

Научная статья  
УДК 539.3, 539.42  
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16311>

## РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ТРЕЩИН В МАТЕРИАЛАХ С КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ ПРИ ПЛОСКОМ ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

А. В. Савиковский<sup>1, 2</sup> ✉, А. С. Семенов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Россия;

<sup>2</sup> АО «Силовые машины», Санкт-Петербург, Россия

✉ [savikovskii.artem@yandex.ru](mailto:savikovskii.artem@yandex.ru)

**Аннотация.** Рассматривается наклонная прямолинейная центральная трещина в одноосно растягиваемой плоскости при смешанной моде разрушения (комбинация мод нормального отрыва и продольного сдвига) в ортотропном материале и материале с кубической симметрией. С помощью выражений, выведенных на основе формализма Лехницкого, а также методов экстраполяции перемещений и напряжений получены значения коэффициентов интенсивности напряжений для различных ориентаций трещины. Представлены результаты верификации использованного подхода на основе сравнения конечно-элементного расчета с аналитическим (отличие менее 0,75 %). Проведен сравнительный анализ коэффициентов интенсивности напряжений и раскрытия трещины для трех видов симметрии упругих свойств: изотропного материала, материала с кубической симметрией и ортотропного материала.

**Ключевые слова:** линейная механика разрушения, анизотропный материал, формализм Лехницкого, коэффициент интенсивности напряжений

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (госзадание № 0784-2020-0021).

**Для цитирования:** Савиковский А. В., Семенов А. С. Расчет параметров разрушения для трещин в материалах с кубической симметрией при плоском деформированном состоянии // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 3. С. 131–149. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16311>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16311>

## COMPUTATION OF FRACTURE PARAMETERS FOR CRACKS IN MATERIALS WITH CUBIC SYMMETRY IN THE PLANE STRAIN STATE

A. V. Savikovskii<sup>1, 2</sup> ✉, A. S. Semenov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia;

<sup>2</sup> Joint Stock Company "Power machines – ZTL, LMZ, Electrosila,  
Energomachexport" (JSC "Power machines"), St. Petersburg, Russia;

✉ [savikovskii.artem@yandex.ru](mailto:savikovskii.artem@yandex.ru)

**Abstract.** In the paper, an oblique rectilinear central crack opening in an uniaxially tensile plane with a mixed mode of fracture (combination of normal separation and longitudinal shear modes) in two types of anisotropic materials (orthotropic one and one with cubic symmetry) has been studied. Stress intensity coefficient values for different crack orientations were calculated using expressions derived from the Lekhnitskii formalism and extrapolated methods for displacements and stresses. The results of verification of the used approach based on comparison of the finite element calculation with analytical one were presented (the difference was less than 0.75 %). A comparative analysis of the stress intensity and crack opening coefficients for three types of symmetry of elastic properties: isotropic material, material with cubic symmetry and orthotropic material was carried out.

**Keywords:** linear fracture mechanics, anisotropic material, Lekhnitskii formalism, stress intensity factor

**Funding.** The reported study was supported by The Government of the Russian Federation (State Assignment No. 0784-2020-0021).

**For citation:** Savikovskii A. V., Semenov A. S., Computation of fracture parameters for cracks in materials with cubic symmetry in the plane strain state, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (3) (2023) 131–149. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16311>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

Рабочие и направляющие лопатки современных газотурбинных двигателей (ГТД) – это наиболее нагруженные и ответственные их элементы; нагрузки на них самые разнообразные [1, 2]. Это и центробежные силы от вращения, и неравномерное распределение давления газа, и неоднородные температурные поля, изменяющиеся во времени. В последнее время рабочие лопатки ГТД первых ступеней горячего тракта изготавливают из монокристаллических жаропрочных никелевых сплавов, которые обладают повышенными характеристиками кратковременной и длительной прочности, а также параметрами сопротивления термической усталости [3 – 5]. Монокристаллические сплавы на никелевой основе представляют собой материалы с кубической симметрией упругих свойств и являются одним из вариантов ортотропных материалов.

В лопатках ГТД в процессе эксплуатации появляются трещины различной природы: усталости, ползучести и термоусталости из-за комбинированного действия различных вышеупомянутых нагрузок, переменных во времени и пространстве [6 – 8].

Явления зарождения и распространения трещин при термоциклическом нагружении в монокристаллических сплавах на никелевой основе исследовались экспериментальным путем, например, на корсетных образцах в Научно-производственном объединении по исследованию и проектированию энергетического оборудования имени И. И. Ползунова (г. Санкт-Петербург) [5]. Результаты моделирования процесса зарождения термоусталостной трещины в корсетном образце с помощью метода конечных элементов представлены в работе [9], где используются методы континуальной механики повреждений.

В качестве основных параметров разрушения в данном исследовании для оценки трещиностойкости конструкции рассматриваются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) [10, 11]. При рассмотрении трещин в конструкциях из ортотропных материалов в общем случае геометрии и нагружения возникает необходимость вычисления КИНов в условиях смешанных мод разрушения (комбинация нормального отрыва, поперечного и продольного сдвига). В работе Г. Си, П. Пэриса и Г. Ирвина [12] были получены асимптотические выражения для перемещений в малой окрестности вершины трещины для анизотропного однородного материала в условиях смешанной моды нагружения. В работе С. Ранджана и Н. К. Аракере [13] приведены формулы для вычисления КИНов для анизотропного материала на основе асимптотических выражений. В статье С. Чо и К. Ли [14] представлены асимптотические выражения для перемещений в окрестности вершины



трещины и выведены формулы для вычисления КИНов методом экстраполяции перемещений для композитного анизотропного материала. В статьях [15 – 17] были рассмотрены вопросы взаимодействия нескольких трещин в бесконечной анизотропной плоскости путем вычисления КИНов. В процессе развития механики разрушения анизотропных материалов были предложены различные варианты критериев разрушения, основанные на вычислении КИНов (критерий максимального окружного напряжения, энергетический критерий и др.), с которыми можно ознакомиться, например, в работах [18 – 20]. В различных статьях, например [21 – 23], было рассмотрено влияние ориентации осей анизотропии материала на значение КИНов в анизотропной пластине. В работах [24 – 26] были рассмотрены особенности криволинейных трещин в анизотропном упругом материале, в том числе особенности вычисления КИНов для криволинейных трещин. В статьях [27, 28] применяли численный метод, чтобы вычислить КИНЫ для двух- и трехмерного случаев, при этом находили численно комплексные корни, которые используются в асимптотических разложениях для перемещений.

Стоит отметить, что во всех вышеперечисленных статьях используется вычисление КИНов с помощью метода конечных элементов, на основе асимптотического разложения перемещений или напряжений в анизотропном материале [12]. Однако в рамках указанного подхода необходимо дополнительно находить комплексные параметры анизотропного материала, зависящие от упругих констант анизотропного материала, и решать уравнение 4-й степени [12, 29].

В настоящей статье предлагаются явные формулы для вычисления КИНов через ортотропные упругие константы, перемещения вершины трещины и угол поворота трещины относительно осей анизотропии материала (по аналогии с известными формулами для изотропного материала). Это позволяет вычислять КИНЫ при проведении конечно-элементных (КЭ) расчетов, когда известны только перемещения в окрестности вершины трещины и упругие модули ортотропного материала; эти формулы полезны при проведении инженерных расчетов и необходимости оценки трещиностойкости конструкции.

Особенно предлагаемые новшества представляются полезными для конечно-элементных пакетов, которые не могут встроенными методами вычислять КИНЫ по методу экстраполяции перемещений для анизотропных материалов (например, ANSYS). В нашей работе [30] были получены формулы для вычисления КИНов через перемещения берегов трещины и упругие свойства ортотропного материала для случая плоского напряженного состояния. В данном исследовании предлагается обобщение методов, предложенных в статье [30], на случай плоского деформированного состояния.

Цель данной работы – получение соотношений, содержащих явные зависимости КИНов от перемещений берегов в окрестности вершины трещины в ортотропном материале и материале с кубической симметрией для случая плоского деформированного состояния (ПДС).

Предложенные аналитические выражения могут быть использованы при получении численных оценок для ортотропных материалов на основе метода экстраполяции перемещений. Также в работе приводятся результаты вычисления КИНов с помощью метода экстраполяции напряжений, и эти результаты сравниваются с полученными данными для метода экстраполяции перемещений.

При вычислении КИНов методами экстраполяции перемещений и напряжений используется формализм Лехницкого [31]. Предложенные соотношения для метода экстраполяции перемещений, а также формулы для метода экстраполяции напряжений тестируются для случаев материалов с различной симметрией упругих свойств: изотропно-го, ортотропного, а также для материала, обладающего кубической симметрией.

