

DOI: 10.18721/JPM.14305
 УДК 533.1; 621.791

УСЛОВИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛА КРОККО ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ПЛАЗМЕННОГО ФАКЕЛА ПРИ ЛАЗЕРНОЙ СВАРКЕ

С.О. Дудолодов¹, Н.В. Ларионов^{1,2}

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
 Санкт-Петербург, Российская Федерация;

² Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,
 Санкт-Петербург, Российская Федерация

На основе теоретического подхода, разработанного в статье Туричина Г.А. и др. (ТВТ, 2006. Т. 44, № 5. С. 655–663), исследуются характеристики плазменного факела, образующегося при лазерной сварке с глубоким проплавлением. Находится условие, которое отвечает существованию интеграла Крокко и позволяет упростить систему газодинамических уравнений, дающую аналитические решения для плазменного факела в виде классической затопленной струи. Полученные решения анализируются для широкого интервала значений скорости и температуры паров металла на вылете из парогазового канала. Для некоторых выбранных значений найдено согласие с численными расчетами других авторов.

Ключевые слова: газодинамические уравнения, плазменный факел, лазерная сварка, слой смешения, затопленная струя

Ссылка при цитировании: Дудолодов С.О., Ларионов Н.В. Условие применения интеграла Крокко при математическом описании плазменного факела при лазерной сварке // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 3. С. 63–78. DOI: 10.18721/JPM.14305

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

THE CONDITION FOR APPLICATION OF THE CROCCO INTEGRAL IN THE MATHEMATICAL DESCRIPTION OF A LASER WELDING PLASMA PLUME

S.O. Dudoladov¹, N.V. Larionov^{1,2}

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
 St. Petersburg, Russian Federation;

² St. Petersburg State Marine Technical University,
 St. Petersburg, Russian Federation

Based on the theoretical approach developed in the article by G.A. Turichin et al. (High Temperature. 2006. Vol. 44. No. 5. Pp. 647–655), the characteristics of the plasma plume forming in the keyhole laser welding have been investigated. A condition corresponding to the existence of the Crocco integral was defined, making it possible to simplify the system of gas dynamics equations and obtain analytical solutions for a plasma plume in the form of a classical submerged jet. These solutions were analyzed for a wide range of metal vapor velocities and temperatures at the keyhole top. For some of the selected values, an agreement with the numerical calculations of other authors was found.

Keywords: gas dynamics equations, plasma plume, laser welding, shear layer, submerged jet

Citation: Dudoladov S.O., Larionov N.V., The condition for application of the Crocco integral in the mathematical description of a laser welding plasma plume, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (3) (2021) 63–78. DOI: 10.18721/JPM.14305

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

В процессе лазерной сварки с глубоким проплавлением, луч лазера, направленный на металлическую заготовку, вызывает нагрев и испарение свариваемого материала с образованием парогазового канала (ПГК). Взаимодействие давления паров материала, гидростатических сил окружающего жидкого металла и сил поверхностного натяжения препятствуют закрытию канала [1]. Струя металлических паров вылетает из ПГК в среду защитного газа, продвигает его и смешивается с ним, затухая на некоторой высоте за счет вязкости. Взаимодействие лазерного луча с испарившимся металлом может приводить к частичной ионизации этих паров, индуцируя тем самым возникновение плазмы выше обрабатываемой поверхности – плазменного факела, и плазму внутри ПГК [2 – 4]. Плазменный факел служит удобной средой для передачи энергии от лазерного излучения к заготовке. Однако он же влияет на процесс сварки, ввиду поглощения и рассеяния лазерного излучения, а также нагрева лазерной головки.

Взаимодействия между плазменным факелом, лазерным лучом и защитным газом представляют собой сложную картину течения газа и тепломассопереноса [5 – 7]. Когда поглощенная энергия становится сравнимой с энергией потерь, обусловленной проводимостью, конвекцией и излучением плазменного факела, факел обретает способность сохранять стационарную форму по отношению к лазерному лучу. Пространственные распределения температуры газа и концентрации частиц в плазменном факеле всегда неоднородны. Наличие градиентов плотности внутри плазменного факела вызывает преломление и расфокусировку лазерного луча, снижает плотность мощности лазерного излучения, влияя тем самым на процесс лазерной сварки.

Горение плазменного факела при сварке может сопровождаться различными сложными процессами, связанными с конкретным видом обработки материала. Так, в частности, при гибридном лазерно-дуговом воздействии на металлические материалы, в результате расширения и охлаждения паров металла, в плазменном факеле могут образовываться кластеры конденсированной фазы, которые понижают среднюю энергию электронов в плазме и влияют на протекание кинетических процессов [8, 9].

Изучение распределений температуры, плотности и концентрации частиц в плазменном факеле является актуальной задачей, ввиду необходимости создания методов управления процессами, происходящими при лазерной сварке с глубоким проплавлением, с целью улучшения качества обработки материалов и получения требуемых свойств сварного шва.

В статье профессора Туричина Глеба Андреевича с соавторами [5] проводилось исследование характеристик плазменного факела, возникающего при сварке в гелиевой атмосфере железа с помощью твердотельного неодимового лазера на основе иттрий-алюминиевого граната (Nd:YAG-лазер). В рассматриваемом конкретном случае поглощение лазерного излучения факелом бывает крайне незначительным. Это позволило авторам решать задачу о вытекании струи горячих паров железа в атмосферу холодного защитного газа – гелия с использованием системы газодинамических уравнений [10 – 12]. Влияние незначительного объемного тепловыделения, обусловленного поглощением лазерного излучения факелом, учитывалось путем введения соответствующего источника в уравнение баланса энергии. Свойства источника

определялись из решения кинетического уравнения для энергетического спектра электронов плазмы [13].

В приближении аксиально-симметричного пограничного слоя и в пренебрежении источником тепловыделения, в работе [5] были получены аналитические решения системы газодинамических уравнений, соответствующие задаче о ламинарной затопленной струе [10]. Для получения этих решений было сделано несколько предположений, которые, в частности, позволили ввести интеграл Крокко, однако условие его существования авторы подробно не исследовали.

В связи с вышеизложенным, одна из основных целей данного исследования – это выявление области значений наблюдаемых величин, где их можно описать аналитическими решениями, полученными в работе [5]. Кроме того, поставлена задача проанализировать характеристики плазменного факела в широком интервале значений скорости и температуры паров металла на вылете из парогазового канала и сопоставить полученные результаты с данными численных расчетов других авторов [6, 7].

