

Научная статья  
УДК 539.312: 004.942  
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16105>

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ КРАЯМИ (CFCF-ПЛАСТИНА)

**М. В. Сухотерин**<sup>1</sup> ✉, **В. В. Лалин**<sup>2</sup>, **Л. Н. Кондратьева**<sup>3</sup>,  
**С. О. Барышников**<sup>1</sup>, **И. В. Войтко**<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Государственный университет морского и речного флота  
имени адмирала С. О. Макарова, Санкт-Петербург, Россия;

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Россия;

<sup>3</sup> Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,  
Санкт-Петербург, Россия

✉ [sukhoterinmv@gumrf.ru](mailto:sukhoterinmv@gumrf.ru)

**Аннотация.** В работе предложен итерационный метод отыскания собственных частот симметричных колебаний для прямоугольной CFCF-пластины с помощью двух гиперголо-тригонометрических рядов по двум координатам. При этом получена разрешающая однородная бесконечная система линейных алгебраических уравнений, которая содержит в качестве параметра искомую собственную частоту. Вместо вывода и решения частотного уравнения предложено использовать метод перебора значений частоты («метод стрельбы») в сочетании с методом последовательных приближений. Численные результаты получены для первых трех симметричных собственных форм. Исследовано влияние на точность результатов количества членов рядов и числа итераций. Проведено сравнение с результатами других авторов и опубликованными экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** прямоугольная CFCF-пластина, колебания, собственная частота, гиперголо-тригонометрический ряд, итерационный процесс

**Для цитирования:** Сухотерин М. В., Лалин В. В., Кондратьева Л. Н., Барышников С. О., Войтко И. В. Свободные колебания прямоугольной пластины с защемленными противоположными краями (CFCF-пластина) // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 1. С. 51–64. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16105>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16105>

## FREE VIBRATIONS OF A RECTANGULAR PLATE WITH CLAMPED OPPOSITE EDGES (A CFCF-PLATE)

**M. V. Sukhoterin**<sup>1</sup> ✉, **V. V. Lalin**<sup>2</sup>, **L. N. Kondratjeva**<sup>3</sup>,  
**S. O. Baryshnikov**<sup>1</sup>, **I. V. Voytko**<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, St. Petersburg, Russia;

<sup>2</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia;

<sup>3</sup> St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, St. Petersburg, Russia;

✉ [sukhoterinmv@gumrf.ru](mailto:sukhoterinmv@gumrf.ru)

**Abstract.** The paper proposes an iterative method for finding the natural frequencies of symmetric oscillations for a rectangular CFCF plate using two hyperbolic-trigonometric series in two coordinates. In this case, a resolving homogeneous infinite system of linear equations which contains the desired natural frequency as a parameter has been obtained. Instead of deriving and solving the frequency equation, it was proposed to use the sequential search for the desired frequency values (the "shooting method") in combination with the method of successive approximations. Numerical results were found for the first three symmetric eigenforms. The influence of the number of series terms and the number of iterations on the accuracy of the results was investigated. The obtained results were compared with those of other authors and the published experimental data.

**Keywords:** rectangular CFCF-plate, oscillations, natural frequency, hyperbolic-trigonometric series, iterative process

**For citation:** Sukhoterin M. V., Lalin V. V., Kondratjeva L. N., Baryshnikov S. O., Voytko I. V., Free vibrations of a rectangular plate with clamped opposite edges (a CFCF-plate), St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (1) (2023) 51–64. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16105>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

Прямоугольные пластины с двумя зашечленными (clamped) противоположными краями и остальными двумя свободными (free), называемые для краткости «CFCF-пластины», находят широкое применение в различных областях промышленности и в нанотехнике.

Важной составляющей расчетов пластин на прочность является учет их возможных поперечных колебаний в процессе эксплуатации, что предполагает, прежде всего, определение спектра их собственных частот. Эти сведения необходимы для определения динамических напряжений, вызываемых переменной внешней нагрузкой. Внешние воздействия (возбуждения) на пластину могут носить периодический характер с различной частотой. В случае совпадения частоты возбуждения с собственной частотой колебаний пластины наступает, как известно, явление резонанса, которое может привести к ее разрушению за короткое время. При изменяющейся частоте возбуждения важно знать не только частоту первого (основного) тона свободных колебаний, но и частоты нескольких последующих обертонов, при которых также может последовать резонанс.

Точное решение задачи свободных колебаний прямоугольной пластины получено лишь для шарнирно-опертой пластины (SSSS-пластина) [1] и пластины, две параллельные грани которой свободно опираются, а две другие зашечлены или свободны (SCSC- и SFSF-пластины). Здесь в общепринятых английских обозначениях S (supported) – шарнирно-опертый край (остальные обозначения уже указаны выше). Известные приближенные решения [2 – 12] для рассматриваемой здесь CFCF-пластины требуют анализа точности полученных численных результатов.

В работах [2 – 5, 8, 9] для решения задачи применялся метод Ритца (Рэлея – Ритца) и его различные модификации. Американский ученый А. У. Лейсса [2] искомую функцию прогибов представлял в виде 36 слагаемых: комбинаций тригонометрических и гиперболических функций. Л. Монтеруббио и С. Иланко [3] применяли метод Рэлея – Ритца в сочетании с методом штрафных функций. Решение содержало до 40 слагаемых, представляющих собой комбинации полиномов низкого порядка и тригонометрических функций. Ю. Нарита и М. Иннами [4, 5] использовали полиномы для различных вариантов граничных условий в сочетании с теорией Поля. В работе К. Лю и Дж. Банерджи [6] в аналитическом методе спектральной динамической жесткости использовались два типа одномерных модифицированных рядов Фурье для случаев плоских напряжений и плоских деформаций. Г. Ван и Н. Уэрли [7] применяли вариационный метод Канторовича – Крылова. Искомая функция прогибов выбиралась в виде линейной комбинации тригонометрических и гиперболических функций. К. Лью и др. [8] разработали

эффективный в вычислительном отношении метод функции ортогональной пластины в процедуре Рэлея – Ритца. Функция ортогональной пластины строится с использованием соотношения ортогональности Грама – Шмидта. Т. Мидзусава [9] строил решение с помощью В-сплайнов.