### **Определяющие уравнения линейно-упругого материала**

Напряженно-деформированное состояние упругих тел с трещинами и соответствующие значения параметров разрушения в общем случае чувствительны к виду симметрии материала и значениям упругих констант. В связи с этим в рамках данного раздела будет рассмотрена структура матриц податливости для различных классов материалов.

Обобщенный закон Гука для анизотропного материала записывается в матричной форме следующим образом [32, 33]:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j, \quad \sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j. \quad (1)$$

В уравнениях (1) использовано правило суммирования Эйнштейна и введены следующие обозначения для компонент тензоров:  $\varepsilon_i$  – компонента 6-мерного вектора, составленного из компонент тензора деформаций:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}\}^T;$$

$\sigma_j$  – компонента 6-мерного вектора напряжений

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy}\}^T;$$

$S_{ij}$  – элемент матрицы податливости ( $6 \times 6$ );  $C_{ij}$  – элемент матрицы упругих модулей ( $6 \times 6$ ).

Матрица податливости размером  $3 \times 3$  для случая плоского деформированного состояния имеет различный вид (в зависимости от класса симметрии).

Для ортотропного материала:

$$[\mathbf{S}]_{\text{PDS}} = \begin{bmatrix} S_{11}^{\text{PDS}} & S_{12}^{\text{PDS}} & S_{16}^{\text{PDS}} \\ S_{21}^{\text{PDS}} & S_{22}^{\text{PDS}} & S_{26}^{\text{PDS}} \\ S_{16}^{\text{PDS}} & S_{26}^{\text{PDS}} & S_{66}^{\text{PDS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{13}\nu_{32}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{13}\nu_{32}}{E_1} & \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

для материала кубической симметрии:

$$[\mathbf{S}]_{\text{PDS}} = \begin{bmatrix} S_{11}^{\text{PDS}} & S_{12}^{\text{PDS}} & S_{16}^{\text{PDS}} \\ S_{21}^{\text{PDS}} & S_{22}^{\text{PDS}} & S_{26}^{\text{PDS}} \\ S_{16}^{\text{PDS}} & S_{26}^{\text{PDS}} & S_{66}^{\text{PDS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu^2}{E} & -\frac{\nu(\nu + 1)}{E} & 0 \\ -\frac{\nu(\nu + 1)}{E} & \frac{1 - \nu^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}; \quad (3)$$

для изотропного материала:

$$[\mathbf{S}]_{\text{PDS}} = \begin{bmatrix} S_{11}^{\text{PDS}} & S_{12}^{\text{PDS}} & S_{16}^{\text{PDS}} \\ S_{21}^{\text{PDS}} & S_{22}^{\text{PDS}} & S_{26}^{\text{PDS}} \\ S_{16}^{\text{PDS}} & S_{26}^{\text{PDS}} & S_{66}^{\text{PDS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu^2}{E} & -\frac{\nu(\nu + 1)}{E} & 0 \\ -\frac{\nu(\nu + 1)}{E} & \frac{1 - \nu^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\nu + 1)}{E} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $E_1, E_2, E_3$  – модули Юнга;  $G_{23}, G_{13}, G_{12}, G$  – модули сдвига;  $\nu_{31}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{12}, \nu$  – коэффициенты Пуассона.

### Методы расчета КИНов

Рассматривается задача об одноосном растяжении в вертикальном направлении ортотропной пластины (плоскости) с одиночной наклонной прямолинейной центральной трещиной, в предположении о реализации ПДС. Предполагается, что нормаль к пластине совпадает с одной из осей ортотропии. Оси введенной глобальной декартовой системы координат  $xOy$  совпадают с осями анизотропии материала  $x''Oy''$  и направлением нагружения  $Ox$ . Ориентация трещины  $Ox'$  не совпадает с осями анизотропии материала  $x''Oy''$  и направлением нагрузки  $Ox$  (рис. 1).

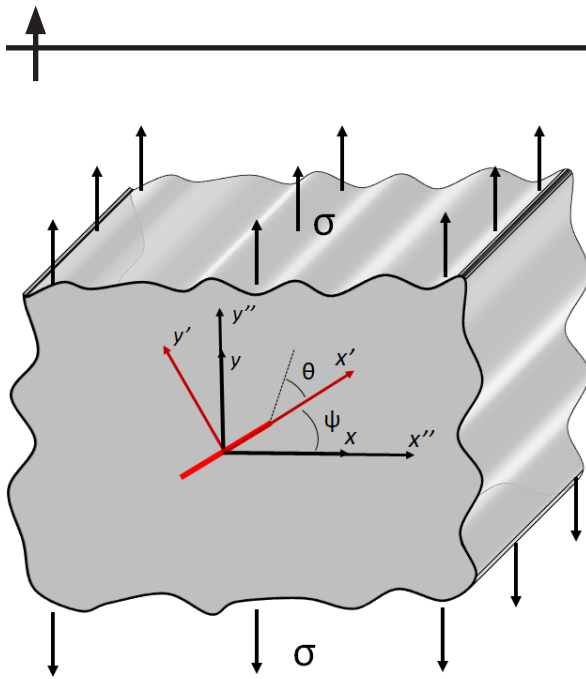


Рис. 1. Схематическое представление постановки задачи: ортотропная пластина (конечная или бесконечная) с наклонной прямолинейной трещиной (выделена красной линией) в условиях плоского деформированного состояния (ПДС) под действием одноосного растяжения: показаны 3 системы координат,  $\psi$  – угол наклона трещины относительно глобальной системы координат,  $\theta$  – угол между направлением на точку анализа и системой координат трещины

использования формализма Лехницкого [31], допускают следующее представление [13]:

$$\begin{aligned} u'_x(r, \theta) &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cdot \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \cdot \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (K_i M_{ij} p_j \sqrt{\cos \theta + \mu'_j \sin \theta}) \right], \\ u'_y(r, \theta) &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cdot \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \cdot \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (K_i M_{ij} q_j \sqrt{\cos \theta + \mu'_j \sin \theta}) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $u'_x(r, \theta)$ ,  $u'_y(r, \theta)$  – компоненты вектора перемещения в полярной системе координат трещины;  $r$  – расстояние от вершины трещины до рассматриваемой точки;  $\theta$  – угол между направлением на точку анализа и направлением роста трещины;  $K_1, K_2$  – величины

КИНа, соответствующие I и II модам соответственно ( $K_1 = K_I, K_2 = K_{II}$ );  $M_{ij} = \begin{bmatrix} -\mu'_2 & \mu'_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  –

вспомогательная матрица.

Формулу (6) путем тождественных алгебраических преобразований можно привести к виду, используемому в статьях [13, 30, 36]. Величины  $p_i$  и  $q_i$  зависят от  $\mu'_i$  по соответствующим формулам [13, 30];  $\mu'_1, \mu'_2$  – комплексные параметры анизотропного материала – корни уравнения 4-й степени с константами податливости в системе координат трещины [31], выбранные так, чтобы корни имели положительную мнимую часть.

Следует отметить, что выражения (6) верны для ортотропного материала и кубической симметрии при плоском напряженном или плоском деформированном состоянии; для трещины, находящейся в трехмерном напряженном состоянии, выражения (6) усложняются (см. статью [37]).

В результате подстановки значения  $\theta = \pi$  в выражения (6), после их обращения, находятся искомые значения КИНов для случая анизотропного материала [25, 36]:

Асимптотические выражения для перемещений вблизи трещины в полярной системе координат с началом в вершине трещины, для изотропного материала хорошо известны для случая ПДС [34]; на основе этих выражений вычисляются КИНЫ методом экстраполяции перемещений [35]:

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \frac{G}{2(1-\nu)} \cdot u'_y(r, \pi), \\ K_{II} &= \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \frac{G}{2(1-\nu)} \cdot u'_x(r, \pi), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $\nu$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона изотропного материала;

$r$  – расстояние от вершины трещины до рассматриваемой точки;  $K_I, K_{II}$  – величины КИНа для мод нормального отрыва и продольного сдвига;  $u'_x(r, \pi), u'_y(r, \pi)$  – компоненты вектора перемещения верхнего берега трещины в системе координат трещины.

