

Математическое моделирование физических процессов

Научная статья

УДК 534.16

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16304>

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ И ЗАПАЗДЫВАНИЯХ

А. А. Алифов ✉

Институт машиноведения им. А. А. Благоврадова РАН, Москва, Россия

✉ alishir@mail.ru

Аннотация. На основе динамической модели фрикционной автоколебательной системы рассмотрено влияние запаздываний в упругости и вызывающего автоколебания трения на смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при взаимодействии колебательной системы с источником энергии. Решение нелинейных дифференциальных уравнений движения колебательной системы и источника энергии построено с использованием метода прямой линеаризации. Последний отличается от известных методов анализа нелинейных систем множеством преимуществ, в том числе простотой применения. На основе критериев Рауса – Гурвица получены условия устойчивости для анализа стационарных движений. Чтобы получить информацию о влиянии запаздываний на режимы колебаний, проведены расчеты. Установлено, что это влияние очень существенное. Устойчивость стационарных колебаний зависит как от характеристики источника энергии, так и от величины запаздывания, появляется слабая или очень слабая устойчивость.

Ключевые слова: ограниченное возбуждение, колебания, запаздывание, критерии Рауса – Гурвица, прямая линеаризация

Для цитирования: Алифов А. А. Взаимодействие вынужденных, параметрических и автоколебаний при ограниченном возбуждении и запаздываниях // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 3. С. 39–48. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16304>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16304>

THE INTERACTION OF MIXED FORCED, PARAMETRIC AND SELF-EXCITED OSCILLATIONS AT LIMITED EXCITATION AND DELAYS

A. A. Alifov ✉

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

✉ alishir@mail.ru

Abstract. On the basis of a dynamic model of a frictional self-oscillating system, the influence of delays in elasticity and friction causing self-oscillations on mixed forced, parametric and self-oscillations during the interaction of an oscillating system with an energy source has been considered. The solution of nonlinear differential equations of motion of an oscillatory system and an energy source was constructed using the method of direct linearization. The latter differs from the known methods for the analysis of nonlinear systems by many advantages,

including ease of use. Based on the Routh – Hurwitz criteria, the stability conditions for the analysis of stationary motions were obtained. Calculations were carried out to obtain information on the influence of delays on the oscillation modes. This influence was established to be very significant. The stability of stationary oscillations depends both on the characteristics of the energy source and on the magnitude of the delay; a weak or very weak stability appears.

Keywords: limited excitation, oscillations, delay, Routh – Hurwitz criteria, direct linearization

For citation: Alifov A. A., The interaction of mixed forced, parametric and self-excited oscillations at limited excitation and delays, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (3) (2023) 39–48. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16304>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Обострение глобальных экологических проблем (изменение климата, кислотные осадки, загрязнение воздуха и воды, накопление ядерных отходов, последствия их действия на окружающую среду) вызывает большую тревогу у широкой общественности во всем мире. Как отмечается во многих публикациях на эту тему, рациональным решением можно считать энергосбережение. Энергетика является основой развития базовых отраслей промышленности, ее темпы развития выше темпов развития других отраслей, и в то же время она является одним из больших источников неблагоприятного воздействия на окружающую среду и человека. Неконтролируемый рост энергопотребления, высокая техногенная нагрузка на окружающую среду и их влияние на климат может привести к глобальному экологическому кризису. Поэтому ни одна научная проблема не привлекает такого пристального внимания, как проблема изменения климата. Уменьшение энергопотребления, переход на эффективное использование энергии и всемерной ее экономии составляют главные задачи человечества.

В решение связанных с этим задач может вносить некоторый вклад теория взаимодействия источника энергии и колебательной системы. Хотя эффект был обнаружен А. Зоммерфельдом в 1902 г., его последовательное теоретическое обоснование было проведено В. О. Кононенко лишь в 50-х годах прошлого столетия. Результаты его исследований подытожены в известной в мире монографии [1, 2], которые привели к возникновению в теории колебаний нового направления. Во множестве публикаций исследователей во всем мире, в том числе в работах [3 – 5] и других исследованиях, нашло отражение дальнейшее развитие этой теории. В работе [6] показана связь проблем экологии с уровнем потребляемой энергии, метрологией, точностью моделей расчета систем и обработки деталей.

В работах [7 – 23] и др. рассмотрены различные вопросы, связанные с явлением гистерезиса (запаздывания). Необходимость его учета возникает во многих задачах, например в различных отраслях техники (транспортировка, электроника, автоматическое регулирование, радиотехника, цветная металлургия, процессы массообмена, производство бумаги и стекла и др.), в оптике, управлении, биологии (исследования крови, мозга и т. п.) и др.