С. Кширсагар и К. Бхаскар [10] применяли разновидность метода суперпозиции с решением в тригонометрических рядах. В работе М. Айзенбергера и А. Дойча [11] использовались особые комбинации тригонометрических и гиперболических функций синуса и косинуса. Утверждается, что они дают точное решение задачи для многих вариантов граничных условий. Р. Ли и др. [12] предложили новый симплектический метод суперпозиции (модификация метода Эйлера при решении уравнений Гамильтона) для решения задачи колебаний прямоугольных пластин.

В работе Р. Сингала и др. [13] проведены экспериментальные исследования для получения собственных частот колебаний прямоугольных пластин с различными вариантами граничных условий.

В работах [2 – 13] приводятся найденные собственные частоты колебаний прямоугольных пластин, имеющих шарнирно-опертые, зашечленные и свободные края в различных комбинациях. Из этих результатов в таблице помещены первые две частоты симметричного решения для CFCF-пластины для сравнения с полученными в настоящей работе.

Используемый в настоящей статье метод перебора частотного параметра в сочетании с итерационным процессом получения ненулевых решений бесконечной однородной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов гиперболо-тригонометрических рядов успешно применялся авторами для решения ряда задач колебаний и устойчивости прямоугольных пластин [14, 15].

### Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную пластину постоянной толщины  $h$  с размерами  $a \times b$  в плане. Поместим начало прямоугольной системы координат  $XOY$  в центр пластины. Оси координат проведем параллельно ее краям. Пусть края  $x = \pm a/2$  зашечлены, а края  $y = \pm b/2$  свободны. При переходе к безразмерным координатам  $x = X/b, y = Y/b$  размеры пластины будут  $\gamma \times 1$ , где  $\gamma = a/b$  – отношение сторон пластины (рис. 1).

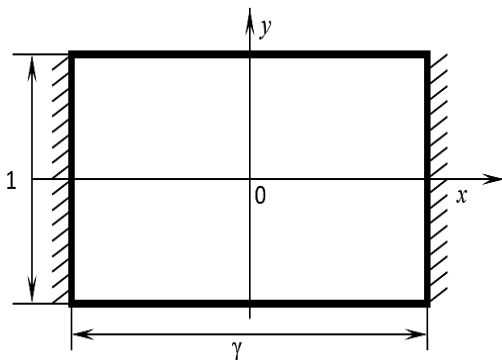


Рис. 1. Схема к постановке задачи: CFCF-пластина размером  $a \times b \times h$ , или  $\gamma \times 1 \times h$ , где  $\gamma = a/b$

Начальные условия задачи в общем случае имеют вид (начальное поле перемещений и скоростей):

$$W|_{t=0} = W_0(X, Y), \quad \frac{\partial W}{\partial t}|_{t=0} = V_0(X, Y), \quad (1)$$

где  $W_0$  – начальный прогиб точек срединной поверхности пластины,  $V_0$  – их начальные скорости в направлении нормалей,  $t$  – время.

Часто в начальных условиях задается нулевое поле скоростей (например, действует стационарная равномерная поперечная нагрузка, которая затем мгновенно снимается). Далее пластина совершает поперечные колебания. Если отсутствуют силы сопротивления и возмущения, то колебания будут свободными незатухающими (собственные колебания).

Дифференциальное уравнение собственных колебаний пластины имеет вид [1]:

$$D\nabla^2\nabla^2W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  ( $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  –

коэффициент Пуассона);  $\rho$  – плотность вещества пластины;  $\nabla^2 \nabla^2$  – бигармонический оператор,  $\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4}{\partial Y^4}$ .

В безразмерных координатах уравнение (2) переписывается следующим образом:

$$\nabla^4 W + \eta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где  $\eta^2 = \frac{\rho h b^4}{D}$ ,  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ .

Относительные размеры пластины лежат в интервалах

$$-\gamma/2 \leq x \leq \gamma/2, \quad -1/2 \leq y \leq 1/2.$$

Граничные условия на защемленных краях  $x = \pm \gamma/2$  имеют вид

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

а на свободных краях  $y = \pm 1/2$  имеют следующий вид:

$$M_y = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad V_y = \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (5)$$

Задача состоит в определении функции прогибов  $W(x, y, t)$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению (3), начальным (1) и граничным ((4), (5)) условиям.

### Построение решения

Согласно методу Фурье, искомую функцию прогибов представим в виде произведения двух функций: от времени и от координат срединной поверхности:

$$W(x, y, t) = w^*(t) w(x, y), \quad (6)$$

Для функции координат граничные условия будут аналогичными условиям (4), (5), а именно –

$$\text{для } x = \pm \gamma/2: \quad w = 0, \quad \partial w / \partial x = 0, \quad (7)$$

$$\text{для } y = \pm 1/2: \quad M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad V_y = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (8)$$

Функция времени представляется в следующем виде [1]:

$$w^*(t) = c_1 \cos pt + c_2 \sin pt, \quad (9)$$

где  $p$  – искомая частота колебаний пластины;  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий (1).

Подставляя выражение (9) в формулу (6), а затем (6) в уравнение (3), получим дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять координатная функция прогибов:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) - p^2 \eta^2 w(x, y) = 0. \quad (10)$$

Обозначим относительную частоту собственных колебаний через  $\Omega = p\eta$ . Тогда уравнение (10) примет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) - \Omega^2 w(x, y) = 0. \quad (11)$$

**Симметричное решение (SS-форма).** Функцию  $w(x, y)$  будем разыскивать в виде суммы двух рядов:



$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k \operatorname{ch}(\beta_k x) \cos(\lambda_k y) + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} C_s \operatorname{ch}(\xi_s y) \cos(\mu_s x). \quad (12)$$

Здесь коэффициенты  $A_k, \beta_k, C_s, \xi_s$  подлежат определению;  $\lambda_k = 2\pi k, \mu_s = \pi s/\gamma, \tilde{s} = (s+1)/2$ .

Первая форма колебаний должна быть симметричной (точнее, симметрично-симметричной (SS)), ввиду соответствия форме изогнутой поверхности под действием равномерной поперечной нагрузки (этим объясняется выбор четных координатных функций).

