

Научная статья

УДК 51-74

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16107>

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ В МЕТОДЕ FDD (ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ)

Е. А. Андрианова ✉, Д. В. Новицкий, В. С. Онищук

АО «ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева», Санкт-Петербург, Россия

✉ elena-andrianova@bk.ru

Аннотация. В статье впервые приводится обоснование главного критерия метода FDD (декомпозиции в частотной области), основанного на сингулярном разложении матрицы взаимных спектральных плотностей (МВСП) измеренных сигналов. Метод FDD используется при динамическом тестировании сооружений (здания, мосты, плотины) для экспериментального определения их динамических характеристик в условиях нормальной эксплуатации без применения вибровозбудительного оборудования. Указанный критерий применяется для поиска собственных частот. Обоснование включало двустороннюю оценку первого сингулярного значения МВСП, которая позволила математически строго доказать применимость критерия при выполнении определенных условий.

Ключевые слова: декомпозиция в частотной области, коэффициент демпфирования, спектральная плотность сигнала

Для цитирования: Андрианова Е. А., Новицкий Д. В., Онищук В. С. Теоретическое обоснование идентификации собственных частот в методе FDD (декомпозиции в частотной области) // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 1. С. 82–96. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16107>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16107>

THEORETICAL JUSTIFICATION OF NATURAL FREQUENCY IDENTIFICATION IN THE FDD (FREQUENCY DOMAIN DECOMPOSITION) METHOD

E. A. Andrianova ✉, D. V. Novitskii, V. S. Onischuk

"B. E. Vedeneev VNIIG" JSC, St. Petersburg, Russia

✉ elena-andrianova@bk.ru

Abstract. This paper is the first to provide a justification for the main criterion of the Frequency Domain Decomposition (FDD) algorithm based on the singular value decomposition of a spectral measured signals' density. The algorithm is used for monitoring the structures such as buildings, bridges, dams, to determine experimentally their state (under operating conditions) without application of vibroexciters. The criterion is used to search for natural frequencies. The justification included the double-ended estimate for the first singular value of the spectral density matrix, the estimate making it possible to prove strictly the criterion's applicability under some fulfilled conditions.

Keywords: frequency domain decomposition, damping coefficient, spectral density matrix, natural mode shape and frequency

For citation: Andrianova E. A., Novitskii D. V., Onischuk V. S., Theoretical justification of natural frequency identification in the FDD (Frequency Domain Decomposition) method, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (1) (2023) 82–96. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16107>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Экспериментальная оценка динамических характеристик уникальных сооружений (собственные частоты, формы собственных колебаний, декременты затухания) играет важную роль в строительной отрасли. Решение этой практической задачи актуально и для гидротехнических сооружений (ГТС), ввиду повышенных требований к безопасности их эксплуатации, особенно в сейсмических районах. Так, сопоставление экспериментальных и расчетных динамических характеристик позволяет проводить тонкую настройку параметров конечно-элементных моделей, применяющихся для расчетного обоснования эксплуатационной надежности ГТС при различных видах динамических нагрузок.

С конца 1980-х годов в мире интенсивно развивается группа методов, позволяющих экспериментально определять динамические характеристики сооружений (здания, мосты, плотины) при нормальных условиях эксплуатации. Данные методы объединены под общим названием «операционный модальный анализ (ОМА)» (*англ.* Operational Modal Analysis (OMA)). В настоящее время они широко используются по всему миру ввиду относительно низкой стоимости и значительного прогресса в развитии измерительного и регистрирующего оборудования. Необходимым условием применения методов ОМА служит близкий к белому шуму характер стационарного случайного эксплуатационного динамического воздействия.

Среди методов группы ОМА широкой популярностью пользуется метод, получивший международное название Frequency Domain Decomposition (FDD) (его дословный перевод – «декомпозиции в частотной области»). Этот метод основан на сингулярном разложении матрицы взаимных спектральных плотностей одновременно выполненных измерений. Он имеет следующие сильные стороны:

- минимальные требования к количеству одновременных измерений;
- наличие формализованных критериев идентификации собственных частот и форм собственных колебаний;
- отсутствие ограничения «пропорционального демпфирования» для математической модели сооружения (формально идентифицированные формы собственных колебаний являются комплексными).

В первой из указанных сильных сторон подразумевается, что теоретически любой, даже очень сложный объект можно обследовать, применяя всего два акселерометра: один стационарный (опорный), а другой мобильный, последовательно перемещаемый по сооружению.

Метод FDD был впервые представлен в 2000 году [1] и в дальнейшем развит в публикациях [2 – 5]. В 2009 году он был теоретически переосмыслен авторами в статье [6]. Некоторые модификации метода [3, 5, 11] позволяют оценивать модальные коэффициенты затухания. Более подробно теоретические основы метода FDD рассмотрены в монографиях [7, 8]. Далее метод продолжали совершенствовать; интересные модификации этого метода предлагаются, например, в работах [11 – 14]. Классический вариант FDD и ряд его последующих модификаций реализованы в программном комплексе ARTeMIS Modal [9], позволяющем решать задачу идентификации динамических характеристик по данным вибрационных обследований.

В России метод FDD и программное обеспечение (ПО) ARTeMIS Modal с 2019 года применяют ученые Всероссийского научно-исследовательского института гидротехники (ВНИИГ) им. Б. Е. Веденеева (г. Санкт-Петербург, Россия). К настоящему времени по результатам вибрационных обследований определены динамические характеристики

плотины Бурейской ГЭС; плотины, силовой конструкции и перекрытий здания Саяно-Шушенской ГЭС; некоторых гидротехнических сооружений (ГТС) Нижне-Бурейской ГЭС, плотины Зейской ГЭС.

Метод FDD успешно работает как в модельных численных экспериментах, так и в практических задачах разного уровня сложности. Однако в литературе отсутствует строгое обоснование критерия идентификации собственных частот, равно как и теоретические оценки области возможного применения метода.

Последнее обстоятельство имеет особую важность для ГТС, поскольку использование для них методов ОМА (и, в частности, FDD) бывает затруднено тем, что динамические нагрузки обусловлены не совокупностью большого числа случайных техногенных факторов или микросейсмами (как, например, для общественных зданий), а целенаправленным регулированием режимов эксплуатации сооружений, например, мощности работающих гидроагрегатов.

Цель настоящей работы – теоретически обосновать основной критерий метода FDD для определения частот собственных колебаний объекта.

В связи с данной целью, авторами была построена двусторонняя оценка первого сингулярного значения матрицы взаимных спектральных плотностей вибрационных сигналов.

Краткое описание основной идеи метода FDD

Для определения динамических характеристик сооружения рассмотрим уравнение движения его материальных точек:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – нагрузки, $\mathbf{y}(t)$ – отклик (N -мерные векторы); \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} – матрицы масс, демпфирования и жесткости, соответственно.

