

Физика конденсированного состояния

Научная статья

УДК 538.9

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16301>

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

М. Ю. Смирнов¹, В. В. Филиппов² ✉,

В. С. Зияутдинов¹, К. А. Богоносков¹

¹Московский государственный университет технологий и управления
имени К. Г. Разумовского, г. Москва, Россия;

²Липецкий государственный педагогический университет
имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Россия

✉ wwfilippow@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрен общий модельный подход к проблеме описания конкуренции и сосуществования различных фаз конденсированного состояния на основе теории фазовых переходов второго рода Ландау. Показано, что многокомпонентный параметр порядка приводит к более сложной (по сравнению с однокомпонентным) картине фазовых переходов и возникновению областей на фазовой диаграмме, в которых различные пространственно-упорядоченные состояния могут конкурировать или сосуществовать. Рассмотренная модель применима для анализа фазовых переходов в твердых телах с различными электрическими свойствами и магнитными состояниями. Предлагаемый подход позволяет численно моделировать свободную энергию твердого тела вблизи точек фазового перехода. Указаны необходимые условия и границы применимости анализируемой расчетной модели.

Ключевые слова: фазовый переход второго рода, параметр порядка, феноменологический подход, конкуренция и сосуществование фаз

Для цитирования: Смирнов М. Ю., Филиппов В. В., Зияутдинов В. С., Богоносков К. А. Феноменологический подход к описанию фазовых переходов в твердых телах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 3. С. 9–18. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16301>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16301>

PHENOMENOLOGICAL APPROACH TO THE DESCRIPTION OF PHASE TRANSITIONS IN SOLIDS

M. Yu. Smirnov¹, V. V. Filippov² ✉,

V. S. Ziyautdinov¹, K. A. Bogonosov¹

¹Moscow State University of Technology and Management, Moscow, Russia;

²Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky,
Lipetsk, Russia

✉ wwfilippow@mail.ru

Abstract. A general model approach to the problem of describing the competition and coexistence of different phases of a condensed state is considered on the basis of Landau's theory of second-order phase transitions. We show that the multicomponent order parameter leads to a more complex pattern of phase transitions and the appearance of regions in the phase diagram in which different spatially ordered states can compete or coexist. The solution of the necessary equations of the Ginzburg–Landau theory was carried out by the variational method. The model considered in this paper is applicable to the analysis of phase transitions in solids with different electrical properties (transitions to the superconducting state, metal–dielectric and metal–semiconductor transformations) and magnetic states (para-magnet–ferromagnet, para-magnet–antiferromagnet). The proposed approach makes it possible to numerically simulate the free energy of a solid near the phase transition points. The necessary conditions and limits of applicability of the analyzed computational model are shown.

Keywords: second-order phase transition, order parameter, phenomenological approach, competition and coexistence of phases

For citation: Smirnov M. Yu., Filippov V. V., Ziyautdinov V. S., Bogonosov K. A., Phenomenological approach to the description of phase transitions in solids, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (3) (2023) 9–18. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16301>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

В современной теории конденсированных сред [1, 2] нередко требуется рассматривать раздельное или одновременное сосуществование различных состояний (или фаз) [3, 4]. Отдельные фазовые переходы в твердых телах, связанные с резким изменением их электрических и магнитных свойств, не находят объяснения в рамках существующих моделей фазовых переходов первого или второго рода. Детальное рассмотрение данной проблемы на микроскопическом уровне требует применения достаточно сложных вычислительных схем [5, 6] в силу отсутствия универсальных методов решения и анализа возникающих нелинейных уравнений. При экспериментальном подходе к проблеме приходится иметь дело с величинами, лишь косвенно связанными с конкретным микроскопическим механизмом и характеризующими поведение макроскопическими величинами [7, 8]. Поэтому чрезвычайно плодотворным оказывается феноменологический подход, развитый В. Л. Гинзбургом и Л. Д. Ландау, основанный на общей термодинамической теории Ландау фазовых переходов второго рода [9] и являющийся универсальным применительно к металлам, полупроводникам и диэлектрикам.

В данной статье рассмотрен феноменологический подход к проблеме описания фазовых переходов второго рода с сосуществованием и конкуренцией различных упорядоченных состояний.

В настоящем исследовании построена методика расчета свободной энергии вблизи точек фазового перехода с применением вариационного метода к уравнению Гинзбурга – Ландау. Выполнено компьютерное моделирование термодинамических параметров и проведено сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными.