Другие формы колебаний – антисимметричные (AA) и смешанные (AS и SA) получаются при соответствующих сочетаниях четных и нечетных слагаемых. Это означает, что, помимо представления (12), следует рассмотреть в дальнейшем и три перечисленных случая.

Таким образом, функция (12) позволит найти только симметричные собственные частоты, в том числе основную частоту.

Потребуем, чтобы обе функции удовлетворяли дифференциальному уравнению (11); тогда для определения коэффициентов  $\beta_k$  и  $\xi_s$  получим уравнения

$$(\beta_k^2 - \lambda_k^2)^2 = \Omega^2, \quad (\xi_s^2 - \mu_s^2)^2 = \Omega^2;$$

отсюда находим пары корней, зависящих от неизвестной частоты  $p$ :

$$\beta_k = \sqrt{\lambda_k^2 + \Omega}, \quad \bar{\beta}_k = \sqrt{\lambda_k^2 - \Omega}, \quad (13)$$

$$\xi_s = \sqrt{\mu_s^2 + \Omega}, \quad \bar{\xi}_s = \sqrt{\mu_s^2 - \Omega}. \quad (14)$$

С учетом полученных выражений, функции, входящие в выражение (12), перепишутся в следующем виде:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (A_k \operatorname{ch}(\beta_k x) + B_k \operatorname{ch}(\bar{\beta}_k x)) \cos(\lambda_k y),$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} (C_s \operatorname{ch}(\xi_s y) + D_s \operatorname{ch}(\bar{\xi}_s y)) \cos(\mu_s x). \quad (15)$$

Заметим, что функция  $w_2(x, y)$  удовлетворяет условию отсутствия прогибов на гранях  $x = \pm \gamma/2$ . Потребуем, чтобы и функция  $w_1(x, y)$  имела нулевые прогибы на этих гранях. Тогда должно выполняться равенство

$$A_k \operatorname{ch} \frac{\beta_k \gamma}{2} + B_k \operatorname{ch} \frac{\bar{\beta}_k \gamma}{2} = 0, \quad (16)$$

и коэффициенты  $B_k$  можно выразить через коэффициенты  $A_k$ :

$$B_k = -A_k \frac{\operatorname{ch} \beta_k^*}{\operatorname{ch} \bar{\beta}_k^*}, \quad (17)$$

где  $\beta_k^* = \beta_k \gamma / 2, \bar{\beta}_k^* = \bar{\beta}_k \gamma / 2$ .

Функция  $w_1(x, y)$ , в свою очередь, удовлетворяет условию отсутствия перерезывающих сил на гранях  $y = \pm 1/2$ . Потребуем, чтобы и функция  $w_2(x, y)$  также удовлетворяла этому условию. Тогда, опуская знак суммирования, получим:

$$C_s \xi_s [\xi_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2] \operatorname{sh} \xi_s^* + D_s \bar{\xi}_s [\bar{\xi}_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2] \operatorname{sh} \bar{\xi}_s^* = 0, \quad (18)$$

где  $\xi_s^* = \xi_s / 2, \bar{\xi}_s^* = \bar{\xi}_s / 2$ .

Откуда

$$D_s = -\frac{\xi_s [\xi_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2] \operatorname{sh} \xi_s^*}{\bar{\xi}_s [\bar{\xi}_s^2 - (2 - \nu) \mu_s^2] \operatorname{sh} \bar{\xi}_s^*} C_s. \quad (19)$$

Итак, искомая функция прогибов (12) примет вид:

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k \left[ \operatorname{ch}(\beta_k x) - \frac{\operatorname{ch}\beta_k^*}{\operatorname{ch}\beta_k^*} \operatorname{ch}(\bar{\beta}_k x) \right] \cos(\lambda_k y) + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}} C_s \left\{ \operatorname{ch}(\xi_s y) - \frac{\xi_s \left[ \xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right] \operatorname{sh}\xi_s^*}{\bar{\xi}_s \left[ \bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right] \operatorname{sh}\bar{\xi}_s^*} \operatorname{ch}(\bar{\xi}_s y) \right\} \cos(\mu_s x). \quad (20)$$

Эта функция теперь содержит лишь две последовательности неизвестных коэффициентов:  $A_k$  и  $C_s$ .

Потребуем, чтобы функция прогибов (20) удовлетворяла двум оставшимся граничным условиям (второе условие (7) и первое условие (8)). Тогда для углов поворота заделанных краев и изгибающих моментов на свободных краях получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k \operatorname{ch}\beta_k^* (\beta_k \operatorname{th}\beta_k^* - \bar{\beta}_k \operatorname{th}\bar{\beta}_k^*) \cos(\lambda_k y) + \\ & + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \mu_s C_s \left\{ \operatorname{ch}(\xi_s y) - \frac{\xi_s \left[ \xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right] \operatorname{sh}\xi_s^*}{\bar{\xi}_s \left[ \bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right] \operatorname{sh}\bar{\xi}_s^*} \operatorname{ch}(\bar{\xi}_s y) \right\} = 0, \\ & \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[ (\nu\beta_k^2 - \lambda_k^2) \operatorname{ch}(\beta_k x) - (\nu\bar{\beta}_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\operatorname{ch}\beta_k^*}{\operatorname{ch}\beta_k^*} \operatorname{ch}(\bar{\beta}_k x) \right] + \\ & + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}} C_s \operatorname{ch}\xi_s^* \left\{ (\xi_s^2 - \nu\mu_s^2) - \frac{\xi_s \left[ \xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]}{\bar{\xi}_s \left[ \bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]} (\bar{\xi}_s^2 - \nu\mu_s^2) \operatorname{th}\xi_s^* \operatorname{cth}\bar{\xi}_s^* \right\} \cos(\mu_s x) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Для упрощения системы (21) необходимо в первом уравнении (во втором ряду) разложить гиперболические функции в ряды Фурье по  $\cos(\lambda_k y)$ , а во втором уравнении (в первом ряду) – по  $\cos(\mu_s x)$ .