В книгах [7, 15] показано, что матрицы \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} – симметричные и вещественные; они являются матричными константами, т. е. не зависят от времени. Их размерность определяется числом степеней свободы N и равна $N \times N$. Отметим также, что матрица \mathbf{M} является положительно определенной, а \mathbf{C} и \mathbf{K} – положительно полуопределенными [7, 15].

Уравнение (1) в однородном виде описывает свободные колебания системы. По его нетривиальному решению можно определить собственные частоты демпфированной системы ω_{di} и в общем случае комплексные формы собственных колебаний $\boldsymbol{\varphi}_i$ (модальные векторы).

Ввиду линейной независимости собственных форм колебаний, отклик $\mathbf{y}(t)$ системы раскладывается в их линейную комбинацию единственным образом:

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot q_1(t) + \boldsymbol{\varphi}_2 \cdot q_2(t) + \dots = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t), \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\Phi}$ – матрица, столбцы которой являются формами собственных колебаний $\boldsymbol{\varphi}_i$, т. е. $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots]$; $\mathbf{q}(t)$ – вектор-столбец модальных координат; t – время.

В инженерной практике, в качестве начального приближения при идентификации динамических характеристик, многие годы использовался подход, называемый базовой частотной моделью (в книгах [7, 8] он назван Basic Frequency Domain). Основная идея этого подхода заключается в том, что при малом затухании в окрестности некоторой собственной частоты с номером s отклик системы определяется преимущественно собственной формой с тем же номером.

Тогда отклик $\mathbf{y}(t)$ системы (см. формулу (2)) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{y}(t) \approx \boldsymbol{\varphi}_s q_s(t). \quad (3)$$

Корреляционная функция $\mathbf{R}(\tau)$ (это матричная функция) для стационарного процесса, по определению, имеет вид

$$\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{E} [\mathbf{y}(t) \cdot \mathbf{y}^T(t + \tau)] = \boldsymbol{\varphi}_s \mathbf{E} [q_s(t) \cdot q_s(t + \tau)] \boldsymbol{\varphi}_s^T = R_q(\tau) \boldsymbol{\varphi}_s \boldsymbol{\varphi}_s^T, \quad (4)$$

где $R_q(\tau)$ – автокорреляционная функция модальной координаты, неотрицательная по определению.

Выполнив преобразование Фурье корреляционной функции $\mathbf{R}(\tau)$, получим интересное нас выражение МВСП компонент вектора отклика $\mathbf{G}_y(\omega)$, зависящее от форм колебаний:

$$\mathbf{G}_y(\omega) = G_q(\omega) \boldsymbol{\varphi}_s \boldsymbol{\varphi}_s^T \quad (5)$$

где ω – круговая частота.

Ранг матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$ равен единице (так как ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей), поэтому матрица имеет не более одного собственного значения, отличного от нуля. Также легко заметить, учитывая выражение (5), что любая строка или столбец матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$ пропорциональны вектору собственной формы $\boldsymbol{\varphi}_s$.

Найдем собственные значения и векторы, исходя из их определения:

$$\mathbf{G}_y(\omega)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad (6)$$

$$G_q(\omega)\boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{u} = G_q(\omega)\boldsymbol{\varphi}_k (\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{u}) = G_q(\omega)(\boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{u})\boldsymbol{\varphi}_k = \lambda\mathbf{u}. \quad (7)$$

Из равенств (7) следует, что собственный вектор равен модальному вектору $\boldsymbol{\varphi}_k$, а собственное значение имеет следующий вид:

$$\lambda = G_q(\omega)(\boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k) = G_q(\omega)\|\boldsymbol{\varphi}_k\|^2. \quad (8)$$

Матрица $\mathbf{G}_y(\omega)$, заданная по формуле (5), очевидно симметричная и, поскольку ее единственное, отличное от нуля собственное значение положительно, можно также утверждать, что она положительно полуопределенная. У такой матрицы сингулярные значения совпадают с ее собственными, а левые и правые сингулярные векторы – одинаковые.

Матрица $\mathbf{G}_y \mathbf{G}_y^T$ с точностью до коэффициента совпадает с \mathbf{G}_y . Действительно:

$$\mathbf{G}_y \mathbf{G}_y^T = \boldsymbol{\varphi}_s \boldsymbol{\varphi}_s^T \boldsymbol{\varphi}_s \boldsymbol{\varphi}_s^T = \|\boldsymbol{\varphi}_s\|^2 \boldsymbol{\varphi}_s \boldsymbol{\varphi}_s^T = \|\boldsymbol{\varphi}_s\|^2 \mathbf{G}_y. \quad (9)$$

Из определения SVD-разложения следует, что сингулярные векторы матрицы \mathbf{G}_y совпадают с собственными векторами матрицы $\mathbf{G}_y \mathbf{G}_y^T$. Поэтому первый сингулярный вектор (он соответствует максимальному, а в нашем случае – единственному, отличному от нуля собственному значению) является оценкой собственной формы (моды) колебаний $\boldsymbol{\varphi}_s$.

К сожалению, представить отклик $\mathbf{y}(t)$ в виде (3), т. е. пренебречь влиянием других собственных форм, можно не всегда. В работе [7] показано, что при использовании этого метода невозможно идентифицировать близкие по значению собственные частоты и соответствующие им формы собственных колебаний даже для систем с низким демпфированием. Чтобы получить такую возможность и вдобавок снизить влияние случайных шумов, неизбежно возникающих при измерениях, были разработаны более точные методы, одним из которых стал FDD.

Дадим краткое описание основной идеи метода FDD, следуя работе [7].

Пусть отклик $\mathbf{y}(t)$ является линейной композицией всех модальных векторов по формуле (2). Вычислим корреляционную функцию

$$\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{E}[\mathbf{y}(t) \cdot \mathbf{y}^T(t + \tau)], \quad (10)$$

тогда

$$\mathbf{R}(\tau) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}[\mathbf{q}(t)] \cdot \mathbf{q}^T(t + \tau) \boldsymbol{\Phi}^T = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{R}_q \boldsymbol{\Phi}^T. \quad (11)$$

Преобразование Фурье корреляционной функции $\mathbf{R}(\tau)$ дает выражение для матрицы взаимных спектральных плотностей $\mathbf{G}_y(\omega)$:

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{G}_q(\omega) \boldsymbol{\Phi}^T. \quad (12)$$

Из предположения об отсутствии корреляции модальных координат $\mathbf{q}(t)$ [7] следует, что матрица $\mathbf{G}_q(\omega)$ диагональная. Поскольку матрица $\boldsymbol{\Phi}^T$ имеет комплексные элементы, ее транспонирование $\boldsymbol{\Phi}^T$ следует заменить эрмитовым сопряжением $\boldsymbol{\Phi}^H$.