Основой для получения выражений для КИНов для случая анизотропного материала, аналогичных (5), служат асимптотические выражения для полей перемещений в вершине трещины при условиях  $x_3 = z = 0$  и ПДС. Выражения, выведенные на основе



$$\{\mathbf{K}\} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \cdot [\mathbf{B}]^{-1} \cdot \{\mathbf{u}'\}, \quad (7)$$

где  $\{\mathbf{K}\} = \{K_I, K_{II}\}^T$ ,  $\{\mathbf{u}'\} = \{u'_x(r, \pi), u'_y(r, \pi)\}^T$ ,

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\det[\mathbf{B}]} \operatorname{Re} \left( \frac{\mu'_1 p_2 - \mu'_2 p_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i \right) & \frac{1}{\det[\mathbf{B}]} \operatorname{Re} \left( -\frac{p_2 - p_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i \right) \\ \frac{1}{\det[\mathbf{B}]} \operatorname{Re} \left( -\frac{\mu'_1 q_2 - \mu'_2 q_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i \right) & \frac{1}{\det[\mathbf{B}]} \operatorname{Re} \left( \frac{q_2 - q_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i \right) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Штрихи над обозначениями величин в соотношениях (5) – (8) указывают на принадлежность указанных компонент векторов и тензоров к системе координат, связанной с ориентацией трещины ( $x'Oy'$  на рис. 1).

В случае поворота системы координат  $xOy$  в систему координат  $x'Oy'$  в плоскости на угол  $\psi$  (см. рис. 1), матрица определяется равенством

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

и матрица упругих податливостей преобразуются из глобальной системы координат в систему координат трещины через матрицу перехода, на основе соотношения

$$S'_{ijkl} = Q_{im} \cdot Q_{jn} \cdot Q_{ko} \cdot Q_{lp} \cdot S_{mnop},$$

которое в двумерном случае преобразуются в формулы Лехницкого [31].

Стоит отметить, что компоненты вектора перемещений в выражениях (5) и (8) также должны быть заданы в системе координат, связанной с трещиной:

$$u'_i = Q_{im} u_m. \quad (10)$$

Таким образом, на основе выражений (7) и (8) можно вычислять значения КИНов, если известны величины перемещений на берегах трещины и линейно-упругие константы материала.

КИНы могут быть определены также на основе асимптотических выражений (см. для ПДС работы [13, 32, 38]) для распределения полей напряжений вдоль направления роста трещины ( $\theta = 0$ ):

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma'_{yy}(r, 0) \cdot \sqrt{2\pi r}, \\ K_{II} &= \sigma'_{xy}(r, 0) \cdot \sqrt{2\pi r}. \end{aligned} \quad (11)$$

Следует отметить, что выражения (11) справедливы как для изотропного, так и для анизотропного материала.

При использовании соотношений (11) компоненты напряжений также нужно преобразовать из глобальной системы координат  $xOy$  в систему координат трещины  $x'Oy'$  (см. рис. 1):

$$\sigma'_{ij} = Q_{im} Q_{jn} \sigma_{mn}. \quad (12)$$

### Конкретизация выражений КИНов для различных классов симметрии упругих свойств

Согласно формулам (6) – (8), при вычислении КИНов через компоненты вектора перемещения необходимо находить комплексные параметры анизотропного материала  $\mu'_1$



и  $\mu'_2$  на основе характеристического уравнения 4-й степени. В случае, когда трещина не повернута по отношению к осям анизотропии материала, характеристическое уравнение для определения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  имеет вид:

$$S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{26}\mu + S_{22} = 0. \quad (13)$$

Подставляя в уравнение (13) коэффициенты  $S_{ij}$  для ортотропного материала для случая ПДС (2), решая его с использованием формул преобразования корней к системе координат трещины, в результате подстановки вычисленных корней  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в выражения для  $[\mathbf{B}]^{-1}$  (8) приходим к явному аналитическому выражению для матрицы влияния  $[\mathbf{B}]^{-1}$  через упругие модули ортотропного материала:

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \begin{bmatrix} C \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1(1-v_{23}v_{32})}{E_2(1-v_{13}v_{31})}} \right) \sin 2\psi & 2C \left( \sqrt{\frac{E_1(1-v_{23}v_{32})}{E_2(1-v_{13}v_{31})}} \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \right) \\ 2C \left( \sqrt{\frac{E_1(1-v_{23}v_{32})}{E_2(1-v_{13}v_{31})}} \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \right) & C \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1(1-v_{23}v_{32})}{E_2(1-v_{13}v_{31})}} \right) \sin 2\psi \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_1 E_2}{\left\{ 2 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \sqrt{(1-v_{13}v_{31})(1-v_{23}v_{32})} + \left[ \frac{E_1}{G_{12}} - 2(v_{12} + v_{13}v_{32}) \right] \right\} (1-v_{23}v_{32})}}$ .

Следствием уравнения (7) определяются КИНЫ для ортотропного материала через компоненты вектора перемещений в малой окрестности вершины трещины при ПДС на основе соотношений:

$$K_I = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left\{ C \left[ 1 - \sqrt{\frac{E_1(1-v_{23}v_{32})}{E_2(1-v_{13}v_{31})}} \right] \sin 2\psi \cdot u'_x + 2C \left[ \sqrt{\frac{E_1(1-v_{23}v_{32})}{E_2(1-v_{13}v_{31})}} \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \right] \cdot u'_y \right\}, \quad (15)$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left\{ 2C \left[ \sqrt{\frac{E_1(1-v_{23}v_{32})}{E_2(1-v_{13}v_{31})}} \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \right] \cdot u'_x + C \left[ 1 - \sqrt{\frac{E_1(1-v_{23}v_{32})}{E_2(1-v_{13}v_{31})}} \right] \sin 2\psi \cdot u'_y \right\}.$$

Следует отметить, что в формуле (15) каждый КИН ( $K_I$  и  $K_{II}$ ) зависит от обеих компонент перемещений  $u'_x$  и  $u'_y$ .

В случае вычисления КИНов для трещин в материалах с кубической симметрией, выражения (15) упрощаются (с учетом равенств  $E_1 = E_2 = E$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G$ ,  $v_{12} = v_{13} = v_{31} = v_{23} = v_{32} = v_{21} = v$ ):

$$K_I = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \cdot \frac{E}{\sqrt{(1-v^2) \left( \frac{E}{G} + 2(1-2v)(1+v) \right)}} \cdot u'_y, \quad (16)$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \cdot \frac{E}{\sqrt{(1-v^2) \left( \frac{E}{G} + 2(1-2v)(1+v) \right)}} \cdot u'_x.$$

Матрица  $[\mathbf{B}]^{-1}$  в этом случае будет диагональной, т. е. каждая компонента вектора перемещений влияет только на один КИН, а на другой не оказывает влияния. Также отличие соотношений (16) от выражений (15) состоит в том, что на значение КИНов совершенно не влияет угол наклона трещины.

Важно отметить качественное отличие формулы (15), полученной для случая плоского деформированного состояния, от подобной формулы в статье [30] для случая плоского

напряженного состояния. В случае ПДС коэффициенты интенсивности напряжений зависят от коэффициентов Пуассона  $\nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{32}$ .

Рассмотрим свойства матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$ .

*Свойство 1.* Определитель матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  определяется только параметром  $C$ :

$$\det [\mathbf{B}]^{-1} = 4C^2 \cdot \left\{ \left[ 1 + \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})} - 2\sqrt{\frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})}} \right] \sin^2 \psi \cos^2 \psi - \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})} \sin^2 \psi \cos^2 \psi - \sin^2 \psi \cos^2 \psi - \sqrt{\frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})}} \cdot (\sin^4 \psi + \cos^4 \psi) \right\} = -4C^2.$$

Из выражения для  $\det[\mathbf{B}]^{-1}$  следует, что нельзя однозначно вычислить КИН по перемещениям, если  $C = 0$  или  $C \rightarrow \infty$ . Из условий  $E_1 > 0, E_2 > 0$  следует, что  $C \neq 0$ , однако возможна такая ситуация, что  $C \rightarrow \infty$ , которая реализуется при условии

$$2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\sqrt{(1-\nu_{13}\nu_{31})(1-\nu_{23}\nu_{32})} + \left[ \frac{E_1}{G_{12}} - 2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) \right] = 0, \quad \left[ \frac{E_1}{G_{12}} - 2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) \right] < 0.$$

Данный вариант соотношения упругих констант соответствует варианту корней уравнения (13), когда они являются вещественными, но уравнение (13) не может иметь вещественных корней [31]. Если соотношение упругих констант достаточно близко к тому, что

$$2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\sqrt{(1-\nu_{13}\nu_{31})(1-\nu_{23}\nu_{32})} + \left[ \frac{E_1}{G_{12}} - 2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) \right] \approx 0,$$

или  $E_1$  достаточно мало, то могут возникнуть проблемы при численном определении матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  и вычислении КИНов.

*Свойство 2.* Как следует из выражения (15), в случае

$$E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32}) = E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})$$

элементы матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  не зависят от угла поворота трещины  $\psi$  (так же, как и в случае изотропного материала);  $u'_y$  влияет только на  $K_I$ ,  $u'_x$  влияет только на  $K_{II}$ .