Постановка физико-математической задачи

Рассмотрим основы теории фазовых переходов второго рода Ландау, которая построена на разложении свободной энергии по степеням параметра порядка вблизи точки фазового перехода, где параметр порядка мал. Область применимости теории ограничена близостью к критической температуре фазового перехода: $T_c - T \ll T_c$.

Разложение плотности свободной энергии по степеням параметра порядка Ψ , в соответствии с теорией фазовых переходов второго рода, можно записать в следующем виде [9, 10]:

$$F_1 = F_0 + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4, \quad (1)$$

где F_1, F_0 – величины свободной энергии тела при низких температурах в отсутствие внешнего магнитного поля и в нормальном состоянии при $T > T_c$, соответственно; α, β – некоторые феноменологические коэффициенты разложения, характеризующие материал.

Эти феноменологические параметры выражаются через наблюдаемые макроскопические величины.

Определим такое значение параметра порядка, при котором свободная энергия достигает минимума:

$$\frac{dF_{s0}}{d|\Psi|^2} = 0 \Rightarrow |\Psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Поскольку при $T = T_c$ параметр порядка должен обращаться в нуль, а при $T < T_c$ отличен от нуля, то и коэффициент $\alpha = 0$ при $T = T_c$ и $\alpha < 0$ при $T < T_c$. В первом порядке по $(T_c - T)$ можно записать $\alpha = \tilde{\alpha}(T - T_c)$, где $\tilde{\alpha}$ не зависит от близости к T_c . Коэффициент β можно считать положительным и от температуры не зависящим [11]. Это приведет к минимуму функционала при $T < T_c$ и отличному от нуля параметру порядка Ψ . С другой стороны, при $T > T_c$ минимум будет достигнут при нулевом значении параметра порядка, что соответствует нормальному состоянию образца.

В общем случае неоднородного тела во внешнем магнитном поле необходимо исследовать разложение свободной энергии Гиббса по степеням Ψ [11]:

$$G_{sH} = G_n + \int \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right|^2 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}}{4\pi} \right] dV,$$

где m – масса свободного электрона; \mathbf{H} – напряженность внешнего магнитного поля; предпоследнее слагаемое определяет плотность магнитной энергии (здесь $\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$ задает напряженность магнитного поля в данной точке тела); слагаемое с градиентным членом представляет собой плотность кинетической энергии электронов; интегрирование ведется по всему объему.

Найдем такие уравнения относительно $\Psi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, которые давали бы минимальное значение свободной энергии. Для этого необходимо решить вариационные задачи:

$$\delta_{\Psi^*} G_{sH} = 0, \quad \delta_{\Psi} G_{sH} = 0, \quad \delta_{\mathbf{A}} G_{sH} = 0.$$

Первая из указанных вариаций приводит к хорошо известному из теории сверхпроводимости первому уравнению Гинзбурга – Ландау и соответствующему граничному условию [10]:

$$\alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi + \frac{1}{4m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi = 0, \quad (2)$$

$$\left(i\hbar \nabla + \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) \mathbf{n} = 0,$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности сверхпроводника.

Вариация по Ψ приводит к комплексно-сопряженному уравнению. Получим уравнение относительно векторного потенциала \mathbf{A} ; для этого необходимо решить последнюю из указанных вариационных задач:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{i\hbar e}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{mc} \mathbf{A} |\Psi|^2, \quad (3)$$

что представляет собой второе уравнение теории Гинзбурга – Ландау [10].

Основные результаты расчетов

Приведенные в предыдущем разделе выкладки хорошо описывают переход между двумя фазами. В случае конкуренции или сосуществования большего количества фаз структура

функционала (1), являющегося основой феноменологического описания, должна отличаться от рассмотренной ранее. Должен отличаться и вид самого параметра порядка.

Стоит отметить, что структура параметра порядка может быть получена при исследовании микроскопической теории явления, как это сделано для функционала Гинзбурга – Ландау в схеме среднего поля Бардина, Купера и Шриффера при спаривающем притяжении (чему соответствует однокомпонентный комплексный параметр порядка) [12].

В общем случае параметр порядка может быть задан в виде

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{k}) = \sum_s \Psi_s(\mathbf{R}) \varphi_s(\mathbf{R}, \mathbf{k}),$$

где $\Psi_s(\mathbf{R})$ – коэффициенты разложения параметра порядка по полной ортонормированной системе функций $\varphi_s(\mathbf{R}, \mathbf{k})$, получаемой из микроскопического описания состояния тела.