Тогда выражение (12) примет следующий вид:

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \mathbf{\Phi}[\mathbf{g}_n^2(\omega)] \mathbf{\Phi}^H, \quad (13)$$

где диагональная матрица $[\mathbf{g}_n^2(\omega)]$ содержит автоспектральные плотности матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$.

Основная идея метода FDD основана на применении следующего сингулярного разложения матрицы:

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}[\mathbf{s}_n^2(\omega)]\mathbf{U}^H, \quad (14)$$

где \mathbf{S} – диагональная матрица сингулярных чисел, расположенных в порядке убывания; \mathbf{U} – матрица, состоящая из левых (правых) сингулярных векторов.

Левые и правые сингулярные векторы матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$ одинаковы вследствие того, что эта матрица самосопряженная и положительно определенная [18].

Сравнивая выражения (13) и (14), видим, что если бы собственные векторы, составляющие матрицу $\mathbf{\Phi}$, были взаимно ортогональны, то желаемые модальные формы с точностью до коэффициента были бы сингулярными векторами матрицы взаимных спектральных плотностей на произвольной частоте. Поскольку это условие не выполняется, можно рассчитывать только на приближенное решение задачи нахождения модальных векторов и частот.

Как показано в работе [7], если внешнее воздействие считать белым шумом, а диссипацию – малой, то для матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$ справедливо следующее выражение:

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \sum_{m=1}^M \frac{c_m \mathbf{\Phi}_m \mathbf{\Phi}_m^H}{i\omega - \lambda_m} + \frac{c_m \mathbf{\Phi}_m \mathbf{\Phi}_m^H}{-i\omega - \lambda_m^*} = \mathbf{\Phi} \cdot \text{diag} \left(2 \text{Re} \left(\frac{c_m}{i\omega - \lambda_m} \right) \right) \cdot \mathbf{\Phi}^H, \quad (15)$$

где $\lambda_m = -\gamma_m + i\omega_{dm}$ (γ_m – коэффициент диссипации, ω_{dm} – собственная частота с учетом демпфирования); $\mathbf{\Phi}_m$ – форма собственных колебаний; $\mathbf{\Phi}$ – матрица, в столбцах которой стоят векторы собственных форм $\mathbf{\Phi} = [\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \dots, \mathbf{\Phi}_M]$; c_m – положительный коэффициент; M – количество учтенных форм в разложении (2).

Введем обозначение

$$\alpha_m(\omega) = 2 \text{Re} \left(\frac{c_m}{i\omega - \lambda_m} \right) = \frac{c_m \gamma_m}{(\omega - \omega_{dm})^2 + \gamma_m^2}. \quad (16)$$

Тогда выражение (15) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \mathbf{\Phi} \cdot \text{diag} (\alpha_m(\omega)) \cdot \mathbf{\Phi}^H, \quad (17)$$

или

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \sum_{m=1}^M \alpha_m \mathbf{\Phi}_m \mathbf{\Phi}_m^H. \quad (18)$$

Для случая, когда значения собственных частот не близки между собой, авторы метода FDD предложили алгоритм, основанный на представлении матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$ в виде (17), который можно кратко сформулировать следующим образом.

Шаг 1. Для каждой частоты ω заданного диапазона вычисляется матрица взаимных спектральных плотностей $\mathbf{G}_y(\omega)$ ¹.

Шаг 2. На каждой частоте ω производится сингулярное разложение матрицы (англ. Singular Value Decomposition (SVD)) $\mathbf{G}_y(\omega)$, определяется ее первое сингулярное значение $\sigma_1(\omega)$ и строится функция первого сингулярного значения $\sigma_1(\omega)$ от частоты ω .

Шаг 3. Находятся значения частот ω_m , которые соответствуют локальным максимумам функции $\sigma_1(\omega)$.

Шаг 4. Если в окрестности частоты $\tilde{\omega}_m$ сингулярные разложения порождают первые сингулярные векторы, близкие к коллинеарным (что проверяется использованием

¹ Вообще говоря, вычисляются только те элементы матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$, которые можно получить по сигналам, измеренным одновременно. Описанный ниже алгоритм можно применить к полной матрице $\mathbf{G}_y(\omega)$, но на практике используются матрицы, которые выбираются из матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$ определенным образом.

МАС-оценки²), то частота $\tilde{\omega}_m$ может считаться собственной, а первый сингулярный вектор $\mathbf{u}_1(\omega_m)$ будет оценкой формы собственных колебаний.

Таким образом, основная идея (далее будем называть ее критерием) алгоритма FDD заключается в том, что, будучи функцией частоты, первое сингулярное число матрицы $\mathbf{G}_y(\omega_m)$ имеет локальные максимумы вблизи модальных частот.

Этот факт подтверждается решениями модельных задач и множеством расчетов, выполненных по виброизмерениям реальных объектов.

На рис. 1 приведен скриншот из программы ARTeMIS Modal – графики зависимостей первых шести сингулярных чисел от частоты (в логарифмических единицах для большей наглядности) по результатам динамического тестирования плотины Саяно-Шушенской ГЭС, выполненного авторами этой статьи в 2022 году.

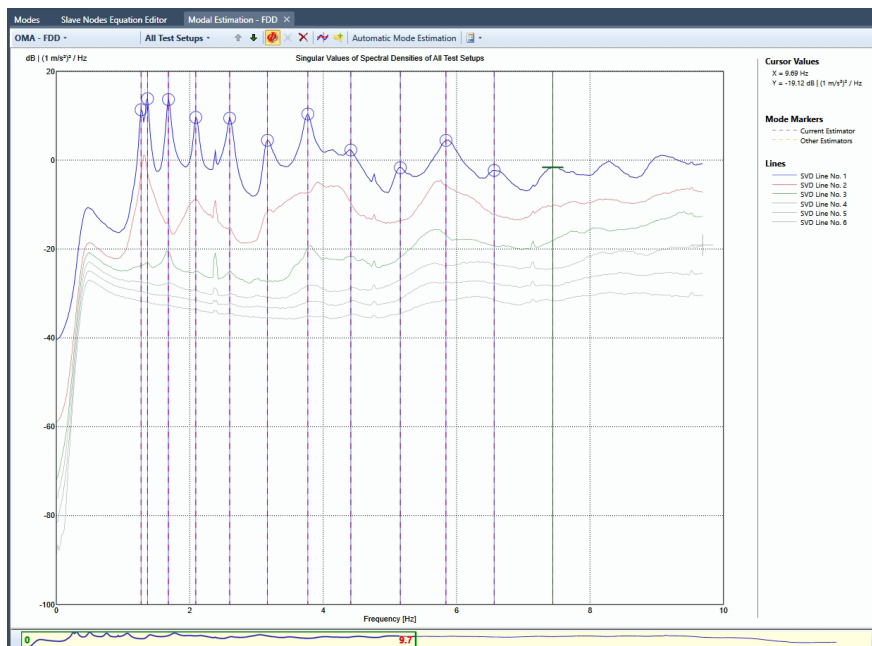


Рис. 1. Усредненные частотные зависимости шести сингулярных значений (6 кривых) матрицы спектральных плотностей:

верхняя кривая (синего цвета) относится к первому сингулярному числу $\sigma_1(\omega)$; аргументам локальных максимумов $\sigma_1(\omega)$ (выделены круглыми маркерами) соответствуют собственные частоты плотины.