*Свойство 3.* Из выражений (15) видно, что чем ближе корень  $\sqrt{\frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})}}$  к еди-

нице, тем в большей степени  $u'_y$  влияет на значение  $K_I$ , а  $u'_x$  в большей степени – на значение  $K_{II}$ , и наоборот.

### Тестирование методов вычисления КИНов с помощью конечно-элементного решения задачи

Рассматривается прямолинейная наклонная сквозная трещина в бесконечной пластине (плоскости), ориентированная под углом  $\psi$  к осям анизотропии (рис. 2), при одноосном растяжении пластины в вертикальном направлении. Предполагается, что в задаче реализуется ПДС, когда в каждом сечении по оси  $z$  напряженно-деформированное состояние одинаково и  $\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Расчет КИНов производится для различных ориентаций трещины, варьируемых с шагом  $30^\circ$ , с целью тестирования полученных формул на основе методов экстраполяции по перемещениям и по напряжениям. При вычислении полей перемещений и напряжений для расчета КИНов используется метод конечных элементов [39 – 41]. Материал пластины рассматривается линейно-упругим.

Данная задача имеет известное аналитическое решение для коэффициентов интенсивности напряжений [42]:

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma\sqrt{\pi a} \cdot \cos^2 \psi, \\ K_{II} &= \sigma\sqrt{\pi a} \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi. \end{aligned} \tag{17}$$



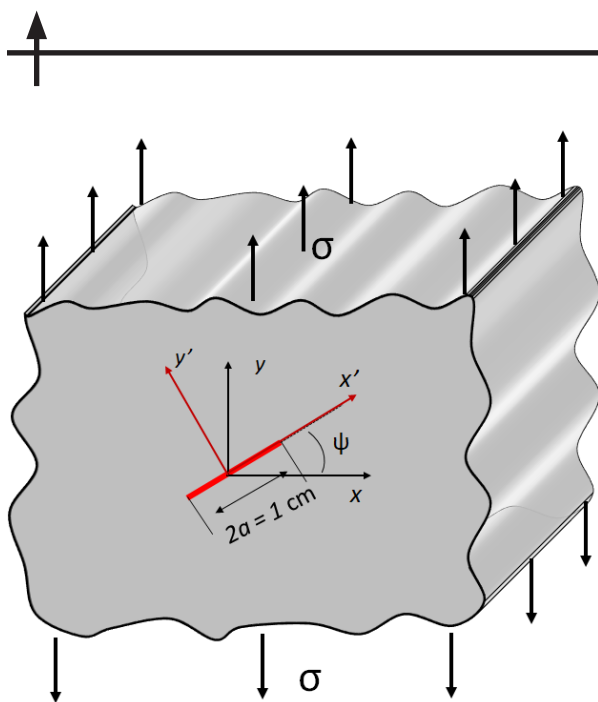


Рис. 2. Схематическое представление постановки задачи об одноосном растяжении бесконечной пластины с наклонной сквозной трещиной (выделена красным цветом)

126 тыс. узлов, 20 800 конечных элементов во всей модели и 80 на берегу трещины.

В формулах (17) аналитическое решение для бесконечной плоскости не зависит от вида анизотропии и упругих свойств материала. Это связано с тем, что рассматривается бесконечная плоскость и нагрузки самоуравновешены. Программная реализация методов вычисления КИНов для изотропного и анизотропного материалов с помощью метода перемещений (см. формулы (5), (15) и (16)) и напряжений (см. формулы (12) и (13)) была выполнена в КЭ-комплексе PANTOCRATOR [43]. При проведении расчетов использовались плоские квадратичные 8-узловые элементы.

В процессе расчетов было построено несколько КЭ-моделей пластины с трещиной, в которых изменяли значение угла  $\psi$  (угол ориентации трещины по отношению к осям ортотропии материала) и сравнивали численные значения КИНов с аналитическими. На рис. 3 представлена в качестве примера КЭ-модель квадратной пластины с центральной прямолинейной трещиной, с углом наклона  $\psi = 60^\circ$ , включающая

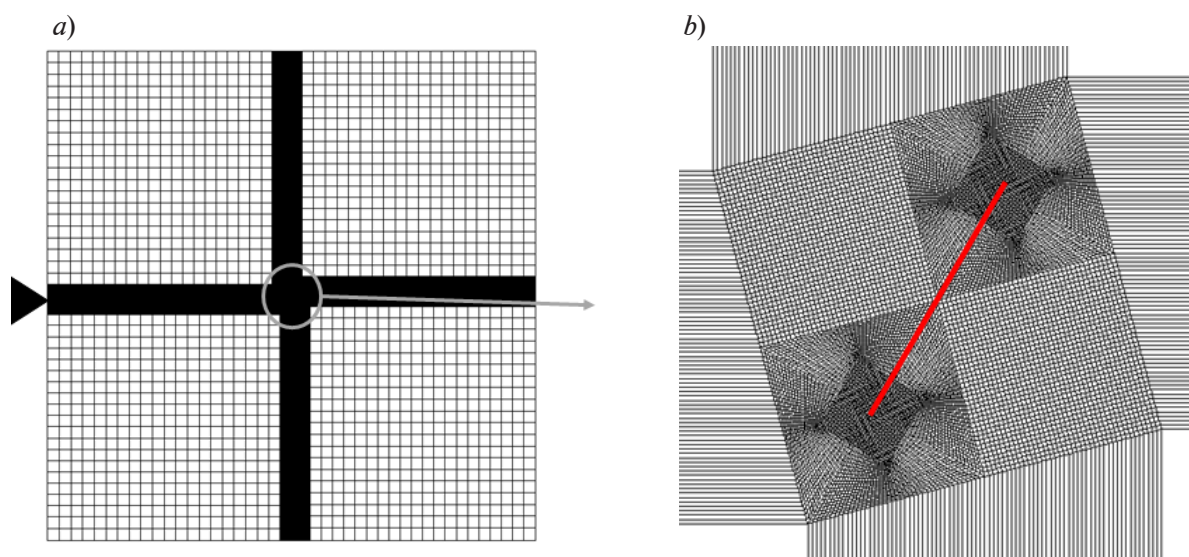


Рис. 3. КЭ-модель пластины с наклонной центральной трещиной (a) и ее увеличенный фрагмент в окрестности трещины (b)

При моделировании поведения трещины в бесконечной пластине (плоскости), путем рассмотрения пластины конечных размеров отношение длины расчетной области к трещине было выбрано 1:22: длина области для моделирования была равна 22 см, ширина области для моделирования — также 22 см; длина трещины — 1 см. Нагрузкой в задаче являлось постоянное вертикальное напряжение  $\sigma_{yy} = 100$  МПа, заданное на верхней грани. Пластина была закреплена для исключения твердотельных перемещений. При верификации численных методов и сравнении с аналитическим решением рассматривались три варианта упругих свойств:

изотропный материал,  
 материал с кубической симметрией,  
 ортотропный материал.

Значения упругих констант, используемых в расчетах, взяты из статьи [30]. На рис. 4 представлено сравнение значений КИНов, полученных с помощью методов экстраполяции перемещений и напряжений, с аналитическим решением (17) для всех трех вариантов свойств материала.

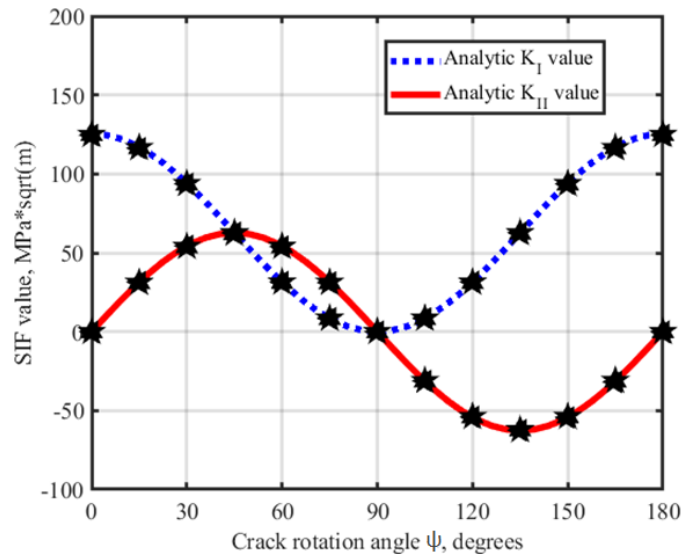


Рис. 4. Графики сравнения значений КИНов  $K_I$  и  $K_{II}$ , полученных численно с помощью метода экстраполяции перемещений (символы), с аналитическим решением для КИНов  $K_I$  (пунктир синего цвета) и  $K_{II}$  (сплошная линия красного цвета). Значения для изотропного материала отмечены символом (▲), ортотропного материала – (◆), для материала с кубической симметрией свойств – (♦)

Аналитические и численные значения  $K_I$  и  $K_{II}$  для углов наклона, кратных  $30^\circ$  (маркированы символами на рис. 4), приведены в табл. 1. Отметим, что максимальная погрешность  $\Delta_{\max}$  для метода вычисления КИНов по напряжениям (0,40 %) меньше, чем таковая для метода вычисления КИНов по перемещениям (0,75 %). Погрешность для изотропного материала минимальна, для ортотропного максимальна для обоих методов. Однако несмотря на это, указанные методы показывают высокую точность, поскольку во всех рассмотренных случаях погрешность, по сравнению с аналитическим решением, не превосходит 0,75 %.

