

Научная статья  
УДК 539.3, 539.42  
DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15210>

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛАХ ПРИ СМЕШАННОЙ МОДЕ РАЗРУШЕНИЯ В ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

А. В. Савиковский <sup>✉</sup>, А. С. Семенов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>✉</sup> [savikovskij.av@edu.spbstu.ru](mailto:savikovskij.av@edu.spbstu.ru)

**Аннотация.** Статья посвящена вычислению коэффициентов интенсивности напряжений для прямолинейной трещины смешанной моды разрушения в ортотропном материале и его частном случае – материале с кубической симметрией. Использован метод экстраполяции перемещений и напряжений на основе формализма Лехницкого. Для рассмотренных классов материалов получены в явном виде выражения для элементов матрицы влияния через упругие константы материала в случаях его плосконапряженного состояния и наличия ненулевого угла между осями анизотропии материала и трещины. Систематически проанализированы свойства матрицы влияния. Полученные результаты верификации рассмотренных вариантов метода перемещений и напряжений показали хорошее согласие между численными и аналитическими решениями (отличие не превосходит 0,8 %).

**Ключевые слова:** формализм Лехницкого, ортотропный материал, коэффициент интенсивности напряжений, смешанная мода разрушения

**Для цитирования:** Савиковский А. В., Семенов А. С. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений в ортотропных материалах при смешанной моде разрушения в плоском напряженном состоянии // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2022. Т. 15. № 2. С. 102–123. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15210>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15210>

## CALCULATION OF MIXED-MODE STRESS INTENSITY FACTORS FOR ORTHOTROPIC MATERIALS IN THE PLANE STRESS STATE

A. V. Savikovskii <sup>✉</sup>, A. S. Semenov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

<sup>✉</sup> [savikovskij.av@edu.spbstu.ru](mailto:savikovskij.av@edu.spbstu.ru)

**Abstract.** In the article, stress intensity factors for a straight crack of a mixed-fracture mode in the orthotropic material and in its particular case, namely, in the material with cubic symmetry, have been calculated. The displacement and stress extrapolation method based on the



Lekhnitskii formalism was used. For considered classes of materials, the explicit expressions for influence matrix elements were obtained through the elastic constants of the material in the cases of its planar-stressed state and given a non-zero angle between the material's anisotropy and the crack's axes. Influence matrix properties were analyzed systematically. The obtained results of verification of considered variants of the displacement and stress extrapolation method exhibited a good agreement between the numerical and analytical solutions (the difference did not exceed 0.8 %).

**Keywords:** Lekhnitskii formalism, orthotropic material, stress intensity factor, mixed-mode fracture

**For citation:** Savikovskii A. V., Semenov A. S., Calculation of mixed-mode stress intensity factors for orthotropic materials in the plane stress state, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 15 (2) (2022) 102–123. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15210>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

Монокристаллические жаропрочные сплавы на никелевой основе [1 – 3] находят широкое применение в качестве конструкционного материала для ответственных деталей (в первую очередь, лопаток) газотурбинных двигателей (ГТД) [4 – 7], работающих при температурах свыше 1000 °С [8, 9]. Жаропрочные никелевые сплавы на микроструктурном уровне состоят из  $\gamma$ -фазы (твердый раствор на основе никеля) и упрочняющей  $\gamma'$ -фазы [1, 4, 7]. Монокристаллические никелевые сплавы обладают кубической симметрией термоупругих свойств и могут рассматриваться как частный случай ортотропного материала с равными свойствами вдоль кристаллографических осей [100], [010] и [001].

Охлаждаемые рабочие лопатки ГТД, изготовленные из жаропрочных никелевых сплавов, оказываются наиболее нагруженными элементами ГТД [10 – 15], на которые действуют центробежные силы и давление газа, а также нестационарные и неоднородные температурные поля. Вследствие действия различных комбинированных переменных нагрузок, в рабочих лопатках ГТД образуются трещины усталости, ползучести и термоусталости [4, 16, 17].

Явления термоусталости, зарождения и распространения трещин в монокристаллических никелевых сплавах часто исследуются экспериментальным путем, например, на корсетных образцах [4]. Процесс зарождения термоусталостной трещины в корсетном образце с помощью метода конечных элементов (МКЭ) моделировали в работах [18, 19]. Оценка трещиностойкости никелевых сплавов и разработка методов вычисления параметров разрушения, в случае кубической симметрии и ортотропных материалов, представляет собой актуальную задачу, не получившую пока окончательного решения.

В качестве основных параметров разрушения в данной работе рассматриваются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). При вычислении КИН в анизотропных материалах в общем случае возникает необходимость анализа смешанных мод разрушения.

Цель настоящей работы – получение в явном виде формул для вычисления КИН через перемещения берегов в окрестности вершины трещины.

Для этого используется численный метод экстраполяции перемещений в вершину трещины в материале с кубической симметрией и в ортотропном материале. Для сравнения также рассматривается метод экстраполяции напряжений.

Весьма эффективным способом при этом является использование формализма Лехницкого [20]. Верификация предложенных соотношений, а также валидация метода экстраполяции напряжений проводится для изо- и ортотропного материалов, а также для материала с кубической симметрией.

### Определяющие уравнения

Определяющие уравнения для линейного упругого материала имеют следующий вид [21, 22]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = {}^4\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформаций,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений,  ${}^4\mathbf{S}$  – тензор упругой податливости материала.

Систему линейных уравнений (1) удобно переписать в матричном виде:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{S}]\{\boldsymbol{\sigma}\}, \quad (2)$$

где введены обозначения для вектор-столбцов, составленных из компонент тензоров

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Порядок перечисления компонент соответствует нотации Фойгта.

Матрица упругой податливости  $[\mathbf{S}]$   $6 \times 6$ , соответствующая тензору податливости  ${}^4\mathbf{S}$ , имеет различный вид для материалов разной структуры.

Случай ортотропного материала:

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $E_1, E_2, E_3$  – модули Юнга;  $G_{23}, G_{13}, G_{12}$  – модули сдвига;  $\nu_{23}, \nu_{13}, \nu_{12}$  – коэффициенты Пуассона.

Случай кубической симметрии:

$$[S] = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Случай изотропного материала:

$$[S] = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

### Численные методы определения КИН и формализм Лехницкого

Рассматривается задача об одноосном растяжении ортотропной плоскости (пластины) с одиночной наклонной прямолинейной трещиной в предположении плоского напряженного состояния. Оси введенной системы координат совпадают с осями анизотропии материала и направлением нагружения. Ориентация трещины не совпадает с осями анизотропии материала и направлением нагрузки (рис. 1).

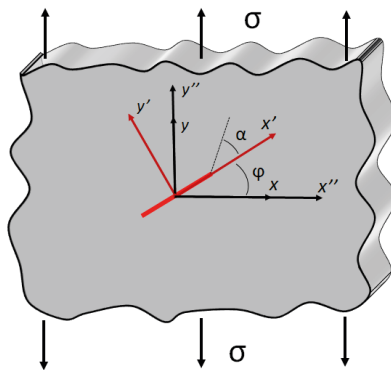


Рис. 1. Схема одноосного растяжения ортотропной плоскости с одиночной наклонной прямолинейной трещиной (выделена красной линией):

$x, y$  – оси глобальной системы координат;  $x', y'$  – оси системы координат трещины;  $x'', y''$  – оси анизотропии материала;  $\varphi$  – угол расположения трещины,  $\alpha$  – угол между направлением на точку и осью трещины; стрелки указывают направления нагружения ( $\sigma$  – одноосное растягивающее напряжение)