Данные получены по измерениям на плотине Саяно-Шушенской ГЭС в 2022 г.

Следует еще раз подчеркнуть, что одной из основных целей динамического тестирования является определение (и как можно более точное) значений частот собственных колебаний сооружений. Графики на рис. 1 демонстрируют, что метод позволяет идентифицировать 11 низших собственных частот плотины Саяно-Шушенской ГЭС. Программа ARTeMIS Modal предусматривает специальную процедуру для исключения гармонических составляющих из процесса идентификации собственных частот.

Необоснованность критерия метода FDD

Несмотря на успешное использование метода FDD в инженерной практике, математическое обоснование критерия до настоящего времени так и не выполнено. Другими словами, в публикациях, посвященных методу FDD, не приводятся доказательства того, что в окрестностях частот собственных колебаний функция $\sigma_1(\omega)$ имеет локальные максимумы.

² МАС – Modal Assurance Criterion, переводится дословно как «критерий модальной уверенности».

Вводится для сравнения двух форм (мод) колебаний \mathbf{a} и \mathbf{b} по формуле
$$\text{MAC}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{|\mathbf{a}^H \mathbf{b}|^2}{(\mathbf{a}^H \mathbf{a})(\mathbf{b}^H \mathbf{b})}.$$

Аналитического выражения первого сингулярного числа для квадратных матриц произвольной размерности не существует. Но, как уже было отмечено выше, матрицу взаимных спектральных плотностей можно представить в виде (17) и ее структура позволяет получать необходимые оценки.

Коэффициенты $\alpha_m(\omega)$ представляют для нас особый интерес, так как из формулы (16) следует, что они не только зависят от соответствующих собственных частот и коэффициентов демпфирования, но еще и достигают на собственных частотах своих максимальных значений.

Действительно, в результате определения экстремальных значений функции $\alpha_m(\omega)$ получим, что при $\omega = \omega_{di}$

$$\alpha_i(\omega_{di}) = \frac{c_i}{\gamma_i}. \quad (19)$$

На рис. 2 показан пример графиков функций $\alpha_j(\omega)$ для системы с тремя степенями свободы при небольших коэффициентах демпфирования.

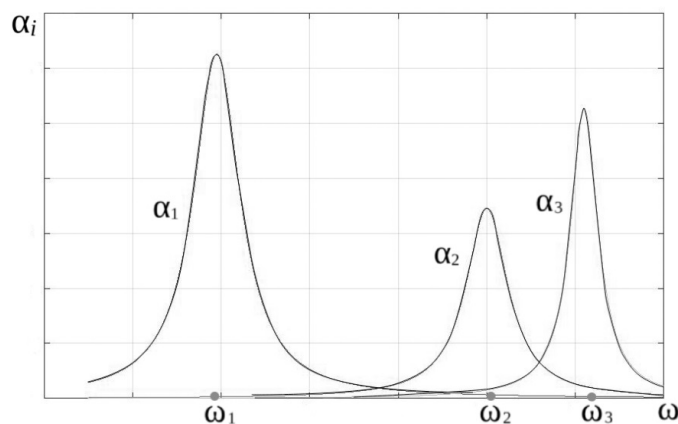


Рис. 2. Функции $\alpha_j(\omega)$ для системы с тремя степенями свободы

Покажем на примере простейшей системы с тремя степенями свободы, как значения коэффициентов демпфирования и расстояния между собственными частотами влияют на результат.

Пример простейшей системы с тремя степенями свободы. Рассмотрим три случая. Зададим формы собственных колебаний, коэффициенты диссипации и собственные частоты следующим образом.

Случай 1. Матрица модальных (собственных) векторов

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

значения коэффициентов демпфирования следующие:

$$\gamma_1 = 16, \gamma_2 = \gamma_3 = 18,$$

а значения собственных частот составляют

$$\omega_{d1} = 29,5, \omega_{d2} = 52,0, \omega_{d3} = 71,0.$$

Случай 2. Отличается от случая 1 только значением второй собственной частоты, которая составляет $\omega_{d2} = 63,0$.

Случай 3. Отличается от случая 2 значениями коэффициентов диссипации: $\gamma_2 = \gamma_3 = 9$.

По формуле (17) построим (с некоторым шагом) матрицы взаимных спектральных плотностей $G_y(\omega)$ и, произведя сингулярное разложение этих матриц, для каждого из случаев построим графики функций первого сингулярного числа от круговой частоты. Для всех трех случаев приведем также графики функций $\alpha_m(\omega)$ (рис. 3). Видно, что в случае 1

максимумы функции первого сингулярного числа соответствуют собственным частотам, в случае 2 функция $\sigma_1(\omega)$ имеет только два экстремума, а в случае 3, где по сравнению с предыдущим уменьшаются коэффициенты демпфирования, снова определяются все собственные частоты.

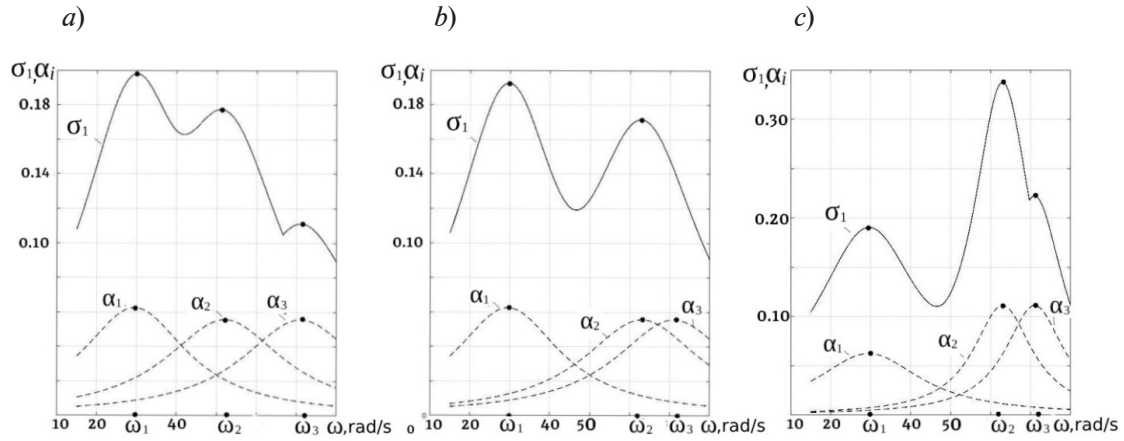


Рис. 3. Функции первого сингулярного значения $\sigma_1(\omega)$ и $\alpha_i(\omega)$ (сплошные и пунктирные линии соответственно) для случаев 1 (a), 2 (b) и 3 (c)