Теоретическое описание плазменного факела

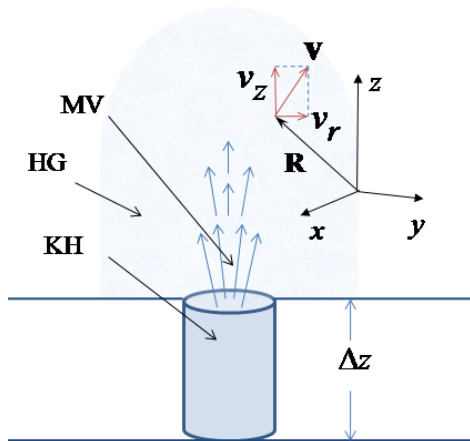


Рис. 1. Схематичное изображение плазменного факела и поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R} = (r, \varphi, z)$: MV – пары металла; HG – защитный газ; КН – парогазовый канал, Δz – его глубина. Лазерный луч (на рис. не показан) падает по нормали к поверхности металлической заготовки

Будем рассматривать стационарный случай, т. е. пренебрежем всеми переходными процессами, связанными с включением лазера и формированием факела в начальные моменты времени. Предполагая, что сварка выполняется Nd:YAG-лазером в гелиевой атмосфере, будем также пренебрегать источником тепловыделения (как и в работе [5]), который связан с поглощением лазерного излучения факелом.

На рис. 1 схематически представлен плазменный факел, который в нашем случае представляет собой струю паров металла (MV), вырывающуюся из ПГК (*англ.* Keyhole (КН)) в атмосферу защитного газа гелия (HG). Пары продвигают защитный газ, смешиваются с ним, и струя, благодаря вязкости, затухает на некотором расстоянии от поверхности. Оси декартовой системы координат расположены так, что ось z направлена вдоль оси

ПГК, который можно представить как цилиндр с малой глубиной Δz .

Обозначим плотность смеси, состоящей из паров металла с защитным газом за ρ , массовую долю атомов металла в смеси за C . Тогда плотности паров металла ρ_V и защитного газа ρ_g выражаются как

$$\begin{cases} \rho = \rho_V + \rho_g, \\ \rho_V = C\rho, \quad \rho_g = (1-C)\rho. \end{cases} \quad (1)$$

Часть основных процессов, определяющих свойства установившегося плазменного факела, протекает в слое смешения паров металла с атомами защитного газа. Будем рассматривать край слоя смешения, где концентрация тяжелых атомов металла в смеси мала, т. е. область, где происходит диффузия тяжелого газа в легком. В этом случае описание свойств факела

можно провести в приближении пограничного слоя. При этом будем считать пограничный слой ламинарным (см. оценку числа Рейнольдса далее, в описании результатов).

Выделим два масштаба длины: продольный $\sim z$ (вдоль направления вылета паров металла) и поперечный $\sim r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (поперек оси канала). При этом, как обычно предполагается в теории пограничного слоя, поперечный масштаб будем считать намного меньше продольного.

Для рассматриваемой бинарной смеси полная система газодинамических уравнений, записанная в приближении аксиально-симметричного пограничного слоя, имеет вид [10, 11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left\{ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \rho \left\{ v_r \frac{\partial C}{\partial r} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} \right\} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho D_{gV} \frac{\partial C}{\partial r} \right), \\ \rho \left\{ v_r \frac{\partial h}{\partial r} + v_z \frac{\partial h}{\partial z} \right\} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\kappa}{C_p} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + v_z \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + q, \\ \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho v_z) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

где v_r, v_z – цилиндрические компоненты поля скоростей \mathbf{v} ; μ – коэффициент динамической вязкости; D_{gV} – коэффициент взаимной диффузии; κ – коэффициент теплопроводности; C_p – теплоемкость смеси, $C_p = (1 - C) \cdot C_{p_g} + C \cdot C_{p_V}$ (C_{p_g}, C_{p_V} – удельные теплоемкости газа и паров металла); $h = C_p T$ – энтальпия, записанная через температуру T ; p – давление.

Источник q (которым в дальнейшем мы пренебрежем) представляет собой объемное тепловыделение, связанное с поглощением смесью энергии лазерного излучения.

Система уравнений (2) записана в цилиндрической системе координат (r, φ, z) с осью z вдоль вылета паров металла (см. рис. 1). Предположение об аксиальной симметрии задачи означает независимость поля скоростей \mathbf{v} от угла φ и равенстве нулю вращательной компоненты скорости v_φ , т. е.

$$\mathbf{v}(r, z) = \mathbf{e}_r v_r(r, z) + \mathbf{e}_z v_z(r, z).$$

Первое уравнение в системе (2) получено из основного динамического уравнения (уравнения Навье – Стокса), второе и третье выведены из конвективного уравнения диффузии и общего уравнения баланса энергии, соответственно. Четвертое уравнение в системе (2) – это уравнение неразрывности, а пятое уравнение – это известное условие постоянства давления поперек пограничного слоя.

Отличие системы (2) от аналогичной системы уравнений, приведенной в работе [5], – это наличие квадратичного слагаемого $\sim (\partial v_z / \partial r)^2$, характеризующего работу вязких сил в уравнении для энтальпии. Авторы статьи [5], заранее предполагая малость этого слагаемого, его отбросили. Мы же, для общности, его оставляем, а в конце раздела покажем, почему им можно пренебречь. В дальнейшем, так же как и в статье [5], сделаем естественное предположение о постоянстве давления [10], т. е. в системе (2) положим $\partial p / \partial z = 0$.

В качестве уравнения состояния, замыкающего систему (2), используем уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$p = \left(\frac{C}{M_V} + \frac{1-C}{M_g} \right) \rho RT, \quad (3)$$

где M_i – молярная масса для i -й компоненты смеси, R – универсальная газовая постоянная.

Для решения системы (2), (3) следует определить коэффициенты переноса μ , D_{gV} , κ . Эти коэффициенты содержат длины свободных пробегов λ_g , λ_V (для гелия и металла соответственно), которые, как это следует из молекулярно-кинетической теории [14, 15], можно оценить следующим образом:

$$\begin{cases} \lambda_g = \frac{1}{n_g \sigma_{gg} \sqrt{2} + n_V \sigma_{gV} \sqrt{1 + m_g/m_V}}, \\ \lambda_V = \frac{1}{n_V \sigma_{VV} \sqrt{2} + n_g \sigma_{Vg} \sqrt{1 + m_V/m_g}}, \end{cases} \quad (4)$$

где m_g , m_V – массы атомов гелия и металла соответственно; n_g , n_V – соответствующие концентрации; σ_{gg} , σ_{gV} , σ_{Vg} , σ_{VV} – эффективные сечения взаимодействий газ – газ, газ – металл, металл – газ и металл – металл.

Масса атома гелия $m_g \approx 4$ а.е.м.; в качестве массы атома металла выберем массу атома железа $m_V \approx 56$ а.е.м.; концентрации $n_g = \rho_g/m_g$, $n_V = \rho_V/m_V$.