Асимптотические выражения для перемещений в окрестности вершины трещины в общем трехмерном случае, при наличии трех мод разрушения (ненулевые значения коэффициентов  $K_I, K_{II}, K_{III}$ ), для изотропного материала представляются соотношениями, приведенными в книге [22]. Аналогичные выражения для анизотропного материала получаем на основе использования формализма Лехницкого; они имеют следующий вид [23 – 25]:

$$\begin{aligned}
 u_x(r, \alpha) &= \frac{K_I \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left( \mu'_1 p_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - \mu'_2 p_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right) + \\
 &+ \frac{K_{II} \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\mu'_2 - \mu'_1} \left( p_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - p_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right), \\
 u_y(r, \alpha) &= \frac{K_I \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left( \mu'_1 q_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - \mu'_2 q_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right) + \\
 &+ \frac{K_{II} \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left( q_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - q_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right), \\
 u_z(r, \alpha) &= \frac{K_{III} \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_3 \sin \alpha}}{C'_{45} + \mu_3 C'_{44}} \right),
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $u_x(r, \alpha), u_y(r, \alpha), u_z(r, \alpha)$  – осевые перемещения в системе координат трещины;  $K_I, K_{II}, K_{III}$  – КИН для I, II, III моды разрушения;  $r$  – расстояние до рассматриваемой точки вершины трещины;  $\alpha$  – угол между направлением на точку и осью трещины;  $C'_{ij}$  – константы матрицы жесткости материала в системе координат трещины,  $[C] = [S]^{-1}$ ;

$p_i = S'_{11} \mu_i'^2 + S'_{12} - S'_{16} \mu_i'$ ,  $q_i = S'_{12} \mu_i' + \frac{S'_{22}}{\mu_i'} - S'_{26}$  ( $S'_{ij}$  – константы матрицы податливости материала в системе координат трещины);  $\mu'_1, \mu'_2$  – корни уравнения 4-ой степени, имеющего вид

$$S'_{11} \mu^4 - 2S'_{16} \mu^3 + (2S'_{12} + S'_{66}) \mu^2 - 2S'_{26} \mu + S'_{22} = 0, \tag{7}$$

с положительной мнимой частью;  $\mu'_3$  – корень уравнения

$$C'_{44} \mu^2 - 2C'_{45} \mu + C'_{55} = 0,$$

также с положительной мнимой частью.

Перемещения на свободных берегах трещины определяются с помощью выражений, представленных в книге [22], при этом угол между направлением на точку и осью трещины  $\alpha$  принимается равным  $\pi$ . С помощью полученных выражений можно найти значения КИН через перемещения берегов трещины; для изотропного материала они принимают вид

$$\begin{aligned}
 K_I &= u_y(r, \pi) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \frac{2G}{1+\kappa}, \\
 K_{II} &= u_x(r, \pi) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \frac{2G}{1+\kappa}, \\
 K_{III} &= u_z(r, \pi) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot G.
 \end{aligned} \tag{8}$$



В случае анизотропного материала, в результате подстановки  $\alpha = \pi$  в выражения (6) получаем формулу вида

$$\{\mathbf{u}\} = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} [\mathbf{B}] \cdot \{\mathbf{K}\}, \quad (9)$$

где  $\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_x(r, \pi) \\ u_y(r, \pi) \\ u_z(r, \pi) \end{Bmatrix}$ ,  $\{\mathbf{K}\} = \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix}$ ;

$$[\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\left(\frac{\mu'_1 p_2 - \mu'_2 p_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) & \operatorname{Re}\left(\frac{p_2 - p_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) & 0 \\ \operatorname{Re}\left(\frac{\mu'_1 q_2 - \mu'_2 q_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) & \operatorname{Re}\left(\frac{q_2 - q_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{C'_{44} C'_{55} - C'^2_{45}}} \end{pmatrix} \text{ — матрица } 3 \times 3 \text{ взаимного влияния}$$

трех компонент вектора относительного смещения берегов трещины на три КИН.

Результат обращения (9) позволяет вычислить КИН через перемещения берегов трещины в случае анизотропного материала [26, 27]:

$$\{\mathbf{K}\} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \cdot [\mathbf{B}]^{-1} \cdot \{\mathbf{u}\}, \quad (10)$$

где  $[\mathbf{B}]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re}\left(\frac{\mu'_1 p_2 - \mu'_2 p_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) & \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re}\left(-\frac{p_2 - p_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) & 0 \\ \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re}\left(-\frac{\mu'_1 q_2 - \mu'_2 q_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) & \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re}\left(\frac{q_2 - q_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C'_{44} C'_{55} - C'^2_{45}} \end{pmatrix}$ , (11)

$$\det[\mathbf{D}] = \begin{vmatrix} \operatorname{Re}\left(\frac{\mu'_1 p_2 - \mu'_2 p_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) & \operatorname{Re}\left(\frac{p_2 - p_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) \\ \operatorname{Re}\left(\frac{\mu'_1 q_2 - \mu'_2 q_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) & \operatorname{Re}\left(\frac{q_2 - q_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i\right) \end{vmatrix}.$$

Стоит отметить, что если система координат трещины не совпадает с осями анизотропии материала (а в случае смешанной моды разрушения так и происходит), то константы матрицы податливости и жесткости должны быть преобразованы в систему координат трещины и корни  $\mu'_1$ ,  $\mu'_2$  должны находиться из уравнения 4-ой степени с константами податливости в системе координат трещины.

В случае поворота системы координат, матрица перехода от одной системы координат к другой при повороте в плоскости на угол  $\varphi$  имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и формула преобразования элементов тензора упругих податливостей и упругих модулей 4-го ранга из старой в новую систему координат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S'_{ijkl} &= Q_{im} \cdot Q_{jn} \cdot Q_{ko} \cdot Q_{lp} \cdot S_{mnop}, \\ C'_{ijkl} &= Q_{im} \cdot Q_{jn} \cdot Q_{ko} \cdot Q_{lp} \cdot C_{mnop}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $S_{mnop}, S'_{ijkl}$  – элементы тензора податливости в исходной и повернутой (связана с трещиной) системах координат, соответственно;  $C_{mnop}, C'_{ijkl}$  – элементы тензора жесткости в исходной и повернутой (связана с трещиной) системах координат, соответственно.

При использовании формул (8) и (10), перемещения также нужно преобразовать из глобальной системы координат в систему координат, связанную с трещиной.

Если осуществить поворот в плоскости на угол  $\varphi$  для случая ортотропного материала и преобразовать тензоры упругих модулей, упругих податливостей и поворота в матрицы  $6 \times 6$  (учитываем, что для ортотропного материала  $S_{16} = S_{26} = S_{45} = 0$ ), то формулы (12) превратятся в указанные С. Г. Лехницким [20, 28].

Таким образом, зная перемещения берегов трещины и упругие свойства материала, можно вычислить КИН с помощью метода перемещений.

Асимптотические выражения для напряжений около вершины трещины в трехмерном случае, когда наблюдаются I, II и III моды разрушения, коэффициенты  $K_I, K_{II}, K_{III}$  определяются для изотропного материала соотношениями [22, 29]. Если рассматривать напряжения на продолжении линии роста трещины, в окрестности вершины трещины, т. е. при  $\alpha = 0$ , и выразить коэффициенты интенсивности напряжений через напряжения, то мы получаем для изотропного материала такие выражения:

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma_{yy}(r, 0) \cdot \sqrt{2\pi r}, \\ K_{II} &= \sigma_{xy}(r, 0) \cdot \sqrt{2\pi r}, \\ K_{III} &= \sigma_{yz}(r, 0) \cdot \sqrt{2\pi r}. \end{aligned} \quad (13)$$

Асимптотические выражения для напряжений около вершины трещины в трехмерном случае, для анизотропного материала, в результате применения формализма Лехницкого, принимают следующий вид [23 – 25, 30, 31]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(r, \alpha) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{\mu'_1 \mu'_2}{\mu'_1 - \mu'_2} \left( \frac{\mu'_2}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha}} - \frac{\mu'_1}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha}} \right) \right) + \\ &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left( \frac{\mu_2'^2}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha}} - \frac{\mu_1'^2}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha}} \right) \right), \\ \sigma_{yy}(r, \alpha) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left( \frac{\mu'_1}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha}} - \frac{\mu'_2}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha}} \right) \right) + \\ &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha}} \right) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(r, \alpha) = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{\mu'_1 \mu'_2}{\mu'_1 - \mu'_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha}} \right) \right) + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left( \frac{\mu'_1}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha}} - \frac{\mu'_2}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha}} \right) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sigma_{xz}(r, \alpha) = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{\mu'_3}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_3 \sin \alpha}} \right),$$

$$\sigma_{yz}(r, \alpha) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{\mu'_3}{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_3 \sin \alpha}} \right),$$

где  $\sigma_{ij}(r, \alpha)$  – компоненты тензора напряжений в системе координат трещины.