При циклически изменяющихся напряжениях с максимальной амплитудой и существенно ниже предела упругости наблюдается динамический гистерезис, обусловленный неупругостью или вязкоупругостью. В механических системах запаздывание обуславливается внутренним трением в материалах, несовершенством их упругих свойств и др. Оно оказывает большое влияние на процесс регулирования и устойчивость системы, при этом его наличие может быть как вредным, так и полезным. Запаздывание может привести к возникновению колебаний в следящих системах, ленточных транспортерах, регуляторах, прокатных станах и др.

Целью работы является анализ влияния запаздываний в упругости и вызывающего автоколебания трения на смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при взаимодействии колебательной системы с источником энергии.

Модель и уравнения

Рассмотрим модель фрикционной автоколебательной системы (рис. 1). Она хорошо описывает автоколебания, возникающие во многих объектах машиностроения из-за трения (в тормозах, текстильном оборудовании, металлорежущих станках и т. п.), широко используется для их анализа (см. например, работы [24 – 26]). Тело с массой m лежит на ленте, приводимой в движение двигателем, имеющим моментную характеристику $M(\dot{\phi})$, где $\dot{\phi}$ – скорость вращения ротора двигателя.

Возникающая между телом и лентой сила трения $T(U)$ зависит от относительной скорости $U = V - \dot{x}$, где $V = r_0\dot{\phi}$ ($r_0 = \text{const}$ – радиус точки приложения силы трения) и может обуславливать его автоколебания. Сила $T(U)$ в реальных условиях (она наблюдалась также в космических экспериментах [27]) широко распространена в виде

$$T(U) = R(\text{sgn } U - \alpha_1 U + \alpha_3 U^3),$$

где R – нормальная сила реакции; $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_3 = \text{const}$ – положительные величины; $\text{sgn } U = 1$ при $U > 0$, $\text{sgn } U = -1$ при $U < 0$; в состоянии покоя ($U = 0$) имеет место ограничение $-R \leq T(0) \leq R$.

Нелинейную функцию $T(U)$ на основе метода прямой линеаризации (см. работы [28 – 31]) можно заменить функцией

$$T_* = R(\text{sgn } U + B_T + k_T \dot{x}), \quad (1)$$

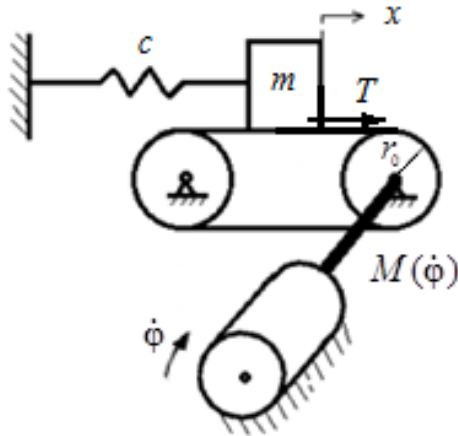
где коэффициенты линеаризации B_T , k_T определяются выражениями

$$\begin{aligned} B_T &= -\alpha_1 u + \alpha_3 u^3 + 3\alpha_3 N_2 u a^2 p^2, \\ k_T &= \alpha_1 - 3\alpha_3 u^2 - \alpha_3 \bar{N}_3 v^2, \\ N_2 &= (2r + 1)/(2r + 3), \\ \bar{N}_3 &= (2r + 3)/(2r + 5), \\ a &= \max |x|, \\ v &= \max |\dot{x}|. \end{aligned}$$

Интервал выбора параметра точности линеаризации r не ограничен, но достаточен выбор в пределах $0 - 2$.

С учетом действия на тело внешней вынуждающей силы $\lambda \sin v_1 t$, параметрического воздействия $(b \cos v t)x$, запаздываний $\tau = \text{const}$ и $\Delta = \text{const}$, математической моделью системы являются нелинейные дифференциальные уравнения

Рис. 1. Модель автоколебательной системы: тело с массой m лежит на ленте, приводимой в движение двигателем, имеющим моментную характеристику $M(\dot{\phi})$; $\dot{\phi}$ – скорость вращения ротора двигателя, c – коэффициент жесткости пружины, T – сила трения и r_0 – радиус точки ее приложения



$$m \ddot{x} + k_0 \dot{x} + c_0 x + c_\tau x_\tau = T(U_\Delta) - \lambda \sin v_1 t - b x \cos v t, \quad (2)$$

$$I \ddot{\phi} = M(\dot{\phi}) - r_0 T(U),$$

где $k_0 = \text{const}$, $c_0 = \text{const}$ – соответственно коэффициенты демпфирования и жесткости; I – суммарный момент инерции вращающихся частей;

$$c_\tau = \text{const}, \quad U_\Delta = r_0 \dot{\phi} - \dot{x}_\Delta, \quad \dot{x}_\Delta = \dot{x}(t - \Delta), \quad x_\tau = x(t - \tau).$$