Эффективные сечения выражаются как

$$\sigma_{gg} = 4\pi r_g^2, \sigma_{gV} = \pi(r_g + r_V)^2, \sigma_{VV} = 4\pi r_V^2,$$

где r_g , r_V – эффективные радиусы атомов.

В качестве указанных радиусов выбраны радиусы Ван-дер-Ваальса [16, 17]: $r_g \approx 140$ пм, $r_V \approx 210$ пм.

Следовательно,

$$\sigma_{gg} \approx 2,46 \cdot 10^5 \text{ (пм)}^2, \sigma_{gV} \approx 3,85 \cdot 10^5 \text{ (пм)}^2, \sigma_{VV} \approx 5,54 \cdot 10^5 \text{ (пм)}^2 \quad (5)$$

и

$$\lambda_g \approx \gamma \lambda_V, \quad (6)$$

где значение γ лежит в интервале 2 – 4. Число 2 соответствует пределу $C \rightarrow 1$, а 4 – пределу $C \rightarrow 0$ или $C \rightarrow 0,5$.

Выражения для коэффициентов переноса имеют следующий вид [14, 15]:

$$\begin{cases} \nu = \frac{1}{3} [C \lambda_V \langle v_V \rangle + (1-C) \lambda_g \langle v_g \rangle], \\ D_{gV} = \frac{1}{3} [(1-C) \lambda_V \langle v_V \rangle + C \lambda_g \langle v_g \rangle], \\ \alpha = \frac{C_V}{3C_p} [C \lambda_V \langle v_V \rangle + (1-C) \lambda_g \langle v_g \rangle], \end{cases} \quad (7)$$

где $\nu = \mu/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости; $\alpha = \kappa/(\rho C_p)$ – коэффициент температуропроводности; $\langle v_V \rangle, \langle v_g \rangle$ – средние скорости теплового движения атомов железа и гелия, соответственно.

В рассматриваемой нами области слоя смешения, где преобладает диффузия тяжелого газа в легком, массовая доля C атомов железа в смеси должна быть меньше 0,6, что соответствует приближенному равенству $n_g \approx 10 n_V$. Будем рассматривать частный случай $C \approx 0,5$, выбор которого будет ясен в дальнейшем.

Тогда, учитывая соотношение (6), а также отношение тепловых скоростей $\langle v_g \rangle / \langle v_V \rangle = \sqrt{m_V/m_g} \approx 4$, выражения для коэффициентов переноса мы можем переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \nu \approx \nu_\infty \frac{\rho_\infty}{\rho} \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1/2} (1-C), \\ D_{gV} \approx \nu_\infty \frac{\rho_\infty}{\rho} \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1/2} C, \quad \alpha \approx \alpha_\infty \frac{\rho_\infty}{\rho} \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1/2} (1-C), \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\nu_\infty = \frac{4(kT_\infty)^{3/2}}{3\rho\sigma_{gg}(\pi m_g)^{1/2}}, \quad \alpha_\infty = \frac{3\nu_\infty}{5}, \quad h_\infty = C_p T_\infty;$$

T_∞, ρ_∞ – температура и плотность на «бесконечности», т. е. параметры защитного газа вдали от факела; k – постоянная Больцмана.

Перепишем систему (2) с учетом сделанных замечаний и полученных коэффициентов переноса (8):

$$\begin{cases} \left\{ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} = \nu_\infty \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(1-C) \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1/2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ \left\{ v_r \frac{\partial C}{\partial r} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} \right\} = \nu_\infty \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rC \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1/2} \frac{\partial C}{\partial r} \right), \\ \left\{ v_r \frac{\partial h}{\partial r} + v_z \frac{\partial h}{\partial z} \right\} = \alpha_\infty \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(1-C) \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1/2} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \\ + \nu_\infty \frac{\rho_\infty}{\rho} (1-C) \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2, \\ \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r\rho v_z) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

При значениях C , близких к 0,5, первые два уравнения почти тождественны относительно двух различных переменных, а краевые условия решений подобны с точностью до постоян-



ной величины: $C \rightarrow 0, v_z \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, и C, v_z стремятся к некоторым постоянным значениям, зависящим от z , при $r \rightarrow 0$.

Таким образом, для $C \approx 0,5$ можно ввести интеграл Крокко

$$C = av_z + f$$

(a, f – константы), который позволит исключить из системы (9) уравнение для C .

Отметим, что уточненное условие использования интеграла Крокко, $C \approx 0,5$, можно выделить как основной результат данного раздела.

В статье [5] подобного анализа системы (2) на возможность использования интеграла Крокко сделано не было, что не позволяло указать, в какой области полученные аналитические решения дают более точный результат. Так, в частности, для значений $C \ll 1$ величина v отличается от D_{gV} примерно в десять раз, что не допускает возможности вводить интеграл Крокко, линейно связывающий величины C и v_z .

Решение системы трех уравнений относительно неизвестных полей v_r, v_z и h проведем таким же способом, как в работе [5]. Выпишем основные шаги решения.

Шаг 1. Переход к переменным Дородницына x, y [10]:

$$\begin{cases} ydy = \frac{\rho}{\rho_\infty} r dr, \\ x = z. \end{cases} \quad (10)$$

Шаг 2. Предположение о слабой зависимости плотности ρ от своего аргумента r , т. е. $\partial\rho/\partial r \approx 0$ [5]. Это важное предположение основано на том, что вылетающие пары металла являются тяжелыми, но при этом горячими, а окружающий газ гелий, наоборот, – легкий, но холодный.

Тогда

$$y^2 = \frac{1}{\rho_\infty} \left(r^2 \rho - \int_0^r r^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} dr \right) \approx \frac{\rho}{\rho_\infty} r^2, \quad \frac{\partial y}{\partial r} \approx \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Шаг 3. Введение новых скоростей U, \tilde{V} , зависящих от x, y и их функции тока ψ :

$$\begin{cases} V = v_r, U = v_z, \\ \tilde{V} = \left(V \frac{\partial y}{\partial r} + U \frac{\partial y}{\partial z} \right); \end{cases} \quad \begin{cases} U = \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \tilde{V} = -\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases} \quad (12)$$

Шаг 4. Линеаризация уравнений, которая относительно системы (9) соответствует следующим заменам:

$$(1-C) \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1/2} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{h_\infty} \right)^{1/2}, \quad C \left(\frac{h}{h_\infty} \right)^{1/2} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{h_\infty} \right)^{1/2}, \quad (13)$$

где h_0 – характерное значение энтальпии в рассматриваемой области.