Зависимость коэффициентов разложения от радиуса-вектора \mathbf{R} позволяет описывать неоднородности строения материала.

Пусть состояние твердого вещества описывается двухкомпонентным параметром порядка, как например, это получено в статье [13]. Разложение плотности свободной энергии по степеням параметра порядка в таком случае представляется в виде $f = f_0 + f_g + f_m$ [14], где

$$f_0 = \sum_{ss'} A_{ss'} \Psi_s^* \Psi_{s'} + \frac{1}{2} \sum_{ss'tt'} B_{ss'tt'} \Psi_s^* \Psi_{s'}^* \Psi_t \Psi_{t'}$$

представляет собой разложение плотности свободной энергии по второй и четвертой степеням параметра порядка.

Здесь матрицы $A_{ss'}$ и $B_{ss'tt'}$ определяются либо из микроскопического описания, либо выражаются через величины, наблюдаемые макроскопически. Элементы матрицы $A_{ss'}$, как и в случае исследования функционала (1), должны зависеть от температуры образца, определяя тем самым температуру установления упорядоченного состояния.

Градиентный вклад следует выражению

$$f_g = \frac{\hbar^2}{4m} \sum_{ss'} [\hat{D}\Psi_s]^+ M_{ss'} [\hat{D}\Psi_{s'}],$$

где элементы матрицы $M_{ss'}$ также определяются микроскопической теорией или выражаются на основе макроскопических наблюдаемых величин; оператор $\hat{D} = -i\nabla - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}$.

Данный вклад учитывает не только внешнее магнитное поле, но и внутреннее. И, наконец, плотность энергии магнитного поля выражается как

$$f_m = \frac{z_0}{8\pi} (\text{rot } \mathbf{A})^2.$$

Производя вариацию функционала, получим систему из двух уравнений (для случая двухкомпонентного параметра порядка) вида

$$\sum_{s'} A_{ss'} \Psi_{s'} + \sum_{s'tt'} B_{ss'tt'} \Psi_{s'}^* \Psi_t \Psi_{t'} + \sum_{s'} M_{ss'} \left(-i\nabla - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi_{s'} = 0$$

и граничные условия

$$\sum_{s'} M_{ss'} \left(i\nabla + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi_{s'} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Полученная система уравнений может приводить к нескольким нетривиальным решениям, которые могут отличаться, например, относительной фазой компонент параметра порядка. Эти минимумы полностью определяются соотношением между элементами матриц $A_{ss'}$, $B_{ss'tt'}$ и $M_{ss'}$, как, например, рассмотрено в работах [14, 15].

С другой стороны, возникновение одного из упорядоченных состояний можно описать обычным разложением свободной энергии по четным степеням данного параметра порядка:

$$f = a_1 \psi^2 + \frac{1}{2} b_1 \psi^4.$$

Другое упорядоченное состояние может быть описано аналогично:

$$f = a_2 \alpha^2 + \frac{1}{2} b_2 \alpha^4.$$

Здесь коэффициенты a_i определяют температуру перехода из основного состояния в упорядоченное, аналогично коэффициенту α в разложении (1). Конкуренция двух упорядоченных состояний приводит к ненулевому значению градиентного вклада, что приводит к появлению дополнительного слагаемого $b_{12} \psi^2 \alpha^2$.

Таким образом, функционал, описывающий сосуществование и конкуренцию двух упорядоченных состояний, можно описать в виде

$$f = a_1 \psi^2 + a_2 \alpha^2 + \frac{1}{2} b_1 \psi^4 + \frac{1}{2} b_2 \alpha^4 + b_{12} \psi^2 \alpha^2. \quad (4)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 можно записать в следующем виде [11]:

$$a_1 = -a' \tau', \quad a_2 = -a'' \tau'', \quad \tau' = \frac{T_1 - T}{T_1}, \quad \tau'' = \frac{T_2 - T}{T_2},$$

где T_1, T_2 – температуры переходов в соответствующие упорядоченные состояния, ниже которых могут быть отличны от нуля параметры порядка ψ и α .

Приведенное выше разложение имеет смысл лишь в окрестности малой области фазовой диаграммы, где линии графиков T_1 и T_2 либо пересекаются, либо проходят близко друг к другу.

