

DOI: 10.18721/JPM.14204
УДК 531.2: 519.63

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

М.В. Сухотерин¹, Т.П. Кныш¹, Е.М. Пастушок¹, Р.А. Абдикаримов²

¹ Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

² Ташкентский финансовый институт,
г. Ташкент, Республика Узбекистан

В работе исследуется устойчивость упругой ортотропной прямоугольной консольной пластинки под действием сжимающих усилий, приложенных к грани, противоположной заделке. Целью исследования является получение спектра критических усилий и соответствующих форм закритического равновесия. Функция прогибов выбирается в виде суммы двух гиперболических рядов с добавлением к симметричному решению специальных компенсирующих слагаемых для свободных членов разложения функций в ряды Фурье по косинусам. Выполнение всех условий краевой задачи приводит к бесконечной однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов. Поиск критических нагрузок (собственных чисел), дающих нетривиальное решение этой системы, осуществляется перебором величины сжимающей нагрузки в сочетании с методом последовательных приближений. Для квадратной ребристой пластинки получены первые три критические нагрузки симметричного решения и первая критическая нагрузка антисимметричного решения. Представлены 3D-изображения соответствующих форм равновесия. Результаты работы могут быть использованы для исследования устойчивости консольных элементов различных конструкций.

Ключевые слова: ортотропная консольная пластина, устойчивость, ряд Фурье, критическая нагрузка, форма равновесия

Ссылка при цитировании: Сухотерин М.В., Кныш Т.П., Пастушок Е.М., Абдикаримов Р.А. Устойчивость упругой ортотропной консольной пластинки // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 2. С. 38–52. DOI: 10.18721/JPM.14204

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

STABILITY OF AN ELASTIC ORTHOTROPIC CANTILEVER PLATE

M.V. Sukhoterin¹, T.P. Knysh¹, E.M. Pastushok¹, R.A. Abdikarimov²

¹ Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation;

² Tashkent Financial Institute,
Tashkent, Republic of Uzbekistan

The paper studies the stability of an elastic orthotropic rectangular cantilever plate under compressive forces applied to the face opposite to the seal. The aim of the study was to obtain the range of critical forces and the relevant shapes of the supercritical equilibrium. The deflection function was chosen as a sum of two hyperbolic-trigonometric series with the addition of special compensating terms for the free terms of the Fourier cosine series to the symmetric solution. For the square ribbed plate, the first three critical loads of the symmetric solution and the first critical load of the antisymmetric solution were obtained. The authors present 3D images of the respective equilibrium forms. The results obtained can be used to study the stability of cantilever elements of various structures.

Keywords: orthotropic cantilever plate, stability, Fourier series, critical load, equilibrium form

Citation: Sukhoterin M.V., Knysh T.P., Pastushok E.M., Abdikarimov R.A., Stability of an elastic orthotropic cantilever plate, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (2) (2021) 38–52. DOI: 10.18721/JPM.14204

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Консольные пластины (плиты) применяются в различных областях техники: в гражданском строительстве, в машиностроении, судостроении и авиации, в приборостроении [1] (ферромагнитные пластинки). В нанотехнике консольные пластинки используются в качестве ключевых компонентов сенсоров наномасштабных транзисторов [2], где они подвергаются воздействию магнитных полей в плоскости пластинки. Применяются консольные пластинки и в различных смарт-структурах [3, 4].

Проблема устойчивости ортотропных консольных пластин недостаточно исследована ввиду сложности основного дифференциального уравнения задачи и граничных условий. Она требует разработки надежных численно-аналитических методов ее решения. Если считать материал пластины идеально упругим, то будет иметь место бесконечное число критических нагрузок, меняющих форму равновесия пластины. Эта задача на собственные значения аналогична задаче определения спектра частот свободных колебаний пластинки [5]. Она прежде всего интересна с математической точки зрения. На практике для плоских элементов обычных металлических конструкций вычисляют лишь первую критическую нагрузку, которую считают разрушающей, однако при наличии конструктивных ограничителей изгиба и быстрого роста сжимающей нагрузки упругие пластины могут работать и в закритической области, приобретая последующие формы равновесия, в том числе антисимметричные. Разрушение может произойти не при первой критической нагрузке, поэтому практическое значение имеет определение некоторого спектра критических нагрузок и

соответствующих форм равновесия.

В данной работе задача устойчивости решается в линейной постановке в рамках теории тонких жестких пластин. При исследовании устойчивости гибких пластин надо рассматривать более сложную нелинейную задачу, однако при проверке точности того или иного приближенного метода линейные решения привлекаются как эталонные.

Проблеме устойчивости анизотропных и изотропных прямоугольных пластин с использованием различных методов ее решения посвящены работы [6 – 16]. В статьях [6 – 9] рассматривались задачи устойчивости анизотропных пластин и оболочек, методы решения которых применимы и для консольных пластин.

В работах [10, 11] исследовалась устойчивость изотропной консольной пластины для случаев, когда сжимающая нагрузка приложена к грани, параллельной заделке [10], и когда она приложена к боковой грани [11]. Из условия минимума потенциальной энергии найдены первые критические нагрузки. Боковая устойчивость от действия сосредоточенной силы исследовалась и в работе [12] с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Этим методом в работе [1] изучалась устойчивость ферромагнитных консольных пластинок в магнитном поле с учетом пластических деформаций.

В работе [2] рассматриваются анизотропные консольные нанопластины, которые подвергаются воздействию магнитных полей в своей плоскости. Аналитическое решение линейной задачи построено симплексным методом с помощью тригонометрических рядов. Получен спектр критических усилий для изотропных и ортотропных пластин.

В работе [13] с помощью МКЭ и приближенного аналитического подхода исследуется влияние жесткости центрального ребра на изгиб консольной пластины.

Работы [14, 15] посвящены устойчивости изотропной консольной пластины под действием сжимающих усилий, приложенных к двум свободным параллельным граням [14] или ко всем трем свободным граням [15]. Использование двух гипербола-тригонометрических рядов привело к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, содержащих в качестве параметра сжимающую нагрузку. Получены численные результаты для критических нагрузок.

Отметим, что широкое применение МКЭ сталкивается с проблемой проверки выполнения граничных условий. Такая проверка сопряжена с большими трудностями, так как указанный численный метод работает с массивами чисел, а не с аналитическими выражениями (которые можно подставлять в граничные условия). МКЭ не является универсальным методом решения задач механики и имеет помимо этого и другие проблемы: недостаточная точность решения дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, «запирание» вычислительного процесса при частой сетке дробления конструкции, связанное с погрешностями округления при решении огромной системы линейных алгебраических уравнений, «просмотр» особых точек решения (концентраторов напряжений). Этот метод часто сам нуждается в проверке с помощью аналитических и численно-аналитических методов.