Шаг 5. Введение автомодельной переменной $\xi = y / \left(x \tilde{v}_\infty^{1/2} \right)$ и запись функции тока и энтальпии через новые переменные ξ, x :

$$\psi(\xi, x) = \tilde{v}_\infty x \cdot c(\xi), \quad h = \frac{\tilde{v}_\infty}{x} d(\xi), \quad (14)$$

где

$$\tilde{v}_\infty = \frac{v_\infty}{2} \left(\frac{h_0}{h_\infty} \right)^{1/2}, \quad \tilde{\alpha}_\infty = \frac{\alpha_\infty}{2} \left(\frac{h_0}{h_\infty} \right)^{1/2}.$$

Шаг 6. Переход к дифференциальным уравнениям для функций $c(\xi), d(\xi)$:

$$\begin{cases} \xi^2 c''' + \xi(c-1)c'' + \xi(c')^2 - (c-1)c' = 0, \\ \left(\tilde{\alpha}_\infty \xi \cdot d'' + (\tilde{\alpha}_\infty + \tilde{v}_\infty c) d' + \tilde{v}_\infty c' \cdot d \right) \xi^3 + \frac{1}{x} (\xi c'' - c')^2 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Решение первого уравнения для функции $c(\xi)$ известно, и оно соответствует решению для ламинарной затопленной струи несжимаемого газа [10]. Второе уравнение для функции $d(\xi)$ определяет энтальпию, и оно содержит слагаемое, пропорциональное $1/x$. Отбрасывание этого слагаемого в предположении, что оно мало ($x = z$ – это большой масштаб), эквивалентно отбрасыванию члена $\sim (\partial v_z / \partial r)^2$ в исходных уравнениях (9). Отметим, что уравнение для $d(\xi)$ можно решить точно и его решение выражается в квадратурах. Здесь же, следуя статье [5], учитывать влияние этого слагаемого не будем, считая его поправкой более высокого порядка $\sim 1/x^2$.

Выпишем окончательные решения для поля скоростей, энтальпии и доли паров металла в смеси:

$$\begin{aligned} U &= \frac{2b^2}{x} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}b^2\xi^2\right)^2}, \quad \tilde{V} = \frac{\tilde{v}_\infty^{1/2} b}{x} \cdot \frac{b\xi \left(1 - \frac{1}{4}b^2\xi^2\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}b^2\xi^2\right)^2}, \\ h &= \frac{\tilde{v}_\infty}{x} \frac{b_1}{\left(1 + \frac{1}{4}b^2\xi^2\right)^{\frac{2\tilde{v}_\infty}{\tilde{\alpha}_\infty}}}, \quad C = aU. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь константы a, b_1, b находятся из граничных условий для функции $c(\xi)$ и из условий сохранения соответствующих полных потоков. Явные выражения для этих констант имеют вид

$$a = \frac{I_0}{J_0}, \quad b_1 = \frac{C_p H_0}{8\pi \tilde{v}_\infty^2} \left(1 + 2 \frac{v_\infty}{\alpha_\infty}\right), \quad b = \left(\frac{3J_0}{16\pi \tilde{v}_\infty \rho_\infty}\right)^{1/2}, \quad (17)$$

где J_0, I_0, C_p, H_0 – полные потоки (вдоль струи) импульса смеси, массы паров металла и энтальпии, соответственно.



Подчеркнем, что описанная процедура решения системы (9) заимствована из работы [5], поэтому решения (16) по своей структуре полностью совпадают с решениями, полученными авторами работы [5].

Однако здесь есть небольшое отличие, которое содержится в константах $\tilde{\alpha}_\infty$, $\tilde{\nu}_\infty$ (14) (см. формулу (11) в статье [5]), которые вдвое меньше аналогичных констант, приведенных в работе [5]. Появление такого отличия связано с проделанным выше уточнением условия использования интеграла Крокко.

Для того чтобы записать найденные величины U , \tilde{V} , h , C через «физические координаты» r , z , необходимо сначала перейти от координат x , ξ к координатам x , y , а затем выполнить обратное преобразование Дородницына. При этом следует учесть зависимость переменной y от r .

Расходимость найденных решений при $z \rightarrow 0$ типична для случая автомодельных решений. Для исключения расходимости в рассматриваемом примере, начало отсчета по оси струи было смещено в глубь ПГК на величину Δz .

Результаты и их обсуждение

Для анализа решений (16) будем рассматривать следующую постановку задачи. ПГК имеет форму, близкую к прямому цилиндру с малой глубиной Δz порядка нескольких миллиметров (см. рис. 1). Последняя оценивалась при условии $h(r=0, z=\Delta z) = h_m$, где $h_m = C_p T_m$ – максимальная энтальпия, соответствующая температуре в центре верхней части ПГК. Радиус ПГК r_k соответствует радиусу лазерного пятна на поверхности заготовки и для рассматриваемого случая примерно равен $r_k \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$ м [6]. Температура боковых стенок и дна считается постоянной величиной и равной температуре кипения свариваемого материала T_b , который в нашем случае представлен железом. Максимальное значение скорости паров металла U_m достигается в центре верхней части ПГК, где, соответственно, температура смеси имеет свой максимум T_m . Сварка происходит в среде защитного газа гелия при нормальных условиях, т. е. при температуре 298 К и давлении 101,325 кПа.

Для задания пары граничных значений (T_m , U_m) были использованы расчетные данные из статьи [6], в которой численно исследовался процесс лазерной сварки с глубоким проплавлением железной заготовки. Приведем используемые далее значения этих пар величин:

$$13800 \text{ К}, 360 \text{ м/с}; 14100 \text{ К}, 690 \text{ м/с}; \\ 14400 \text{ К}, 920 \text{ м/с}; 14500 \text{ К}, 1120 \text{ м/с}.$$

Величины H_0 , I_0 , J_0 , входящие в решения (16), оценивались из приведенных выше значений температуры, скоростей, давления и радиуса ПГК.

В таблице перечислены граничные значения различных характеристик смеси железо-гелий, использованные в расчетах.