В более общем случае многокомпонентного параметра порядка можно говорить о формулах, аналогичных (4), которые задают появление различных видов упорядоченного состояния и их сосуществование и конкуренцию [16 – 20].

Рассмотренная выше модель применима исключительно для микро- и макротел, поскольку не учитывает вклада поверхностного натяжения, значимого для наночастиц [21, 22]. Величина и форма поверхности вносят весьма существенный вклад в общую энергию в наноматериалах [23, 24] и значительно влияют на термодинамические параметры фазовых переходов [23, 25, 26]. Как показано в работах [27 – 29], вкладом поверхностной энергии для однородных твердых частиц можно пренебречь при размерах более 200 нм по каждому из пространственных направлений, поскольку вклад поверхности в общую энергетику системы в этом случае не превышает 2 %.

Анализ модели и результатов расчетов

Рассмотрим, к чему может приводить функционал с двухкомпонентным параметром порядка, аналогичный уравнению (4). Для этого исследуем его на наличие минимумов и проследим изменение топологии изолиний свободной энергии. На рис. 1 показаны изолинии свободной энергии (4) $f(\psi, \alpha) = \text{const}$, а на рис. 2 – фрагмент фазовой диаграммы.

В нормальной фазе при $T > T_1$ и $T > T_2$ свободная энергия имеет минимум при $\psi = 0$, $\alpha = 0$ (см. рис. 1, *a* и рис. 2, область *N* правее ломаной линии 2-C-1'), который при пе-

реходе в область с $T < T_2$ и $T > T_1$ в α -фазу смещается по оси α в точку $\psi = 0$, $\alpha = \sqrt{-\frac{a_2}{b_2}}$

(см. рис. 1, *b* и рис. 2, область α в секторе 2'-C-1'). Этот минимум, однако, является единственной особой точкой свободной энергии не во всей области существования α -фазы, а лишь в ее верхней части. При переходе через линию $T < T_1$ к минимуму, определяющему

термодинамически устойчивое α -состояние, добавляется седловая точка при $\psi = \sqrt{-\frac{a_1}{b_1}}$,

$\alpha = 0$, в которой свободная энергия имеет минимум по переменной ψ при $\alpha = 0$ (рис. 1, *c* и рис. 2, заштрихованный треугольник 2'C4).

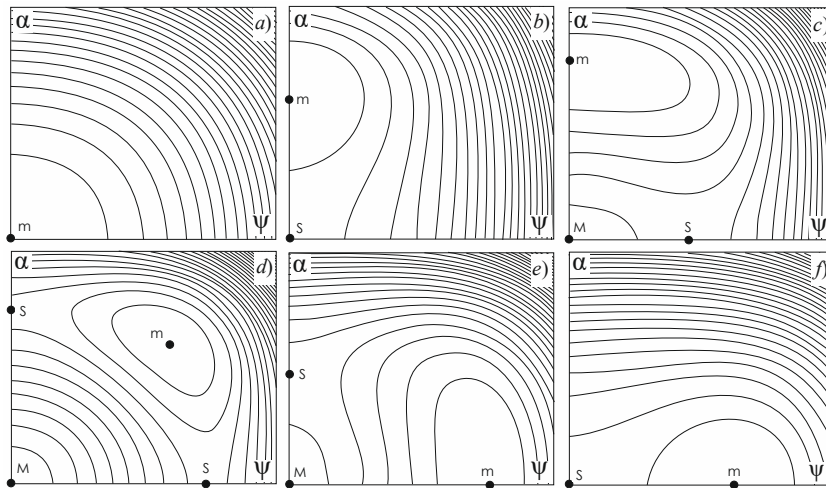


Рис. 1. Топология изолиний свободной энергии в координатах ψ и α (горизонтальная и вертикальная оси, соответственно), показывающая возможные состояния на фазовой диаграмме: нормальная фаза (a); α -фаза без ψ -фазы (b) и с ее флуктуациями (c); сосуществование α - и ψ -фаз (d); ψ -фаза с флуктуациями α -фазы (e) и ψ -фаза (f). Максимумы M , минимумы m и седла свободной энергии S показаны жирными точками