Таким образом, некоторая вариация значений параметров может приводить к качественно другому результату. На графиках хорошо видно поведение кривых, соответствующих коэффициентам $\alpha_i(\omega)$. Эти функции показывают, что имеет значение не только расстояние между модами, но и коэффициенты демпфирования, от которых зависит острота пиков функций $\alpha_i(\omega)$.

Построение двусторонней оценки для $\sigma_1(\omega)$

Введем некоторое дополнительное обозначение:

$$\mathbf{A}^2 = \text{diag}(\alpha_m). \quad (20)$$

Поскольку коэффициенты $c_m > 0$ и $\gamma_m > 0$ [7] в выражении (16), диагональная матрица \mathbf{A}^2 состоит из вещественных положительных элементов.

Матрицу \mathbf{A} определим следующим образом:

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\sqrt{\alpha_m(\omega)}). \quad (21)$$

Выражение (17) можно записать в виде

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \mathbf{\Phi} \mathbf{A}^2 \mathbf{\Phi}^H. \quad (22)$$

Матрица $\mathbf{G}_y(\omega)$ эрмитова (самосопряженная), поскольку

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \mathbf{G}_y^H(\omega).$$

Модальные векторы $\mathbf{\Phi}_m$ можно считать нормированными, так как коэффициент α_m , согласно выражению (16), содержит константу c_m , в которую можно ввести нормировочный коэффициент.

Далее, для простоты записи будем опускать написание аргумента ω у функций, от него зависящих, т. е. будем писать \mathbf{G}_y вместо $\mathbf{G}_y(\omega)$, α_m вместо $\alpha_m(\omega)$ и т. д.

Запишем матрицу \mathbf{G}_y в координатной форме:

$$\mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^M \alpha_m (\varphi_m^{(1)})^2 & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(2)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(N)} \\ \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(2)} \varphi_m^{(1)} & \sum_{m=1}^M \alpha_m (\varphi_m^{(2)})^2 & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(2)} \varphi_m^{(N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(N)} \varphi_m^{(1)} & \sum_{m=1}^M \alpha_m \varphi_m^{(N)} \varphi_m^{(2)} & \dots & \sum_{m=1}^M \alpha_m (\varphi_m^{(N)})^2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Первое сингулярное значение данной матрицы совпадает с ее спектральным радиусом (это утверждение будет доказано ниже). Но структура этой матрицы достаточно сложна для получения оценок спектрального радиуса, так как ее элементы содержат отдельные компоненты модальных векторов.

Покажем, что посредством некоторой операции данная матрица приводится к «более простому» виду с сохранением спектра.

Рассмотрим следующую матрицу:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{A}\Phi^H)(\Phi\mathbf{A}) \quad (24)$$

и покажем, что матрицы \mathbf{G}_y и \mathbf{K} имеют одни и те же отличные от нуля собственные числа.

Для этого докажем следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение. Пусть \mathbf{U} и \mathbf{V} – некоторые прямоугольные матрицы размерности $n \times m$. Тогда ненулевые собственные числа матриц $\mathbf{U}\mathbf{V}^H$ и $\mathbf{V}^H\mathbf{U}$ совпадают.

Доказательство. Пусть некоторое ненулевое число λ является собственным значением матрицы $\mathbf{U}\mathbf{V}^H$, т. е. существует ненулевой вектор \mathbf{u} , такой что

$$(\mathbf{U}\mathbf{V}^H)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \quad (25)$$

Умножим обе части (25) на \mathbf{V}^H слева и, используя свойство ассоциативности матричного умножения, получаем равенство:

$$\mathbf{V}^H\mathbf{U}(\mathbf{V}^H\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{V}^H\mathbf{u}). \quad (26)$$

Поскольку число λ отлично от нуля и вектор \mathbf{u} – ненулевой, то и вектор $\mathbf{V}^H\mathbf{u}$ – ненулевой (это видно, если умножить равенство (26) скалярно само на себя), а значит, число λ оказывается также и собственным числом матрицы $\mathbf{V}^H\mathbf{U}$ (по определению собственного числа и вектора).

Утверждение доказано.

Если положить, что

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \Phi\mathbf{A}, \quad (27)$$

то, поскольку справедливо равенство

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \Phi\mathbf{A}^2\Phi^H = (\Phi\mathbf{A})(\mathbf{A}\Phi^H), \quad (28)$$

из доказанного выше утверждения следует, что матрицы

$$\mathbf{G}_y(\omega) = (\Phi\mathbf{A})(\mathbf{A}\Phi^H) \text{ и } \mathbf{K} = (\mathbf{A}\Phi^H)(\Phi\mathbf{A})$$

имеют одни и те же собственные числа, отличные от нуля.

Матрицу \mathbf{K} , в силу сочетательного закона, можно представить как

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}(\Phi^H\Phi)\mathbf{A}. \quad (29)$$

В координатной форме она будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \sqrt{\alpha_1\alpha_2}(\varphi_1, \varphi_2) & \dots & \sqrt{\alpha_1\alpha_M}(\varphi_1, \varphi_M) \\ \sqrt{\alpha_1\alpha_2}(\varphi_2, \varphi_1) & \alpha_2 & \dots & \sqrt{\alpha_2\alpha_M}(\varphi_2, \varphi_M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\alpha_1\alpha_M}(\varphi_M, \varphi_1) & \sqrt{\alpha_2\alpha_M}(\varphi_M, \varphi_2) & \dots & \alpha_M \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Матрица \mathbf{K} , составленная из скалярных произведений системы векторов $\sqrt{\alpha_i} \boldsymbol{\varphi}_i$, с учетом того, что $\|\boldsymbol{\varphi}_i\| = 1$, представляет собой матрицу Грама [17], которая, как известно, – эрмитова. Поскольку матрица \mathbf{K} построена относительно модальных векторов, а модальные векторы линейно независимы, то она оказывается строго положительно-определенной.