В настоящей работе точное решение задачи устойчивости получено с использованием гипербола-тригонометрических рядов по обеим переменным. Выполнение всех условий задачи привело к бесконечной однородной системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов этих рядов. Равенство нулю определителя системы дает нетривиальные значения коэффициентов. Однако процедура получения и решения этого уравнения оказывается весьма трудоемкой.

В данном исследовании предложен метод перебора значений нагрузки с последующим итерационным процессом определения коэффициентов. Начальные коэффициенты первого функционального ряда задавались в виде произвольной убывающей последовательности, вычисляются значения остальных коэффициентов, затем все они уточнялись в ходе итерационного процесса. Подбиралась нагрузка, при которой процесс сходится к нетривиальным решениям, то есть когда соседние итерации (с ненулевыми коэффициентами) не должны отличаться друг от друга. Эта нагрузка и принималась за критическую. Данный метод успешно использовался в наших работах [14, 15].

Постановка задачи

Пусть равномерные сжимающие усилия интенсивностью T_y приложены к свободному краю $Y = b$ тонкой ортотропной прямоугольной консольной пластины постоянной толщины h (рис. 1). Будем считать, что главные направления упругости параллельны сторонам пластины.

В безразмерном виде дифференциальное уравнение устойчивости пластины имеет вид [16]:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где w – относительный прогиб ($w = W/b$, $W(X, Y)$ – функция прогибов срединной поверхности пластины); x, y – безразмерные координаты ($x = X/b$, $y = Y/b$); D_x, D_y, D_{xy} – относительные жесткости по главным направлениям, $D_x = D_1/D$, $D_y = D_2/D$, $D_{xy} = D_3/D$ (D – цилиндрическая жесткость соответствующей изотропной плиты той же толщины, D_1, D_2, D_3 – главные жесткости); T_y – интенсивность относительных сжимающих усилий ($T_y = T_y b^2/D$).

Величина D выражается как

$$D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)],$$

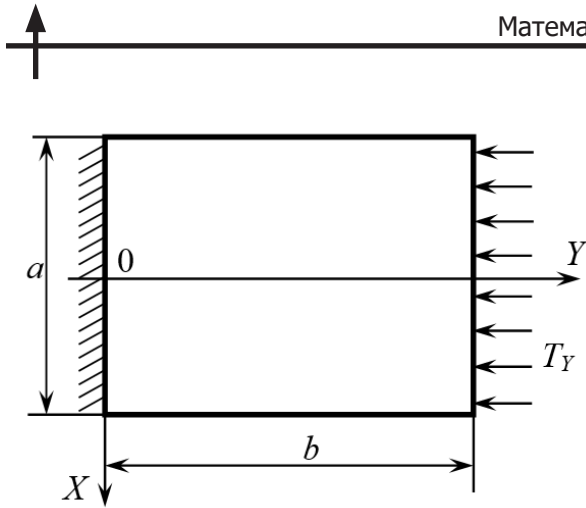


Рис. 1. Схема нагружения консольной пластины (толщиной h); T_Y – интенсивность равномерных сжимающих усилий

где E – модуль Юнга указанной пластины, ν – ее коэффициент Пуассона.

Главные жесткости следуют выражениям

$$\begin{aligned} D_1 &= E_1 h^3 / [12(1 - \nu_1 \nu_2)], \\ D_2 &= E_2 h^3 / [12(1 - \nu_1 \nu_2)], \\ D_3 &= D_1 \nu_2 + 2D_r, \end{aligned}$$

где E_1, E_2, ν_1, ν_2 – главные упругие постоянные; D_r – жесткость кручения, $D_r = Gh^3/12$ (G – модуль сдвига).

Относительные размеры пластины будут $\gamma \times 1$, где $\gamma = a/b$.

Граничные условия запишутся следующим образом [16, 17]:

на грани $y = 0$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

на грани $y = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{xy} + 2\bar{D}_r) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \\ + T_y \frac{\partial w}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

на гранях $x = \pm \gamma/2$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (4)$$

$$D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{xy} + 2\bar{D}_r) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0;$$

в точках $(\pm \gamma/2, 1)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (5)$$

Здесь уравнения (2) являются геометрическими условиями жесткой заделки (сечение не перемещается и не поворачивается). Уравнения (3), (4) запрещают изгибающие моменты и перерезывающие силы на свободных гранях. Условие (5) исключает крутящие моменты в угловых точках свободной части контура. Заметим, что второе условие (3) для перерезывающих сил на грани, вдоль которой приложена сжимающая нагрузка, дополнено слагаемым для учета действия этой нагрузки в отклоненном состоянии этой грани. На это указывал Н.А. Алфутов в работе [17].

Задача (1) – (5) всегда имеет тривиальное (нулевое) решение для функции прогибов. Это соответствует устойчивому недеформированному состоянию пластины. Помимо тривиального решения, задача может иметь и нетривиальные решения при определенных значениях нагрузки T_y , когда после потери устойчивости пластина приобретает новую форму равновесия. Пластины, обладающие высокой упругостью, могут несколько раз «проходить» критическое состояние с ростом нагрузки, меняя формы последующего равновесия. Речь идет о пластинах из новых высокоупругих материалов, включая нанопластины (графен).

Построение симметричного решения

Искомую функцию прогибов представим в виде суммы двух рядов:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left(A_k \operatorname{ch} \alpha_k x + B_k \operatorname{ch} \beta_k x \right) \sin \lambda_k y, \quad (6)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \begin{pmatrix} C_s \operatorname{sh} \xi_s \tilde{y} + \\ + H_s \operatorname{sh} \eta_s \tilde{y} + \\ + E_s \operatorname{ch} \xi_s \tilde{y} + \\ + F_s \operatorname{ch} \eta_s \tilde{y} \end{pmatrix} \cos \mu_s x, \quad (7)$$

где $A_k, B_k, C_s, H_s, E_s, F_s, \alpha_k, \beta_k, \xi_s, \eta_s$ – неопределенные коэффициенты; $\lambda_k = k\pi/2$; $\mu_s = 2\pi s/\gamma$; $\tilde{y} = y - 1$.

Заметим, что обе эти функции удовлетворяют граничному условию (5).

Потребуем, чтобы функции (6), (7) удовлетворяли дифференциальному уравнению (1). Это дает для коэффициентов $\alpha_k, \beta_k, \xi_s, \eta_s$ биквадратные уравнения вида

$$\begin{aligned} D_x \alpha_k^4 - 2D_{xy} \alpha_k^2 \lambda_k^2 + D_y \lambda_k^4 - T_y \lambda_k^2 &= 0, \\ D_x \mu_s^4 - 2D_{xy} \xi_s^2 \mu_s^2 + D_y \xi_s^4 + T_y \xi_s^2 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(уравнения для коэффициентов β_k и η_s аналогичны).