Рассматривая выражения (14) при  $\alpha = 0$  и выражая КИН через напряжения, мы получаем для анизотропного материала формулы, совпадающие с изотропным случаем:

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma_{yy}(r, 0) \cdot \sqrt{2\pi r}, \\ K_{II} &= \sigma_{xy}(r, 0) \cdot \sqrt{2\pi r}, \\ K_{III} &= \sigma_{yz}(r, 0) \cdot \sqrt{2\pi r}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, мы можем по напряжениям в окрестности вершины трещины находить КИН как для изотропного, так и анизотропного материалов, при этом полученные выражения будут одинаковыми. Стоит заметить, что, в случае использования формул (13) – (15), напряжения нужно преобразовать в систему координат, связанную с трещиной.

#### Вычисление матрицы $[\mathbf{B}]^{-1}$ через упругие модули

В предыдущем разделе было показано, как находить КИН по перемещениям с использованием формулы (10) для анизотропного материала. Получим теперь явные выражения для корней уравнения 4-ой степени и матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  через упругие модули ортотропного материала в случае плоского напряженного состояния, когда трещина находится в плоскости  $xу$ . Рассмотрим сначала уравнение 4-ой степени (7), когда система координат трещины совпадает с системой координат материала:

$$S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{26}\mu + S_{22} = 0. \quad (16)$$

Подставляем коэффициенты  $S_{ij}$  для случая плоского напряженного состояния, умножаем на  $E_1$ , и тогда, в силу справедливости уравнения (7), приходим к уравнению:

$$\mu^4 + \left( \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right) \mu^2 + \frac{E_1}{E_2} = 0. \quad (17)$$

Корни уравнения (17) зависят от упругих констант материала. Таким образом, существует два варианта корней уравнения (17).

*Вариант 1.* Если  $\left( \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right)^2 - 4 \frac{E_1}{E_2} < 0$ , то корни выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= A + iB, \\ \mu_2 &= -A + iB, \end{aligned} \quad (18)$$



где  $A = \frac{\sqrt{2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)}}{2}$ ,  $B = \frac{\sqrt{2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)}}{2}$ .

*Вариант 2.* Если  $\left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)^2 - 4\frac{E_1}{E_2} \geq 0$ , то корни выражаются как

$$\begin{aligned} \mu_1 &= i(b^* + a^*), \\ \mu_2 &= i(b^* - a^*), \end{aligned} \tag{19}$$

где  $b^* = \frac{\sqrt{\left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right) + 2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}}}{2}$ ,  $a^* = \frac{\sqrt{\left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right) - 2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}}}{2}$ .

Чтобы найти корни уравнения, когда система координат трещины не совпадает с системой координат материала, нужно преобразовать найденные корни. При повороте системы координат на угол  $\varphi$  корни уравнения в исходной и повернутой системах координат связаны соотношениями [20]:

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \frac{\mu_1 \cos \varphi - \sin \varphi}{\cos \varphi + \mu_1 \sin \varphi}, \\ \mu'_2 &= \frac{\mu_2 \cos \varphi - \sin \varphi}{\cos \varphi + \mu_2 \sin \varphi}. \end{aligned} \tag{20}$$

*Вариант 1.* Если  $\left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)^2 - 4\frac{E_1}{E_2} < 0$ , то в результате подстановки выражения (18) в формулу (20) после преобразований получим:

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \frac{A \cos 2\varphi + \frac{A^2 + B^2 - 1}{2} \sin 2\varphi}{\cos^2 \varphi + A \sin 2\varphi + (A^2 + B^2) \sin^2 \varphi} + i \frac{B}{\cos^2 \varphi + A \sin 2\varphi + (A^2 + B^2) \sin^2 \varphi}, \\ \mu'_2 &= \frac{-A \cos 2\varphi + \frac{A^2 + B^2 - 1}{2} \sin 2\varphi}{\cos^2 \varphi - A \sin 2\varphi + (A^2 + B^2) \sin^2 \varphi} + i \frac{B}{\cos^2 \varphi - A \sin 2\varphi + (A^2 + B^2) \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \tag{21}$$

*Вариант 2.* Если  $\left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)^2 - 4\frac{E_1}{E_2} \geq 0$ , то в результате подстановки выражения (19) в формулу (20) после преобразований получим:

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \frac{[(b^* + a^*)^2 - 1] \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + (b^* + a^*)^2 \sin^2 \varphi} + i \frac{b^* + a^*}{\cos^2 \varphi + (b^* + a^*)^2 \sin^2 \varphi}, \\ \mu'_2 &= \frac{[(b^* - a^*)^2 - 1] \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + (b^* - a^*)^2 \sin^2 \varphi} + i \frac{b^* - a^*}{\cos^2 \varphi + (b^* - a^*)^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \tag{22}$$

Матрица  $[\mathbf{B}]^{-1}$  определяется выражением (11). Упрощая выражения, с помощью которых вычисляются элементы матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{p_2 - p_1}{(\mu'_1 - \mu'_2)} &= S'_{16} - S'_{11} \cdot (\mu'_1 + \mu'_2), & \frac{q_2 - q_1}{(\mu'_1 - \mu'_2)} &= \frac{S'_{22}}{\mu'_1 \mu'_2} - S'_{12}, \\ \frac{\mu'_1 p_2 - \mu'_2 p_1}{(\mu'_1 - \mu'_2)} &= S'_{12} - S'_{11} \mu'_1 \mu'_2, & \frac{\mu'_1 q_2 - \mu'_2 q_1}{(\mu'_1 - \mu'_2)} &= S'_{22} \frac{\mu'_1 + \mu'_2}{\mu'_1 \mu'_2} - S'_{26}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя выражения (21) в (23) для комплексных корней уравнения и учитывая, что

$$E_1 S'_{11} = 1 - A^2 \sin^2 2\varphi + \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - 1 \right)^2 \sin^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - 1 \right),$$

получаем матрицу влияния  $[\mathbf{B}]^{-1}$  в явном виде:

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{4B} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right) \sin 2\varphi & \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2B} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right) & 0 \\ \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2B} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) & \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{4B} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right) \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{G_{13} G_{23}} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где  $B = \frac{\sqrt{2 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \left( \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right)}}{2}$ ,  $\varphi$  – угол поворота системы координат материала в систему

координат трещины.

Подставляя равенства (22) в (23) для комплексных корней уравнения (16) и учитывая, что

$$E_1 S'_{11} = (\cos^2 \varphi + B_1^2 \sin^2 \varphi)(\cos^2 \varphi + A_1^2 \sin^2 \varphi),$$

получаем выражения для матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$ , которые совпадают с формулами (24).

Таким образом, вид матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  для варианта 1 корней (21) уравнения (16) совпадает с видом (24) матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  для варианта 2 корней (22) уравнения (16).

КИН при плоском напряженном состоянии для ортотропного материала вычисляется по перемещениям на основе следующих соотношений:

$$\begin{aligned} K_{\text{I}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left[ \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{4B} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right) \sin 2\varphi \cdot u_x + \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2B} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right) \cdot u_y \right], \\ K_{\text{II}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left[ \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2B} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) \cdot u_x + \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{4B} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right) \sin 2\varphi \cdot u_y \right], \\ K_{\text{III}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \cdot \sqrt{G_{13} G_{23}} \cdot u_z, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $B = \frac{\sqrt{2 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \left( \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right)}}{2}$ .

Таким образом, матрица  $[\mathbf{B}]^{-1}$  – одна и та же для любых значений упругих свойств ортотропного материала. Стоит заметить, что в формуле (25) каждый КИН ( $K_I$  и  $K_{II}$ ) зависит от обеих компонент перемещений  $u_x$  и  $u_y$ .