Воспользуемся известными разложениями [15]:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\xi_s y) &= \frac{2}{\xi_s} \operatorname{sh}\xi_s^* + 4\xi_s \operatorname{sh}\xi_s^* \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(\lambda_k y)}{\xi_s^2 + \lambda_k^2}, \\ \operatorname{ch}(\bar{\xi}_s y) &= \frac{2}{\bar{\xi}_s} \operatorname{sh}\bar{\xi}_s^* + 4\bar{\xi}_s \operatorname{sh}\bar{\xi}_s^* \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(\lambda_k y)}{\bar{\xi}_s^2 + \lambda_k^2}, \\ \operatorname{ch}(\beta_k x) &= -\frac{4}{\gamma} \operatorname{ch}\beta_k^* \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}} \frac{\mu_s \cos(\mu_s x)}{\beta_k^2 + \mu_s^2}, \\ \operatorname{ch}(\bar{\beta}_k x) &= -\frac{4}{\gamma} \operatorname{ch}\bar{\beta}_k^* \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}} \frac{\mu_s \cos(\mu_s x)}{\bar{\beta}_k^2 + \mu_s^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Первые два разложения в системе (22) имеют свободные члены, поэтому при подстановке их в первое уравнение (21) также появится свободный член, который мы обозначим как

$$G = 2 \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu_s}{\xi_s} \operatorname{sh}\xi_s^* \left\{ 1 - \frac{\xi_s^2 \left[ \xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]}{\bar{\xi}_s^2 \left[ \bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]} \right\} C_s. \quad (23)$$

Чтобы компенсировать эту часть углов поворота заделанных краев, добавим к функции (20) дополнительный прогиб:

$$w_0(x) = R_1 \operatorname{ch}(\omega x) + R_2 \cos(\omega x), \quad (24)$$

где  $R_1, R_2, \omega$  – неопределенные коэффициенты.



Подчиним функцию (24) основному уравнению задачи (11). Тогда получим, что  $\omega = \sqrt{\Omega}$ . Потребуем выполнения граничных условий на защемленных гранях с учетом свободного члена (23):

$$\begin{aligned} R_1 \operatorname{ch} \omega_* + R_2 \cos \omega_* &= 0, \\ \omega(R_1 \operatorname{sh} \omega_* - R_2 \sin \omega_*) &= -G. \end{aligned} \quad (25)$$

Отсюда

$$R_1 = -\frac{G}{\omega \operatorname{ch} \omega_* (\operatorname{th} \omega_* + \operatorname{tg} \omega_*)}, \quad R_2 = \frac{G}{\omega \cos \omega_* (\operatorname{th} \omega_* + \operatorname{tg} \omega_*)}, \quad (26)$$

где  $\omega_* = \omega\gamma/2$ .

Теперь первое уравнение (21) (уже без свободных членов) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k \operatorname{ch} \beta_k^* (\beta_k \operatorname{th} \beta_k^* - \bar{\beta}_k \operatorname{th} \bar{\beta}_k^*) \cos(\lambda_k y) + \\ & + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \mu_s C_s \left\{ \begin{aligned} & 4\xi_s \operatorname{sh} \xi_s^* \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(\lambda_k y)}{\xi_s^2 + \lambda_k^2} - \\ & - \frac{\xi_s [\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2] \operatorname{sh} \xi_s^*}{\bar{\xi}_s [\bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2] \operatorname{sh} \bar{\xi}_s^*} 4\bar{\xi}_s \operatorname{sh} \bar{\xi}_s^* \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(\lambda_k y)}{\bar{\xi}_s^2 + \lambda_k^2} \end{aligned} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Переставляя знаки суммирования по индексам  $k$  и  $s$  и освобождаясь затем от знака суммирования по индексу  $k$  во всем выражении, получим, что

$$\begin{aligned} & \operatorname{ch} \beta_k^* (\beta_k \operatorname{th} \beta_k^* - \bar{\beta}_k \operatorname{th} \bar{\beta}_k^*) A_k + \\ & + 4 \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \mu_s \xi_s \left\{ \frac{1}{\xi_s^2 + \lambda_k^2} - \frac{[\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]}{[\bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2]} \frac{1}{\bar{\xi}_s^2 + \lambda_k^2} \right\} C_s \operatorname{sh} \xi_s^* = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Функция (24) нарушает первое граничное условие (8) по изгибающему моменту на краях  $y = \pm 1/2$ :

$$M_{y0} = \nu\omega^2 [R_1 \operatorname{ch}(\omega x) - R_2 \cos(\omega x)]. \quad (29)$$

Разложим эту невязку в ряд Фурье по  $\cos(\mu_s x)$ . Воспользуемся известными формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\omega x) &= -\frac{4}{\gamma} \operatorname{ch} \omega_* \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\bar{s}} \mu_s \cos(\mu_s x)}{\mu_s^2 + \omega^2}, \\ \cos(\omega x) &= -\frac{4}{\gamma} \cos \omega_* \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\bar{s}} \mu_s \cos(\mu_s x)}{\mu_s^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_{y0} &= -\frac{4\nu\omega^2}{\gamma} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}} \mu_s \left( R_1 \frac{\operatorname{ch} \omega_*}{\mu_s^2 + \omega^2} - R_2 \frac{\cos \omega_*}{\mu_s^2 - \omega^2} \right) = \\ &= -G \frac{8\nu}{\gamma} \frac{\omega}{\operatorname{th} \omega_* + \operatorname{tg} \omega_*} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\bar{s}} \mu_s^3}{\mu_s^4 - \omega^4} \cos(\mu_s x). \end{aligned} \quad (31)$$