Эти уравнения имеют по четыре корня, однако, исходя из свойств гиперболических функций, достаточно взять по паре корней из квартетов:

$$\alpha_k = \lambda_k \sqrt{\frac{D_{xy} + \sqrt{D_{xy}^2 - D_x D_y + \frac{D_x T_y}{\lambda_k^2}}}{D_x}},$$

$$\beta_k = \lambda_k \sqrt{\frac{D_{xy} - \sqrt{D_{xy}^2 - D_x D_y + \frac{D_x T_y}{\lambda_k^2}}}{D_x}},$$

$$\xi_s = \sqrt{\frac{2D_{xy} \mu_s^2 - T_y + R_s}{2D_y}},$$

$$\eta_s = \sqrt{\frac{2D_{xy} \mu_s^2 - T_y - R_s}{2D_y}},$$

где

$$R_s = \sqrt{T_y^2 - 4D_{xy} \mu_s^2 T_y + 4\mu_s^4 (D_{xy}^2 - D_x D_y)}. \quad (9)$$

Потребуем теперь, чтобы сумма функций (6), (7) удовлетворяла граничным условиям (2) – (4). Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_s \operatorname{sh} \xi_s + H_s \operatorname{sh} \eta_s - \\ - E_s \operatorname{ch} \xi_s - F_s \operatorname{ch} \eta_s &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \begin{pmatrix} C_s \xi_s \operatorname{ch} \xi_s + \\ + H_s \eta_s \operatorname{ch} \eta_s - \\ - E_s \xi_s \operatorname{sh} \xi_s - \\ - F_s \eta_s \operatorname{sh} \eta_s \end{pmatrix} \cos \mu_s x + \\ + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k (A_k \operatorname{ch} \alpha_k x + B_k \operatorname{ch} \beta_k x) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \begin{bmatrix} E_s (\xi_s^2 - v_1 \mu_s^2) + \\ + F_s (\eta_s^2 - v_1 \mu_s^2) \end{bmatrix} \cos \mu_s x - \\ - \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^k \begin{bmatrix} A_k (v_1 \alpha_k^2 - \lambda_k^2) \operatorname{ch} \alpha_k x + \\ + B_k (v_1 \beta_k^2 - \lambda_k^2) \operatorname{ch} \beta_k x \end{bmatrix} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} C_s \xi_s [T_y + D_y \xi_s^2 - (D_{xy} + 2\bar{D}_r) \mu_s^2] + \\ + H_s \eta_s [T_y + D_y \eta_s^2 - (D_{xy} + 2\bar{D}_r) \mu_s^2] &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{s=1}^{\infty} \begin{bmatrix} C_s (\mu_s^2 - v_2 \xi_s^2) \operatorname{sh} \xi_s \tilde{y} + \\ + H_s (\mu_s^2 - v_2 \eta_s^2) \operatorname{sh} \eta_s \tilde{y} + \\ + E_s (\mu_s^2 - v_2 \xi_s^2) \operatorname{ch} \xi_s \tilde{y} + \\ + F_s (\mu_s^2 - v_2 \eta_s^2) \operatorname{ch} \eta_s \tilde{y} \end{bmatrix} + \\ + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \begin{bmatrix} A_k (\alpha_k^2 - v_2 \lambda_k^2) \operatorname{ch} \tilde{\alpha}_k + \\ + B_k (\beta_k^2 - v_2 \lambda_k^2) \operatorname{ch} \tilde{\beta}_k \end{bmatrix} \sin \lambda_k y &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} A_k \alpha_k [D_x \alpha_k^2 - (D_{xy} + 2\bar{D}_r) \lambda_k^2 +] \operatorname{sh} \tilde{\alpha}_k + \\ + B_k \beta_k [D_x \beta_k^2 - (D_{xy} + 2\bar{D}_r) \lambda_k^2] \operatorname{sh} \tilde{\beta}_k &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k \gamma / 2$, $\tilde{\beta}_k = \beta_k \gamma / 2$, $\tilde{k} = (k+1)/2$.

Заметим, что в уравнениях (10), (13) и (15) опущены знаки суммы, так как тригонометрический ряд обращается в нуль, когда все его коэффициенты равны нулю.

В уравнениях (11), (12), (14) суммирование в рядах ведется по разным индексам, поэтому гиперболические функции в них разложим в ряды Фурье. Для уравнений (11) и (12) используем известные разложения по $\cos(\mu_s x)$:

$$\begin{aligned} & \text{ch } \alpha_k x = \\ & = \text{sh } \tilde{\alpha}_k \left[\frac{1}{\tilde{\alpha}_k} + \frac{4\alpha_k}{\gamma} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\cos \mu_s x}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} \right], \\ & \text{ch } \beta_k x = \\ & = \text{sh } \tilde{\beta}_k \left[\frac{1}{\tilde{\beta}_k} + \frac{4\beta_k}{\gamma} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\cos \mu_s x}{\beta_k^2 + \mu_s^2} \right]; \end{aligned} \quad (16)$$

тогда эти уравнения (после перестановки знаков суммирования в двойных рядах) примут вид

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left(\begin{array}{l} C_s \xi_s \text{ ch } \xi_s + \\ + H_s \eta_s \text{ ch } \eta_s - \\ - E_s \xi_s \text{ sh } \xi_s - \\ - F_s \eta_s \text{ sh } \eta_s \end{array} \right) \cos \mu_s x + \\ & + \varphi_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \varphi_s \cos \mu_s x = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left[\begin{array}{l} E_s (\xi_s^2 - v_1 \mu_s^2) + \\ + F_s (\eta_s^2 - v_1 \mu_s^2) \end{array} \right] \cos \mu_s x + \\ & + m_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s m_s \cos \mu_s x = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k \left(A_k \frac{\text{sh } \tilde{\alpha}_k}{\tilde{\alpha}_k} + B_k \frac{\text{sh } \tilde{\beta}_k}{\tilde{\beta}_k} \right), \\ \varphi_s &= \frac{4}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k \left(A_k \frac{\alpha_k \text{ sh } \tilde{\alpha}_k}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} + B_k \frac{\beta_k \text{ sh } \tilde{\beta}_k}{\beta_k^2 + \mu_s^2} \right), \end{aligned}$$

$$m_0 = - \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left[\begin{array}{l} A_k (v_1 \alpha_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\text{sh } \tilde{\alpha}_k}{\tilde{\alpha}_k} + \\ + B_k (v_1 \beta_k^2 - \lambda_k^2) \frac{\text{sh } \tilde{\beta}_k}{\tilde{\beta}_k} \end{array} \right],$$

$$m_s = - \frac{4}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \left[\begin{array}{l} A_k (v_1 \alpha_k^2 - \lambda_k^2) \times \\ \times \frac{\alpha_k \text{ sh } \tilde{\alpha}_k}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} + \\ + B_k (v_1 \beta_k^2 - \lambda_k^2) \times \\ \times \frac{\beta_k \text{ sh } \tilde{\beta}_k}{\beta_k^2 + \mu_s^2} \end{array} \right]. \quad (19)$$