Уравнения (2) с учетом вида функции (1) принимают вид

$$m \ddot{x} + k_0 \dot{x} + c x = -c_\tau x_\tau + R(\text{sgn } U_\Delta + B_T + k_T \dot{x}_\Delta) + \lambda \sin v_1 t - b x \cos v t, \quad (3)$$

$$I \ddot{\phi} = M(\dot{\phi}) - r_0 R(\text{sgn } U_\Delta + B_T + k_T \dot{x}_\Delta).$$

Решение дифференциальных уравнений

В работе [28] рассмотрено следующее, общего вида нелинейное уравнение с нелинейными функциями $\bar{F}(\dot{x})$ и $\bar{f}(x)$, линеаризованными по методу прямой линеаризации:

$$\ddot{x} + \bar{F}(\dot{x}) + \bar{f}(x) = H(t, x). \quad (4)$$

С использованием замены переменных $x = v p^{-1} \cos \psi$, $\dot{x} = -v \sin \psi$, $\psi = pt + \xi$, $v = \max |\dot{x}|$ получены уравнения стандартной формы для определения нестационарных значений v и ξ :

где
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k v}{2} - H_s(v, \xi), \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega^2 - p^2}{2p} - \frac{1}{v} H_c(v, \xi), \quad (5)$$

$$H_s(v, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\dots) \sin \psi d\psi, \quad H_c(v, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\dots) \cos \psi d\psi.$$

Используя уравнения (5), получим из уравнений (3), с учетом выражений

$$v = ap, \quad p = v/2, \quad \dot{x}_\Delta = -v \sin(\psi - p\Delta), \quad x_\tau = v v^{-1} \cos(\psi - v\tau)$$

следующие уравнения (для двух случаев), чтобы определить нестационарные значения a , ξ , u :

а) $u \geq ap$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} (2aA + 2\lambda \cos \xi - ab \sin 2\xi), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} (2aE + 2\lambda \sin \xi + ab \cos 2\xi), \quad \frac{du}{dt} = \frac{r_0}{I} [M(u/r) - r_0 R(1 + B_T)]; \end{aligned} \quad (6a)$$

б) $u < ap$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} \left(2aA - \frac{8R}{\pi ap} \sqrt{a^2 p^2 - u^2} + 2\lambda \cos \xi - ab \sin 2\xi \right), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} (2aE + 2\lambda \sin \xi + ab \cos 2\xi), \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{I} \left[M(u/r) - r_0 R(1 + B_T) - \frac{r_0 R}{\pi} (3\pi - 2\psi_*) \right], \end{aligned} \quad (6b)$$

где $A = p(k_0 - qk_\tau \cos p\Delta) - c_\tau \sin p\tau$, $E = m(\omega_0^2 - p^2) + c_\tau \cos p\tau - pqk_\tau \sin p\Delta$,

$$\omega_0^2 = c_0/m, \quad \psi_* = 2\pi - \arcsin(u/ap).$$

При выводе уравнений (6b) использован прием, описанный в работе [3], и при усреднении происходит замена $V = r_0 \dot{\phi}$ на $u = r_0 \Omega$.

Условия $\dot{a} = 0$, $\dot{\xi} = 0$, $\dot{u} = 0$ в уравнениях (6a) и (6b) дают уравнения для стационарных движений.

В случае $u \geq ap$ (а) имеем следующие соотношения для амплитуды и фазы:

$$(a^2 D - 2\lambda^2)^2 - 4\lambda^2 (\lambda^2 + 2bGa^2) = 0, \quad \text{tg } \xi = L(baL - \lambda)/aA, \quad (7)$$

$$G = b + 2E, \quad D = 4A^2 + G^2 - 2bG, \quad L = \left[\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 2ba^2(b + 2E)} \right] / 2ab,$$

а в случае $u < ap$ (б) амплитуда определяется приближенной формулой $ap \approx u$.

Условие $\dot{u} = 0$ позволяет определить стационарные значения скорости u из уравнения

$$M(u/r_0) - S(u) = 0,$$

где выражение $S(u)$ представляет нагрузку на источник энергии и имеет вид:

а) $u \geq ap$ $S(u) = r_0 R(1 + B_T)$,

б) $u < ap$ $S(u) = r_0 R[(1 - B_T) + \pi^{-1}(3\pi - 2\psi_*)]$.

С учетом приближенного равенства $ap \approx u$ выражение $S(u)$ упрощается в случае $u < ap$ (б).

