  $m_1$  функционально-градиентной области  $\Omega_1$  в случае геометрически симметричного клина и однородной области  $\Omega_2$  при  $\varepsilon/r_0 = 0,5$  для различных значений угла  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ :  $\pi/4$  (1);  $\pi/2$  (2);  $3\pi/4$  (3);  $\pi$  (4)

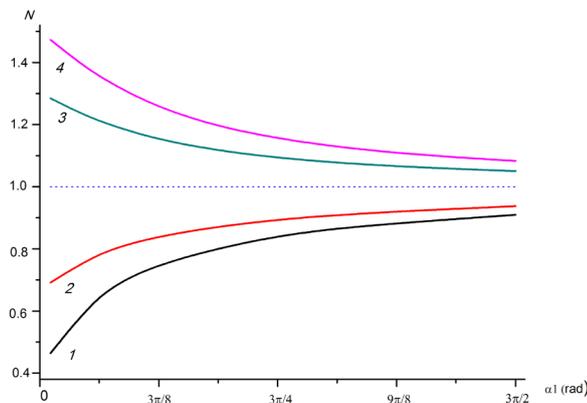


Рис. 3. Зависимости нормированного КИНа от угла  $\alpha_1$  функционально-градиентной области  $\Omega_1$  и однородной области  $\Omega_2$  в виде четверти плоскости при  $\varepsilon/r_0 = 0,5$  для различных значений параметра  $m_1$ : 0,25 (1); 0,50 (2); 2,00 (3); 4,00 (4)



В случае композита геометрически симметричной структуры ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ) с однородной областью  $\Omega_2$  ( $m_2 = 1$ ) зависимость нормированного КИНа (22) от градиентных свойств материала области  $\Omega_1$  приведена на рис. 2. Если в зоне интерфейса материал имеет более низкую жесткость на сдвиг, по сравнению с внешней границей ( $m_1 < 1$ ), то это приводит при всех углах  $\alpha$  к снижению КИНа ( $N < 1$ ). Напротив, когда трещина расположена в зоне материала с высокой сдвиговой жесткостью ( $m_1 > 1$ ), происходит возрастание коэффициента интенсивности ( $N > 1$ ), по сравнению с однородным случаем. При этом эффекты повышения и снижения нормированного КИНа становятся более выраженными при уменьшении углов раствора структуры.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае композита несимметричного строения. Такое, например, поведение КИНа будет для однородной области  $\Omega_2$ , имеющей вид четверти плоскости, и любых значениях угла в пределах  $0 < \alpha_1 \leq 3\pi/2$  (рис. 3). Влияние на коэффициент интенсивности градиента материала области  $\Omega_1$  становится особенно заметным в случае тонких клиновидных покрытий, когда угол  $\alpha_1$  является достаточно малым.

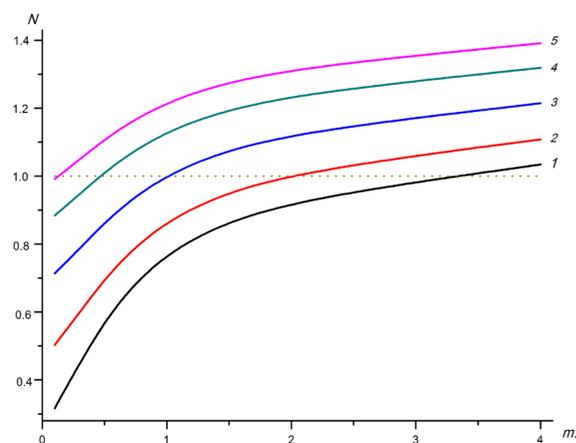


Рис. 4. Зависимости нормированного КИНа от относительной сдвиговой жесткости  $m_1$  при  $\varepsilon/r_0 = 0,5$  в случае функционально-градиентной полуплоскости, образованной клиновидными областями с углами  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ , для различных значений параметра  $m_2$ : 0,25 (1); 0,50 (2); 1,00 (3); 2,00 (4); 4,00 (5)

Изменение КИНа в вершине трещины в зависимости от градиентов модулей сдвига в обоих материалах рассмотрено на примере составной полуплоскости для углов  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ . В отличие от случая однородного материала области  $\Omega_2$ , когда  $m_2 = 1$ , ситуация не является столь однозначной, как ранее. В целом, наличие градиента модуля сдвига в этой области обуславливает снижение КИНа при  $m_2 < 1$  (см. кривые 1 и 2 на рис. 4) и возрастание КИНа при  $m_2 > 1$  (кривые 4 и 5) для любых значений параметра  $m_1$ . Однако градиентные свойства материала области  $\Omega_2$  могут приводить к значениям  $N > 1$  даже в случае достаточно малой относительной жесткости  $m_1 < 1$  для  $m_2 > 1$  (кривые 4 и 5). Кроме того, значения параметра  $m_2 < 1$  (кривые 1 и 2) могут обуславливать величины нормированного КИНа, не превышающие единицу в некотором диапазоне относительной сдвиговой жесткости, когда  $m_1 > 1$ .

#### Заключение

В данной работе на основе интегрального преобразования Меллина и использования метода Винера – Хопфа получено точное решение задачи о равновесии составного функционально-градиентного клина, ослабленного интерфейсной трещиной продольного сдвига, выходящей из его вершины. Берега трещины нагружены самоуравновешенными сосредоточенными силами. Модули сдвига материалов, составляющих клин двух клиновидных областей, предполагаются зависящими квадратичным образом от угловой координаты и принимают заданные значения на интерфейсе и внешних сторонах клина. Такая функциональная зависимость позволяет выразить все компоненты упругих полей в этих областях через гармонические функции.