Для преобразования уравнения (14) используем разложения

$$\begin{aligned} \text{sh } \xi_s \tilde{y} &= -2 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\tilde{k}} \xi_s + \lambda_k \text{ sh } \xi_s}{\lambda_k^2 + \xi_s^2} \sin \lambda_k y, \\ \text{ch } \xi_s \tilde{y} &= 2 \text{sh } \xi_s \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \xi_s^2} \sin \lambda_k y \end{aligned} \quad (20)$$

(для $\text{sh}(\eta_s \tilde{y})$ и $\text{ch}(\eta_s \tilde{y})$ выражения аналогичны при замене ξ_s на η_s) и переставим в полученном двойном ряду знаки суммирования:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_k \sin \lambda_k y + \\ & + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left[\begin{array}{l} A_k (\alpha_k^2 - v_2 \lambda_k^2) \text{ ch } \tilde{\alpha}_k + \\ + B_k (\beta_k^2 - v_2 \lambda_k^2) \text{ ch } \tilde{\beta}_k \end{array} \right] \sin \lambda_k y = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$b_k = 2 \sum_{s=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} \frac{\mu_s^2 - v_2 \xi_s^2}{\lambda_k^2 + \xi_s^2} \times \\ \times \left\{ \begin{array}{l} C_s \left[(-1)^{\tilde{k}} \xi_s + \right] \\ + \lambda_k \text{ sh } \xi_s \\ - E_s \lambda_k \text{ ch } \xi_s \end{array} \right\} + \\ + \frac{\mu_s^2 - v_2 \eta_s^2}{\lambda_k^2 + \eta_s^2} \times \\ \times \left\{ \begin{array}{l} H_s \left[(-1)^{\tilde{k}} \eta_s + \right] \\ + \lambda_k \text{ sh } \eta_s \\ - F_s \lambda_k \text{ ch } \eta_s \end{array} \right\} \end{array} \right]. \quad (22)$$

Так как в уравнениях (17), (18) появились свободные члены φ_0 и m_0 от разложения в ряды по косинусам, необходимо ввести вспомогательную функцию прогибов w_3 , которая бы компенсировала эти свободные члены, удовлетворяя, вместе с основным решением, уравнениям (1) – (3), (5) задачи.

Эту функцию выберем в виде

$$w_3(y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} g_k \sin \lambda_k y + \frac{1}{2} M y^2 - \Phi y, \quad (23)$$

где коэффициенты g_k , M , Φ определяются из условий (2) – (4):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} g_k \lambda_k^2 (D_y \lambda_k^2 - T_y) \sin \lambda_k y + M T_y &= 0, \\ \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} g_k \lambda_k - \Phi + \varphi_0 &= 0, \\ \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{k}} \lambda_k^2 g_k + M + m_0 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Постоянную $M T_y$ в первом уравнении (24) разложим в ряд Фурье по синусам:

$$M T_y = M T_y \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{2}{\lambda_k} \sin \lambda_k y. \quad (25)$$

Тогда получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{-2 M T_y}{\lambda_k^3 (D_y \lambda_k^2 - T_y)}, \\ M &= \frac{-m_0}{1 - 2 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\tilde{k}} T_y}{\lambda_k (D_y \lambda_k^2 - T_y)}}, \\ \Phi &= \varphi_0 + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} g_k \lambda_k. \end{aligned} \quad (26)$$

Невязка от функции w_3 по изгибающему моменту M_x на гранях $x = \pm \gamma/2$ (первое условие (4)) выражается как

$$v_2 \left(M - \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} g_k \lambda_k^2 \sin \lambda_k y \right) = \quad (27)$$

$$= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_k^* \sin \lambda_k y, \quad (27)$$

где коэффициент

$$\begin{aligned} b_k^* &= \frac{2 v_2 M D_y \lambda_k}{D_y \lambda_k^2 - T_y} = \\ &= \frac{-2 v_2 D_y \lambda_k m_0 / (D_y \lambda_k^2 - T_y)}{1 - 2 T_y \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\tilde{k}}}{\lambda_k (D_y \lambda_k^2 - T_y)}} \end{aligned} \quad (28)$$

добавится в уравнение (21).

Тогда система уравнений (10) – (15) после освобождения от внешних знаков суммирования, с учетом формул (17), (18), (21), (27), примет следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} C_s \operatorname{sh} \xi_s + H_s \operatorname{sh} \eta_s - \\ - E_s \operatorname{ch} \xi_s - F_s \operatorname{ch} \eta_s = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} C_s \xi_s \operatorname{ch} \xi_s + H_s \eta_s \operatorname{ch} \eta_s - \\ - E_s \xi_s \operatorname{sh} \xi_s - F_s \eta_s \operatorname{sh} \eta_s = -\varphi_s, \end{aligned} \quad (30)$$

$$E_s (\xi_s^2 - v_1 \mu_s^2) + F_s (\eta_s^2 - v_1 \mu_s^2) = -m_s, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} C_s \xi_s \left[D_y \xi_s^2 - (D_{xy} + 2 \bar{D}_r) \mu_s^2 + T_y \right] + \\ + H_s \eta_s \left[D_y \eta_s^2 - (D_{xy} + 2 \bar{D}_r) \mu_s^2 + T_y \right] = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} A_k (\alpha_k^2 - v_2 \lambda_k^2) \operatorname{ch} \tilde{\alpha}_k + \\ + B_k (\beta_k^2 - v_2 \lambda_k^2) \operatorname{ch} \tilde{\beta}_k = -(b_k + b_k^*), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} A_k \alpha_k \left[D_x \alpha_k^2 - (D_{xy} + 2 \bar{D}_r) \lambda_k^2 \right] \operatorname{sh} \tilde{\alpha}_k + \\ + B_k \beta_k \left[D_x \beta_k^2 - (D_{xy} + 2 \bar{D}_r) \lambda_k^2 \right] \operatorname{sh} \tilde{\beta}_k = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Совокупность уравнений (29) – (34) является бесконечной однородной системой линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_k, B_k, C_s, H_s, E_s, F_s$.