Важным для практики случаем является вычисление КИН для монокристаллических лопаток газовых турбин, у которых наблюдается кубическая симметрия упругих свойств. В этом случае формулы (25) упрощаются следующим образом ( $E_1 = E_2 = E$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G$ ):

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \cdot \frac{E}{\sqrt{2 + \left(\frac{E}{G} - 2\nu\right)}} \cdot u_y, \\ K_{II} &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \cdot \frac{E}{\sqrt{2 + \left(\frac{E}{G} - 2\nu\right)}} \cdot u_x, \\ K_{III} &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \cdot G \cdot u_z. \end{aligned} \tag{26}$$

Каждый КИН зависит только от одной компоненты перемещения, в отличие от случая ортотропного материала.

Рассмотрим свойства матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$ .

*Свойство 1.* Из вида матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  следует, что при  $E_1 = E_2$  (например, в случае кубической симметрии) наблюдается разделение мод, т. е.  $K_I$  зависит только от  $u_y$ ,  $K_{II}$  зависит только от  $u_x$ , как в случае изотропного материала, однако выражения в случае кубической симметрии – другие, по сравнению с изотропным материалом.

*Свойство 2.* Так же в случае  $E_1 = E_2$  (например, для кубической симметрии), коэффициенты матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  одинаковы для любого угла  $\varphi$ , т. е. не зависят от него, как в случае изотропного материала.

*Свойство 3.* Элемент матрицы  $(B^{-1})_{33}$  – постоянный и не зависит от угла  $\varphi$ .

*Свойство 4.* В случаях кубической симметрии материала и изотропного материала,  $K_I$  линейно зависит от  $u_y$  с таким же коэффициентом пропорциональности, с каким  $K_I$  зависит от  $u_x$ .

*Свойство 5.* С целью анализа степени влияния  $u_x$  или  $u_y$  на  $K_I$  и  $K_{II}$  для ортотропного материала рассмотрим предельные переходы:

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{E_1}{E_2} \rightarrow 0} \frac{(B^{-1})_{12}}{(B^{-1})_{11}} &= \lim_{\frac{E_1}{E_2} \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\left(1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right) \sin \varphi \cos \varphi} = \operatorname{ctg} \varphi, & \lim_{\frac{E_1}{E_2} \rightarrow \infty} \frac{(B^{-1})_{12}}{(B^{-1})_{11}} &= \lim_{\frac{E_1}{E_2} \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - 1\right) \sin^2 \varphi + 1}{\left(1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right) \sin \varphi \cos \varphi} = -\operatorname{tg} \varphi, \\ \lim_{\frac{E_1}{E_2} \rightarrow 0} \frac{(B^{-1})_{21}}{(B^{-1})_{22}} &= \lim_{\frac{E_1}{E_2} \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\left(1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right) \sin \varphi \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi, & \lim_{\frac{E_1}{E_2} \rightarrow \infty} \frac{(B^{-1})_{21}}{(B^{-1})_{22}} &= \lim_{\frac{E_1}{E_2} \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - 1\right) \cos^2 \varphi + 1}{\left(1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right) \sin \varphi \cos \varphi} = -\operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned}$$

Представленные выше результаты доказывают, что степень влияния  $u_x$  или  $u_y$  на  $K_I$  и  $K_{II}$  зависит от отношения модулей Юнга  $E_1 / E_2$  и угла поворота  $\varphi$ .

*Свойство 6.* Из выражений (25) видно, что чем ближе корень  $\sqrt{E_1 / E_2}$  к единице, тем меньше элементы  $(B^{-1})_{11}$ ,  $(B^{-1})_{22}$  по сравнению с элементами  $(B^{-1})_{12}$ ,  $(B^{-1})_{21}$ . И тогда значение  $K_I$  в большей степени определяется значением  $u_y$ , а значение  $K_{II}$  в большей степени определяется значением  $u_x$ .



Анализ приведенных выше соотношений показывает, что степень влияния  $u_y$  или  $u_x$  зависит от значения угла  $\varphi$ .

*Свойство 7.* Рассмотрим определитель матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$ :

$$\det [\mathbf{B}]^{-1} = \sqrt{G_{13}G_{23}} \cdot \frac{E_1 E_2}{4B^2} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{E_1}{E_2} - 2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{E_1}{E_2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \right. \\ \left. - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \sin^4 \varphi - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \cos^4 \varphi \right] = -\sqrt{G_{13}G_{23}} \frac{E_1 \sqrt{E_1 E_2}}{4B^2}.$$

Из вида определителя матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  следует, что нельзя однозначно вычислить КИН по перемещениям, если

$$B = \frac{\sqrt{2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \left( \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right)}}{2} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \left( \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right) = 0, \quad \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} < 0, \quad \frac{E_1}{G_{12}} + 2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} < 1.$$

Это соответствует варианту значений корней уравнения 4-ой степени, когда они являются вещественными, что делает все элементы матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  равными нулю, однако доказано, что уравнение (16) не может иметь вещественных корней [15]. Но если соотношение упругих констант таково, что

$$2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \left( \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right) \approx 0$$

или  $E_1$  достаточно мало, то могут возникнуть проблемы при численном вычислении матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  и вычислении КИН.

Для демонстрации других свойств элементов матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  примем упругие свойства ортотропного материала равными приведенным в табл. 1 и построим график изменения элементов матрицы в зависимости от угла поворота трещины  $\varphi$  (рис. 2).

Таблица 1

**Упругие свойства ортотропного материала, использованные в расчетах**

Модуль, МПа		Коэффициент Пуассона
Юнга	сдвига	
$E_1 = 20000$	$G_{12} = 13000$	$\nu_{12} = 0,30$
$E_2 = 15000$	$G_{23} = 11000$	$\nu_{23} = 0,25$
$E_3 = 10000$	$G_{31} = 8000$	$\nu_{31} = 0,20$

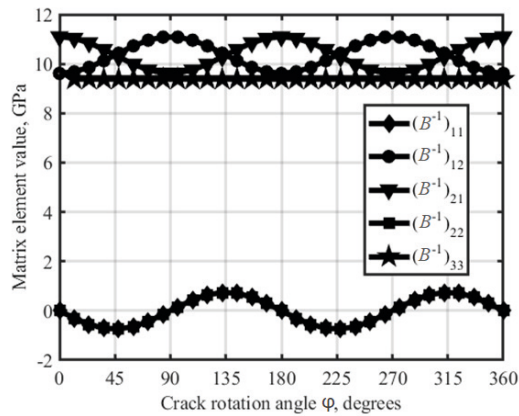


Рис. 2. Зависимости значений элементов матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  ортотропного материала от угла поворота трещины относительно его осей

*Свойство 8.* На рис. 2 видно, что все элементы матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$ , за исключением постоянного элемента  $(B^{-1})_{33}$ , изменяются периодически с периодом  $T = \pi$ .

Периодически элементы матрицы  $(B^{-1})_{11}$ ,  $(B^{-1})_{22}$  обращаются в нуль, и коэффициент  $K_I$  зависит только от  $u_y$ , а  $K_{II}$  зависит только от  $u_x$  при значениях угла  $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$  для ортотропного материала (так же, как для случаев кубической симметрии и изотропного материала).

Графики элементов матрицы  $(B^{-1})_{12}$ ,  $(B^{-1})_{21}$  сдвинуты друг относительно друга на угол  $\varphi = \pi/2$ .

*Свойство 9.* Для анализа знакоопределенности матрицы вычислим главные миноры матрицы:

$$\text{minor } \Delta_1 = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{4B} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right) \sin 2\varphi$$

может быть как больше, так и меньше нуля;

$$\text{minor } \Delta_2 = -\frac{E_1 \sqrt{E_1 E_2}}{4B^2} < 0, \quad \Delta_3 = -\sqrt{G_{13} G_{23}} \frac{E_1 \sqrt{E_1 E_2}}{4B^2} < 0.$$

Отсюда видно, что матрица  $[\mathbf{B}]^{-1}$  не является ни положительно, ни отрицательно определенной.