Задав явные значения температуры, скорости и давления, можем теперь оценить число Рейнольдса Re для нашей задачи. В качестве характерной скорости выберем U_m , а характерные линейные размеры оценим через диаметр парогазового канала $2r_k$. Динамическую вязкость паров металла вычислим, используя формулу Энскога [15]:

$$\mu_V = 1,016 \frac{5}{16(2r_V)^2} \left(\frac{m_V k T_m}{\pi} \right)^{1/2},$$

отсюда, учитывая уравнение состояния, найдем кинематическую вязкость $\nu_V = \mu_V / \rho_V \approx 3 \cdot 10^{-3}$ м²/с. Тогда

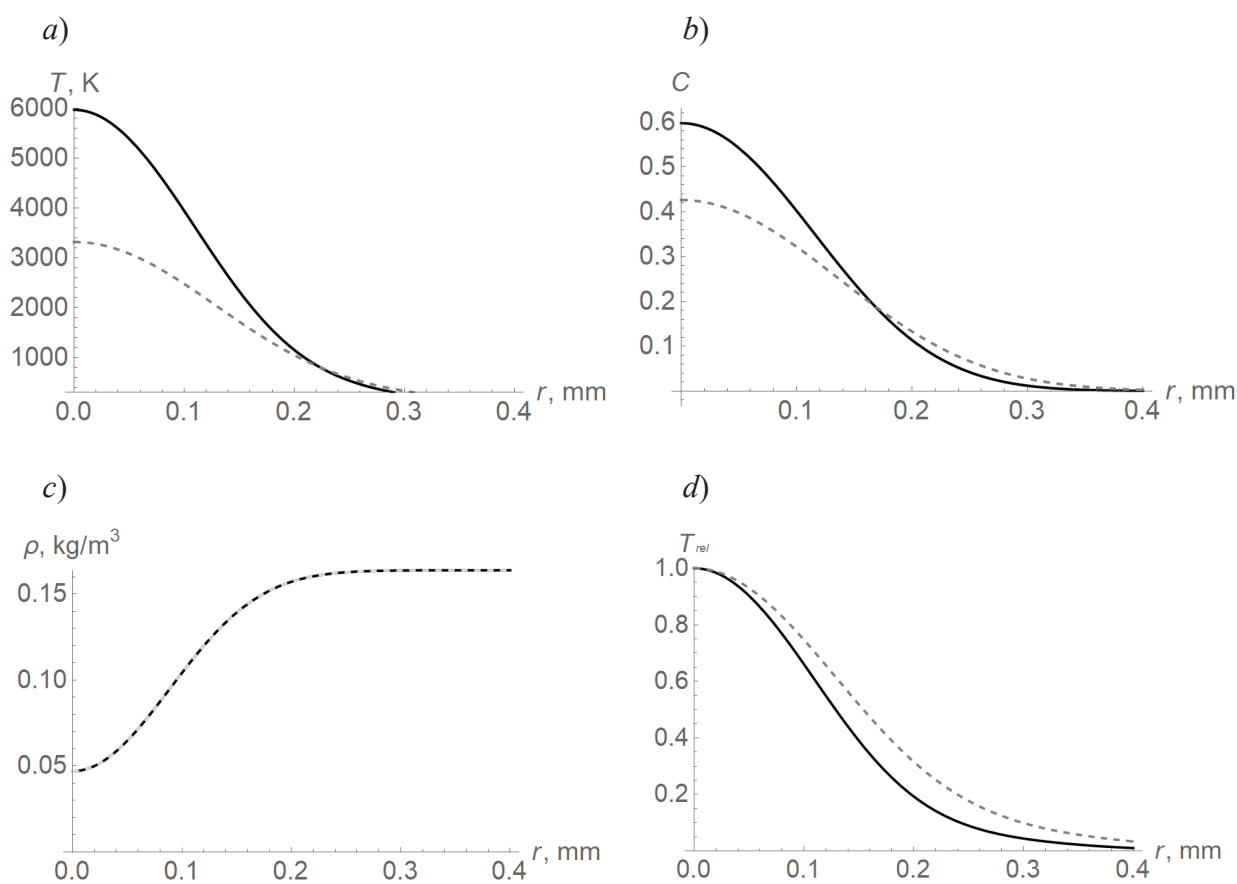


Рис. 2. Радиальные распределения температуры струи (а) и массовой доли атомов железа в струе (b) на расстоянии 5 мм от поверхности заготовки, а также радиальные распределения плотности смеси на выходе из ПГК (с) и нормированные на максимум радиальные распределения температуры T_{rel} (d).

Рис. 2, d соответствует рис. 2, a, но каждая кривая нормирована на свой максимум. Представлены значения α_∞, v_∞ (сплошные линии) и $2\alpha_\infty, 2v_\infty$ (пунктиры), см. таблицу

Таблица
Граничные значения характеристик смеси железо-гелий

T_b	3200 К
T_∞	298 К
C_{pv} при T_b	480,8 Дж/(кг·К)
C_{pg} при T_∞	5193 Дж/(кг·К)
μ_∞ при T_∞	$1,99 \cdot 10^{-5}$ Па·с
κ_∞ при T_∞	0,157 Вт/(м·К)
ρ_∞ при T_∞	0,164 кг/м ³



$$\text{Re} = \frac{2r_k U_m}{\nu_V} \approx 20.$$

Полученное число Рейнольдса меньше типичного значения, при котором ламинарная стационарная струя теряет устойчивость [18, 19].

Перейдем к результатам. На рис. 2 представлены радиальные зависимости температуры и массовой доли атомов железа в смеси на расстоянии 5 мм от поверхности заготовки, а также плотности смеси на выходе из ПГК. Зависимости построены с использованием формул (16). Максимальная скорость и соответствующая температура на выходе из ПГК равны соответственно 1120 м/с и 14500 К.

Анализ графиков на рис. 2 позволяет заключить, что процессы переноса обуславливают конечную ширину затопленной струи. Характерный радиус затухания струи можно оценить, если приравнять температуру смеси температуре защитного газа; получается, что этот радиус равен примерно 0,3 – 0,4 мм.