Заметим, что правые части φ_s и m_s уравнений (30), (31) содержат коэффициенты A_k, B_k , стоящие под знаком суммы (см. формулы

(19)), а слагаемые в правой части уравнения (33) содержат под знаками суммы, соответственно, коэффициенты C_s, H_s, E_s, F_s , а также A_k, B_k (см. формулы (22, 28)). Представлять однородную систему в стандартной форме, составлять и раскрывать соответствующий определитель системы, находить его корни, дающие нетривиальные решения, – весьма сложная задача, поэтому здесь предложен метод перебора параметра T_y (метод «пристрелки») в сочетании с методом последовательных приближений определения коэффициентов $A_k, B_k, C_s, H_s, E_s, F_s$.

Для организации итерационного процесса разрешающая система разделяется на две подсистемы:

(29) – (32), в которой основными считаются коэффициенты C_s, H_s, E_s, F_s ;

(33), (34), в которой основными считаются коэффициенты A_k, B_k .

Сначала правая часть уравнения (33) заменяется на начальную произвольную убывающую последовательность (в данном случае $1/\lambda_k$), затем решается подсистема уравнений (33), (34) при выбранном значении сжимающей нагрузки T_y . Найденные начальные коэффициенты A_{k0}, B_{k0} подставляются в подсистему (29) – (32), из которой находят коэффициенты $C_{s0}, H_{s0}, E_{s0}, F_{s0}$, используемые затем вместе с A_{k0}, B_{k0} для формирования правой части уравнения (33) и нового решения A_{k1}, B_{k1} системы (33), (34). Затем вычисляются коэффициенты $C_{s1}, H_{s1}, E_{s1}, F_{s1}$ первого приближения, и далее идет итерационный процесс уточнения коэффициентов задачи.

Если, при выбранном значении нагрузки, начиная с некоторой итерации, соответствующие коэффициенты рядов будут совпадать по абсолютной величине (до 4 – 5 значащих цифр), то это и есть ненулевое решение однородной системы (29) – (34): ее определитель будет равен нулю. Эта нагрузка (критическая) определит новую форму равновесия после потери устойчивости (ей будет соответствовать минимум потенциальной энергии пластины).

Построение антисимметричного решения

Искомое решение также представим в виде суммы двух рядов, где будут фигурировать нечетные функции по переменной x :

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left(\begin{array}{l} A_k \operatorname{sh} \alpha_k x + \\ + B_k \operatorname{sh} \beta_k x \end{array} \right) \sin \lambda_k y, \quad (35)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\tilde{s}} \left(\begin{array}{l} C_s \operatorname{sh} \xi_s \tilde{y} + \\ + H_s \operatorname{sh} \eta_s \tilde{y} + \\ + E_s \operatorname{ch} \xi_s \tilde{y} + \\ + F_s \operatorname{ch} \eta_s \tilde{y} \end{array} \right) \sin \mu_s x. \quad (36)$$

Здесь $\tilde{s} = (s+1)/2$, $\mu_s = \pi s/\gamma$; коэффициенты $\lambda_k, \alpha_k, \beta_k, \xi_s, \eta_s$ имеют прежние значения.

Удовлетворяя всем граничным условиям задачи, приходим к системе, аналогичной (29) – (34), но в последних двух уравнениях поменяются местами синусы и косинусы:

$$\begin{array}{l} C_s \operatorname{sh} \xi_s + H_s \operatorname{sh} \eta_s - \\ - E_s \operatorname{ch} \xi_s - F_s \operatorname{ch} \eta_s = 0, \end{array} \quad (37)$$

$$\begin{array}{l} C_s \xi_s \operatorname{ch} \xi_s + H_s \eta_s \operatorname{ch} \eta_s - \\ - E_s \xi_s \operatorname{sh} \xi_s - F_s \eta_s \operatorname{sh} \eta_s = -\varphi_s, \end{array} \quad (38)$$

$$E_s (\xi_s^2 - \nu_1 \mu_s^2) + F_s (\eta_s^2 - \nu_1 \mu_s^2) = -m_s, \quad (39)$$

$$\begin{array}{l} C_s \xi_s \left[D_y \xi_s^2 - (D_{xy} + 2\bar{D}_r) \mu_s^2 \right] + \\ + H_s \eta_s \left[D_y \eta_s^2 - (D_{xy} + 2\bar{D}_r) \mu_s^2 \right] = 0, \end{array} \quad (40)$$

$$\begin{array}{l} A_k (\alpha_k^2 - \nu_2 \lambda_k^2) \operatorname{sh} \tilde{\alpha}_k + \\ + B_k (\beta_k^2 - \nu_2 \lambda_k^2) \operatorname{sh} \tilde{\beta}_k = -b_k, \end{array} \quad (41)$$

$$\begin{array}{l} A_k \alpha_k \left[D_x \alpha_k^2 - (D_{xy} + 2\bar{D}_r) \lambda_k^2 \right] \operatorname{ch} \tilde{\alpha}_k + \\ + B_k \beta_k \left[D_x \beta_k^2 - (D_{xy} + 2\bar{D}_r) \lambda_k^2 \right] \operatorname{ch} \tilde{\beta}_k = 0, \end{array} \quad (42)$$

где

$$\varphi_s = -\frac{4}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_k \left(\begin{array}{l} A_k \frac{\alpha_k \operatorname{ch} \tilde{\alpha}_k}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} + \\ + B_k \frac{\beta_k \operatorname{ch} \tilde{\beta}_k}{\beta_k^2 + \mu_s^2} \end{array} \right),$$

$$m_s = \frac{4}{\gamma} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{k}} \left[\begin{array}{l} A_k (v_1 \alpha_k^2 - \lambda_k^2) \times \\ \times \frac{\alpha_k \operatorname{ch} \tilde{\alpha}_k}{\alpha_k^2 + \mu_s^2} + \\ + B_k (v_1 \beta_k^2 - \lambda_k^2) \times \\ \times \frac{\beta_k \operatorname{ch} \tilde{\beta}_k}{\beta_k^2 + \mu_s^2} \end{array} \right],$$

$$b_k = -2 \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} \left[\begin{array}{l} \frac{\mu_s^2 - v_2 \xi_s^2}{\lambda_k^2 + \xi_s^2} \times \\ \times \left\{ \begin{array}{l} C_s \left[\begin{array}{l} (-1)^{\bar{k}} \xi_s + \\ + \lambda_k \operatorname{sh} \xi_s \end{array} \right] - \\ - E_s \lambda_k \operatorname{ch} \xi_s \end{array} \right\} + \\ + \frac{\mu_s^2 - v_2 \eta_s^2}{\lambda_k^2 + \eta_s^2} \times \\ \times \left\{ \begin{array}{l} H_s \left[\begin{array}{l} (-1)^{\bar{k}} \eta_s + \\ + \lambda_k \operatorname{sh} \eta_s \end{array} \right] - \\ - F_s \lambda_k \operatorname{ch} \eta_s \end{array} \right\} \end{array} \right]. \quad (43)$$