*Свойство 10.* Собственные числа матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  определяются как корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{4B} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right) \sin 2\varphi - \lambda & \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2B} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right) & 0 \\ \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2B} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) & \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{4B} \left( 1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right) \sin 2\varphi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{G_{13} G_{23}} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В результате вычисления определителя получаем кубическое уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\left(\sqrt{G_{13}G_{23}} - \lambda\right) \cdot \left[\lambda^2 - \lambda \frac{\sqrt{E_1E_2}}{B} \left(1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right) \sin \varphi \cos \varphi - \frac{E_1\sqrt{E_1E_2}}{4B^2}\right] = 0. \quad (27)$$

Разделяя множители и вычисляя дискриминант, находим корни уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{E_1E_2}}{2B} \left[ \left(1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right) \sin \varphi \cos \varphi + \sqrt{\left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{E_1}{E_2} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)} \right],$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{E_1E_2}}{2B} \left[ \left(1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right) \sin \varphi \cos \varphi - \sqrt{\left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{E_1}{E_2} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)} \right],$$

$$\lambda_3 = \sqrt{G_{13}G_{23}}.$$
(28)

Таким образом, одно собственное число матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  вообще не зависит от угла  $\varphi$ , а другие два являются периодическими функциями от угла  $\varphi$  с периодом  $\pi$ .

### Верификация методов вычисления КИН для трещин в анизотропных материалах с помощью метода конечных элементов

Тестирование метода перемещений и полученных выражений для матрицы  $[\mathbf{B}]^{-1}$  проводилось на основе результатов КЭ-решения краевой задачи и вычисления КИН для случая одиночной наклонной трещины в бесконечной плоскости для смешанной моды разрушения (при наличии мод  $K_I$  и  $K_{II}$ ). Рассматривалась одиночная трещина в бесконечной плоскости под углом  $\varphi$  к оси анизотропии материала, ортогональной направлению действия нагрузки (рис. 3). Задача решалась в двумерной постановке, в предположении плоского напряженного состояния.

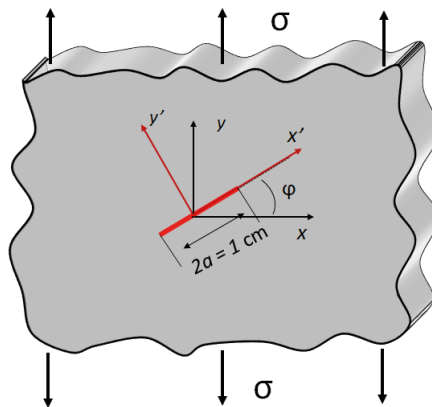


Рис. 3. Схема, отражающая постановку задачи об одноосном растяжении плоскости с наклонной трещиной (выделена красным цветом).

Обозначения те же, что на рис. 1

Для данной задачи известно аналитическое решение для КИН [23]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \cos^2 \varphi,$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$
(29)

Аналитическое решение для бесконечной плоскости не зависит от вида анизотропии и значений упругих модулей материала. Задача решалась в КЭ-комплексе PANTOCRATOR [32], в котором было запрограммировано вычисление КИН для изотропного и анизотроп-

ного материалов с помощью метода перемещений (см. формулы (8), (10)) и напряжений (см. формулы (13) и (15)). В расчетах использовались квадратичные 8-узловые конечные элементы.

Были построены КЭ-модели для сравнения численных решений с аналитическим при разных значениях угла  $\varphi$  (угол ориентации трещины по отношению к осям ортотропии материала). На рис. 4 представлена в качестве примера КЭ-модель со 126 тыс. степенями свободы и 80 элементами на берегу трещины для случая квадратной пластины конечных размеров и угла наклона трещины  $\varphi = 45^\circ$ .

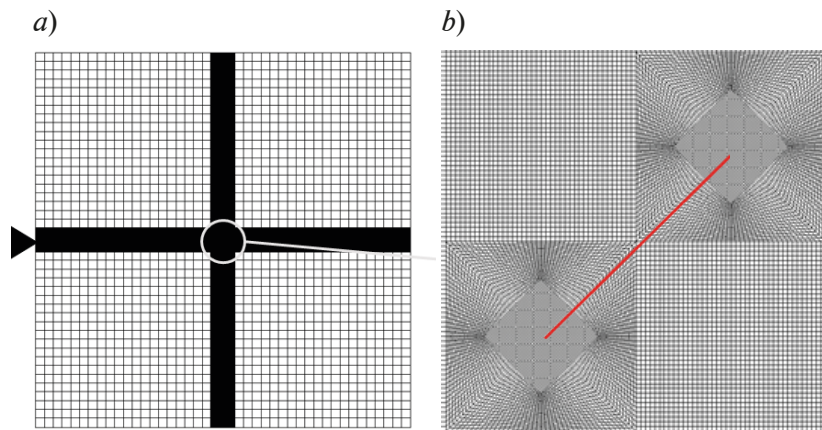


Рис. 4. Конечно-элементная модель пластины с наклонной трещиной (a) и ее центральный фрагмент (b)

Длина расчетной области была выбрана равной 22 см, ширина расчетной области – также 22 см; длина трещины – 1 см, что является приближением для моделирования поведения трещины в бесконечной области. Пластина была нагружена на верхней грани напряжением  $\sigma_{yy} = 100$  МПа и закреплена на нижней грани (для исключения твердотельных перемещений). Использованные в расчетах упругие свойства материалов представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Упругие свойства материалов для трех вариантов их симметрии, использованные в КЭ-расчетах**

Материал	Модуль, МПа		Коэффициент Пуассона
	Юнга	сдвига	
Изотропный	$E = 20000$	$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 7692,3$	$\nu = 0,30$
С кубической симметрией свойств	$E = 20000$	$G = 11000$	$\nu = 0,30$
Ортотропный	$E_1 = 20000$	$G_{12} = 13000$	$\nu_{12} = 0,30$
	$E_2 = 15000$	$G_{23} = 11000$	$\nu_{23} = 0,25$
	$E_3 = 10000$	$G_{31} = 8000$	$\nu_{31} = 0,20$

На рис. 5 представлено сравнение численных результатов для КИН, полученных методами перемещений и напряжений, с аналитическим решением для трех вариантов материала: изотропного, ортотропного и с кубической симметрией.

В табл. 3 представлены значения  $K_I$  и  $K_{II}$ , соответствующие рис. 5. Следует отметить, что максимальная погрешность  $\delta_{\max}$  для метода перемещений (0,79 %) превосходит таковую для метода напряжений (0,42 %); погрешность для изотропного материала минимальна, для ортотропного максимальна. Однако во всех рассмотренных случаях погрешность не превосходит 0,8 %, что указывает на высокую точность рассмотренных методов.

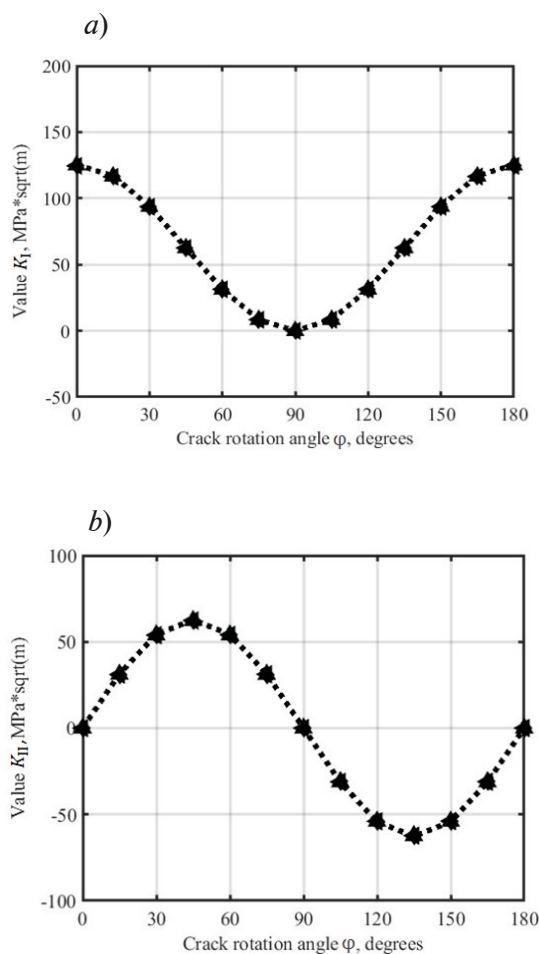


Рис. 5. Сравнение численных решений (символы) для КИН  $K_I$  (a) и  $K_{II}$  (b), полученных методами перемещений и напряжений, с аналитическими решениями (пунктиры). Приведены данные для изотропного ( $\blacktriangle$ ), ортотропного ( $\blacktriangleleft$ ) материалов и материала с кубической симметрией ( $\blacklozenge$ )

Рис. 6 показывает различия в раскрытии трещины для разных вариантов анизотропии материала для случая угла наклона трещины  $\varphi = 60^\circ$ .