Отсюда можно сделать вывод об идентичности сингулярных чисел собственным и, следовательно, равенстве первого сингулярного числа спектральному радиусу матрицы \mathbf{K} .

По доказанному выше, матрицы \mathbf{G}_y (размерность $N \times N$) и \mathbf{K} (размерность $M \times M$) имеют одни и те же собственные числа, отличные от нуля; но, поскольку размерности матриц различаются, матрица \mathbf{G}_y может иметь еще и нулевые собственные числа в случае, когда $N > M$. Поэтому она положительно полуопределенная. Из положительной полуопределенности и самосопряженности матрицы \mathbf{G}_y вытекает идентичность сингулярных чисел собственным и, следовательно, как и в случае матрицы \mathbf{K} , равенство первого сингулярного числа спектральному радиусу.

Согласно теореме об оценках сингулярных чисел [17], первое сингулярное значение эрмитовой матрицы \mathbf{P} не может быть меньше модуля ее максимального диагонального элемента:

$$\sigma_1 \geq \max_{1 \leq i \leq M} |\mathbf{P}_{ii}|, \quad (31)$$

где σ_1 – первое сингулярное число.

Отсюда получаем нижнюю оценку первого сингулярного значения $\sigma_1(\omega)$ матрицы \mathbf{K} , а следовательно, и матрицы \mathbf{G}_y :

$$\sigma_1 \geq \max_{1 \leq i \leq M} \alpha_i. \quad (32)$$

Чтобы получить верхнюю оценку первого сингулярного значения $\sigma_1(\omega)$ матрицы \mathbf{G}_y , рассмотрим матрицу $\mathbf{T} = (\boldsymbol{\Phi}^H \boldsymbol{\Phi}) \mathbf{A}^2$ и покажем, что спектр этой матрицы совпадает со спектром матрицы \mathbf{K} , и, следовательно, ненулевые собственные значения матриц \mathbf{T} и $\mathbf{G}_y(\omega)$ также совпадают.

Введем следующее обозначение:

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\Phi}^H \boldsymbol{\Phi}. \quad (33)$$

Тогда матрицу \mathbf{K} можно записать как

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{A}, \quad (34)$$

а матрицу \mathbf{T} как

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} \mathbf{A}^2. \quad (35)$$

Пусть теперь λ – собственное значение, а \mathbf{u} – соответствующий собственный вектор матрицы \mathbf{K} , т. е. $\mathbf{K} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$, и тогда

$$(\mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{A}) \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}. \quad (36)$$

Умножив равенство (32) слева на \mathbf{A}^{-1} , получим:

$$\mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}. \quad (37)$$

И далее следуют равенства вида

$$\mathbf{C} \mathbf{A} (\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}) \mathbf{u} = \mathbf{C} \mathbf{A}^2 (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}) = \mathbf{T} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}. \quad (38)$$

Таким образом, собственные числа матрицы $\mathbf{T} = \mathbf{C} \mathbf{A}^2$ совпадают с собственными числами матрицы $\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{A}$.

Распишем матрицу \mathbf{T} в координатной форме:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) \dots & \alpha_M(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_M) \\ \alpha_1(\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\varphi}_1) & \alpha_2 & \dots & \alpha_M(\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\varphi}_M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1(\boldsymbol{\varphi}_M, \boldsymbol{\varphi}_1) & \alpha_2(\boldsymbol{\varphi}_M, \boldsymbol{\varphi}_2) \dots & \dots & \alpha_M \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Поскольку спектр матриц \mathbf{T} совпадает со спектром \mathbf{K} , все собственные значения положительны, поэтому матрица – положительно-определенная.

В конечномерных пространствах справедливо следующее соотношение между нормами [18]:

$$\rho(\mathbf{T}) \leq \|\mathbf{T}\|_\infty, \quad (40)$$

где $\rho(\mathbf{T})$ – спектральный радиус (максимальное собственное значение) матрицы \mathbf{T} ; $\|\mathbf{T}\|_\infty$ – матричная норма, имеющая вид

$$\|\mathbf{T}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq M} \sum_{j=1}^M |\mathbf{T}_{ij}|. \quad (41)$$

Из выражений (39) – (41) вытекает следующая оценка спектрального радиуса матрицы \mathbf{T} :

$$\rho \leq \max_{1 \leq i \leq M} \sum_{j=1}^M \alpha_j |(\varphi_i, \varphi_j)|. \quad (42)$$

Как было показано выше, ненулевые собственные значения матриц \mathbf{G}_y и \mathbf{T} совпадают, а у матрицы \mathbf{G}_y ее первое сингулярное число совпадает со спектральным радиусом. Следовательно, верхняя оценка первого сингулярного значения $\sigma_1(\omega)$ матрицы \mathbf{G}_y также определяется выражением (38):

$$\sigma_1 \leq \max_{1 \leq i \leq M} \sum_{j=1}^M \alpha_j |(\varphi_i, \varphi_j)|. \quad (43)$$

Поскольку векторы φ_i – нормированные, скалярное произведение (φ_i, φ_j) представляет собой «косинус угла» между векторами φ_i и φ_j , т. е. $|(\varphi_i, \varphi_j)| \leq 1$ и справедлива следующая запись:

$$\sigma_1 \leq \max_{1 \leq i \leq M} \sum_{j=1}^M \alpha_j |(\varphi_i, \varphi_j)| \leq \sum_{k=1}^M \alpha_k = \text{Tr}(\mathbf{G}_y). \quad (44)$$

Объединив нижнюю (32) и верхнюю (44) оценки, запишем двустороннюю оценку первого сингулярного значения $\sigma_1(\omega)$ матрицы \mathbf{G}_y :

$$\max_{1 \leq i \leq M} \alpha_i \leq \sigma_1 \leq \max_{1 \leq i \leq M} \sum_{j=1}^M \alpha_j |(\varphi_i, \varphi_j)| \leq \sum_{k=1}^M \alpha_k = \text{Tr}(\mathbf{G}_y). \quad (45)$$

Если модальные векторы взаимно ортогональны, то из (45) последует такая оценка $\sigma_1(\omega)$:

$$\max_{1 \leq i \leq M} \alpha_i \leq \sigma_1(\omega) \leq \max_{1 \leq i \leq M} \alpha_i. \quad (46)$$

Это, очевидно, означает, что

$$\sigma_1(\omega) = \max_{1 \leq i \leq M} \alpha_i. \quad (47)$$

Важно, что эти оценки справедливы для рассматриваемых функций $\sigma_1(\omega)$, $\alpha_m(\omega)$ и $\text{Tr}(\mathbf{G}_y(\omega))$ на всех частотах, а не только в окрестностях собственных частот.