Подставим теперь два последних разложения (22) во второе уравнение (21) и добавим невязку (31) от  $w_0$ :

$$\begin{aligned}
 & -G \frac{8v}{\gamma} \frac{\omega}{\operatorname{th}\omega_* + \operatorname{tg}\omega_*} \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\bar{s}} \mu_s^3}{\mu_s^4 - \omega^4} \cos(\mu_s x) + \\
 & + \frac{4}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{ch}\beta_k^* \left[ \begin{aligned} & -(\nu\beta_k^2 - \lambda_k^2) \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}} \frac{\mu_s \cos(\mu_s x)}{\beta_k^2 + \mu_s^2} + \\ & + (\nu\bar{\beta}_k^2 - \lambda_k^2) \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}} \frac{\mu_s \cos(\mu_s x)}{\bar{\beta}_k^2 + \mu_s^2} \end{aligned} \right] + \quad (32) \\
 & + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}} C_s \operatorname{ch}\xi_s^* \left\{ \begin{aligned} & \left( \xi_s^2 - \nu\mu_s^2 \right) - \\ & \frac{\xi_s \left[ \xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]}{\bar{\xi}_s \left[ \bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]} \left( \bar{\xi}_s^2 - \nu\mu_s^2 \right) \operatorname{th}\xi_s^* \operatorname{cth}\bar{\xi}_s^* \end{aligned} \right\} \cos(\mu_s x) = 0.
 \end{aligned}$$

Аналогично выкладкам, представленным выше, переставим знаки суммирования и освободимся затем от знака внешней суммы. Получим:

$$\begin{aligned}
 & -G \frac{8v}{\gamma} \frac{\omega}{\operatorname{th}\omega_* + \operatorname{tg}\omega_*} \frac{\mu_s^3}{\mu_s^4 - \omega^4} + \frac{4\mu_s}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{ch}\beta_k^* \left( -\frac{\nu\beta_k^2 - \lambda_k^2}{\beta_k^2 + \mu_s^2} + \frac{\nu\bar{\beta}_k^2 - \lambda_k^2}{\bar{\beta}_k^2 + \mu_s^2} \right) + \\
 & + C_s \operatorname{ch}\xi_s^* \left\{ \left( \xi_s^2 - \nu\mu_s^2 \right) - \frac{\xi_s \left[ \xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]}{\bar{\xi}_s \left[ \bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]} \left( \bar{\xi}_s^2 - \nu\mu_s^2 \right) \operatorname{th}\xi_s^* \operatorname{cth}\bar{\xi}_s^* \right\} = 0. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Из уравнения (28) следует, что

$$A_k^* = -4 \frac{\sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \mu_s \xi_s \left\{ \frac{1}{\xi_s^2 + \lambda_k^2} - \frac{\left[ \xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]}{\left[ \bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]} \frac{1}{\bar{\xi}_s^2 + \lambda_k^2} \right\} C_s^*}{\beta_k \operatorname{th}\beta_k^* - \bar{\beta}_k \operatorname{th}\bar{\beta}_k^*}, \quad (34)$$

где введены обозначения  $A_k^* = A_k \operatorname{ch}\beta_k^*$ ,  $C_s^* = C_s \operatorname{sh}\xi_s^*$ .

Из уравнения (33) следует, что

$$C_s^* = \frac{G \frac{8v}{\gamma} \frac{\omega}{\operatorname{th}\omega_* + \operatorname{tg}\omega_*} \frac{\mu_s^3}{\mu_s^4 - \omega^4} - \frac{4\mu_s}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \left( -\frac{\nu\beta_k^2 - \lambda_k^2}{\beta_k^2 + \mu_s^2} + \frac{\nu\bar{\beta}_k^2 - \lambda_k^2}{\bar{\beta}_k^2 + \mu_s^2} \right)}{\operatorname{cth}\xi_s^* \left\{ \left( \xi_s^2 - \nu\mu_s^2 \right) - \frac{\xi_s \left[ \xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]}{\bar{\xi}_s \left[ \bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]} \left( \bar{\xi}_s^2 - \nu\mu_s^2 \right) \operatorname{th}\xi_s^* \operatorname{cth}\bar{\xi}_s^* \right\}}, \quad (35)$$

и тогда выражение (23) примет вид

$$G = 2 \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu_s}{\xi_s} C_s^* \left\{ 1 - \frac{\xi_s^2 \left[ \xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]}{\bar{\xi}_s^2 \left[ \bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2 \right]} \right\}. \quad (36)$$

Если подставить в выражение (35) коэффициенты  $A_k^*$  из формулы (34) и величину  $G$  из формулы (36), то выражение (35) будет представлять собой бесконечную однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно одной последовательности коэффициентов  $C_s^*$ , которая содержит в качестве параметра искомую частоту собственных колебаний  $\Omega$ . Бесконечное множество этих частот можно найти из условия равенства нулю определителя системы (35) и решения соответствующего частотного уравнения.

Данная задача весьма сложна. Для ее решения предлагаем использовать итерационный процесс вычисления коэффициентов  $C_s^*$  для отыскания собственной частоты методом перебора этого параметра. Коэффициенты  $C_s^*$  в левой части системы (35) можно считать последующей итерацией, а те же коэффициенты под знаком суммы в правой части –



предыдущей итерацией. Для начальной итерации все коэффициенты  $C_{s0}^*$  можно положить равными единице или членам произвольной убывающей последовательности, например  $C_{s0}^* = 1/\mu_s^2$ .

Вычисляя правые части уравнений системы (35), получим коэффициенты  $C_{s1}^*$  первой итерации, которые затем подставим в правые части, и процесс повторяется. Коэффициенты выводятся на печать на каждой итерации, и та частота, при которой, начиная с некоторой итерации, соответствующие коэффициенты не отличаются друг от друга и отличны от нуля, является искомой собственной частотой. Численная реализация метода предполагает, что рассматривается редуцированная система (35), число уравнений которой можно менять в широких пределах, так же как и число членов в рядах, сходимость которых анализируется.