Условия устойчивости стационарных колебаний

Составив уравнения в вариациях для случаев (6а), (6б) и используя критерии Рауса – Гурвица, получим следующие условия устойчивости:

$$D_1 > 0, D_3 > 0, D_1 D_2 - D_3 > 0, \quad (8)$$

где $D_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33})$, $D_2 = b_{11} b_{33} + b_{11} b_{22} + b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32} - b_{12} b_{21} - b_{13} b_{31}$,

$$D_3 = b_{11} b_{23} b_{32} + b_{12} b_{21} b_{33} - b_{11} b_{22} b_{33} - b_{12} b_{23} b_{31} - b_{13} b_{21} b_{32}.$$

Имеют место следующие коэффициенты в случае скоростей $u \geq ap$ (а):

$$b_{11} = \frac{r_0}{I} \left[Q + r_0 R (\alpha_1 - 3\alpha_3 u^2 - 3\alpha_3 N_2 a^2 p^2) \right], \quad b_{12} = -6N_2 \alpha_3 R u a p^2 r_0^2 I^{-1}, \quad b_{13} = 0,$$

$$b_{21} = -\frac{3}{m} \alpha_3 R u a \cos p\Delta, \quad b_{22} = \frac{1}{4pm} \left[2(c_\tau \sin p\tau + pRk_\tau \cos p\Delta) + b \sin 2\xi \right],$$

$$b_{23} = \frac{1}{2pm} (\lambda \sin \xi + ba \cos 2\xi), \quad b_{31} = \frac{3}{m} \alpha_3 R u \sin p\Delta,$$

$$b_{32} = \frac{1}{2pma^2} (2\bar{N}_3 \alpha_3 R a^3 p^3 \sin p\Delta - \sin \xi), \quad b_{33} = \frac{1}{2pma} (\lambda \cos \xi - ab \sin 2\xi),$$

где $Q = \frac{d}{du} M(u/r)$.

В случае скоростей $u < ap$ (б) изменяются лишь коэффициенты

$$b_{11} = \frac{r_0}{I} \left[Q + r_0 R (\alpha_1 - 3\alpha_3 u^2 - 3\alpha_3 N_2 a^2 p^2) - \frac{2r_0 R}{\pi \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right],$$

$$b_{12} = -\frac{2Rr_0^2}{I} \left[3N_2 \alpha_3 u a p^2 + \frac{u}{\pi a \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right],$$

$$b_{21} = -\frac{a u R}{m} \left[3\alpha_3 \cos p\Delta - \frac{2}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right],$$

$$b_{22} = \frac{1}{4pm} \left[2(c_\tau \sin p\tau + pRk_\tau \cos p\Delta) + b \sin 2\xi \right] - \frac{2Ru^2}{\pi m a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}},$$

а другие – те же, что и для скоростей $u \geq ap$ (а).

Расчетные результаты

Чтобы получить информацию о влиянии запаздываний на динамику системы, были проведены расчеты при следующих значениях параметров: $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$, $m = 1 \text{ кгс}\cdot\text{с}^2\cdot\text{см}^{-1}$, $b = 0,07 \text{ кгс}\cdot\text{см}^{-1}$, $k = 0,02 \text{ кгс}\cdot\text{с}\cdot\text{см}^{-1}$, $c_\tau = 0,05 \text{ кгс}\cdot\text{см}^{-1}$, $R = 0,5 \text{ кгс}$, $\alpha_1 = 0,84 \text{ с}\cdot\text{см}^{-1}$, $\alpha_3 = 0,18 \text{ с}^3\cdot\text{см}^{-3}$, $r_0 = 1 \text{ см}$, $I = 1 \text{ кгс}\cdot\text{с}\cdot\text{см}^2$.

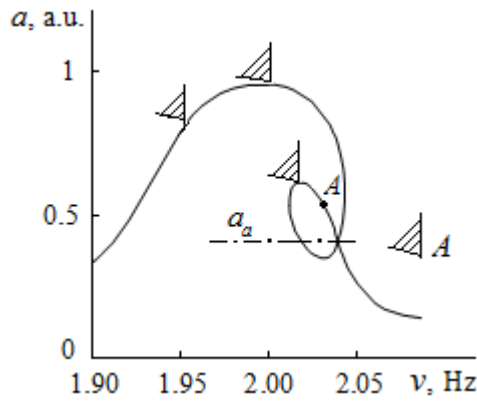


Рис. 2. Зависимость амплитуды от частоты при отсутствии запаздываний ($\Delta = 0$, $\tau = 0$).
Использовано значение параметра точности линеаризации $r = 1,5$