Здесь использовались разложения гиперболических функций переменной x в ряды Фурье по синусам:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \alpha_k x &= -\frac{4\alpha_k}{\gamma} \operatorname{ch} \tilde{\alpha}_k \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}} \frac{\sin \mu_s x}{\alpha_k^2 + \mu_s^2}, \\ \operatorname{sh} \beta_k x &= -\frac{4\beta_k}{\gamma} \operatorname{ch} \tilde{\beta}_k \sum_{s=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\bar{s}} \frac{\sin \mu_s x}{\beta_k^2 + \mu_s^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Расчет ребристой пластины

В качестве примера рассмотрим квадратную пластину с часто поставленными одинаковыми ребрами жесткости, которые идут параллельно осям координат на равном расстоянии друг от друга (рис. 2).

В работе [16] приведены формулы вычисления жесткостей для такой ребристой пластины:

$$D_1 = D_2 = D + \frac{E_R I_R}{d}, \quad D_3 = D, \quad (45)$$

где D – цилиндрическая жесткость самой пластины; E_R , I_R – соответственно модуль Юнга и момент инерции ребер относительно срединной линии; d – расстояние между ребрами.

Тогда относительные жесткости примут вид

$$\begin{aligned} D_x = D_y = 1 + \bar{D}, \quad D_{xy} = 1 \\ (\bar{D} = E_R I_R / dD), \end{aligned} \quad (46)$$

и дискриминант биквадратного уравнения (8) (и аналогичного ему для φ_s и ψ_s) будет отрицательным:

$$D_{xy}^2 - D_x D_y = -(\bar{D}^2 + 2\bar{D}) < 0, \quad (47)$$

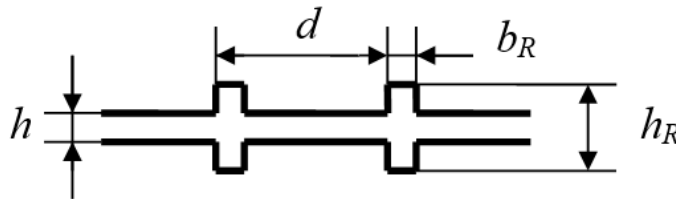


Рис. 2. Форма ребристой панели

что приводит к комплексным корням $\alpha_k, \beta_k, \varphi_s$ и ψ_s .

Проведенные преобразования комплексных выражений показали, что искомое решение получается в действительной форме. Вычисления в системе компьютерной математики Maple это подтвердили.

Будем считать, что пластина и ребра изготовлены из одного материала. Примем коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, ширину ребра $b_R = h$, высоту ребра $h_R = 3h$, отношение ширины ребра к расстоянию между ребрами $b_R/d = 0,1$. Тогда момент инерции ребра и его относительная жесткость будут выражаться как

$$I_R = \frac{b_R h_R^3}{12} - \frac{h^4}{12} = \frac{26}{12} h^4,$$

$$\bar{D} = \frac{E_R I_R}{dD} = \frac{26 E h^4 12 (1 - \nu^2)}{12 \cdot 10 h E h^3} = 2,6(1 - \nu^2) = 2,366.$$

Численные результаты

Критические нагрузки и формы равновесия определялись по приведенному выше алгоритму в системе компьютерной математики Maple.

Использовались следующие параметры вычислительного процесса:

T_y – величина интенсивности относительной сжимающей нагрузки, приложенной к грани $y = 1$; $\nu = 0,3$ – коэффициент Пуассона; $\gamma = a/b$ – отношение сторон пластины; N – число членов в рядах; N_c – число итераций.

Коэффициенты рядов (7), (8) или (36), (37) выводились на печать на каждой итерации с целью контроля процесса последовательных приближений. После отыскания критического значения вычислялась функция прогибов и на печать выводилось 3D-изображение соответствующей формы равновесия пластины. В рядах удерживалось 59 членов, большее число членов не влияло заметно на точность вычислений. Число итераций было принято равным 25. Время счета каждого варианта нагрузки – не более двух

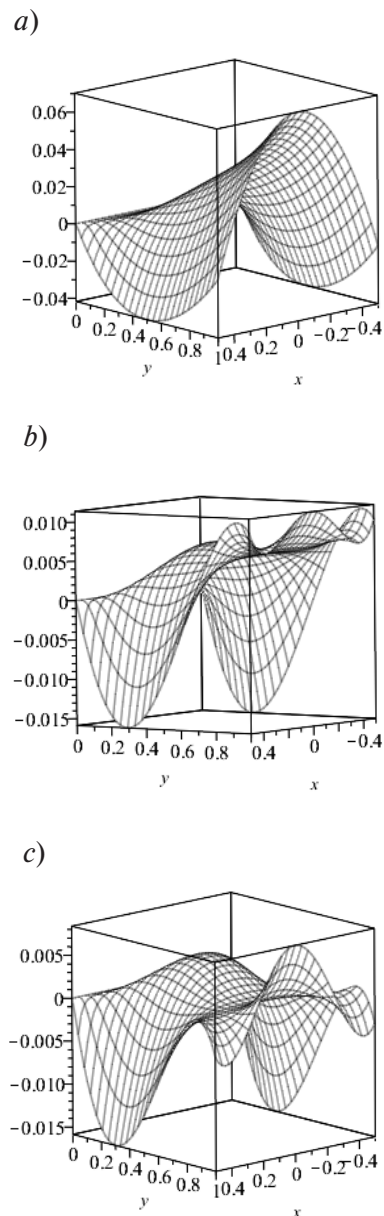


Рис. 3. Первая (а), вторая (б) и третья (с) симметричные формы равновесия ребристой квадратной пластины при $T_{cr1} = 7,824$, $T_{cr2} = 64,933$ и $T_{cr3} = 100,970$ соответственно

минут. Стратегия перебора нагрузки диктовалась характером поведения значений искомых коэффициентов и не занимала много времени.