Окончательное выражение для функции прогибов пластины запишется следующим образом:

$$w(x, y) = \frac{G}{\omega} \frac{1}{(\text{th}\omega_* + \text{tg}\omega_*)} \left[ -\frac{\text{ch}(\omega x)}{\text{ch}\omega_*} + \frac{\cos(\omega x)}{\cos \omega_*} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k^* \left[ \frac{\text{ch}(\beta_k x)}{\text{ch}\beta_k^*} - \frac{\text{ch}(\bar{\beta}_k x)}{\text{ch}\bar{\beta}_k^*} \right] \cos(\lambda_k y) + \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^s C_s^* \left\{ \frac{\text{ch}(\xi_s y)}{\text{sh}\xi_s^*} - \frac{\xi_s [\xi_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2] \text{ch}(\bar{\xi}_s y)}{\bar{\xi}_s [\bar{\xi}_s^2 - (2-\nu)\mu_s^2] \text{sh}\bar{\xi}_s^*} \right\} \cos(\mu_s x). \quad (37)$$

### Численные результаты и их обсуждение

Для отыскания собственных частот и форм колебаний CFCF-пластины в вычислительной среде Maple нами была составлена программа, в которой можно варьировать отношение сторон пластины  $\gamma$ , коэффициент Пуассона, число членов в рядах и число итераций для достижения заданной точности вычислений. Основным параметром служит частота колебаний, которую перебирали методом «стрельбы» в сочетании с методом последовательных приближений, до нахождения собственной частоты. Критерием принятия назначенной частоты за собственную служила неизменяемость соответствующих коэффициентов рядов во всех итерациях, начиная с некоторой, при условии, что эти коэффициенты отличны от нуля.

В таблице приведены найденные первые три собственные относительные частоты для симметричных форм колебаний квадратной пластины (о третьем значении  $\Omega_7$  см. в Примечании 2). Коэффициент Пуассона был принят равным 0,3. Для сравнения представлены экспериментальные данные, а также соответствующие частоты, полученные другими авторами с помощью приближенных методов. Нумерация в таблице собственных частот (1, 3, 7) соответствует их порядковому номеру и учитывает антисимметричные формы (AA) (в таблице не представлены), а также смешанные формы (AS и SA), полученные разными авторами.

Отметим, что в экспериментальных данных статьи [13] фигурируют абсолютные значения собственных частот колебаний пластины с конкретными размерами и свойствами. Эти значения приведены нами к стандартному безразмерному виду и помещены в таблицу. На рис. 2 показаны соответствующие 3D-формы собственных симметричных колебаний.

При отыскании собственных частот, в рядах удерживалось последовательно 25, 35 и 50 слагаемых. Число итераций составляло 20. Значения первой частоты при этом менялись следующим образом:

$$22,1178; 22,1172; 22,1166.$$

Дальнейшее увеличение слагаемых в рядах и числа итераций не изменяло последней цифры.

Значения второй частоты:

$$43,5407; 43,5410; 43,5410.$$

Значения третьей частоты:

87,4371; 87,4371; 87,4370.

Таблица

Сравнение полученных значений собственных частот симметричных колебаний квадратной CFCF-пластины с литературными данными

Относительная собственная частота		Авторы исследования
$\Omega_1$	$\Omega_3$	
<i>Эксперимент</i>		
22,206	42,840	Р. К. Сингал и др. [13]
<i>Расчетные результаты</i>		
22,1166	43,5410	Данная статья
22,272	43,664	А. У. Лейсса [2]
22,03	43,20	Т. Мидзусава [9]
22,22	43,91	К. М. Лью и др. [8]
22,17	43,60	С. Кширсагар и др. [10]
22,168	43,596	Л. Монтеруббио и др. [3]

Примечания. 1.  $\Omega = p\sqrt{\rho hb^4 / D}$ , где  $p$  – искомая частота колебаний пластины;  $\rho$  – плотность ее вещества;  $h, b$  – толщина и сторона квадратной пластины;  $D$  – ее цилиндрическая жесткость. 2. Согласно нашим данным,  $\Omega_7 = 87,4370$  (получено впервые).

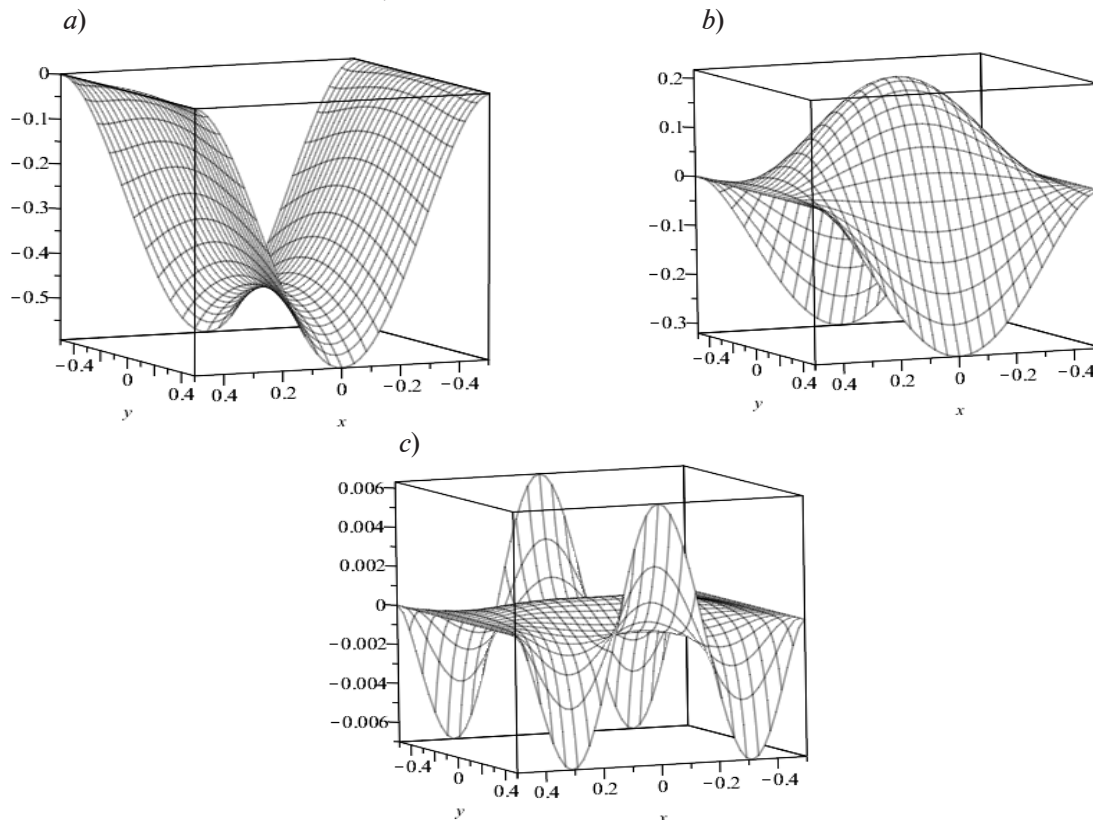


Рис. 2. Первая (a), вторая (b) и третья (c) SS-формы собственных колебаний CFCF-пластины (значения  $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_7$  представлены в таблице)

Представленные данные свидетельствуют о том, что собственные частоты найдены весьма точно.