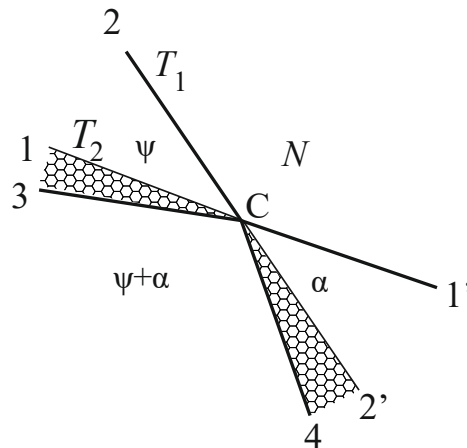


Рис. 2. Фрагмент фазовой диаграммы состояния твердого тела в окрестности линий перехода: границы возможного возникновения упорядоченного состояния показаны прямыми 1 – 1' и 2 – 2' (N – нормальное состояние без упорядочения); буквами ψ , α , $\psi + \alpha$ отмечены соответствующие фазы и их сосуществование (заштрихованные области соответствуют развитым флуктуациям одной фазы при наличии другой). Линии фазовых переходов выделены жирными линиями

С другой стороны, при переходе из нормального состояния в область с $T > T_2$ и $T < T_1$ в ψ -фазу, минимум смещается по оси ψ в точку $\alpha = 0$, $\psi = \sqrt{-\frac{a_1}{b_1}}$ (см. рис. 1, f и область ψ в секторе 2-C-1 на рис. 2). Этот минимум также дополняется седловой точкой с координатами $\alpha = \sqrt{-\frac{a_2}{b_2}}$ и $\psi = 0$ при переходе через линию $T < T_2$ (см. рис. 1, e и рис. 2, заштрихованный треугольник 1C3). Наконец, на фазовой диаграмме можно обнаружить область, в которой будут сосуществовать α - и ψ - фазы (рис. 1, d и область $\psi + \alpha$ ниже ломаной линии 3-C-4 на рис. 2).



При этом оказывается, что фазовый переход происходит не при температурах T_1 и T_2 . Указанные температуры показывают границы возможного возникновения упорядоченного состояния, и в областях конкуренции фаз (см. рис. 1, *c* и *e*) определяют области развитых флуктуаций конкуренции имевшегося упорядоченного состояния с появляющимся порядком. Фазовый переход в область сосуществования происходит при более низкой температуре (линии 3-С и 4-С на рис. 2) и характеризуется топологией изолиний свободной энергии, как на рис. 1, *d*. Стоит отметить, что в точке С на рис. 2 сходятся области четырех различных фаз состояния вещества.

Заключение

Таким образом, использование теории фазовых переходов второго рода в качестве основы феноменологического рассмотрения конкурирующих и сосуществующих фаз при выборе соответствующего параметра порядка, который может быть получен из микроскопического описания состояния вещества, позволяет на качественном уровне описывать экспериментально наблюдаемые состояния конденсированных сред.

Феноменологический подход оказывается более простым при вычислениях, чем микроскопическое описание, однако не позволяет определить те механизмы, которые приводят к возникновению упорядочения в системе. Границы применимости рассмотренного подхода – близость к границе фазового перехода, область, в которой достаточно первых двух слагаемых в разложении свободной энергии по степеням параметра порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Girvin S. M., Yang K. Modern condensed matter physics. 1st edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. 714 p.
2. Anderson P. W. Basic notions of condensed matter physics. Boca Raton, USA: CRC Press, 2018, 564 p.
3. Koblischka M. R., Koblischka-Veneva A. Superconductivity 2022 // Metals. 2022. Vol. 12. No. 4. P. 568.
4. Ильинский А. В., Шадрин Е. Б. Фазовый переход полупроводник – металл в окислах ряда Магнели: VO и V_2O_3 // Физика твердого тела. 2022. Т. 64. № 10. С. 1552–1556.
5. Jeong M. Y., Yang H.-J., Kim H. S., Kim Y. B., Lee S. B., Han M. J. Crucial role of out-of-plane Sb *p*-orbitals in Van Hove singularity formation and electronic correlations in the superconducting kagome metal CsV_3Sb_5 // Physical Review B. 2022. Vol. 105. No. 23. P. 235145.
6. Choudhary K., Garrity K. Designing high- T_C superconductors with BCS-inspired screening, density functional theory, and deep-learning // Npj Computational Materials. 2022. Vol. 8. 22 November. P. 244.
7. Набиуллин И. Р., Гадиев Р. М., Лачинов А. Н. Влияние фазового перехода второго рода на электропроводность структуры металл/полупроводник // Физика и техника полупроводников. 2019. Т. 53. № 4. С. 462–465.
8. Фролов К. В., Алексеева О. А., Любутин И. С., Ксенофонтов В., Смирнова Е. С., Темеров В. Л., Гудим И. А., Любутина М. А. Структурный и магнитные фазовые переходы в мультиферроике $HoFe_3(VO_3)_4$ по данным мессбауэровской спектроскопии и рентгеновской дифракции // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2022. Т. 162. № 5. С. 718–729.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика: Т. IX. Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния. М.: Физматлит, 2021. 440 с.
10. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. Изд. 2-е. М.: Московский центр непрерывного математического образования (ЦНМО), 2000. 397 с.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Т. V. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Физматлит, 2021. 616 с.
12. Минеев В. П., Самохин К. В. Введение в теорию необычной сверхпроводимости. М.: Изд-во МФТИ, 1998. 144 с.
13. Белявский В. И., Копаев Ю. В. Сверхпроводимость отталкивающихся частиц // Успехи физических наук. 2006. Т. 176. № 5. С. 457–485.