#### Влияние анизотропии материала на раскрытие трещины

Проведем сравнение раскрытия берегов трещины для трех ранее рассмотренных классов материалов: изотропного, с кубической симметрией и ортотропного. Если рассмотреть выражения (6) для КИНов изотропного материала и преобразовать их путем вычитания перемещения на противоположных берегах трещины, то после подстановки аналитического выражения (17) для КИНов получаем для раскрытия трещины изотропного материала следующие равенства:

$$u'_x(r, \pi) - u'_x(r, -\pi) = 2\sigma_0 \sqrt{2ra} \sin \psi \cdot \cos \psi \frac{2(1-\nu^2)}{E}, \quad (18)$$

$$u'_y(r, \pi) - u'_y(r, -\pi) = 2\sigma_0 \sqrt{2ra} \cos^2 \psi \frac{2(1-\nu^2)}{E}.$$

Таблица 1

**Сравнение результатов расчетов с аналитическим решением для трех типов материала**

ψ, град	Значение КИНа, МПа·м <sup>1/2</sup>						Δ <sub>max</sub> , %	
	Аналитическое решение		Метод перемещений		Метод напряжений		МП	МН
	K <sub>I</sub>	K <sub>II</sub>	K <sub>I</sub>	K <sub>II</sub>	K <sub>I</sub>	K <sub>II</sub>		
<i>Изотропный материал</i>								
0	125,33	0,00	125,01	1·10 <sup>-4</sup>	125,31	0,001	0,25	0,01
30	93,99	54,26	93,74	53,89	93,97	54,23	0,70	0,07
60	31,33	54,26	31,24	53,88	31,31	54,21	0,72	0,11
90	0,00	0,00	1·10 <sup>-4</sup>	2·10 <sup>-4</sup>	1·10 <sup>-4</sup>	1·10 <sup>-4</sup>	0,02	0,01
120	31,33	-54,26	31,23	-53,87	31,29	31,29	0,73	0,14
150	93,99	-54,26	93,74	-53,89	93,96	93,96	0,70	0,07
180	123,33	0,00	125,01	1·10 <sup>-4</sup>	125,31	125,31	0,25	0,01
<i>Материал с кубической симметрией</i>								
0	125,33	0	124,84	0,004	125,13	0,003	<b>0,39</b>	<b>0,16</b>
30	93,99	54,27	93,73	53,87	93,95	54,20	<b>0,73</b>	<b>0,13</b>
60	31,33	54,27	31,27	53,92	31,35	54,27	<b>0,64</b>	<b>0,11</b>
90	0	0	1·10 <sup>-4</sup>	2·10 <sup>-4</sup>	1·10 <sup>-4</sup>	1·10 <sup>-4</sup>	<b>0,02</b>	<b>0,01</b>
120	31,33	-54,27	31,26	-53,91	31,32	-54,20	<b>0,66</b>	<b>0,13</b>
150	93,99	-54,27	93,73	-53,87	93,95	-54,26	<b>0,73</b>	<b>0,13</b>
180	125,33	0	124,84	0,004	125,13	0,003	<b>0,39</b>	<b>0,16</b>
<i>Ортотропный материал</i>								
0	125,33	0	124,54	0,006	124,82	0,007	<b>0,63</b>	<b>0,40</b>
30	93,99	54,27	93,72	54,36	93,86	54,24	<b>0,29</b>	<b>0,14</b>
60	31,33	54,27	31,43	53,99	31,42	54,29	<b>0,66</b>	<b>0,28</b>
90	0	0	1·10 <sup>-4</sup>	2·10 <sup>-4</sup>	1·10 <sup>-4</sup>	1·10 <sup>-4</sup>	<b>0,01</b>	<b>0,01</b>
120	31,33	-54,27	31,45	-53,98	31,37	-54,29	<b>0,75</b>	<b>0,11</b>
150	93,99	-54,27	93,72	-54,36	93,86	-54,24	<b>0,29</b>	<b>0,14</b>
180	125,33	0	124,54	0,006	124,82	0,0068	<b>0,63</b>	<b>0,40</b>

Обозначения: ψ – угол наклона трещины к оси x; Δ<sub>max</sub> – максимальная погрешность для КИНов K<sub>I</sub> и K<sub>II</sub>; МП, МН – методы перемещений и напряжений, соответственно.

Если использовать выражения из нашей статьи [30] для перемещений берегов трещины анизотропного материала и подставить выражения для комплексных корней в выражения для матрицы [B]<sup>-1</sup> с последующей подстановкой выражений (17) для КИНов, то в случае кубической симметрии получим следующие выражения для раскрытия трещины:

$$u'_x(r, \pi) - u'_x(r, -\pi) = 2\sigma_0 \sqrt{2ra} \sin \psi \cdot \cos \psi \frac{\sqrt{(1-\nu^2) \cdot \left[ \frac{E}{G} + 2(1-2\nu)(1+\nu) \right]}}{E}, \quad (19)$$

$$u'_y(r, \pi) - u'_y(r, -\pi) = 2\sigma_0 \sqrt{2ra} \cos^2 \psi \frac{\sqrt{(1-\nu^2) \cdot \left[ \frac{E}{G} + 2(1-2\nu)(1+\nu) \right]}}{E}.$$

Аналогично для ортотропного материала можно получить выражения:

$$\begin{aligned}
 u'_x(r, \pi) - u'_x(r, -\pi) &= 2\sigma_0 \sqrt{2ra} \sin \psi \cdot \cos \psi \times \\
 &\times \sqrt{\frac{(1 - \nu_{23}\nu_{32}) \cdot \left\{ 2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \sqrt{(1 - \nu_{13}\nu_{31})(1 - \nu_{23}\nu_{32})} + \left[ \frac{E_1}{G_{12}} - 2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) \right] \right\}}{E_1 E_2}}, \\
 u'_y(r, \pi) - u'_y(r, -\pi) &= 2\sigma_0 \sqrt{2ra} \cos^2 \psi \times \\
 &\times \sqrt{\frac{(1 - \nu_{23}\nu_{32}) \cdot \left\{ 2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \sqrt{(1 - \nu_{13}\nu_{31})(1 - \nu_{23}\nu_{32})} + \left[ \frac{E_1}{G_{12}} - 2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) \right] \right\}}{E_1 E_2}}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Из сравнения выражений (18) – (20) можно сделать следующие выводы:

Во-первых, если  $\frac{E}{G} > 2(1 + \nu)$ , то раскрытие трещины в случае материала с кубической

симметрией будет больше, чем в случае изотропного материала при одинаковых значениях модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ , и наоборот.

Во-вторых, если для удобства положить равными коэффициенты Пуассона для ортотропного материала и материала с кубической симметрией, т. е.  $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \nu$ , положить  $E_1 = E_3 = E$  и  $G_{12} = G_{23} = G_{31} = G$ , то при  $E_1 > E_2$  раскрытие трещины в случае ортотропного материала будет больше такого для материала с кубической симметрией, и наоборот.

Для проверки вышеприведенных выводов были выполнены КЭ-расчеты с различными вариантами симметрии материала и значениями упругих констант. Упругие свойства всех трех рассматриваемых типов материала задавали так, чтобы раскрытие трещины в случае ортотропного материала было больше других случаев, для изотропного материала – меньше всех, а для материала с кубической симметрией – промежуточный вариант (табл. 2). Свойства материалов подбирались так, чтобы матрицы податливости и упругих модулей отвечали условиям положительной определенности (см. табл. 2).

Рис. 5 показывает различия в раскрытии трещины, а также в распределении полей вертикальных напряжений  $\sigma_{yy}$  для различных вариантов анизотропии материала для случая угла наклона трещины  $\psi = 30^\circ$ . Результаты КЭ-расчетов подтверждают качественно и количественно аналитические выводы. Последние одинаковы для любого угла поворота трещины  $\psi$ .