Проведен анализ влияния геометрических и жесткостных параметров композита на величину коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины. Выяснено, что градиентные свойства материалов могут существенно влиять на указанную величину. В случае, когда трещина расположена в области, относительно более мягкой, по сравнению с областями вблизи его кромок, КИН значительно уменьшается, по сравнению с его значением в однородном материале. Наоборот, ужесточение материалов в области интерфейса вызывает для КИНа повышающий эффект по отношению к однородному случаю.

Предложенный в работе подход можно применять и в случае, когда модули сдвига материалов имеют скачок на линии роста трещины.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu X., Dzenis Y., Zou W. Screw dislocation interacting with an interfacial edge crack between two bonded piezoelectric wedges // *International Journal of Fracture*. 2002. Vol. 117. No. 3. Pp. 9–14.
2. Beom H. G., Jang H. S. A wedge crack in an anisotropic material under antiplane shear // *International Journal of Engineering Science*. 2011. Vol. 49. No. 9. Pp. 867–880.
3. Beom H. G., Jang H. S. A crack emanating from a wedge in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear // *International Journal of Fracture*. 2012. Vol. 177. No. 2. Pp. 191–198.
4. Beom H. G., Jang H. S. Interfacial wedge cracks in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear // *International Journal of Engineering Science*. 2012. Vol. 56. No. 1. Pp. 49–62.
5. Тихомиров В. В. Точное решение задачи для трещины, выходящей из вершины двух разнородных клиньев // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2019. Т. 12. No. 2. С. 130–139.
6. Jin Z.-H., Batra R. C. Interface cracking between functionally graded coatings and a substrate under antiplane shear // *International Journal of Engineering Science*. 1996. Vol. 34. No. 15. Pp. 1705–1716.
7. Li Y.-D., Lee K. Y. An anti-plane crack perpendicular to the weak/micro-discontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities // *International Journal of Fracture*. 2007. Vol. 146. No. 4. Pp. 203–211.
8. Ding S.-H., Li X. Mode-I crack problem for functionally graded layered structures // *International Journal of Fracture*. 2011. Vol. 168. No. 2. Pp. 209–226.
9. Тихомиров В. В. Сингулярность напряжений в вершине композитного клина с внутренним функционально-градиентным материалом // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2015. №. 3 (225). С. 96–106.
10. Jin Z.-H., Batra R. C. Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials // *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. 1996. Vol. 44. No. 8. Pp. 1221–1235.
11. Тихомиров В. В. Функционально-градиентный клин, ослабленный полубесконечной трещиной // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2022. Т. 15. No. 3. С. 201–213.
12. Noble B. Method based on the Wiener – Hopf technique for solution of partial differential equations. 2nd edition. Washington: American Mathematical Society, 1988. 246 p.
13. Тихомиров В. В. Полубесконечная трещина моды III в биматериальном клине // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2016. No. 2 (242). С. 126–135.

### REFERENCES

1. Wu X., Dzenis Y., Zou W., Screw dislocation interacting with an interfacial edge crack between two bonded piezoelectric wedges, *Int. J. Fract.* 117 (3) (2002) 9–14.
2. Beom H. G., Jang H. S., A wedge crack in an anisotropic material under antiplane shear, *Int. J. Eng. Sci.* 49 (9) (2011) Pp. 867–880.
3. Beom H. G., Jang H. S., A crack emanating from a wedge in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear, *Int. J. Fract.* 177 (2) (2012) 191–198.
4. Beom H. G., Jang H. S., Interfacial wedge cracks in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear, *Int. J. Eng. Sci.* 56 (1) (2012) Pp. 49–62.



5. **Tikhomirov V. V.**, The exact solution of the problem on a crack emerging from the top of two dissimilar wedge, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 130–139 (in Russian).
6. **Jin Z.-H., Batra R. C.**, Interface cracking between functionally graded coatings and a substrate under antiplane shear, Int. J. Eng. Sci. 34 (15) (1996) 1705–1716.
7. **Li Y.-D., Lee K. Y.**, An anti-plane crack perpendicular to the weak/micro-discontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities, Int. J. Fract. 146 (4) (2007) 203–211.
8. **Ding S.-H., Li X.**, Mode-I crack problem for functionally graded layered structures, Int. J. Fract. 168 (2) (2011) 209–226.
9. **Tikhomirov V. V.**, Stress singularity in a top of the composite wedge with internal functionally graded material, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (3 (225)) (2015) 96–106 (in Russian).
10. **Jin Z.-H., Batra R. C.**, Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials, J. Mech. Phys. Solids. 44 (8) (1996) 1221–1235.
11. **Tikhomirov V. V.**, Functionally graded wedge weakened by a semi-infinite crack, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 15 (3) (2022) 201–213 (in Russian).
12. **Noble B.**, Method based on the Wiener – Hopf technique for solution of partial differential equations. 2nd edition, American Mathematical Society, Washington, 1988.
12. **Noble B.**, Method based on the Wiener – Hopf technique for solution of partial differential equations, Pergamon Press, Oxford, 1958.
13. **Tikhomirov V. V.**, A semi-infinite crack of mode III in the bimaterial wedge, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (2 (242)) (2016) 126–135 (in Russian).

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич** – кандидат физико-математических наук, заместитель директора по образовательной деятельности Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
victikh@mail.ru

#### THE AUTHOR

**TIKHOMIROV Victor V.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia  
victikh@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 17.03.2023. Одобрена после рецензирования 14.05.2023. Принята 14.05.2023.*

*Received 17.03.2023. Approved after reviewing 14.05.2023. Accepted 14.05.2023.*