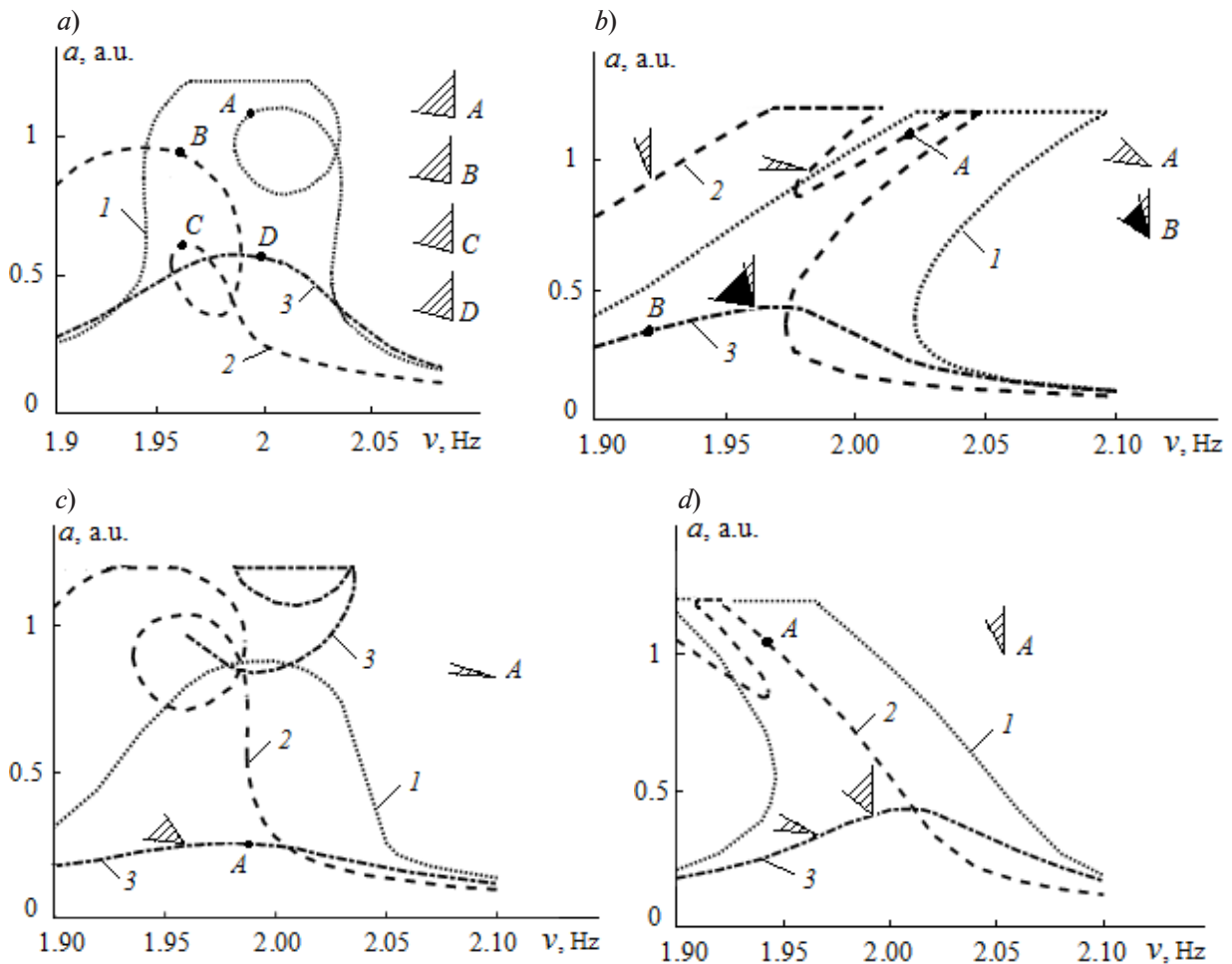


Рис. 3. Зависимости амплитуды от частоты при разных значениях параметра запаздывания Δ : 0 (a), $\pi/2$ (b), π (c) и $3\pi/2$ (d).

На графиках варьируется значение параметра ρ_τ :
 $\pi/2$ (кривые 1), π (кривые 2), $3\pi/2$ (кривые 3)

Для скорости использовано значение $u = 1,2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, а величины запаздываний $\rho\tau$ и $\rho\Delta$ выбраны из интервала $(0, 3\pi/2)$.

Амплитудно-частотные кривые $a(p)$, представленные на рис. 2 и 3, построены с использованием параметра точности $r = 1,5$ ($\bar{N}_3 = 3/4$ для k_T). Полученные данные, как показал анализ, полностью совпадают с результатами, которые можно получить, если использовать асимптотический метод усреднения Боголюбова – Митропольского [32]. Результаты, приведенные на рис. 2, где a означает амплитуду автоколебаний, представляют случай отсутствия запаздываний ($\Delta^a = 0, \tau = 0$) и даны для сравнения.