Найденные первые три критические нагрузки симметричных форм и первые критические нагрузки антисимметричной формы равновесия для квадратных пластин (ребристой, с малой анизотропией, изотропной)

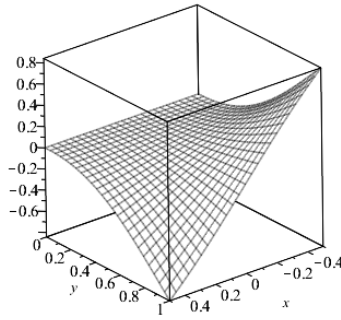


Рис. 4. Первая антисимметричная форма равновесия ребристой квадратной пластины при $T_{cr1} = 25,6765$

Таблица
Расчетный спектр критических нагрузок T_y для квадратных консольных пластин

Вид пластины	\bar{D}	$T_y = T_y b^2/D$			
		Симметричное решение			Антисимметричное решение
		T_{cr1}	T_{cr2}	T_{cr3}	T_{cr1}
Ребристая	2,366	7,8235	64,933	100,970	25,676
С малой анизотропией	0,005	2,1164	20,525	58,721	7,835
Изотропная	0	2,1057	20,457	58,597	8,080

Обозначения: \bar{D} – относительная жесткость ребер, T_y – интенсивность равномерных сжимающих усилий, b – длина пластины, D – цилиндрическая жесткость изотропной пластины.

приведены в таблице, а соответствующие 3D-формы равновесия ребристой пластины представлены на рис. 3, 4. Следует отметить, что при отыскании первой антисимметричной критической нагрузки пришлось увеличивать число итераций до 200 ввиду слабой сходимости процесса.

Обсуждение расчетных результатов

В работе [10] вариационным методом была найдена первая критическая нагрузка для изотропной квадратной консольной пластины $p_{cr} = 2,4571 \cdot D/a^2$. В настоящей работе для сравнения была рассчитана первая критическая нагрузка для пластины с малой анизотропией $\bar{D} = 0,005$, которая составила $2,1164 \cdot D/a^2$. Эти величины сопоставимы. Отметим, что энергетические методы дают, как правило, завышенные результаты.

В работе [2] получены численные

результаты устойчивости упругих изотропных и ортотропных консольных нанопластин в магнитном поле с использованием симплексного метода суперпозиции, основанного на нелокальной теории упругости. Для верификации метода были выполнены расчеты устойчивости весьма тонкой ($h/a = 1/1000$) изотропной консольной пластины, но в рамках линейной теории Кирхгофа. В частности, для пластины с отношением сторон $\gamma = 2$ под действием равномерной сжимающей нагрузки, приложенной к грани $y = 1$, первые относительные критические значения симметричных форм равновесия составили (если эти данные привести к нашим обозначениям) 2,4174 и 20,5173 против полученных нами значений 2,1594 и 20,663 для обычной тонкой пластины ($h/a < 1/5$).

Значительное расхождение (10,7 %) для первой критической нагрузки можно объ-



яснить большой разницей относительных толщин пластины. Отметим, что в работе [2] приведен спектр первых шести критических нагрузок и получены соответствующие формы равновесия. Это, пожалуй, единственная работа по определению спектра собственных чисел и форм в задаче устойчивости консольных пластин, хотя, например, для защемленной пластины в работе [18] в задаче устойчивости под действием сдвигающих усилий на контуре в рамках линейной теории получен спектр из 10 первых критических нагрузок и представлены соответствующие 3D-формы равновесия пластин с различным отношением сторон.

Предлагаемый в настоящей работе метод исследования устойчивости упругой ортотропной прямоугольной консольной пластины позволяет с высокой точностью определять спектр критических нагрузок и соответствующие формы равновесия, увеличивая количество членов в рядах, число итераций и длину мантиссы при вычислениях.

Заключение

В данной работе получено численно-аналитическое решение задачи устойчивости упругой прямоугольной ортотропной консольной пластины. С помощью гиперболических рядов проблема свелась к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов, содержащей в качестве параметра сжимающую нагрузку. Построен эффективный итерационный процесс поиска критических нагрузок. Для конкретного примера ребристой пластины получен спектр критических нагрузок, который при необходимости можно расширить, используя вычислительную программу в системе аналитических вычислений Maple. Приведены соответствующие 3D-формы равновесия. Знание критических нагрузок позволит избежать разрушения консольных элементов или установить характер их поведения в закритических областях, что найдет применение в нанотехнике и смарт-структурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gao Y.** Analysis on the magneto-elastic-plastic buckling/snapping of cantilever rectangular ferromagnetic plates // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2007. Vol. 20. No. 2. Pp. 180–188.
2. **Wang W., Rong D., Xu C., Zhang Ju., Xu X., Zhou Z.** Accurate buckling analysis of magnetically affected cantilever nanoplates subjected to in-plane magnetic fields // *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2020. Vol. 8. No. 4. Pp. 505–515.
3. **Kim J., Varadan V.V., Varadan V.K., Bao X.Q.** Finite element modeling of a smart cantilever plate and comparison with experiments // *Smart Materials and Structures*. 1996. Vol. 5. No. 2. Pp. 165–170.
4. **Gohari S., Sharifi S., Vrcelj Z.** A novel explicit solution for twisting control of smart laminated cantilever composite plates/beams using inclined piezoelectric actuators // *Composite Structures*. 2017. Vol. 161. 1 February. Pp. 477–504.
5. **Sukhoterina M.V., Baryshnikov S.O., Akse-
nov D.A.** Free vibration analysis of rectangular cantilever plates using the hyperbolic-trigonometric series // *American Journal of Applied Sciences*. 2016. Vol. 13. No. 12. Pp. 1442–1451.
6. **Tsiatas G.C., Yiotis A.J.** A BEM-based meshless solution to buckling and vibration problems of orthotropic plates // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2013. Vol. 37. No. 3. Pp. 579–584.
7. **Papkov S.O., Banerjee J.R.** A new method for free vibration and buckling analysis of rectangular orthotropic plates // *Journal of Sound and Vibration*. 2015. Vol. 339. 17 March. Pp. 342–358.
8. **Манухин В.А., Коршунов В.А., Вирячева Н.Н.** О работоспособности тонких пластин после потери устойчивости // *Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова*. 2015. Т. 89. № 2. С. 151–160.
9. **Семенов А.А., Москаленко Л.П., Карпов В.В., Сухотерин М.В.** Устойчивость цилиндрических панелей, подкрепленных ортогональной сеткой ребер // *Вестник гражданских инженеров*. 2020. Т. 83. № 6. С. 117–125.
10. **Xiang-Sheng C.** The bending stability and

vibration of cantilever rectangular plates // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition, China). 1987. Vol. 8. No. 7. Pp. 673–683.

11. **Xiang-Sheng C.** On several problems for lateral instability of cantilever plates // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition, China). 1988. Vol. 9. No. 8. Pp. 787–792.