Результаты КЭ-расчетов показывают, что из трех рассмотренных случаев симметрии упругих свойств материала, в изотропном случае трещина раскрывается шире всех, в ортотропном – меньше всех, при прочих равных условиях, заданных конкретными значениями упругих параметров.



Таблица 3

**Сравнение аналитического решения с численными  
для трех типов материалов**

φ, град	Аналитическое решение		Численное решение методом					
			перемещений			напряжений		
	$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$	$\delta_{\max}$	$K_I$	$K_{II}$	$\delta_{\max}$
	МПа·м <sup>1/2</sup>			%			МПа·м <sup>1/2</sup>	
<i>Для изотропного материала</i>								
0	125,33	0	124,96	0,0005	<b>0,29</b>	125,05	0,0003	<b>0,22</b>
30	93,99	54,27	93,70	53,93	<b>0,62</b>	93,93	54,26	<b>0,07</b>
60	31,33	54,27	31,22	53,92	<b>0,64</b>	31,30	54,25	<b>0,10</b>
90	0	0	< 0,0001	0,0002	<b>0,02</b>	< 0,0001	< 0,0001	< <b>0,01</b>
120	31,33	-54,27	31,22	-53,91	<b>0,65</b>	31,28	-54,23	<b>0,15</b>
150	93,99	-54,27	93,70	-53,93	<b>0,62</b>	93,93	-54,26	<b>0,07</b>
180	125,33	0	124,96	0,0005	<b>0,29</b>	125,05	0,0003	<b>0,22</b>
<i>Для материала с кубической симметрией</i>								
0	125,33	0	124,77	0,004	<b>0,45</b>	125,07	0,003	<b>0,20</b>
30	93,99	54,27	93,68	53,89	<b>0,70</b>	93,90	54,22	<b>0,10</b>
60	31,33	54,27	31,26	53,94	<b>0,60</b>	31,34	54,29	<b>0,04</b>
90	0	0	< 0,0001	0,0002	<b>0,02</b>	< 0,0001	< 0,0001	< <b>0,01</b>
120	31,33	-54,27	31,25	-53,94	<b>0,60</b>	31,31	-54,29	<b>0,07</b>
150	93,99	-54,27	93,68	-53,89	<b>0,70</b>	93,90	-54,22	<b>0,10</b>
180	125,33	0	124,77	0,004	<b>0,45</b>	125,07	0,003	<b>0,20</b>
<i>Для ортотропного материала</i>								
0	125,33	0	124,50	0,006	<b>0,66</b>	124,80	0,007	<b>0,42</b>
30	93,99	54,27	93,61	53,84	<b>0,79</b>	93,83	54,23	<b>0,18</b>
60	31,33	54,27	31,31	53,95	<b>0,58</b>	31,40	54,30	<b>0,20</b>
90	0	0	< 0,0001	0,0002	<b>0,02</b>	< 0,0001	< 0,0001	< <b>0,01</b>
120	31,33	-54,27	31,29	-53,95	<b>0,58</b>	31,35	-54,30	<b>0,08</b>
150	93,99	-54,27	93,61	-53,84	<b>0,79</b>	93,83	-54,23	<b>0,18</b>
180	125,33	0	124,50	0,006	<b>0,66</b>	124,80	0,0068	<b>0,42</b>

Обозначения: φ – угол наклона трещины к оси x;  $\delta_{\max}$  – максимальная относительная погрешность одного из пары  $K_I$  и  $K_{II}$  (коэффициенты интенсивности напряжений для I и II моды разрушения); она берется относительно результата аналитического решения.

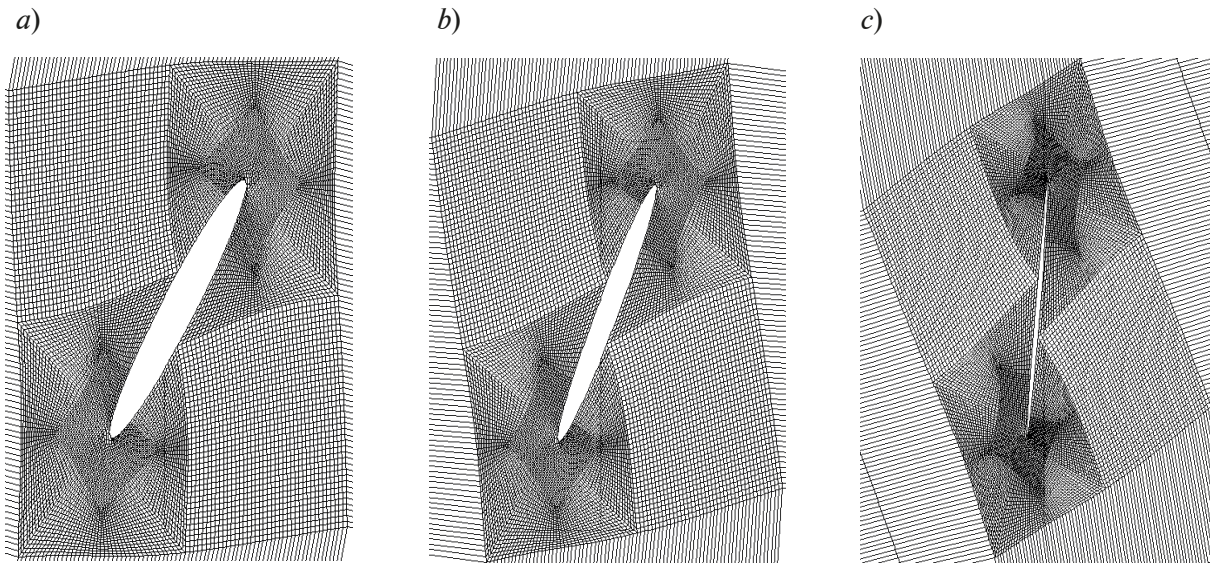


Рис. 6. Сравнение результатов КЭ-расчетов раскрытия трещины (угол начального наклона  $\varphi = 60^\circ$ ) для материалов с различной симметрией упругих свойств: изотропного (a), с кубической симметрией (b) и ортотропного (c). Масштаб перемещений увеличен в 60 раз

### Выводы

Для случая плоского напряженного состояния в работе были получены в явной форме выражения для корней уравнения 4-ой степени, определяющие элементы матрицы взаимного влияния трех компонент вектора относительного смещения берегов трещины на три коэффициента интенсивности напряжений  $[B]^{-1}$  через упругие константы материалов, обладающих ортотропией либо кубической симметрией. Произведено систематическое исследование свойств матрицы взаимного влияния  $[B]^{-1}$ . Установлено отсутствие смешанности мод для материала с кубической симметрией.

Помимо этого, были выполнены расчеты значений КИН для одиночной наклонной трещины в плоском напряженном состоянии с помощью двух численных методов: экстраполяции перемещений и напряжений в вершину трещины для разных ориентаций трещины в плоскости относительно осей анизотропии материала. Результаты численных решений хорошо согласуются с аналитическим решением для изотропного материала, материала с кубической симметрией и ортотропного (погрешность во всех случаях не превышала 0,8 %). При этом установлено, что метод вычисления КИН через экстраполяцию напряжений в вершину трещины обладает более высокой точностью, чем метод, основанный на экстраполяции перемещений.

Конечно-элементное моделирование пластины с наклонной трещиной показало, что при равенстве максимальных значений модуля Юнга трещина демонстрирует максимальное раскрытие берегов в изотропном материале, а минимальное раскрытие наблюдается в случае ортотропного материала.