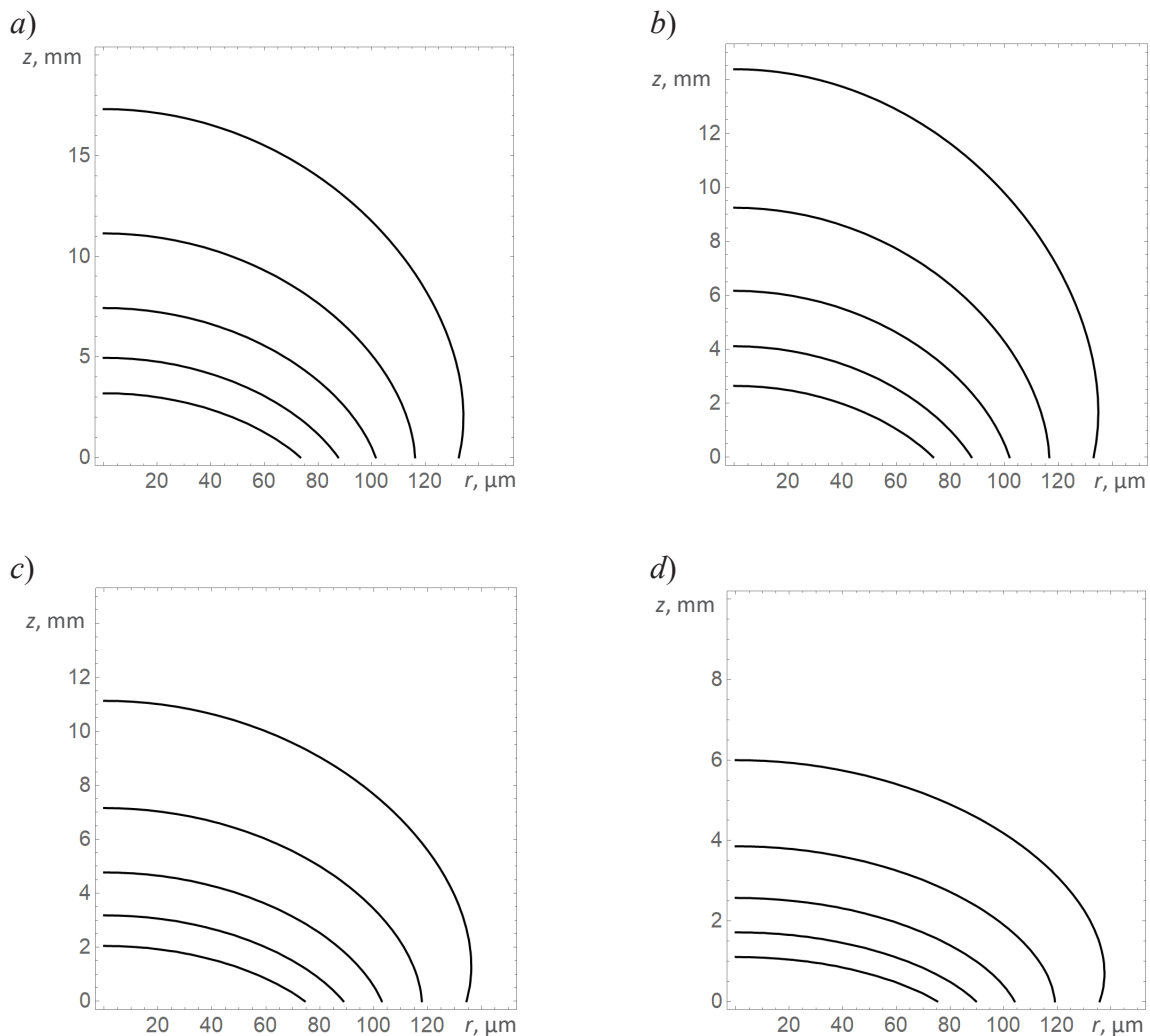


Рис. 3. Семейство изолиний $C(r, z) = C_0$ для различных пар значений параметров (T_m , К и U_m , м/с): 14500 и 1120 (a), 14400 и 920 (b), 14100 и 690 (c), 13800 и 360 (d); взяты значения $C_0 = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ и $0,7$

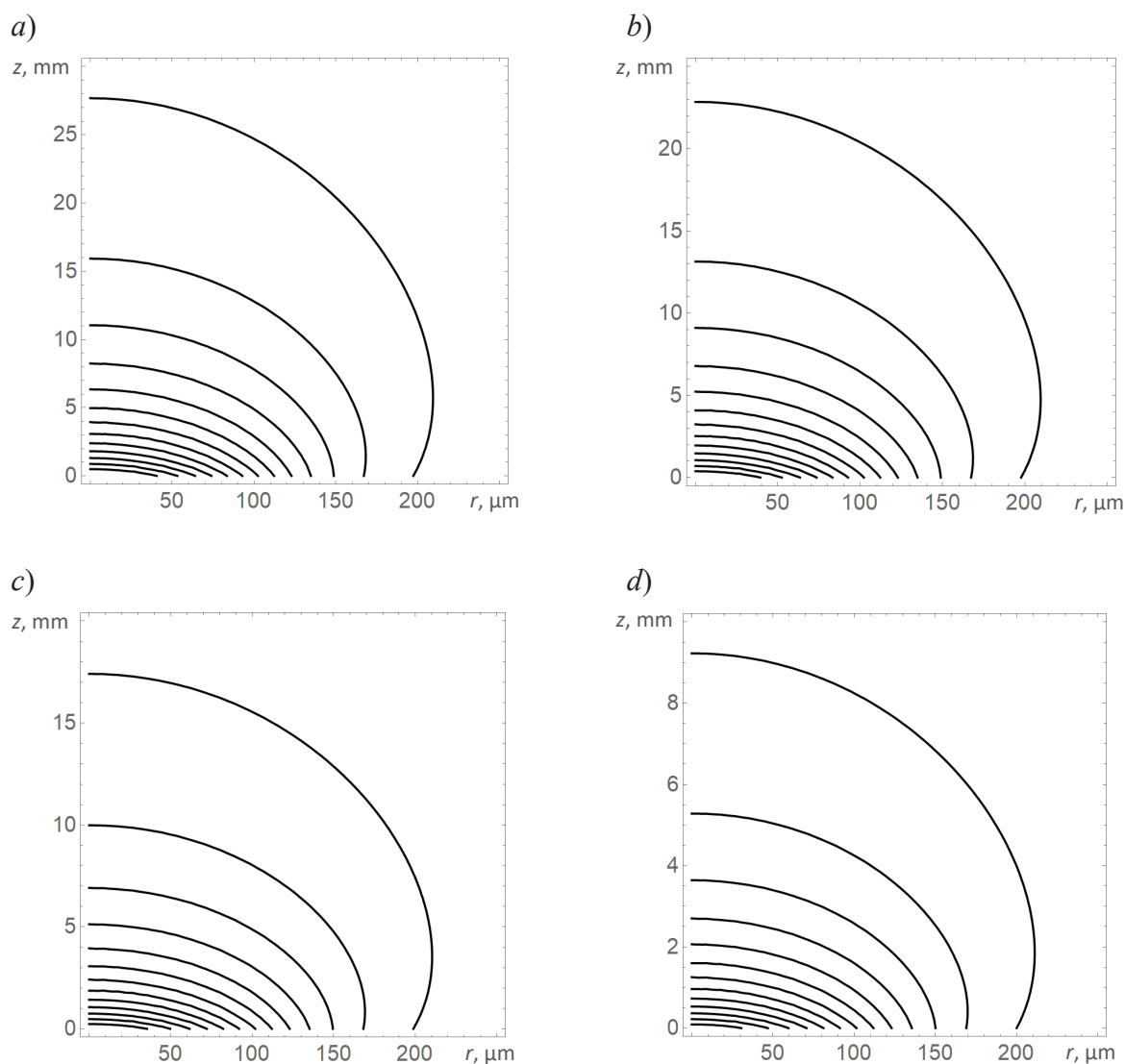


Рис. 4. Семейство изотерм газовой смеси $T(r, z) = T_0$ для тех же пар значений параметров (T_m , К и U_m , м/с), что на рис. 3. Взяты значения T_0 , К: 1000, 2000, 3000 и т. д.