Введем обозначение

$$d_i = \min_{j \neq i} |\omega_{di} - \omega_{dj}|. \quad (48)$$

Тогда для частоты ω_{di} , при всех $j \neq i$, выполняются следующие соотношения:

$$\alpha_j(\omega_{di}) \leq \frac{c_j \gamma_j}{d_i^2 + \gamma_j^2} = \frac{c_j / \gamma_j}{(d_i / \gamma_j)^2 + 1}. \quad (49)$$

Сравним соотношения (49) с формулой $\alpha_i(\omega_{di}) = c_i / \gamma_i$. Из этого сопоставления видим, что если $d_i / \gamma_j \gg 1$ для всех $j = 1, 2, \dots, M$, то

$$\alpha_i(\omega_{di}) \gg \alpha_j(\omega_{di}), \quad (50)$$

и поэтому, если выполнено условие (50), то обе функции $\max_{1 \leq i \leq M} \sum_{j=1}^M \alpha_j |(\varphi_i, \varphi_j)|$ и $\text{Tr}(\mathbf{G}_y)$

приближаются к функции $\max_{1 \leq i \leq M} \alpha_j$ и, следовательно, мы можем утверждать, что $\sigma_1(\omega)$ – функция первого сингулярного числа SVD-разложения матрицы $\mathbf{G}_y(\omega)$ – при выполнении условия (50) также будет приближаться к этой функции, и, как следствие, ее максимумы будут находиться вблизи модальных частот.

Но значения функции $\max_{1 \leq i \leq M} \sum_{j=1}^M \alpha_j |(\varphi_i, \varphi_j)|$ на любой из частот, очевидно, гораздо ближе к функции $\max_{1 \leq i \leq M} \alpha_j$, чем к функции $\sum_{k=1}^M \alpha_k = \text{Tr}(\mathbf{G}_y)$, ввиду того, что $|(\varphi_i, \varphi_j)| < 1$.

В качестве иллюстрации этого утверждения, на примере системы с тремя степенями свободы показаны графики функции $\sigma_1(\omega)$ и функций нижней и верхних оценок (45) (рис. 4).

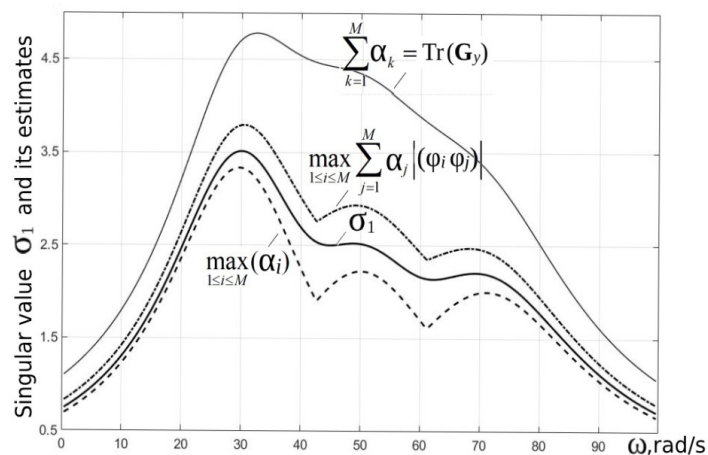


Рис. 4. Сопоставление первого сингулярного значения матрицы спектральных плотностей $\sigma_1(\omega)$ с его нижней и верхними оценками по формуле (45) как функциями частоты ω

Заключение

В настоящей работе впервые дана двусторонняя оценка первого сингулярного значения матрицы взаимных спектральных плотностей вибрационных откликов линейной механической системы с многими степенями свободы. Эта оценка служит обоснованием основного критерия метода декомпозиции в частотной области (FDD) для поиска частот собственных колебаний по результатам вибрационных измерений.

Проведенное исследование можно использовать для дальнейшего развития метода FDD, анализа пределов его применимости для механических систем со значительным демпфированием и сопоставления метода FDD с другими методами операционного модального анализа (OMA) при идентификации динамических характеристик сооружений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brincker R., Zhang L., Andersen P.** Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition // Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference (IMAC 18). San Antonio, Texas, USA, February 7–10, 2000. Pp. 625–630.
2. **Brincker R., Zhang L., Andersen P.** Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition // Smart Materials and Structures. 2001. Vol. 10. No. 3. Pp. 441–445.
3. **Brincker R., Ventura C. E., Andersen P.** Damping estimation by frequency domain decomposition // Proceedings of the 19th International Modal Analysis Conference (IMAC 19), Kissimmee, Florida, USA. February 5–8, 2001. Pp. 698–703.
4. **Brincker R., Andersen P., Jacobsen N-J.** Automated frequency domain decomposition for

operational modal analysis // Proceedings of the 25th International Modal Analysis Conference 2007 (IMAC XXIV). In 5 Vols. Vol. 1. Orlando, Florida, USA, February 19–22, 2007. Pp. 275–277.

5. **Zhang L., Tamura Y.** Damping estimation of engineering structures with ambient response measurements // Proceedings of the 21st International Modal Analysis Conference & Exposition (IMAC XXI) “A Conference & Exposition on Structural Dynamics”. In 3 Vols. Vol. 1. Kissimmee, Florida, USA, February 3–6, 2003. Pp. 1023–1029.

6. **Brincker R., Zhang L.** Frequency domain decomposition revisited // Proceedings of the 3rd International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC), Portonovo (Ancona), Italy. May 4–6, 2009. Vol. 1. Pp. 615–626.

7. **Brincker R., Ventura C.** Introduction to Operational Modal Analysis. Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley and Sons, Ltd., 2015. 360 p.

8. **Rainieri C., Fabbrocino G.** Operational Modal Analysis of civil engineering structures: An introduction and guide for applications. New York: Springer, 2014. 322 p.

9. ARTeMIS Modal. Software for operational modal analysis and experimental modal analysis. Пе-жим доступа: <http://www.svibs.com/>. Дата последнего обращения: 20.01.2023.

10. **Chopra A. K.** Dynamics of structures – theory and applications to earthquake engineering. 4th edition. Hoboken, New Jersey, USA: Prentice Hall, 2012. 212 p.

11. **Amador S., Juul M., Friis T., Brincker R.** Application of Frequency Domain Decomposition Identification technique to half spectral densities // Topics in Modal Analysis & Testing. Vol. 9. Conf. Proc. of the Soc. for Experimental Mechanics. Edited by M. Mains, B. J. Dilworth. Chapter 39. The Society for Experimental Mechanics, Inc. New York: Springer, Cham, 2019. Pp. 343–346.

12. **Hasan M. D. A., Ahmad Z. A. B., Leong M. S., Hee L. M.** Enhanced frequency domain decomposition algorithm: A review of a recent development for unbiased damping ratio estimates // Journal of Vibroengineering. 2018. Vol. 20. No. 5. Pp. 1919–1936.