Рассмотренные методы экстраполяции перемещений и напряжений могут быть рекомендованы для оценки КИН при моделировании роста трещин и расчета трещиностойкости монокристаллических рабочих лопаток газовых турбин.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шалин Р. Е., Светлов И. Л., Качалов Е. Б., Толораия В. Н., Гаврилин В. С. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов. М.: Машиностроение. 1997. 336 с.
2. Wilson B. C., Hickman J. A., Fuchs G. E. The effect of solution heat treatment on a single-crystal Ni-based superalloy // *The Journal of the Minerals, Metals & Materials Society*. 2003. Vol. 55. No. 3. Pp. 35–40.
3. Ходинев И. А., Монин С. А. Анизотропия характеристик малоциклового усталости монокристаллических жаропрочных никелевых сплавов // *Труды ВИАМ (Всероссийский НИИ авиационных материалов)*. 2020. № 10 (92). С. 97–105.
4. Гецов Л. Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин. В 2 тт. Т. 1. Рыбинск: Издат. дом «Газотурбинные технологии», 2010. 605 с.
5. Getsov L. B., Semenov A. S., Ignatovich I. A. Thermal fatigue analysis of turbine discs on the base of deformation criterion // *International Journal of Fatigue*. 2017. Vol. 97. April. Pp. 88–97.
6. Wang R., Zhang B., Hu D., Jiang K., Mao J., Jing F. A critical-plane-based thermomechanical fatigue lifetime prediction model and its application in nickel-based single-crystal turbine blades // *Materials at High Temperatures*. 2019. Vol. 36. No. 4. Pp. 325–334.
7. Глотка А. А., Гайдук С. В. Прогнозирование свойств монокристаллических жаропрочных никелевых сплавов // *Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта*. 2019. № 2 (80). С. 91–100.
8. Бондаренко Ю. А., Колодяжный М. Ю., Ечин А. Б., Нарский А. Р. Направленная кристаллизация, структура и свойства естественного композита на основе эвтектики Nb-Si на рабочие температуры до 1350 °С для лопаток ГТД // *Труды ВИАМ*. 2018. № 1 (61). С. 3–14.
9. Бондаренко Ю. А. Тенденция развития высокотемпературных металлических материалов и технологий при создании современных авиационных газотурбинных двигателей // *Авиационные материалы и технологии*. 2019. № 2 (55). С. 3–11.
10. Семенов А. С., Грищенко А. И., Колотников М. Е., Гецов Л. Б. Конечный элементный анализ термоциклической прочности лопаток газовых турбин Ч. 1. Модели материала, критерии разрушения, идентификация параметров // *Вестник УГАТУ (Уфимский государственный авиационный технический университет)*. 2019. Т. 23. № 1 (83). С. 70–81.
11. Семенов А. С., Грищенко А. И., Колотников М. Е., Гецов Л. Б. Конечный элементный анализ термоциклической прочности лопаток газовых турбин. Ч. 2. Результаты расчетов // *Вестник УГАТУ*. 2019. Т. 23. № 2 (84). С. 61–74.
12. Гецов Л. Б., Семенов А. С., Бессчетнов В. А., Грищенко А. И., Семёнов С. Г. Методика определения длительной прочности охлаждаемых лопаток из монокристаллических жаропрочных сплавов // *Теплоэнергетика*. 2017. № 4. С. 48–56.
13. Гецов Л. Б., Михайлов В. Е., Семенов А. С., Кривоносова В. В., Ножницкий Ю. А., Блинник Б. С., Магеррамова Л. А. Расчетное определение ресурса рабочих и направляющих лопаток ГТУ. Ч. 1. Поликристаллические материалы // *Газотурбинные технологии*. 2011. № 7. С. 24–30.
14. Гецов Л. Б., Михайлов В. Е., Семенов А. С., Кривоносова В. В., Ножницкий Ю. А., Блинник Б. С., Магеррамова Л. А. Расчетное определение ресурса рабочих и направляющих лопаток ГТУ. Ч. 2. Монокристаллические материалы // *Газотурбинные технологии*. 2011. № 8. С. 18–25.
15. Кузьмина Н. А., Пьянкова Л. А. Контроль кристаллографической ориентации монокристаллических отливок никелевых жаропрочных сплавов методом рентгеновской дифрактометрии // *Труды ВИАМ*. 2019. № 12 (84). С. 11–19.
16. Semenov A., Semenov S., Nazarenko A., Getsov L. Computer simulation of fatigue, creep and thermal-fatigue cracks propagation in gas-turbine blades // *Materials and Technology*. 2012. Vol. 46. No. 3. Pp. 197–203.
17. Семенов А. С., Семенов С. Г., Гецов Л. Б. Методы расчетного определения скорости роста трещин усталости, ползучести и термоусталости в поли- и монокристаллических лопатках ГТУ // *Проблемы прочности*. 2015. № 2. С. 61–87.
18. Savikovskii A. V., Semenov A. S., Getsov L. B. Coupled thermo-electro-mechanical modeling of thermal fatigue of single-crystal corset samples // *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42. No. 3. Pp. 296–310.



19. **Savikovskii A. V., Semenov A. S., Getsov L. B.** Crystallographic orientation, delay time and mechanical constants influence on thermal fatigue strength of single-crystal nickel superalloys // *Materials Physics and Mechanics*. 2020. Vol. 44. No. 1. Pp. 125–136.
20. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
21. **Мартынов Н. И.** Комплексная форма закона Гука анизотропного упругого тела // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2020. № 4. С. 71–95.
22. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. С. 223–226.
23. **Sih G. C., Paris P. C., Irwin G. R.** On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // *International Journal of Fracture Mechanics*. 1965. Vol. 1. No. 3. Pp. 189–203.
24. **Judt P. O., Ricoeur A., Linek G.** Crack path prediction in rolled aluminum plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 138. April. Pp. 33–48.
25. **Banks-Sills L., Hershkovitz I., Wawrzynek P. A., Eliasi R., Ingraffea A. R.** Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I:  $z = 0$  is a symmetric plane // *Engineering Fracture Mechanics*. 2005. Vol. 72. No. 15. Pp. 2328–2358.
26. **Semenov S. G., Semenov A. S., Getsov L. B., Melnikov B. E.** Application of linear and nonlinear fracture mechanics criteria for crack propagation analysis in single crystal bodies // *Proceedings of XLI International Summer School –Conference “Advanced Problems in Mechanics (APM-2013)” Russia, St. Petersburg, July 2–6, 2013*. Pp. 75–82.
27. **Ranjan S., Arakere N. K.** A fracture-mechanics-based methodology for fatigue life prediction of single crystal nickel-based superalloys // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2008. Vol. 130. No. 3. P. 032501.
28. **Khansari N. M., Fakoor M., Berto F.** Probabilistic micromechanical damage model for mixed-mode I/II fracture investigation of composite materials // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 99. February. Pp. 177–193.
29. **Cao J., Li F., Ma H., Sun Z.** Study of anisotropic crack growth behavior for aluminum alloy 7050-T7451 // *Engineering Fracture Mechanics*. 2018. Vol. 196. 1 June. Pp. 98–112.
30. **Fakoor M., Shavsavar S.** The effect of T-stress on mixed mode I/II fracture of composite materials: Reinforcement isotropic solid model in combination with maximum shear stress theory // *International Journal of Solids and Structures*. 2021. Vol. 229. 15 October. P. 111145.
31. **Fakoor M., Farid H. M.** Mixed-mode I/II fracture criterion for crack initiation assessment of composite materials // *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230. No. 1. Pp. 281–301.
32. **Семенов А. С.** PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // *Труды V-ой Международной конференции «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций»*. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466–480.

## REFERENCES

1. **Shalin R. E., Svetlov I. L., Kachalov E. B., et al.**, Monokristally nikelovykh zharoprochnykh splavov [Single crystals of nickel heat-resistant alloys], *Mashinostroyeniye*, Moscow, 1997 (in Russian).
2. **Wilson B. C., Hickman J. A., Fuchs G. E.**, The effect of solution heat treatment on a single-crystal Ni-based superalloy, *JOM*. 55 (3) (2003) 35–40.
3. **Hodinev I. A., Monin S. A.**, Anisotropy of low cycle fatigue characteristics of single-crystal heat-resistant nickel alloys, *Proceedings of VIAM*. (10 (92)) (2020) 97–105 (in Russian).
4. **Getsov L. B.**, Materialy i prochnost detaley gazovykh turbin [Materials and strength of gas turbine parts], in 2 Vols., Vol. 1, Gas Turbine Technologies Publishing, Rybinsk, 2010 (in Russian).
5. **Getsov L. B., Semenov A. S., Ignatovich I. A.**, Thermal fatigue analysis of turbine discs on the base of deformation criterion, *Int. J. Fatig.* 97 (April) (2017) 88–97.
6. **Wang R., Zhang B., Hu D., et al.**, A critical-plane-based thermomechanical fatigue lifetime prediction model and its application in nickel-based single-crystal turbine blades, *Mater. High Temperat.* 36 (4) (2019) 325–334.
7. **Glotka A. A., Gayduk S. V.**, Prediction of the properties of single-crystal heat-resistance nickel alloys, *Science & Progress of Transport. Bulletin of Dnepropetrovsk National University of Railway Transport*. (2(80)) (2019) 91–100 (in Russian).