Пунктирными линиями на рис. 2 представлены кривые, которые получаются, если следовать статье [5], т. е. величины α_∞ , ν_∞ , входящие в формулы (16), оказываются увеличенными в два раза. В этом случае, как и следовало ожидать, абсолютное значение температуры, благодаря вязкости, оказывающей сопротивление распространению струи, уменьшится, а ширина, за счет теплопроводности, увеличится (см. рис. 2, *d*). При этом максимальное значение температуры снижается примерно в два раза. Для величины C наблюдается аналогичная зависимость, однако максимальное значение уменьшается всего в полтора раза, что связано с продвижением вверх остывших атомов железа.

Затопленная струя паров железа в защитном газе гелии затухает на некотором расстоянии от обрабатываемой поверхности. Высота затухания зависит от многих факторов, и в том числе от скорости вылета паров из ПГК. Воспользуемся формулами (16) для анализа поведения плазменного факела при изменении граничных значений максимальной скорости U_m и температуры T_m .

На рис. 3, для различных пар $(T_m, K$ и $U_m, \text{ м/с})$, представлено семейство изолиний одинаковых массовых долей атомов железа в смеси:

$$C(r, z) = C_0 \quad (C_0 = 0,3 - 0,7 \text{ с шагом } 0,1).$$

На приведенных графиках видна примерно линейная зависимость между максимальной скоростью U_m и глубиной проникновения атомов железа в защитный газ. Так например, для $U_m = 1120 \text{ м/с}$ точка изолинии с $C_0 = 0,5$ при $r = 0$ располагается на высоте $z \approx 7,5 \text{ мм}$, а для скорости, меньшей в три раза ($U_m = 360 \text{ м/с}$), высота расположения той же точки уменьшится в три раза: $z \approx 2,5$. Такая линейная зависимость есть очевидное следствие введения интеграла Крокко в нашей задаче. Подобная картина наблюдается и для изотерм газовой смеси $T(r, z) = T_0, K: T_0 = (1 - 14) \cdot 10^3 \text{ К}$ с шагом 10^3 К (рис. 4).

Было проведено сравнение полученных нами результатов с численными данными работы [6]. В этой статье исследовался процесс лазерной сварки с глубоким проплавлением железной заготовки в среде защитного газа аргона. Решалась система газодинамических уравнений с учетом источника тепловыделения, связанного с поглощением лазерного излучения. Хотя в работе [6] рассматривается немного другая модель, но полученные в ней некоторые закономерности описываются решениями (16): глубина проникновения атомов железа в защитный газ вдоль направления вылета паров железа линейно связана с максимальной скоростью U_m (конечно, с соответствующей температурой T_m); аналогичная линейная зависимость наблюдалась и для температуры газовой смеси.

Заключение

В проведенном нами исследовании, на основе аналитических решений системы газодинамических уравнений, записанной в приближении пограничного слоя, анализировались характеристики плазменного факела, образующегося при сварке с глубоким проплавлением неодимовым (Nd:YAG)-лазером железной заготовки в среде защитного газа гелия.

Проведенный анализ коэффициентов переноса, входящих в систему газодинамических уравнений, позволил найти условие использования интеграла Крокко. Это условие соответствует рассмотрению значений массовой доли C паров металла в смеси, близких к $0,5$. Для таких значений коэффициент кинематической вязкости становится практически равным коэффициенту диффузии и уравнение для поля скоростей v_z совпадает по форме записи с уравнением диффузии (см. систему (9)), что позволяет ввести интеграл Крокко и, таким образом, решать систему с меньшим числом уравнений. Получаемые при этом решения для поля скоростей, энтальпии и массовой доли паров металла в смеси (16) по своей структуре полностью совпадают с решениями, полученными в статье [5]. Но есть небольшое отличие, которое состоит в переопределении коэффициентов переноса для защитного газа. Так, для того чтобы перейти от представленных здесь решений (16) к соответствующим решениям работы [5], следует в окончательных решениях (16) провести замену $\alpha_\infty, v_\infty \rightarrow 2\alpha_\infty, 2v_\infty$, которая, в частности, приводит к заметным изменениям в радиальных зависимостях температуры смеси и массовой доли паров металла в смеси. Появление указанного различия между решениями связано с тем, что в статье [5] интеграл Крокко вводился без строгого анализа условий, при которых возможно его использование.

Были проанализированы зависимости массовой доли атомов железа в газовой смеси и температуры смеси при различных граничных значениях скорости и температуры паров на вылете из парогазового канала. Обнаружена естественная, в силу введения интеграла Крокко, линейная зависимость между максимальной скоростью паров железа на вылете из ПГК и глубиной проникновения атомов железа в защитный газ (аналогичная зависимость обна-

ружена и для температуры смеси). Такая же линейная зависимость между этими величинами наблюдалась в работе [6], в которой система газодинамических уравнений для сходной задачи решалась численно.

В заключение отметим, что в нашей задаче оценка числа Рейнольдса дала число $Re \approx 20$, меньшее типичного значения, при котором ламинарная стационарная струя теряет устойчивость [18, 19]. Для бóльших значений скоростей паров металла U_m число Рейнольдса станет больше и сделанное допущение о ламинарности и стационарности струи смеси может стать неприменимым. В этом случае поставленную задачу нужно будет решать, основываясь на теории турбулентного пограничного слоя [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьянц А.Г., Шиганов И.Н., Мисюров А.И. Технологические процессы лазерной обработки. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 664 с.
2. Gong J., Peng G., Li L., Xia H., Meng Sh., Wang J. Effect of plasma plume produced by vacuum laser welding on energy transmission // *Optics & Laser Technology*. 2021. Vol. 136. April. P. 106744.
3. Luo Y., Tang X., Lu F., Chen Q., Cui H. Effect of subatmospheric pressure on plasma plume in fiber laser welding // *Journal of Materials Processing Technology*. 2015. Vol. 215. January. Pp. 219–224.
4. Xu W., Chen A., Wang Q., Zhang D., Li S., Jiang Y., Gao X., Jin M. Characteristics of laser-induced aluminum plasma plumes after increasing sample temperature and spatial confinement // *Journal of Analytical Atomic Spectrometry*. 2019. Vol. 34. No. 11. Pp. 2288–2294.
5. Туричин Г.А., Григорьев А.М., Земляков Е.В., Валдайцева Е.А., Дилтей У., Гуменюк А. Особенности формирования плазменного факела при гибридной лазерно-дуговой сварке // *Теплофизика высоких температур*. 2006. Т. 44. № 5. С. 655–663.
6. Chen X., Wang H.-X. Prediction of the laser-induced plasma characteristics in laser welding: a new modelling approach including a simplified keyhole model // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2003. Vol. 36. No. 13. Pp. 1634–1643.
7. Wang H.-X., Chen X. Three-dimensional modelling of the laser-induced plasma plume characteristics in laser welding // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2003. Vol. 36. No. 6. Pp. 628–639.
8. Туричин Г.А., Земляков Е.В. Кинетика формирования нанокластеров конденсированной фазы в плазменном факеле при гибридном лазерно-дуговом воздействии на металлические материалы // «Лучевые технологии и применение лазеров». Материалы 6-й Международной конференции. Под ред. проф. Г.А. Туричина. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2009. С. 146–148.
9. Туричин Г., Земляков Е., Поздеева Е., Норман Е. Объемная конденсация в плазменном факеле при лазерно-дуговом воздействии на материалы // *Фотоника*. 2009. № 1. С. 12–15.
10. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматлит, 1962. 480 с.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Изд. 5-е. (Теоретическая физика. Т. VI). М.: Физматлит, 2001. 736 с.
13. Dilthey U., Goumeniouk A., Lopota V., Turichin G. Kinetic description of keyhole plasma in laser welding // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2000. Vol. 33. No. 21. Pp. 2747–2753.
14. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика. Изд. 2-е, перераб. М.: Наука, 1976. 480 с.
15. Голубев И.Ф. Вязкость газов и газовых смесей. М.: Физматгиз, 1959. 376 с.
16. Batsanov S.S. Van der Waals radii of elements // *Inorganic Materials*. 2001. Vol. 37. No. 9. Pp. 871–885.
17. CRC handbook of chemistry and physics. Lide D.R. (Editor). 90th ed. USA: American Chemical Society, 2009–2010. 2804 p.