13. **Lang G. F.** Matrix madness and complex confusion. Review of complex modes from multiple viewpoints // Sound & Vibrations. 2012. November – Structural Analysis. Pp. 8–12.

14. **Tarpo P., Olsen P., Amador S., Juul M., Brincker R.** On minimizing the influence of the noise tail of correlation functions in operational modal analysis // Procedia Engineering. 2017. Vol. 199. Pp. 1038–1043.

15. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Линейная алгебра. 6-е изд., стер. М.: Физматлит, 2007. С. 111.

16. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.

17. **Карчевский Е. М., Карчевский М. М.** Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии. 2-е изд. СПб.: Изд-во «Лань», 2018. 424 с.

18. **Фомин В. И.** О нижних линейных оценках спектрального радиуса нормальной матрицы // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2001. Т. 6. № 2. С. 145–146.

REFERENCES

1. **Brincker R., Zhang L., Andersen P.** Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition, In: Proc. 18th Int. Modal Analysis Conf. (IMAC 18), San Antonio, Texas, USA, Febr. 7–10 (2000) 625–630.

2. **Brincker R., Zhang L., Andersen P.** Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition, Smart Mater. Struct. 10 (3) (2001) 441–445.

3. **Brincker R., Ventura C. E., Andersen P.** Damping estimation by frequency domain decomposition, In: Proc. 19th Int. Modal Analysis Conf. (IMAC 19), Kissimmee, Florida, USA, Febr. 5–8 (2001) 698–703.

4. **Brincker R., Andersen P., Jacobsen N-J.** Automated frequency domain decomposition for operational modal analysis, In: Proc. 25th Int. Modal Analysis Conf. 2007 (IMAC XXV) In 5 Vols. Vol. 1, Orlando, Florida, USA, Febr. 19–22, 2007. (2007) 275–277.

5. **Zhang L., Tamura Y.** Damping estimation of engineering structures with ambient response measurements, In: Proc. 21st Int. Modal Analysis Conf. & Expos. 2003 (IMAC XXI) “A Conf. & Expos. on Structural Dynamics”. In 3 Vols. Vol. 1. Kissimmee, Florida, USA, Febr. 3–6, 2003 (2003) 1023–1029.

6. **Brincker R., Zhang L.** Frequency domain decomposition revisited, In: Proc. 3rd Int. Operational Modal Analysis Conf. (IOMAC), Portonovo (Ancona), Italy, May 4–6, 2009. (2009) 615–626.

7. **Brincker R., Ventura C.**, Introduction to operational modal analysis, John Wiley and Sons, Ltd., Hoboken, New Jersey, USA, 2015.
8. **Rainieri C., Fabbrocino G.**, Operational modal analysis of civil engineering structures: An introduction and guide for applications, Springer, New York, 2014.
9. ARTeMIS Modal. Software for Operational Modal Analysis and Experimental Modal Analysis. URL: <http://www.svibs.com/>. Date of last access: 20.01.2023.
10. **Chopra A. K.**, Dynamics of structures – theory and applications to earthquake engineering, 4th edition, Prentice Hall, Hoboken, New Jersey, USA, 2012.
11. **Amador S., Juul M., Friis T., Brincker R.**, Application of Frequency Domain Decomposition Identification technique to half spectral densities, In book: “Topics in Modal Analysis & Testing”. Vol. 9. Conf. Proc. of the Soc. for Experimental Mechanics. Ed. by M. Mains, B. J. Dilworth. Ch. 39. The Society for Experimental Mechanics, Inc. Springer, Cham, New York (2019) 343–346.
12. **Hasan M. D. A., Ahmad Z. A. B., Leong M. S., Hee L. M.**, Enhanced frequency domain decomposition algorithm: A review of a recent development for unbiased damping ratio estimates, J. Vibroengineering. 20 (5) (2018) 1919–1936.
13. **Lang G. F.**, Matrix madness and complex confusion. Review of complex modes from multiple viewpoints, Sound Vib. (November – Structural Analysis) (2012) 8–12.
14. **Tarpo P., Olsen P., Amador S., et al.**, On minimizing the influence of the noise tail of correlation functions in operational modal analysis, Proc. Eng. 199 (2017) 1038–1043.
15. **Ilyin V. A., Poznyak E. G.**, Linear algebra, Mir Publishers, Moscow, 1987.
16. **Gantmakher F. R.**, The theory of matrices, Chelsea Pub. Co. Collection inlibrary, New York, 1959.
17. **Karchevskiy E. M., Karchevskiy M. M.**, Leksii po lineynoy algebre i analiticheskoy geometrii [Lectures on linear algebra and analytical geometry], Lan Publishing, St. Petersburg, 2018 (in Russian).
18. **Fomin V. I.**, On the lower linear bound of the spectral radius for a normal matrix, Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. 6 (2) (2001) 145–146 (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНДРИАНОВА Елена Александровна – научный сотрудник АО «Всероссийский научно-исследовательский институт гидротехники (ВНИИГ) им. Б. Е. Веденеева», Санкт-Петербург, Россия. 195220, Россия, г. Санкт-Петербург, Гжатская ул., 21
elena-andrianova@bk.ru
ORCID: 0000-0001-9199-6875

НОВИЦКИЙ Дмитрий Викторович – ведущий специалист АО «ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева», Санкт-Петербург, Россия. 195220, Россия, г. Санкт-Петербург, Гжатская ул., 21
ndv63@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-4870-4096

ОНИЩУК Валерий Сергеевич – научный сотрудник АО «ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева», Санкт-Петербург, Россия. 195220, Россия, г. Санкт-Петербург, Гжатская ул., 21
valery.onischuk@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5460-1309

THE AUTHORS

ANDRIANOVA Elena A.
“B. E. Vedeneev VNIIG”, JSC
21, Gzhatskaya St., St. Petersburg, 195220, Russia
elena-andrianova@bk.ru
ORCID: 0000-0001-9199-6875

NOVITSKII Dmitrii V.

“B. E. Vedeneev VNIIG”, JSC

21, Gzhatskaya St., St. Petersburg, 195220, Russia

ndv63@yandex.ru

ORCID: 0000-0002-4870-4096

ONISCHUK Valeriy S.

“B. E. Vedeneev VNIIG”, JSC

21, Gzhatskaya St., St. Petersburg, 195220, Russia

valery.onischuk@gmail.com

ORCID: 0000-0002-5460-1309

*Статья поступила в редакцию 22.08.2022. Одобрена после рецензирования 15.11.2022.
Принята 15.11.2023.*

Received 22.08.2022. Approved after reviewing 15.11.2022. Accepted 15.11.2023