Колебания с соответствующими амплитудами устойчивы в пределах заштрихованных секторов для крутизны характеристики источника энергии $Q = dM(u/r_0)/du$. Эти секторы должны быть указаны на графике нагрузки $S(u)$ на источник энергии, но для краткости показаны на амплитудных кривых. В пределах наполненных черным цветом секторов присутствует слабая устойчивость, т. е. условие (или условия) устойчивости (8) выполняются в виде $0,000X > 0$, где $X \leq 9$. Следует также отметить, что на ряде участков кривых имеется еще более слабая устойчивость в виде $0,0000Y > 0$, где $Y \leq 9$. Такая слабая или очень слабая устойчивость наблюдается при всех значениях запаздываний, хотя показана лишь для $\rho\Delta = \pi/2$.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена динамика фрикционной автоколебательной системы с источником энергии ограниченной мощности при наличии вынуждающей силы и параметрического воздействия, запаздываний в упругости и трения, вызывающего автоколебания. Для получения информации о влиянии этих запаздываний на динамические характеристики смешанных вынужденных, параметрических и автоколебаний были проведены расчеты на основе выведенных уравнений стационарных движений. Полученные графические результаты наглядно показывают данное влияние на динамику колебаний, оно очень существенное. С ним также связана нагрузка, соответственно динамика и расход энергии источника. Это влияние приводит к ряду важных выводов:

- происходит сдвиг амплитудных кривых в амплитудно-частотной плоскости;
- амплитудные кривые весьма значительно изменяют форму, приобретая вид, свойственный нелинейной упругости (мягкой, жесткой);
- устойчивость стационарных колебаний зависит как от характеристики источника энергии, так и от величины запаздывания, появляется слабая или очень слабая устойчивость колебаний.

Полученные результаты позволяют планировать дальнейшие исследования. Используемый в работе подход применим для анализа различных колебательных процессов. Полученные в этом направлении данные могут служить инструментом для расчета реальных объектов на практике для оптимального выбора их параметров и характеристик источников энергии, минимизации энергопотребления и вредного воздействия на природу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 236 с.
2. Kononenko V. O. Vibrating systems with a limited power-supply. London: Iliffe, 1969. 236 p.
3. Alifov A. A., Frolov K. V. Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. New York: Taylor & Francis Group, 1990. 352 p.
4. Manevich A. I. An oscillator-rotator system: Vibrational maintenance of rotation, stationary synchronous regimes, stability, vibration mitigation // Journal of Sound and Vibration. 2018. Vol. 437. 22 December. Pp. 223–241.
5. Cveticanin L., Zukovic M., Cveticanin D. Non-ideal source and harvesting // Acta Mechanica. 2017. Vol. 228. No. 10. Pp. 3369–3379.
6. Alifov A. A. About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation // Proceedings of the International Scientific and Technical Conference "Measurement and Quality: Problems, Prospects"; November 21–23, 2018, AzTU, Baku, Azerbaijan. Pp. 289–293.
7. Saha A., Wahi P. An analytical study of time-delayed control of friction-induced vibrations in a system with a dynamic friction model // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2014. Vol. 63. July. Pp. 60–70.