14. **Белявский В. И., Копаев Ю. В., Смирнов М. Ю.** Тетракритическая точка и токовые циркуляции в сверхпроводящем состоянии // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2005. Т. 128. № 3. С. 525–543.
15. **Belyavsky V. I., Kopayev Yu. V., Smirnov M. Yu.** Interplay of the superconducting state and orbital antiferromagnetic state of the high-temperature cuprate superconductors // *Physical Review B*. 2005. Vol. 72. No. 13. P. 132501.
16. **Елесин В. Ф., Капаев В. В., Копаев Ю. В.** Существование ферромагнетизма и неоднородной сверхпроводимости // *Успехи физических наук*. 2004. Т. 174. № 9. С. 1017–1022.
17. **Mukuda H., Shimizu S., Iyoi A., Kitaoka Y.** High- T_c superconductivity and antiferromagnetism in multilayered copper oxides (A new paradigm of superconducting mechanism) // *Journal of the Physical Society of Japan*. 2012. Vol. 81. No. 1. P. 011008.
18. **Гильмутдинов В. Ф., Тимиргазин М. А., Аржников А. К.** Сосуществование магнетизма и сверхпроводимости в высокотемпературных сверхпроводниках // *Химическая физика и мезоскопия*. 2018. Т. 20. № 3. С. 365–377.
19. **Timirgazin M. A., Gilmudinov V. F., Arzhnikov A. K.** Phase diagrams of singlet superconducting states with mixed symmetry // *Physica C: Superconductivity and its Applications*. 2019. Vol. 557. 15 February. Pp. 7–11.
20. **Yamase H., Eberlein A., Metzner W.** Coexistence of incommensurate magnetism and superconductivity in the two-dimensional Hubbard model // *Physical Review Letters*. 2016. Vol. 116. No. 9. P. 096402.
21. **Сдобняков Н. Ю., Самсонов В. М., Базулев А. Н., Кульпин А. Н.** О поверхностном натяжении нанокристаллов различной природы // *Конденсированные среды и межфазные границы*. 2007. Т. 9. № 3. С. 255–260.
22. **Магомедов М. Н.** О поверхностном давлении для ограниченного нанокристалла // *Письма в журнал технической физики*. 2005. Т. 31. № 1. С. 24–34.
23. **Магомедов М. Н.** Изменение термодинамических свойств твердого раствора Si-Ge при уменьшении размера нанокристалла // *Физика твердого тела*. 2019. Т. 61. № 11. С. 2169–2177.
24. **Магомедов М. Н.** О зависимости поверхностной энергии от размера и формы нанокристалла // *Физика твердого тела*. 2004. Т. 46. № 5. С. 924–937.
25. **Нечаев В. Н., Шуба А. В.** О возможном механизме повышения температуры фазового перехода в композите сегнетоэлектрик-диэлектрик // *Физика твердого тела*. 2014. Т. 56. № 5. С. 949–952.
26. **Магомедов М. Н.** О температуре сверхпроводящего перехода для нанокристаллов металлов // *Физика твердого тела*. 2003. Т. 45. № 7. С. 1159–1163.
27. **Суздаев И. П.** Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов (Серия: Синергетика: от прошлого к будущему. № 25). М.: Либроком, 2019. 592 с.
28. **Нечаев В. Н., Шуба А. В.** Размерные эффекты в фазовых переходах и физических свойствах ферроиков. М.: ИНФРА-М, 2023. 384 с.
29. **Нечаев В. Н., Шуба А. В.** Об аномальном влиянии внешнего электрического поля на фазовый переход второго рода в тонкой сегнетоэлектрической пленке // *Физика твердого тела*. 2020. Т. 62. № 4. С. 567–573.