Таблица 2

**Упругие свойства для трех типов материалов, использованные в КЭ-расчетах для проверки раскрытий трещины**

Материал	Модуль, ГПа		Коэффициент Пуассона
	Юнга	сдвига	
Изотропный	$E = 20$	$G = 7,69$	$\nu = 0,3$
С кубической симметрией свойств	$E = 20$	$G = 1,00$	$\nu = 0,3$
Ортотропный	$E_1 = 20$ $E_2 = 4$ $E_3 = 20$	$G_{12} = 1,00$ $G_{23} = 1,00$ $G_{31} = 1,00$	$\nu_{12} = 0,3$ $\nu_{23} = 0,3$ $\nu_{31} = 0,3$

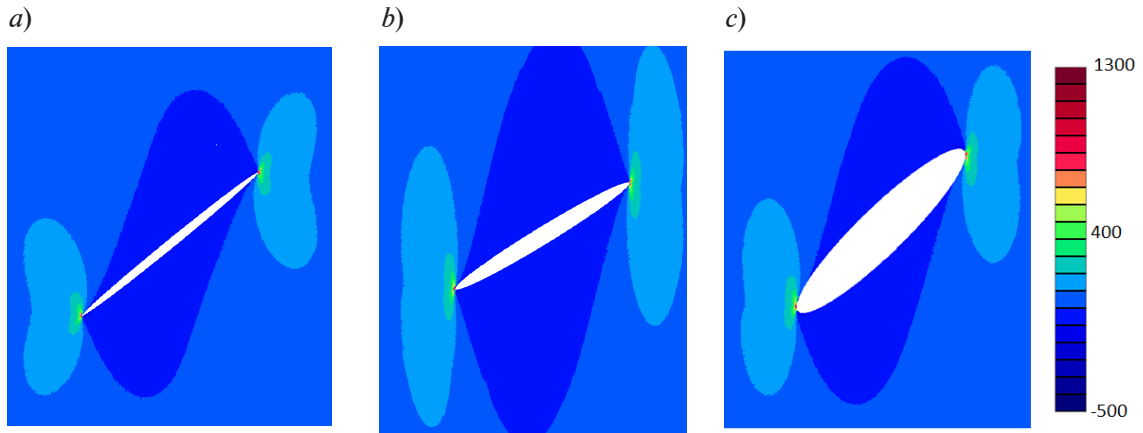


Рис. 5. Распределение полей вертикальных напряжений  $\sigma_{yy}$  [МПа] (угол начального наклона трещины  $\psi = 30^\circ$ ) для материалов с различной симметрией упругих свойств: изотропного (а), с кубической симметрией (b) и ортотропного (c). Масштаб перемещений увеличен для наглядности в 5 раз

На практике для оценки степени анизотропии свойств в случае материалов с кубической симметрией применяется параметр

$$p = \frac{E}{G} - 2\nu, \quad (21)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Для изотропного материала  $p = 2$ . В формуле (19) целесообразно выделить этот параметр и построить график зависимости раскрытия около вершины трещины (рис. 6) по асимптотическим формулам (например, при заданном фиксированном удалении от вершины  $r = a/20$ ). Также на рис. 6 показан график зависимости максимального раскрытия трещины ( $r = a$ ) для кубической симметрии, полученный на основе КЭ-решения. Выбранные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона приведены в табл. 2, модуль сдвига  $G$  варьировали в интервале 1 – 19 ГПа. Значение внешнего растягивающего воздействия и длина трещины соответствуют постановке задачи, представленной на рис. 3. Угол наклона трещины  $\psi = 30^\circ$ .

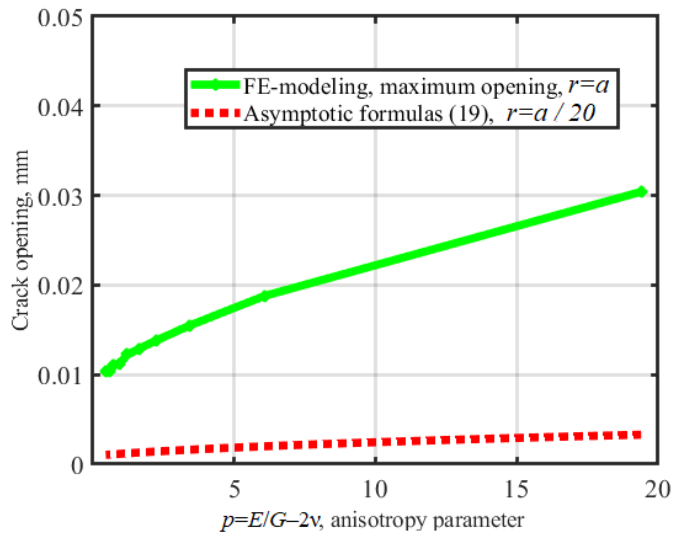


Рис. 6. Зависимость раскрытия трещины от параметра анизотропии  $p$ . Показаны максимальное раскрытие, когда  $r = a$  (сплошная линия) и раскрытие в окрестности вершины трещины,  $r = a/20$  (пунктир)

Как видно из рис. 6, с ростом параметра анизотропии  $p$  наблюдается рост величины раскрытия трещины. В соответствии с выражением (19), зависимость раскрытия трещины от  $p$  (при фиксированных значениях  $E$ ,  $\nu$  и варьируемом значении  $G$ ) имеет корневую зависимость.

### Выводы

Для случая плоского деформированного состояния получены аналитические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений (КИНы) через перемещения берегов прямолинейной трещины смешанной моды разрушения в ортотропном материале и материале с кубической симметрией. Исследованы свойства матрицы влияния  $[B]^{-1}$ , с помощью которой находятся КИНы. Так же, как и в случае плоского напряженного состояния (рассмотрен нами ранее в статье [30]), наблюдается отсутствие смешанности мод для материала с кубической симметрией (аналогично изотропному материалу). В отличие от случая плоского напряженного состояния, коэффициенты матрицы взаимного влияния для ортотропного материала в случае плоского деформированного состояния зависят от  $\nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{32}$ , а через них – от модуля Юнга  $E_3$ .

Результаты тестирования предложенных методов вычисления КИНов продемонстрировали хорошее соответствие аналитическому решению задачи о плоскости с наклонной трещиной для различных углов наклона трещины относительно осей анизотропии материала и направления внешнего воздействия для всех рассмотренных вариантов анизотропии линейно-упругого материала: изотропного, с кубической симметрией и ортотропного (погрешность во всех случаях не превышала 0,75 %). При этом вычисление КИНов по напряжениям в окрестности вершины трещины дает более точные результаты, чем их вычисление по перемещениям берегов трещины.

Также были получены асимптотические формулы для раскрытия трещины в случаях изотропного, ортотропного и материала с кубической симметрией. Проведено сравнение раскрытий трещины для различных классов материалов в зависимости от их упругих свойств, которое получило подтверждение результатами конечно-элементного моделирования. Получена зависимость раскрытия трещины от параметра анизотропии  $p$  для практически важного случая материала с кубической симметрией.

Рассмотренные численные методы вычисления КИНов могут быть рекомендованы при моделировании роста трещин и анализе трещиностойкости ответственных деталей газотурбинных двигателей (рабочих и направляющих лопаток), которые изготавливаются из монокристаллических сплавов на никелевой основе, обладающих кубической симметрией физико-механических свойств.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенов А. С., Грищенко А. И., Колотников М. Е., Гецов Л. Б. Конечно-элементный анализ термоциклической прочности лопаток газовых турбин. Ч. 1. Модели материала, критерии разрушения, идентификация параметров // Вестник УГАТУ (Уфимский государственный авиационный технический университет). 2019. Т. 23. № 1 (83). С. 70–81.
2. Гецов Л. Б., Михайлов В. Е., Семенов А. С., Кривоносова В. В., Ножницкий Ю. А., Блиник Б. С., Магеррамова Л. А. Расчетное определение ресурса рабочих и направляющих лопаток ГТУ. Ч. 1. Поликристаллические материалы // Газотурбинные технологии. 2011. № 7. С. 24–30.
3. Шалин Р. Е., Светлов И. Л., Качалов Е. Б., Толораия В. Н., Гаврилин В. С. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов. М.: Машиностроение, 1997. 336 с.
4. Wilson B. C., Hickman J. A., Fuchs G. E. The effect of solution heat treatment on a single-crystal Ni-based superalloy // JOM: The Journal of the Minerals, Metals & Materials Society. 2003. Vol. 55. No. 3. Pp. 35–40.
5. Гецов Л. Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин. В 2 тт. Т. 1. Рыбинск: ИД «Газотурбинные технологии», 2010. 605 с.
6. Getsov L. B., Semenov A. S., Ignatovich I. A. Thermal fatigue analysis of turbine discs on the base of deformation criterion // International Journal of Fatigue. 2017. Vol. 97. April. Pp. 88–97.