Сравнение с экспериментальными данными [13] (для двух частот) показывает, что результаты весьма близки, но значение второй частоты в работе [13] несколько ниже, очевидно, ввиду невозможности обеспечить в эксперименте строгую жесткую заделку двух параллельных сторон пластины.

Приближенные вычисления вариационными методами (например, методы Ритца или Канторовича) дают, как правило, завышенные значения искомым параметров, что и наблюдается в данном случае (см. результаты работ [2, 3, 8]). Исключением является статья [9], в которой значения частоты меньше, чем в настоящей работе. Это, скорее всего, результат нижней оценки частот, который проистекает из-за использования В-сплайнов.

#### Учет начальных условий задачи

Задача о свободных колебаниях прямоугольной CFCF-панели будет решена до конца, если будут найдены произвольные постоянные  $c_1$  и  $c_2$  функции времени (9) из начальных условий (1). Поскольку задача о собственных значениях имеет бесконечное множество корней  $p_i$ , то исходная функция прогибов (6) примет вид:

$$W(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [c_{1i} \cos(p_i t) + c_{2i} \sin(p_i t)] w_i(x, y), \quad (38)$$

где  $w_i(x, y)$  – собственные функции задачи вида (37) для собственных чисел  $p_i$ .

Отметим, что начальные условия не могут задаваться произвольно. Прежде всего, начальные прогибы  $W_0(X, Y)$  и начальные скорости  $V_0(X, Y)$  должны быть равными нулю на защемленных краях пластины. Определение (или задание) начальных условий часто представляет собой отдельную проблему.

Наиболее простым является случай, когда начальная форма пластины – это форма ее изогнутой поверхности под действием равномерной поперечной нагрузки. После мгновенного снятия такой нагрузки пластина начинает совершать свободные колебания. Эти начальные условия часто имеют место в процессе эксплуатации конструкции.

Однако это предполагает, что задача изгиба пластины под действием данной стационарной нагрузки решена. Если речь идет о свободно-опертой пластине либо пластине, у которой оперты две параллельные грани, а две другие произвольно закреплены, то решение этой задачи получено в замкнутой форме, и им можно воспользоваться.

Для CFCF-пластины такого замкнутого решения нет. Тогда можно использовать одно из известных приближенных решений соответствующей задачи изгиба CFCF-пластины; обозначим его как  $w_{st}(x, y)$ .

Если начальные скорости точек пластины равны нулю, то все произвольные постоянные  $c_{2i} = 0$  и можно записать равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{1i} w_i(x, y) = w_{st}(x, y). \quad (39)$$

Для отыскания коэффициентов  $c_{1i}$  следует представить координатные функции в левой и правой частях равенства двойными рядами Фурье, что приведет к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно указанных коэффициентов.

Таким образом, задача о свободных поперечных колебаниях прямоугольной пластины может быть решена до конца.

При других видах начальных условий алгоритм решения аналогичен.

#### Заключение

В настоящей работе построен эффективный алгоритм отыскания собственных частот симметричных форм колебаний прямоугольной пластины с двумя защемленными противоположными и двумя остальными свободными параллельными краями. С высокой точностью получены численные значения частот, приведены соответствующие 3D-формы колебаний.

Результаты проведенных исследований можно использовать в проектных организациях при расчетах на резонанс плоских элементов различных конструкций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.-Л.: ОГИЗ – ГИТТЛ, 1947. 355 с.
2. Leissa A. W. The free vibration of rectangular plates // *Journal of Sound and Vibration*. 1973. Vol. 31. No. 3. Pp. 257–293.
3. Monterrubio L. E., Ilanko S. Proof of convergence for a set of admissible functions for the Rayleigh – Ritz analysis of beams and plates and shells of rectangular planform // *Computers & Structures*. 2015. Vol. 147. 15 January. Pp. 236–243.
4. Narita Y. Polya counting theory applied to combination of edge conditions for generally shaped isotropic plates // *EPI International Journal of Engineering*. 2019. Vol. 2. No. 2. Pp.194–202.
5. Narita Y., Innami M. Identifying all combinations of boundary conditions for in-plane vibration of isotropic and anisotropic rectangular plates // *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 164. July. P. 107320.
6. Liu X., Banerjee J. R. A spectral dynamic stiffness method for free vibration analysis of plane elastodynamic problems // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. Vol. 87. Part A. 15 March. Pp. 136–160.
7. Wang G., Wereley N. M. Free in-plane vibration of rectangular plates // *AIAA Journal*. 2002. Vol. 40. No. 5. Pp. 953–959.
8. Liew K. M., Lam K. Y., Chow S. T. Free vibration analysis of rectangular plates using orthogonal plate function // *Computers & Structures*. 1990. Vol. 34. No. 1. Pp. 79–85.
9. Mizusawa T. Natural frequencies of rectangular plates with free edges // *Journal of Sound and Vibration*. 1986. Vol. 105. No. 3. Pp. 451–459.
10. Kshirsagar S., Bhaskar K. Accurate and elegant free vibration and buckling studies of orthotropic rectangular plates using untruncated infinite series // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 314. No. 3–5. Pp. 837–850.
11. Eisenberger M., Deutsch A. Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions // *Journal of Sound and Vibration*. 2019. Vol. 452. 21 July. Pp. 1–12.
12. Li R., Zheng X., Wang P., Wang B., Wu H., Cao Y., Zhu Zh. New analytic free vibration solutions of orthotropic rectangular plates by a novel symplectic approach // *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230. No. 9. Pp. 3087–3101.
13. Singal R. K., Gorman D. J., Forques S. A. A comprehensive analytical solution for free vibration of rectangular plates with classical edge conditions: Experimental verification // *Experimental Mechanics*. 1992. Vol. 32. No. 1. Pp. 21–23.
14. Sukhoterin M. V., Baryshnikov S. O., Knysh T. P., Rasputina E. I. Stability of rectangular cantilever plates with high elasticity // *E3S Web of Conferences*. 2021. Vol. 244. XXII International Scientific Conference Energy Management of Municipal Facilities and Sustainable Energy Technologies (EMMFT-2020). Voronezh, Russia, December 8–10, 2020. P. 04004.
15. Сухотерин М. В., Масленников А. М., Распутина Е. И., Войтко И. В. Сравнительный анализ определения частот собственных колебаний прямоугольных панелей с защемленно-свободными краями // *Вестник гражданских инженеров*. 2022. № 2 (91). С. 45–57.