REFERENCES

1. **Girvin S. M., Yang K.**, *Modern condensed matter physics*, 1st edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2019.
2. **Anderson P. W.**, *Basic notions of condensed matter physics*. CRC Press, Boca Raton, USA, 2018.
3. **Koblichka M. R., Koblichka-Veneva A.**, *Superconductivity 2022, Metals*. 12 (4) (2022) 568.
4. **Ilinskiy A. V., Shadrin E. B.**, Semiconductor – metal phase transition in oxides of Magneli series: VO and V₂O₃, *Phys. Solid State*. 64 (10) (2022) 1533–1537.
5. **Jeong M. Y., Yang H.-J., Kim H. S., et al.**, Crucial role of out-of-plane Sb *p*-orbitals in Van Hove singularity formation and electronic correlations in the superconducting kagome metal CsV₃Sb₅, *Phys. Rev. B*. 105 (23) (2022) 235145.
6. **Choudhary K., Garrity K.**, Designing high- T_c superconductors with BCS-inspired screening, density functional theory, and deep-learning, *Npj Comput. Mater.* 8 (22 Nov.) (2022) 244.
7. **Nabiullin I. R., Gadiev R. M., Lachinov A. N.**, Effect of a second-order phase transition on the electrical conductivity of metal/semiconductor structures, *Semicond.* 53 (4) (2019) 439–441.

8. **Frolov K. V., Alekseeva O. A., Lyubutin I. S., et al.**, Structural and magnetic phase transitions in the multiferroic $\text{HoFe}_3(\text{BO}_3)_4$ observed by μSR spectroscopy and X-ray diffraction, JETP. 135 (5) (2022) 698–707.
9. **Landau L. D., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P.**, Course of theoretical physics. Vol. 9. Statistical Physics. Part 2, Elsevier, New Delhi, 2020.
10. **Schmidt V. V.**, The physics of superconductors: Introduction to fundamentals and applications, Edited by P. Müller, A. V. Ustinov, Springer, Berlin, 1997.
11. **Landau L. D., Lifshitz E. M.**, Course of theoretical physics Vol. 5. Statistical physics. Part 1, Elsevier, New Delhi, 2020.
12. **Mineev V. P., Samokhin K. V., Landau L. D.**, Introduction to unconventional superconductivity, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 1999.
13. **Belyavskii V. I., Kopaev Y. V.**, Superconductivity of repulsive particles, Phys.–Usp. 49 (5) (2006) 441–467.
14. **Belyavsky V. I., Kopaev Y. V., Smirnov M. Yu.**, Tetracritical point and staggered vortex currents in superconducting state, JETP. 101 (3) (2005) 452–467.
15. **Belyavsky V. I., Kopaev Y. V., Smirnov M. Yu.**, Interplay of the superconducting state and orbital antiferromagnetic state of the high-temperature cuprate superconductors, Phys. Rev. B. 72 (13) (2005) 132501.
16. **Elesin V. F., Kopaev V. V., Kopaev Y. V.**, Coexistence of ferromagnetism and nonuniform superconductivity, Phys.–Usp. 47 (9) (2004) 949.
17. **Mukuda H., Shimizu S., Iyoi A., Kitaoka Y.**, High- T_c superconductivity and antiferromagnetism in multilayered copper oxides (A new paradigm of superconducting mechanism), J. Phys. Soc. Jap. 81 (1) (2012) 011008.
18. **Gilmutdinov V. F., Timirgazin M. A., Arzhnikov A. K.**, Coexistence of magnetism and superconductivity in high-temperature superconductors, Chem. Phys. Mesosc. 20 (3) (2018) 365–377 (in Russian).
19. **Timirgazin M. A., Gilmutdinov V. F., Arzhnikov A. K.**, Phase diagrams of singlet superconducting states with mixed symmetry, Phys. C: Supercond. Appl. 557 (15 Febr) (2019) 7–11.
20. **Yamase H., Eberlein A., Metzner W.**, Coexistence of incommensurate magnetism and superconductivity in the two-dimensional Hubbard model, Phys. Rev. Lett. 116 (9) (2016) 096402.
21. **Sdobnyakov N. Yu., Samsonov V. M., Bazulev A. N., Kulpin D. A.**, On the surface tension of nanocrystals of the different nature, Condens. Matt. Interphases. 9 (3) (2007) 255–260 (in Russian).
22. **Magomedov M. N.**, The surface pressure in a faceted nanocrystal, Techn. Phys. Lett. 31 (1) (2005) 13–17.
23. **Magomedov M. N.**, Change in the thermodynamic properties of a Si–Ge solid solution at a decrease of the nanocrystal size, Phys. Solid State. 61 (11) (2019) 2145–2154.
24. **Magomedov M. N.**, Dependence of the surface energy on the size and shape of a nanocrystal, Phys. Solid State. 46 (5) (2004) 954–968.
25. **Nechaev V. N., Shuba A. V.**, On the possible mechanism of increase in the phase transition temperature in a ferroelectric-insulator composite, Phys. Solid State. 56 (5) (2014) 985–988.
26. **Magomedov M. N.**, On the superconducting transition temperature for metallic nanocrystals, Phys. Solid State. 45 (7) (2003) 1213–1218.
27. **Suzdalev I. P.**, Nanotekhnologiya: Fiziko-khimiya nanoklasterov, nanostruktur i nanomaterialov [Nanotechnology: Physics-chemistry of nanoparticles, nanostructures and nanomaterials], Librokom Publishing, Moscow, 2019 (in Russian).
28. **Nechaev V. N., Shuba A. V.**, Razmernye efekty v fazovyh perekhodah i fizicheskikh svojstvah ferroikov. [Size effects in phase transitions and physical properties of ferroics], INFRA-M Publishing, Moscow, 2023 (in Russian).
29. **Nechaev V. N., Shuba A. V.**, On anomalous influence of an external electric field on a second-order transition in a thin ferroelectric film, Phys. Solid State. 62 (4) (2020) 653–659.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