8. **Третьякова Т. В., Вильдеман В. Э.** Пространственно-временная неоднородность процессов неупругого деформирования металлов. М.: Физматлит, 2017. 120 с.
9. **Корнет М. Е., Шишкина А. В.** О непараметрической идентификации безынерционных систем с запаздыванием // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2018. № 3 (59). С. 16–23.
10. **Тхан В. З., Дементьев Ю. Н., Гончаров В. И.** Повышение точности расчета систем автоматического управления с запаздыванием // Программные продукты и системы. 2018. Т. 31. № 3. С. 521–526.
11. **Петров Н. Н.** Простое групповое преследование с фазовыми ограничениями и запаздыванием информации // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2018. № 1. С. 39–44.
12. **Кашенко С. А.** Динамика логистического уравнения с запаздыванием и диффузией и с быстро осциллирующими по пространственной переменной коэффициентами // Доклады Академии наук. 2018. Т. 482. № 5. С. 508–512.
13. **Павловская А. Т., Хартовский В. Е.** Управление линейными системами с запаздыванием нейтрального типа посредством регуляторов с обратной связью динамической структуры // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 3–18.
14. **Goncharov V., Berchuk D., Than V., Alexandrov I.** Parametric identification of control objects to provide the improved accuracy on start or end point of timing response // Applied Mechanics and Materials. 2017. Vol. 865. Chapter 6. Pp. 525–531.
15. **Метельский А. В., Хартовский В. Е.** Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 547–558.
16. **Sykora H. T., Sadeghpour M., Ge J. I., Bachrathy D., Orosz G.** On the moment dynamics of stochastically delayed linear control systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2020. Vol. 30. No. 18. Pp. 8074–8097.
17. **Otto A., Just W., Radons G.** Nonlinear dynamics of delay systems: an overview // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2019. Vol. 377. No. 2153. Article ID: 20180389.
18. **Daza A., Wagemakers A., Sanjuán M. A. F.** Wada property in systems with delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Vol. 43. February. Pp. 220–226.
19. **Keller A. A.** Time-delay systems with application to mechanical engineering process dynamics and control // International Journal of Mathematics and Computers in Simulation. 2018. Vol. 12. June. Pp. 64–73.
20. **Liu C., Han M., Gong Z., Teo K. L.** Robust parameter estimation for constrained time-delay systems with inexact measurements // Journal of Industrial and Management Optimization. 2021. Vol. 17. No. 1. Pp. 317–337.
21. **Ramachandran P., Ram Y. M.** Stability boundaries of mechanical controlled system with time delay // Mechanical Systems and Signal Processing. 2012. Vol. 27. February. Pp. 523–533.
22. **Coccolo M., Zhu B., Sanjuán M. A. F., Sanz-Serna J. M.** Bogdanov – Takens resonance in time-delayed systems // Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 91. No. 3. Pp. 1939–1947.
23. **Araujo J. M., Bettega J., Dantas N. J. B., Dórea C. E. T., Richiedei D., Tamellin I.** Vibration control of a two-link flexible robot arm with time delay through the robust receptance method // Applied Sciences. 2021. Vol. 11. No. 21. P. 9907.
24. **Алифов А. А.** Смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при неидеальном источнике энергии и запаздывающих силах // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29. № 5. С. 739–750.
25. **Челомей В. Н.** (предс.). Вибрации в технике: Справочник. В 6 тт. Т. 5. Колебания нелинейных механических систем. Под ред. И. И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.
26. **Климов Д. М.** Об одном виде автоколебаний в системе с сухим трением // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 3. С. 6–12.
27. **Фролов К. В.** Избранные труды. В 2 тт. Т. 1. Вибрация и техника. М.: Наука, 2007. 351 с.
28. **Броновец М. А., Журавлёв В. Ф.** Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 3–11.
29. **Алифов А. А.** Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2015. 74 с.

30. **Алифов А. А., Фарзалиев М. Г., Джафаров Э. Н.** Расчет методом прямой линеаризации автоколебательной системы с источником энергии // Вестник машиностроения. 2018. № 1. С. 30–32.
31. **Alifov A. A.** Calculating mixed forced and self-oscillations for delayed elastic constraint and a limited power energy source // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2020. Vol. 49. No. 2. Pp. 105–109.
32. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 408 с.

REFERENCES

1. **Kononenko V. O.**, Vibrating systems with a limited power-supply, Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
2. **Kononenko V. O.**, Vibrating systems with limited power-supply, Iliffe, London, 1969.
3. **Alifov A. A., Frolov K. V.**, Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources, Hemisphere Pub. Corp. Taylor & Francis Group, New York, 1990.
4. **Manevich A. I.**, An oscillator-rotator system: Vibrational maintenance of rotation, stationary synchronous regimes, stability, vibration mitigation, *J. Sound Vib.* 437 (22 Decem.) (2018) 223–241.
5. **Cveticanin L., Zukovic M., Cveticanin D.**, Non-ideal source and energy harvesting, *Acta Mech.* 228 (10) (2017) 3369–3379.
6. **Alifov A. A.**, About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation, *Proc. Int. Sci. Techn. Conf. "Measurement and Quality: Problems, Prospects"*, Nov. 21–23, 2018, AzTU, Baku, Azerbaijan (2018) 289–293.
7. **Saha A., Wahi P.**, An analytical study of time-delayed control of friction-induced vibrations in a system with a dynamic friction model, *Int. J. Non-Linear Mech.* 63 (July) (2014) 60–70.
8. **Tretyakova T. V., Wildemann V. E.**, Prostranstvenno-vremennaya neodnorodnost protsessov neuprugogo deformirovaniya metallov [Spatial-temporal inhomogeneity of the processes of inelastic deformation of metals], Fizmatlit Publishing, Moscow, 2017 (in Russian).
9. **Kornet M. E., Shishkina A. V.**, About non-parametric identification of infinitely fast systems with delay, *Modern technologies. System analysis. Modeling.* (3(59)) (2018) 16–23 (in Russian).
10. **Than V. Z., Dement'ev Ju. N., Goncharov V. I.**, Improving the accuracy calculation of time delay automatic control, *Software & Systems.* (3(31)) (2018) 521–526 (in Russian).
11. **Petrov N. N.**, Simple group pursuit subject to phase constraints and data delay, *J. Comput. Syst. Sci.* 57 (1) (2018) 37–42.
12. **Kashchenko S. A.**, Dynamics of a delay logistic equation with diffusion and coefficients rapidly oscillating in a space variable, *Doklady Mathematics.* 98 (2) (2018) 522–525.
13. **Pavlovskaya A. T., Khartovskii V. E.**, Control of neutral delay linear systems using feedback with dynamic structure, *J. Comput. Syst. Sci.* 53 (3) (2014) 305–319.
14. **Goncharov V., Berchuk D., Than V., Alexandrov I.**, Parametric identification of control objects to provide the improved accuracy on start or end point of timing response, *Appl. Mech. Mater.* 865 (Ch. 6) (2017) 525–531.
15. **Metel'skiĭ A. V., Khartovskii V. E.**, Synthesis of damping controllers for the solution of completely regular differential-algebraic delay systems, *Differ. Equ.* 53 (4) (2017) 539–550.
16. **Sykora H.T., Sadeghpour M., Ge J.I., et al.**, On the moment dynamics of stochastically delayed linear control systems, *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 30 (18) (2020) 8074–8097.
17. **Otto A., Just W., Radons G.**, Nonlinear dynamics of delay systems: an overview, *Phil. Trans. R. Soc. A.* 377 (2153) (2019) 20180389.
18. **Daza A., Wagemakers A., Sanjuán M. A. F.**, Wada property in systems with delay, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 43 (Febr.) (2017) 220–226.
19. **Keller A. A.**, Time-delay systems with application to mechanical engineering process dynamics and control, *Int. J. Math. Comput. Simul.* 12 (June) (2018) 64–73.
20. **Liu C., Han M., Gong Z., Teo K. L.**, Robust parameter estimation for constrained time-delay systems with inexact measurements, *J. Ind. Manag. Optim.* 17 (1) (2021) 317–337.
21. **Ramachandran P., Ram Y. M.**, Stability boundaries of mechanical controlled system with time delay, *Mech. Syst. Signal Process.* 27 (Febr.) (2012) 523–533.