7. **Wang R., Zhang B., Hu D., Jiang K., Mao J., Jing F.** A critical-plane-based thermomechanical fatigue lifetime prediction model and its application in nickel-based single-crystal turbine blades // *Materials at High Temperatures*. 2019. Vol. 36. No. 4. Pp. 325–334.
8. **Семенов А. С., Семенов С. Г., Гецов Л. Б.** Методы расчетного определения скорости роста трещин усталости, ползучести и термоусталости в поли- и монокристаллических лопатках ГТУ // *Проблемы прочности*. 2015. № 2. С. 61–87.
9. **Savikovskii A. V., Semenov A. S., Getsov L. B.** Crystallographic orientation, delay time and mechanical constants influence on thermal fatigue strength of single-crystal nickel superalloys // *Materials Physics and Mechanics*. 2020. Vol. 44. No. 1. Pp. 125–136.
10. **Erdogan F.** Stress intensity factors // *Journal of Applied Mechanics*. 1983. Vol. 50. No. 4b. Pp. 992–1002.
11. **Irwin G. R.** Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate // *Journal of Applied Mechanics*. 1957. Vol. 24. No. 3. Pp. 361–364.
12. **Sih G. C., Paris P. C., Irwin G. R.** On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // *International Journal of Fracture Mechanics*. 1965. Vol. 1. No. 3. Pp. 189–203.
13. **Ranjan S., Arakere N. K.** A fracture-mechanics-based methodology for fatigue life prediction of single crystal nickel-based superalloys // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2008. Vol. 130. No. 3. P. 032501.
14. **Cho S. B., Lee K. R.** Determination of stress-intensity factors and boundary element analysis for interface cracks in dissimilar anisotropic materials // *Engineering Fracture Mechanics*. 1992. Vol. 43. No. 4. Pp. 603 – 614.
15. **Mauge C., Kachanov M.** Anisotropic material with interacting arbitrarily oriented cracks stress intensity factors and crack-microcrack interactions // *International Journal of Fracture*. 1994. Vol. 65. No. 2. Pp. 115–139.
16. **Tu C.-H., Chen C.-S., Yu T.-T.** Fracture mechanics analysis of multiple cracks in anisotropic media // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2011. Vol. 35. No. 11. Pp. 1226–1242.
17. **Wang X.-Q., Schubnel A., Fortin J., David E. C., Gueguen Y., Ge H.-K.** High  $V_p/V_s$  ratio: Saturated cracks or anisotropy effects? // *Geophysical Research Letters*. 2012. Vol. 39. No. 11. P. L11307.
18. **Saouma V. E., Ayari M. L., Leavell D. A.** Mixed mode crack propagation in homogeneous anisotropic solids // *Engineering Fracture Mechanics*. 1987. Vol. 27. No. 2. Pp. 171–184.
19. **Hakim V., Karma A.** Crack path prediction in anisotropic brittle materials // *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 95. No. 23. P. 235501.
20. **Mall S., Murhy J. F., Asce M., Shottafer J. E.** Criterion for mixed mode fracture in wood // *Journal of Engineering Mechanics*. 1983. Vol. 109. No. 3. Pp. 680–690.
21. **Ozkan U., Kaya A. C., Loghin A., Ayhan A. O., Nied H. F.** Fracture analysis of cracks in anisotropic materials using 3DFAS and ANSYS // *Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. January, 2006. Chicago, USA. Pp. 569–579.
22. **Ozkan U., Nied H. F., Kaya A. C.** Fracture analysis of anisotropic materials using enriched crack tip elements // *Engineering Fracture Mechanics*. 2010. Vol. 77. No. 7. Pp. 1191–1202.
23. **Song Ch., Tin-Loi F., Gao W.** A definition and evaluation procedure of generalized stress intensity factors at cracks and multi-material wedges // *Engineering Fracture Mechanics*. 2010. Vol. 77. No. 12. Pp. 2316–2336.
24. **Gao H., Chiu C.** Slightly curved or kinked cracks in anisotropic elastic solids // *International Journal of Solids and Structures*. 1992. Vol. 29. No. 8. Pp. 947–972.
25. **Obata M., Nemat-Nasser S., Goto Y.** Branched cracks in anisotropic elastic solids // *Journal of Applied Mechanics*. 1989. Vol. 56. No. 4. Pp. 858–864.
26. **Kardomateas G. A., Li R.** Thermo-elastic crack branching in general anisotropic media // *International Journal of Solids and Structures*. 2005. Vol. 42. No. 3–4. Pp. 1091–1109.
27. **Barsoum R. S.** Cracks in anisotropic materials – an iterative solution of the eigenvalue problem // *International Journal of Fracture*. 1986. Vol. 32. No. 1. Pp. 59–67.
28. **Mazurowski B., O'Hara P., Gupta P., Duarte C. A.** A displacement correlation method for stress intensity factor extraction from 3D fractures in anisotropic materials // *Engineering Fracture Mechanics*. 2021. Vol. 258. December. P. 108040.

29. **Hoening A.** Near-tip behavior of a crack in a plane anisotropic elastic body // *Engineering Fracture Mechanics*. 1982. Vol. 16. No. 3. Pp. 393–403.
30. **Савиковский А. В., Семенов А. С.** Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений в ортотропных материалах при смешанной моде разрушения в плоском напряженном состоянии // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2022. Т. 15. № 2. С. 102–123.
31. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
32. **Voigt W.** *Lehrbuch der kristallphysik:(mit ausschluss der kristalloptik)*. Leipzig, Berlin: BG Teubner, 1910. s.
33. **Ляв А.** Математическая теория упругости. Пер. с англ. Ленинград: Объединенное научно-техническое издательство (ОНТИ), 1935. 672 с.
34. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. С. 223–226.
35. **Морозов Е. Н., Никишков Г. П.** Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980. 256 с.
36. **Judt P. O., Ricoeur A., Linek G.** Crack path prediction in rolled aluminum plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 138. April. Pp. 33–48.
37. **Banks-Sills L., Hershkovitz I., Wawrzynek P. A., Eliasi R., Ingraffea A. R.** Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I.  $z = 0$  is a symmetric plane // *Engineering Fracture Mechanics*. 2005. Vol. 72. No. 15. Pp. 2328–2358.
38. **Khansari N. M., Fakoor M., Berto F.** Probabilistic micromechanical damage model for mixed-mode I/II fracture investigation of composite materials // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 99. February. Pp. 177–193.
39. **Bathe K. J., Wilson E. L.** *Numerical methods in finite element analysis*. New Jersey, USA: Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1976. 528 p.
40. **Gallagher R. H.** *Finite element analysis: Fundamentals*. London: Pearson College Div., 1975. 420 p.
41. **Zhao X., Mo Z.-L., Guo Z.-Y., Li J.** A modified three-dimensional virtual crack closure technique for calculating stress intensity factors with arbitrarily shaped finite element mesh arrangements across the crack front // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2020. Vol. 109. October. P. 102695.
42. **Fakoor M., Shavsavar S.** The effect of T-stress on mixed mode I/II fracture of composite materials: Reinforcement isotropic solid model in combination with maximum shear stress theory // *International Journal of Solids and Structures*. 2021. Vol. 229. 15 October. Pp. 111–145.
43. **Семенов А. С.** PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V-ой Международной конференции «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций». СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466–480.

## REFERENCES

1. **Semenov A. S., Grishchenko A. I., Kolotnikov M. E., Getsov L. B.,** Finite-element analysis of thermal fatigue of gas turbine blades, Part 1. Material models, fracture criteria, identification, *Vestnik UGATU [USATU Bulletin]*. 23 (1 (83)) (2019) 70–81 (in Russian).
2. **Getsov L. B., Mikhaylov V. E., Semenov A. S., et al.,** Raschetnoye opredeleniye resursa rabochikh i napravlyayushchikh lopatok GTU. Chast 1. Polikristallicheskiye materialy [Design determination of the work life of operating and guide blades of gas-turbine installations. Part 1. Polycrystalline materials], *Gas Turbine Technologies*. (7) (2011) 24–30 (in Russian).
3. **Shalin R. E., Svetlov I. L., Kachalov E. B., et al.,** Monokristally nikelovykh zharoprochnykh splavov [Single crystals of nickel heat-resistant alloys], *Mashinostroyeniye*, Moscow, 1997 (in Russian).
4. **Wilson B. C., Hickman J. A., Fuchs G. E.,** The effect of solution heat treatment on a single-crystal Ni-based superalloy, *JOM: J. Minerals, Metals & Mater. Soc.* 55 (3) (2003) 35–40.
5. **Getsov L. B.,** Materialy i prochnost detaley gazovykh turbin [Materials and strength of gas turbine parts], in 2 Vols., Vol. 1, *Gas Turbine Technologies Publishing*, Rybinsk, 2010 (in Russian).
6. **Getsov L. B., Semenov A. S., Ignatovich I. A.,** Thermal fatigue analysis of turbine discs on the base of deformation criterion. *Int. J. Fatig.* 97 (April) (2017) 88–97.