18. **Sinha A., Bharadwaj K.K., Das D.** Instability of a low Reynolds number round jet // Proceedings of the 39th National Conference on Fluid Mechanics and Fluid Power. 2012. December 13–15. SVNIT Surat. Gujarat, India. FMFP2012-160.

19. **Dmitrenko A.V.** Determination of critical Reynolds number in the jet based on the theory of stochastic equations and equivalence of measures // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1705. P. 012015.

20. **Абрамович Г.Н.** Прикладная газовая динамика. Изд. 5-е. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1991. 600 с.

Статья поступила в редакцию 20.06.2021, принята к публикации 26.07.2021.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ДУДОЛАДОВ Савелий Олегович – студент бакалавриата Института металлургии, машиностроения и транспорта Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 sava2312@yandex.ru

ЛАРИОНОВ Николай Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого; старший научный сотрудник Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 larionov.nickolay@gmail.com

REFERENCES

1. **Grigoryants A.G., Shiganov I.N., Misyurov A.I.**, Tekhnologicheskiye protsessy lazernoy obrabotki [Laser treatment technologies], Bauman University Publishing, Moscow, 2006 (in Russian).

2. **Gong J., Peng G., Li L., et al.**, Effect of plasma plume produced by vacuum laser welding on energy transmission, Opt. Laser Technol. 136 (April) (2021) 106744.

3. **Luo Y., Tang X., Lu F., et al.**, Effect of subatmospheric pressure on plasma plume in fiber laser welding, J. Mater. Process. Technol. 215 (January) (2015) 219–224.

4. **Xu W., Chen A., Wang Q., et al.**, Characteristics of laser-induced aluminum plasma plumes after increasing sample temperature and spatial confinement, J. Anal. At. Spectrom. 34 (11) (2019) 2288–2294.

5. **Turichin G.A., Grigor'ev A.M., Zemlyakov E.V., et al.**, Special features of formation of plasma torch under conditions of hybrid laser-arc welding, High Temperature. 44 (5) (2006) 647–655.

6. **Chen X., Wang H.-X.**, Prediction of the laser-induced plasma characteristics in laser welding: a new modelling approach including a simplified keyhole model, J. Phys. D: Appl. Phys. 36 (13) (2003) 1634–1643.

7. **Wang H.-X., Chen X.**, Three-dimensional modelling of the laser-induced plasma plume characteristics in laser welding, J. Phys. D: Appl. Phys. 36 (6) (2003) 628–639.

8. **Turichin G.A., Zemlyakov E.V.**, Kinetika formirovaniya nanoklasterov kondensirovannoy fazy v plazmennom fakele pri gibridnom lazerno-dugovom vozdeystvii na metallicheskiye materialy [Generation kinetics of condensed-phase nanoclusters in the plasma torch under hybrid laser-arc impact on metal materials], Proceedings of the 6th International Conference “Beam Technologies and Laser Applica-

tion”, Edited by Prof. G. Turichin. Polytechnical University Publishing, St. Petersburg (2009) 146–148 (in Russian).

9. **Turichin G., Zemlyakov E., Pozdeyeva E., Norman E.**, Volume condensation in the plasma torch at laser-arc materials impact, *Photonics Russia*. (1) (2009) 12–15 (in Russian).

10. **Loitsyanskii L.G.**, Boundary layer, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, 1956.

11. **Loitsyanskii L.G.**, Mechanics of liquids and gases (International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, Vol. 6, Pergamon Press, Oxford, London, Edinburg, New York, 1966.

12. **Landau L.D., Lifshits E.M.**, Fluid mechanics, Course of theoretical physics, Vol. 6, Pergamon Press, Oxford, New York, 2013.

13. **Dilthey U., Goumeniouk A., Lopota V., Turichin G.**, Kinetic description of keyhole plasma in laser welding, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 33 (21) (2000) 2747–2753.

14. **Kikoin A., Kikoin I.**, Molecular physics, Translated by G. Leib, Central Books Ltd, Dadenham, Great Britain, 1979.

15. **Golubev I.F.**, Viscosity of gases and gas mixtures, A handbook, National Science Foundation, Washington, 1970.

16. **Batsanov S.S.**, Van der Waals radii of elements, *Inorg. Mater.* 37 (9) (2000) 871–885.

17. CRC handbook of chemistry and physics, By Lide D.R. (Editor), 90th ed., American Chemical Society, USA, 2009–2010.

18. **Sinha A., Bharadwaj K.K., Das D.**, Instability of a low Reynolds number round jet, Proc. 39th Nation. Conf. on Fluid Mech. & Fluid Power, 2012, December 13–15, SVNIT Surat. Gujarat, India (2012) FMFP2012-160.

19. **Dmitrenko A.V.**, Determination of critical Reynolds number in the jet based on the theory of stochastic equations and equivalence of measures, *J. Phys. Conf. Ser.* 1705 (2020) 012015.

20. **Abramovich G.N.**, Applied gas dynamics, 2nd edition, Project-Nerd Publishing, USA, 1973.

Received 20.06.2021, accepted 26.07.2021.

THE AUTHORS

DUDOLADOV Savelii O.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

sava2312@yandex.ru

LARIONOV Nikolay V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

St. Petersburg State Marine Technical University

3 Lotsmanskaya St., St. Petersburg, 190121, Russian Federation

larionov.nickolay@gmail.com