12. **Jiang L., Wu S., Zheng H.** Lateral buckling analysis for rectangular cantilever plate subjected to a concentrated loads // Advanced Materials Research. 2013. Vols. 671–674. Pp. 1596–1599.

13. **Yakoob J.A., Hasan I.J.** Study the increasing of the cantilever plate stiffness by using stiffeners // International Journal of Scientific & Engineering Research. 2015. Vol. 6. No. 4. Pp. 1678–1687.

14. **Барышников С.О., Сухотерин М.В., Кныш Т.П.** Устойчивость внешних консольных элементов глубоководных аппаратов // Вестник государственного университета мор-

ского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2020. Т. 12. № 2. С. 347–358.

15. **Барышников С.О., Сухотерин М.В., Кныш Т.П., Пижурин Н.Ф.** Устойчивость стабилизаторов глубоководных аппаратов // Морские интеллектуальные технологии. 2020. Т. 48. № 2-1. С. 83–90.

16. **Лехницкий С.Г.** Анизотропные пластинки. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1947. 355 с.

17. **Алфутов Н.А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334 с.

18. **Ullah S., Zhou J., Zhang J., Zhou C., Wang H., Zhong Y., Wang B., Li R.** New analytic shear buckling solution of clamped rectangular plates by a two-dimensional generalized finite integral transform method // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2020. Vol. 20. No. 02. P. 2071002.

Статья поступила в редакцию 15.03.2021, принята к публикации 24.05.2021.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

СУХОТЕРИН Михаил Васильевич – доктор технических наук, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

198135, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7
sukhoterinmv@gumrf.ru

КНЫШ Татьяна Петровна – кандидат физико-математических наук, заместитель начальника управления информатизации Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

198135, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7
knyshtp@gumrf.ru

ПАСТУШОК Елена Михайловна – доцент Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

198135, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7
pastushokem@gumrf.ru

АБДИКАРИМОВ Рустамхан Алимханович – доктор физико-математических наук, профессор Ташкентского финансового института, г. Ташкент, Республика Узбекистан.

100000, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. А. Темур, 60А
rabdikarimov@mail.ru



REFERENCES

1. **Gao Y.**, Analysis on the magneto-elastic-plastic buckling/snapping of cantilever rectangular ferromagnetic plates, *Acta Mechanica Sinica*. 20 (2007) 180–188.
2. **Wang W., Rong D., Xu C., et al.**, Accurate buckling analysis of magnetically affected cantilever nanoplates subjected to in-plane magnetic fields, *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 8 (4) (2020). 505–515.
3. **Kim J., Varadan V.V., Varadan V.K., Bao X.Q.**, Finite element modeling of a smart cantilever plate and comparison with experiments, *Smart Materials and Structures*. 5 (2) (1996) 165–170.
4. **Gohari S., Sharifi S., Vrcelj Z.**, A novel explicit solution for twisting control of smart laminated cantilever composite plates/beams using inclined piezoelectric actuators, *Composite Structures*. 161 (1 February) (2017) 477–504.
5. **Sukhoterina M.V., Baryshnikov S.O., Akse-
nov D.A.**, Free vibration analysis of rectangular cantilever plates using the hyperbolic-trigonometric series, *American Journal of Applied Sciences*. 13 (12) (2016) 1442–1451.
6. **Tsiatas G.C., Yiotis A.J.**, A BEM-based meshless solution to buckling and vibration problems of orthotropic plates, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 37 (3) (2013) 579–584.
7. **Papkov S.O., Banerjee J.R.**, A new method for free vibration and buckling analysis of rectangular orthotropic plates, *Journal of Sound and Vibration*. 339 (17 March) (2015) 342–358.
8. **Manukhin V.A., Korshunov V.A., Viryacheva N.N.**, O rabotosposobnosti tonkikh plastin posle poteri ustoychivosti [On serviceability of thin plates after buckling], *Transactions of the CRI named after acad. A.N. Krylov*. (89.2(373)) (2015) 151–160 (in Russian).
9. **Semenov A.A., Moskalenko L.P., Karpov V.V., Sukhoterina M.V.**, Buckling of cylindrical panels strengthened with an orthogonal grid of stiffeners, *Bulletin of Civil Engineers*. 83 (6) (2020) 117–125 (in Russian).
10. **Xiang-Sheng C.**, The bending stability and vibration of cantilever rectangular plates, *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition, China)*. 8 (7) (1987) 673–683.
11. **Xiang-Sheng C.**, On several problems for lateral instability of cantilever plates, *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition, China)*. 9 (8) (1988) 787–792.
12. **Jiang L., Wu S., Zheng H.**, Lateral buckling analysis for rectangular cantilever plate subjected to a concentrated load, *Advanced Materials Research*. 671–674 (2013) 1596–1599.
13. **Yakoob J.A., Hasan I.J.** Study the increasing of the cantilever plate stiffness by using stiffeners, *International Journal of Scientific & Engineering Research*. 6 (4) (2015) 1678–1687.
14. **Baryshnikov S.O., Sukhoterina M.V., Knysht P.P.**, Stability of external cantilever elements of deep-sea vehicles, *Vestnik Gosudarstvennogo Universiteta Morskogo i Rechnogo Flota Imeni Admirala S.O. Makarova*. 12 (2 (60)) (2020) 347–358 (in Russian).
15. **Baryshnikov S.O., Sukhoterina M.V., Knysht P.P., Pizhurina N.F.**, Buckling of stabilizers deep-sea vehicles, *Marine Intellectual Technologies*. 48 (2-1) (2020) 83–90 (in Russian).
16. **Lekhnitskii S.G.**, *Anisotropic plates*, Gordon and Breach, London, 1968.
17. **Alfutov N.A.**, *Stability of elastic structures*, Series: Foundations of Engineering Mechanics, Eds.: Babitsky V.I., Wittenburg J., Springer, Berlin, Germany, 2000.
18. **Ullah S., Zhou J., Zhang J., et al.**, New analytic shear buckling solution of clamped rectangular plates by a two-dimensional generalized finite integral transform method, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 20 (02) (2020) 2071002.

Received 15.03.2021, accepted 24.05.2021.

THE AUTHORS

SUKHOTERIN Mikhail V.

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya St., St. Petersburg, 198135, Russian Federation
sukhoterinmv@gumrf.ru

KNYSH Tatiana P.

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya St., St. Petersburg, 198135, Russian Federation
knyshtp@gumrf.ru

PASTUSHOK Elena M.

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya St., St. Petersburg, 198135, Russian Federation
pastushokem@gumrf.ru

ABDIKARIMOV Rustamkhan A.

Tashkent Financial Institute
60A, A. Temur St., Tashkent, 100000, Republic of Uzbekistan
rabdikarimov@mail.ru