8. **Bondarenko Yu. A., Kolodyazhny M. Yu., Echin A. B., Narskiy A. R.,** Directional solidification, structure and properties of natural composite based on eutectic Nb-Si at working temperatures up to 1350 °C for the blades of gas turbine engines, *Proceedings of VIAM.* (1 (61)) (2018) 3–14 (in Russian).
9. **Bondarenko Yu. A.,** Trends in the development of high-temperature metal materials and technologies in the production of modern aircraft gas turbine engines, *Aviation Materials and Technologies.* (2 (55)) (2019) 3–11 (in Russian).
10. **Semenov A. S., Grishchenko A. I., Kolotnikov M. E., Getsov L. B.,** Finite-element analysis of thermal fatigue of gas turbine blades, Part 1. Material models, fracture criteria, identification, *Vestnik UGATU [USATU Bulletin].* 23 (1 (83)) (2019) 70–81 (in Russian).
11. **Semenov A. S., Grishchenko A. I., Kolotnikov M. E., Getsov L. B.,** Finite-element analysis of thermal fatigue of gas turbine blades, Part 2. Results of computations, *Vestnik UGATU [USATU Bulletin].* 23 (2 (84)) (2019) 61–74 (in Russian).
12. **Getsov L. B., Semenov A. S., Besschetnov V. A., et al.,** Long-term strength determination for cooled blades made of monocrystalline superalloys, *Therm. Eng.* 64 (4) (2017) 280–287.
13. **Getsov L. B., Mikhaylov V. E., Semenov A. S., et al.,** Raschetnoye opredeleniye resursa rabochikh i napravlyayushchikh lopatok GTU. Chast 1. Polikristallicheskiye materialy [Design determination of the work life of operating and guide blades of gas-turbine installations. Part 1. Polycrystalline materials], *Gas Turbine Technologies.* (7) (2011) 24–30 (in Russian).
14. **Getsov L. B., Mikhaylov V. E., Semenov A. S., et al.,** Raschetnoye opredeleniye resursa rabochikh i napravlyayushchikh lopatok GTU. Chast 2. Monokristallicheskiye materialy [Computational determination of the work life of operating and guide blades of gas-turbine units. Part 1. Monocrystalline materials], *Gas Turbine Technologies.* (8) (2011) 18–25 (in Russian).
15. **Kuzmina N. A., Pyankova L. A.,** Control of crystallographic orientation of monocrystalline nickel castings heat-resistant alloys by X-ray diffractometry, *Proceedings of VIAM.* (12 (84)) (2019) 11–19 (in Russian).
16. **Semenov A. S., Semenov S. G., Nazarenko A. A., Getsov L. B.,** Computer simulation of fatigue, creep and thermal fatigue cracks propagation in gas turbine blades, *Mater. Technol.* 46 (3) (2012) 197–203.
17. **Semenov A. S., Semenov S. G., Getsov L. B.,** Methods of computational determination of growth rates of fatigue, creep, and thermal fatigue cracks in poli- and monocrystalline blades of gas-turbine units, *Strength Mater.* 47 (2) (2015) 268–290.
18. **Savikovskii A. V., Semenov A. S., Getsov L. B.,** Coupled thermo-electro-mechanical modeling of thermal fatigue of single-crystal corset samples, *Mater. Phys. Mech.* 42 (3) (2019) 296–310.
19. **Savikovskii A. V., Semenov A. S., Getsov L. B.,** Crystallographic orientation, delay time and mechanical constants influence on thermal fatigue strength of single-crystal nickel superalloys, *Mater. Phys. Mech.* 44 (1) (2020) 125–136.
20. **Lekhnitsky S. G.,** *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [Theory of elasticity of an anisotropic elastic body],* Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
21. **Martynov N. I.,** Complex form of Hooke's law of anisotropic elastic body, *Mechanics of Solids.* 55 (4) (2020) 514–535.
22. **Kachanov M. L.,** *Osnovy mekhaniki razrusheniya [Fundamentals of fracture mechanics].* Nauka, Moscow, 1974, Pp. 223–226 (in Russian).
23. **Sih G. C., Paris P. C., Irwin G. R.,** On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, *Int. J. Fract.* 1 (3) (1965) 189–203.
24. **Judt P. O., Ricoeur A., Linek G.,** Crack path prediction in rolled aluminum plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation, *Eng. Fract. Mech.* 138 (April) (2015) 33–48.
25. **Banks-Sills L., Hershkovitz I., Wawrzynek P. A., et al.,** Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I:  $z = 0$  is a symmetric plane, *Eng. Fract. Mech.* 72 (15) (2005) 2328–2358.
26. **Semenov S. G., Semenov A. S., Getsov L. B., et al.,** Application of linear and nonlinear fracture mechanics criteria for crack propagation analysis in single crystal bodies, *Proc. XLI Int. Summer School-Conf. "Advanced Problems in Mechanics (APM-2013)"* St. Petersburg, Russia, July 2–6 (2013) 75–82.
27. **Ranjan S., Arakere N. K.,** A fracture-mechanics-based methodology for fatigue life prediction of single crystal nickel-based superalloys, *J. Eng. Gas Turbines Power.* 130 (3) (2008) 032501.
28. **Khansari N. M., Fakoor M., Berto F.,** Probabilistic micromechanical damage model for mixed-



mode I/II fracture investigation of composite materials, *Theor. Appl. Fract. Mech.* 99 (February) (2019) 177–193.

29. **Cao J., Li F., Ma H., Sun Z.**, Study of anisotropic crack growth behavior for aluminum alloy 7050-T7451, *Eng. Fract. Mech.* 196 (1 June) (2018) 98–112.

30. **Fakoor M., Shavsavar S.**, The effect of T-stress on mixed mode I/II fracture of composite materials: Reinforcement isotropic solid model in combination with maximum shear stress theory, *Int. J. Solids & Struct.* 229 (15 October) (2021) 111145.

31. **Fakoor M., Farid H. M.**, Mixed-mode I/II fracture criterion for crack initiation assessment of composite materials, *Acta Mechanica.* 230 (1) (2019) 281–301.

32. **Semenov A. S.**, PANTOCRATOR – konechno-elementnyy programmnyy kompleks, oriyentirovanny na resheniye nelineynykh zadach mekhaniki [PANTOCRATOR – finite-element program specialized on the solution of non-linear problems of solid body mechanics], In: *Proc. The V-th Int. Conf. "Scientific and Engineering Problems of Reliability and Service Life of Structures and Methods of Their Decision"*, St. Petersburg Polytechnical University Publishing, St. Petersburg (2003) 466–480.

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**САВИКОВСКИЙ Артем Викторович** – аспирант кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
savikovskij.av@edu.spbstu.ru  
ORCID: 0000-0003-1710-1943

**СЕМЕНОВ Артем Семенович** – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
Semenov.Artem@googlemail.com  
ORCID: 0000-0002-8225-3487

### THE AUTHORS

**SAVIKOVSKII Artem V.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia  
savikovskij.av@edu.spbstu.ru  
ORCID: 0000-0003-1710-1943

**SEMENOV Artem S.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia  
Semenov.Artem@googlemail.com  
ORCID: 0000-0002-8225-3487

*Статья поступила в редакцию 20.01.2022. Одобрена после рецензирования 22.04.2022. Принята 22.04.2022.*

*Received 20.01.2022. Approved after reviewing 22.04.2022. Accepted 22.04.2022.*