## REFERENCES

1. Lekhnitsky S. G., *Anisotropic plates*, Gordon & Breach, New York, 1968.
2. Leissa A. W., The free vibration of rectangular plates, *J. Sound Vib.* 31 (3) (1973) 257–293.
3. Monterrubio L. E., Ilanko S., Proof of convergence for a set of admissible functions for the Rayleigh – Ritz analysis of beams and plates and shells of rectangular planform, *Comput. Struct.* 147 (15 January) (2015) 236–243.
4. Narita Y., Polya counting theory applied to combination of edge conditions for generally shaped isotropic plates, *EPI Int. J. Eng.* 2 (2) (2019) 194–202.
5. Narita Y., Innami M., Identifying all combinations of boundary conditions for in-plane vibration of isotropic and anisotropic rectangular plates, *Thin-Walled Struct.* 164 (July) (2021) 107320.
6. Liu X., Banerjee J. R., A spectral dynamic stiffness method for free vibration analysis of plane elastodynamic problems, *Mech. Syst. Signal Process.* 87A (15 March) (2017) 136–160.
7. Wang G., Wereley N. M., Free in-plane vibration of rectangular plates, *AIAA J.* 40 (5) (2002) 953–959.



8. Liew K. M., Lam K. Y., Chow S. T., Free vibration analysis of rectangular plates using orthogonal plate function, *Comput. Struct.* 34 (1) (1990) 79–85.
9. Mizusawa T., Natural frequencies of rectangular plates with free edges, *J. Sound Vib.* 105 (3) (1986) 451–459.
10. Kshirsagar S., Bhaskar K., Accurate and elegant free vibration and buckling studies of orthotropic rectangular plates using untruncated infinite series, *J. Sound Vib.* 314 (3–5) (2008) 837–850.
11. Eisenberger M., Deutsch A., Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions, *J. Sound Vib.* 452 (21 July) (2019) 1–12.
12. Li R., Zheng X., Wang P., et al., New analytic free vibration solutions of orthotropic rectangular plates by a novel symplectic approach, *Acta Mech.* 230 (9) (2019) 3087–3101.
13. Singal R. K., Gorman D. J., Forques S. A., A comprehensive analytical solution for free vibration of rectangular plates with classical edge conditions: Experimental verification, *Exp. Mech.* 32 (1) (1992) 21–23.
14. Sukhoterin M. V., Baryshnikov S. O., Knysh T. P., Rasputina E. I., Stability of rectangular cantilever plates with high elasticity, *E3S Web of Conf.* 244 (XXII Int. Sci. Conf. Energy Management of Municipal Facilities & Sustainable Energy Technologies (EMMFT-2020), Voronezh, Russia, December 8–10, 2020) (2021) 04004.
15. Sukhoterin M. V., Maslennikov A. M., Rasputina E. I., Voytko I. V., Comparative analysis of assessing natural vibration frequencies of rectangular panels with freely pinched edges, *Bulletin of Civil Engineering.* (2 (91)) (2022) 45–57 (in Russian).

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**СУХОТЕРИН Михаил Васильевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова, Санкт-Петербург, Россия.

198135, Россия, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7  
sukhoterinmv@gumrf.ru  
ORCID: 0000-0002-8295-7089

**ЛАЛИН Владимир Владимирович** – доктор технических наук, профессор Высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
Lalin\_vv@spbstu.ru  
ORCID: 0000-0003-3850-424X

**КОНДРАТЬЕВА Лидия Никитовна** – доктор технических наук, профессор кафедры геотехники Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета, Санкт-Петербург, Россия.

190005, Россия, г. Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., 4  
condratjevaln@yandex.ru  
ORCID: 0000-0001-6174-5565

**БАРЫШНИКОВ Сергей Олегович** – доктор технических наук, профессор, ректор Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова, Санкт-Петербург, Россия.

198135, Россия, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7  
rector@gumrf.ru  
ORCID: 0000-0001-6377-5581



**ВОЙТКО Ирина Викторовна** – кандидат технических наук, доцент кафедры математики Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова, Санкт-Петербург, Россия.

198135, Россия, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7

voytkoiv@gumrf.ru

ORCID: 0000-0003-2342-2209

## THE AUTHORS

### **SUKHOTERIN Mikhail V.**

*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*

5/7 Dvinskaya St., St. Petersburg, 198135, Russia

sukhoterinmv@gumrf.ru

ORCID: 0000-0002-8295-7089

### **LALIN Vladimir V.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

Lalin\_vv@spbstu.ru

ORCID: 0000-0003-3850-424X

### **KONDRATJEVA Lidia N.**

*St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering*

4, 2nd Krasnoarmeiskaya St., St. Petersburg, 190005, Russia

condratjevaln@yandex.ru

ORCID: 0000-0001-6174-5565

### **BARYSHNIKOV Sergey O.**

*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*

5/7 Dvinskaya St., St. Petersburg, 198135, Russia

rector@gumrf.ru

ORCID: 0000-0001-6377-5581

### **VOYTKO Irina V.**

*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*

5/7 Dvinskaya St., St. Petersburg, 198135, Russia

voytkoiv@gumrf.ru

ORCID: 0000-0003-2342-2209

*Статья поступила в редакцию 22.08.2022. Одобрена после рецензирования 23.10.2022. Принята 23.10.2022.*

*Received 22.08.2022. Approved after reviewing 23.10.2022. Accepted 23.10.2022.*