7. **Wang R., Zhang B., Hu D., et al.**, A critical-plane-based thermomechanical fatigue lifetime prediction model and its application in nickel-based single-crystal turbine blades, *Mater. High Temp.* 36 (4) (2019) 325–334.
8. **Semenov A. S., Semenov S. G., Getsov L. B.**, Methods of computational determination of growth rates of fatigue, creep, and thermal fatigue cracks in poli- and monocrystalline blades of gas-turbine units, *Strength Mater.* 47 (2) (2015) 268–290.
9. **Savikovskii A. V., Semenov A. S., Getsov L. B.**, Crystallographic orientation, delay time and mechanical constants influence on thermal fatigue strength of single-crystal nickel superalloys, *Mater. Phys. Mech.* 44 (1) (2020) 125–136.
10. **Erdogan F.**, Stress intensity factors, *J. Appl. Mech.* 50 (4b) (1983) 992–1002.
11. **Irwin G. R.**, Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate, *J. Appl. Mech.* 24 (3) (1957) 361–364.
12. **Sih G. C., Paris P. C., Irwin G. R.**, On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, *Int. J. Fract. Mech.* 1 (3) (1965) 189–203.
13. **Ranjan S., Arakere N. K.**, A fracture-mechanics-based methodology for fatigue life prediction of single crystal nickel-based superalloys, *J. Eng. Gas Turbine Power.* 130 (3) (2008) 032501.
14. **Cho S. B., Lee K. R.**, Determination of stress-intensity factors and boundary element analysis for interface cracks in dissimilar anisotropic materials // *Eng. Fract. Mech.* 43 (4) (1992) 603–614.
15. **Mauge C., Kachanov M.**, Anisotropic material with interacting arbitrarily oriented cracks stress intensity factors and crack-microcrack interactions, *Int. J. Fract.* 65 (2) (1994) 115–139.
16. **Tu C.-H., Chen C.-S., Yu T.-T.**, Fracture mechanics analysis of multiple cracks in anisotropic media, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 35 (11) (2011) 1226–1242.
17. **Wang X.-Q., Schubnel A., Fortin J., et al.**, High  $V_p/V_s$  ratio: Saturated cracks or anisotropy effects? *Geophys. Res. Lett.* 39 (11) (2012) L11307.
18. **Saouma V. E., Ayari M. L., Leavell D. A.**, Mixed mode crack propagation in homogeneous anisotropic solids, *Eng. Fract. Mech.* 27 (2) (1987) 171–184.
19. **Hakim V., Karma A.**, Crack path prediction in anisotropic brittle materials, *Phys. Rev. Lett.* 95 (23) (2005) 235501.
20. **Mall S., Murhy J. F., Asce M., Shottafer J. E.**, Criterion for mixed mode fracture in wood, *J. Eng. Mech.* 109 (3) (1983) 680–690.
21. **Ozkan U., Kaya A. C., Loghin A., et al.**, Fracture analysis of cracks in anisotropic materials using 3DFAS and ANSYS, *Proc. ASME Int. Mech. Eng. Congress & Exposition.* Jan., 2006. Chicago, USA (2006) 569–579.
22. **Ozkan U., Nied H. F., Kaya A. C.**, Fracture analysis of anisotropic materials using enriched crack tip elements, *Eng. Fract. Mech.* 77 (7) (2010) 1191–1202.
23. **Song Ch., Tin-Loi F., Gao W.**, A definition and evaluation procedure of generalized stress intensity factors at cracks and multi-material wedges, *Eng. Fract. Mech.* 77 (12) (2010) 2316–2336.
24. **Gao H., Chiu C.**, Slightly curved or kinked cracks in anisotropic elastic solids, *Int. J. Solids Struct.* 29 (8) (1992) 947–972.
25. **Obata M., Nemat-Nasser S., Goto Y.**, Branched cracks in anisotropic elastic solids, *J. Appl. Mech.* 56 (4) (1989) 858–864.
26. **Kardomateas G. A., Li R.**, Thermo-elastic crack branching in general anisotropic media, *Int. J. Solids Struct.* 42 (3–4) (2005) 1091–1109.
27. **Barsoum R. S.**, Cracks in anisotropic materials – an iterative solution of the eigenvalue problem, *Int. J. Fract.* 32 (1) (1986) 59–67.
28. **Mazurowski B., O'Hara P., Gupta P., Duarte C. A.**, A displacement correlation method for stress intensity factor extraction from 3D fractures in anisotropic materials, *Eng. Fract. Mech.* 258 (December) (2021) 108040.
29. **Hoenig A.**, Near-tip behavior of a crack in a plane anisotropic elastic body, *Eng. Fract. Mech.* 16 (3) (1982) 393–403.
30. **Savikovskii A. V., Semenov A. S.**, Calculation of mixed-mode stress intensity factors for orthotropic materials in the plane stress state, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 15 (2) (2022) 102–123 (in Russian).
31. **Lekhnitsky S. G.**, *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [Theory of elasticity of an anisotropic elastic body]*, Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).

32. **Voigt W.**, Lehrbuch der kristallphysik:(mit ausschluss der kristalloptik). BG Teubner, Leipzig, Berlin, 1910.
33. **Love A. E. H.**, Mathematical theory of elasticity, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1927.
34. **Kachanov M. L.**, Osnovy mekhaniki razrusheniya [Fundamentals of fracture mechanics]. Nauka, Moscow, 1974, Pp. 223–226 (in Russian).
35. **Morozov E. N., Nikishkov G. P.**, Metod konechnykh elementov v mekhanike razrusheniya [Finite element method in fracture mechanics], Nauka Publishing, Moscow, 1980 (in Russian).
36. **Judt P. O., Ricoeur A., Linek G.**, Crack path prediction in rolled aluminum plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation, Eng. Fract. Mech. 138 (April) (2015) 33–48.
37. **Banks-Sills L., Hershkovitz I., Wawrzynek P. A., et al.**, Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I.  $z = 0$  is a symmetric plane, Eng. Fract. Mech. 72 (15) (2005) 2328–2358.
38. **Khansari N. M., Fakoor M., Berto F.**, Probabilistic micromechanical damage model for mixed-mode I/II fracture investigation of composite materials, Theor. Appl. Fract. Mech. 99 (February) (2019) 177–193.
39. **Bathe K. J., Wilson E. L.**, Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1976.
40. **Gallagher R. H.**, Finite element analysis: Fundamentals, Pearson College Div., London, 1975.
41. **Zhao X., Mo Z.-L., Guo Z.-Y., Li J.**, A modified three-dimensional virtual crack closure technique for calculating stress intensity factors with arbitrarily shaped finite element mesh arrangements across the crack front, Theor. Appl. Fract. Mech. 109 (October) (2020) 102695.
42. **Fakoor M., Shavsavar S.**, The effect of T-stress on mixed mode I/II fracture of composite materials: Reinforcement isotropic solid model in combination with maximum shear stress theory, Int. J. Solids Struct. 229 (15 October) (2021) 111–145.
43. **Semenov A. S.**, PANTOCRATOR – konechno-elementnyy programmnyy kompleks, oriyentirovanny na resheniye nelineynykh zadach mekhaniki [PANTOCRATOR – finite-element program specialized on the solution of non-linear problems of solid body mechanics], In: Proc. The V-th Int. Conf. "Scientific and engineering problems of reliability and service life of structures and methods of their decision", St. Petersburg Polytechnical University Publishing, St. Petersburg (2003) 466–480.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**САВИКОВСКИЙ Артем Викторович** – аспирант кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
 savikovskij.av@edu.spbstu.ru  
 ORCID: 0000-0003-1710-1943

**СЕМЕНОВ Артем Семенович** – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
 Semenov.Artem@googlemail.com  
 ORCID: 0000-0002-8225-3487

## THE AUTHORS

**SAVIKOVSKII Artem V.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
 29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia  
 savikovskii.artem@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0003-1710-1943



**SEMENOV Artem S.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

Semenov.Artem@gmail.com

ORCID: 0000-0002-8225-3487

*Статья поступила в редакцию 29.09.2022. Одобрена после рецензирования 14.05.2023.  
Принята 14.05.2023.*

*Received 29.09.2022. Approved after reviewing 14.05.2023. Accepted 14.05.2023.*