22. Cocco M., Zhu B., Sanjuán M. A. F., Sanz-Serna J. M., Bogdanov – Takens resonance in time-delayed systems, *Nonlinear Dyn.* 91 (3) (2018) 1939–1947.
23. Araujo J. M., Bettega J., Dantas N. J. B., et al., Vibration control of a two-link flexible robot arm with time delay through the robust receptance method, *Appl. Sci.* 11 (21) (2021) 9907.
24. Alifov A. A., Mixed forced, parametric, and self-oscillations with nonideal energy source and lagging forces, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 29 (5) (2021) 739–750 (in Russian).
25. Chelomey V. N. (chairman), *Vibratsii v tekhnike: spravochnik* [Vibrations in machinery: Handbook], in 6 Vols., Vol. 5, Edited by Blekhman I. I., Publishing House of Mechanical Engineering, Moscow, 1979 (in Russian).
26. Klimov D. M., Ob odnom vide avtokolebaniy v sisteme s sukhim treniyem [On one type of self-excited vibrations in a system with dry friction], *Mechanics of Solids.* (3) (2003) 6–12 (in Russian).
27. Frolov K. V., *Izbrannyye trudy v 2 tt, t. 1. Vibratsiya i tekhnika* [Selected works in 2 Vols., Vol. 1. Vibration and technology]. Nauka Publishing, Moscow, 2007 (in Russian).
28. Bronovets M. A., Zhuravlev V. F., On self-excited vibrations in friction force measurement systems, *Mechanics of Solids.* 47 (3) (2012) 261–268.
29. Alifov A. A., *Metody pryamoy linearizatsii dlya rascheta nelineynykh system* [Methods of direct linearization for calculation of nonlinear systems], Research Center “Regular and Chaotic Dynamics”, Moscow, 2015 (in Russian).
30. Alifov A. A., Farzaliev M. G., Jafarov E. N., Dynamics of a self-oscillatory system with an energy source, *Russian Engineering Research.* 38 (4) (2018) 260–262.
31. Alifov A. A., Calculating mixed forced and self-oscillations for delayed elastic constraint and a limited power energy source, *J. Mach. Manuf. Reliab.* 49 (2) (2020) 105–109.
32. Bogoliubov N. N., Mitropolsky Y. A., *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*, CRC Press, Florida, USA, 1961.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

АЛИФОВ Алишир Али оглы — доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории динамических процессов Института машиноведения имени А. А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия.

101000, Россия, г. Москва, Малый Харитоньевский пер., 4
alishir@mail.ru
ORCID: 0000-0003-2327-068X

THE AUTHOR

ALIFOV Alishir Ali

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS
4 Malij Haritonjevskij lane, Moscow, 101000, Russia
alishir@mail.ru
ORCID: 0000-0003-2327-068X

Статья поступила в редакцию 11.02.2023. Одобрена после рецензирования 18.06.2023. Принята 18.06.2023.

Received 11.02.2023. Approved after reviewing 18.06.2023. Accepted 18.06.2023.