СМИРНОВ Михаил Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета технологий и управления имени К. Г. Разумовского, г. Москва, Россия.

109004, Россия, г. Москва, ул. Земляной Вал, 73.
m_u_smirnov@mail.ru
ORCID: 0000-0002-9820-9253

ФИЛИППОВ Владимир Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор Липецкого государственного педагогического университета имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Россия.

398020, Россия, г. Липецк, ул. Ленина, 42
wwfilippow@mail.ru
ORCID: 0000-0003-4323-351X

ЗИЯУТДИНОВ Владимир Сергеевич — кандидат педагогических наук, доцент Московского государственного университета технологий и управления имени К. Г. Разумовского, г. Москва, Россия.

109004, Россия, г. Москва, ул. Земляной Вал, 73.
zevslipetsk@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-5136-837X

БОГОНОСОВ Константин Александрович — кандидат технических наук, доцент Московского государственного университета технологий и управления имени К. Г. Разумовского, г. Москва, Россия.

109004, Россия, г. Москва, ул. Земляной Вал, 73.
k.bogonosov@mgutm.ru
ORCID: 0000-0002-1038-2351

THE AUTHORS

SMIRNOV Mikhail Yu.

Moscow State University of Technology and Management
73 Zemlyanoy Val St., Moscow, 109004, Russia
m_u_smirnov@mail.ru
ORCID: 0000-0002-9820-9253

FILIPPOV Vladimir V.

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky
42 Lenin St., Lipetsk, 398020, Russia
wwfilippow@mail.ru
ORCID: 0000-0003-4323-351X

ZIYAUTDINOV Vladimir S.

Moscow State University of Technology and Management
73 Zemlyanoy Val St., Moscow, 109004, Russia
zevslipetsk@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-5136-837X

BOGONOSOV Konstantin A.

Moscow State University of Technology and Management
73 Zemlyanoy Val St., Moscow, 109004, Russia
k.bogonosov@mgutm.ru
ORCID: 0000-0002-1038-2351

Статья поступила в редакцию 11.04.2023. Одобрена после рецензирования 16.05.2023. Принята 16.05.2023.

Received 11.04.2023. Approved after reviewing 16.05.2023. Accepted 16.05.2023.