Математическая физика

DOI: 10.18721/JPM.12303
УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

БАЗИСНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДОНКИНА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.С. Бердников[1], Л.Н. Галль[1], Н.Р. Галль[1], К.В. Соловьев[2,1]

[1]Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;
[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе показано, что существуют дифференциальные операторы, которые преобразуют трехмерные однородные гармонические функции в новые трехмерные однородные гармонические функции. Характерной чертой этих операторов, названных авторами дифференциальными операторами Донкина, является их обратимость: для любой однородной гармонической функции найдется однородный и гармонический прототип, из которого эту функцию можно получить, если применить указанный оператор. В работе приводится полный список дифференциальных операторов Донкина первого порядка, которые выступают в качестве линейного базиса для симметризованных формул Томсона, используемых при генерировании трехмерных однородных гармонических функций.

Ключевые слова: электростатическое поле, магнитостатическое поле, скалярный потенциал, однородная функция, гармоническая функция

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 26–44. DOI: 10.18721/JPM.12303

BASIC DONKIN'S DIFFERENTIAL OPERATORS FOR HOMOGENEOUS HARMONIC FUNCTIONS

A.S. Berdnikov[1], L.N. Gall[1], N.R. Gall[1], K.V. Solovyev[2,1]

[1]Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russian Federation;
[2]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

It has been shown that there are differential operators transforming the three-dimensional homogeneous harmonic functions into new three-dimensional ones. A characteristic feature of these operators is their reversibility: for any homogeneous harmonic function there is a homogeneous and harmonic prototype from which it can be obtained by applying the specified operator. The involved operators were called differential Donkin’s operators by the authors. The paper provides a complete list of fundamental first-order Donkin’s differential operators forming a linear basis of Thomson formulas for three-dimensional homogeneous harmonic functions.

Keywords: electrostatic field, magnetostatic field, scalar potential, homogeneous function, harmonic function

Citation: Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V., Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 26–44. DOI: 10.18721/JPM.12303

Постановка задачи

Полезным инструментом при синтезе электронно- и ионно-оптических систем специального вида служат электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру [1 – 6]. Для полей, однородных по Эйлеру, напряженность электрического поля **E** и/или индукция магнитного поля **B** должны удовлетворять не только уравнениям Максвелла для электромагнитного поля, но и тождеству однородности:

$$\begin{aligned}&\forall\lambda>0:\ \mathbf{E}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^{k-1}\mathbf{E}(x,y,z),\\&\forall\lambda>0:\ \mathbf{B}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^{k-1}\mathbf{B}(x,y,z),\end{aligned}\qquad(1)$$

где k – степень однородности поля (не обязательно целочисленная).

Траектории движения заряженных частиц в электростатических и магнитостатических полях, однородных по Эйлеру, подчиняются принципу подобия траекторий Голикова [7, 8]. Отсюда следуют уникальные оптические свойства устройств, управляющих движением заряженных частиц, если эти устройства используют однородные по Эйлеру электрические и магнитные поля [1 – 5, 9 – 16].

При ненулевой степени однородности электрические или магнитные поля, однородные по Эйлеру и подчиняющиеся тождеству (1), характеризуются скалярным электрическим или магнитным потенциалом в виде скалярной гармонической функции $U(x, y, z)$, которая будет однородной (точнее, положительно однородной, т. е. при $\lambda > 0$) по Эйлеру, в смысле, который придается этому термину в классическом математическом анализе [17, 18]:

$$\forall\lambda>0:\ U(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^{k}U(x,y,z),\qquad(2)$$

где k – степень однородности функции, совпадающая со степенью однородности электрического или магнитного поля, как она определена с помощью тождеств (1).

Для полей с нулевой степенью однородности скалярный потенциал U в самом общем случае имеет вид:

$$U(x,y,z)=U_0(x,y,z)+C\ln(z+r),\qquad(3)$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (здесь и далее), U_0 – однородная гармоническая функция нулевой степени, C –произвольная константа.

При $C \neq 0$ выражение (3) больше не является однородной по Эйлеру функцией, хотя градиент функции (3) и подчиняется условиям однородности (1) для электрического либо магнитного поля. Вопрос об однородности скалярных и/или векторных потенциалов для полей, однородных по Эйлеру, подробно исследуется в работе [19].

Исследования Ю.К. Голикова [3, 20, 21] наглядно демонстрируют, каким удобным и эффективным инструментом при синтезе новых электронно- и ионно-оптических систем являются аналитические методы и, в частности, аналитические выражения для потенциалов электрических и магнитных полей. В случае однородных электрических и магнитных полей, при получении аналитических выражений для их скалярных потенциалов требуется предпринимать дополнительные и целенаправленные усилия, поскольку таких функций в некотором смысле «много меньше», чем обычных гармонических функций (см. Примечание 1 в конце статьи). Некоторые полезные аналитические выражения для гармонических функций, однородных по Эйлеру, которые можно использовать в качестве скалярных потенциалов, приводятся в статьях [22 – 29]. Но если ограничиваться лишь этими аналитическими выражениями при оптимизации новых электронно- и ионно-оптических систем, есть большой риск пропустить действительно оптимальное решение.

Задача вычисления однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности полностью решена. Точнее, с помощью дифференцирования по одной из пространственных переменных x, y или z, из любой трехмерной однородной гармонической функции $U(x,y,z)$ степени k можно получить новую трехмерную однородную гармоническую функцию степени $k - 1$. Тогда мы получаем для целочисленных степеней цепочку однородных гармонических функций с последовательно уменьшающимися степенями однородности. С помощью формулы Томсона (преобразование Кельвина) [30–41], которая имеет вид

$$V(x,y,z)=\frac{1}{r}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right),\qquad(4)$$

из однородных гармонических функций U с отрицательными целочисленными степенями k получаются однородные гармонические функции V с положительными целочисленными степенями $(-k - 1)$. Наконец, для однородных гармонических функций нулевой степени и степени −1 имеются явные формулы Донкина [1, 2, 11, 24, 42−45]:

$$V_0(x,y,z) = H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \quad (5)$$

$$V_{-1}(x,y,z) = \frac{1}{r} H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right); \quad (6)$$

они устанавливают взаимно-однозначное соответствие между решениями $H(p,q)$ двумерного уравнения Лапласа

$$H_{pp} + H_{qq} = 0$$

и трехмерными однородными гармоническими функциями со степенями однородности 0 и −1.

Поскольку для однородных функций общий множитель $1/r^2$ может быть вынесен из-под знака функции, формулу (4) можно записать в более удобном виде:

$$V(x,y,z) = r^{-2k-1} U(x,y,z). \quad (7)$$

Формула (7) получила название формулы Томсона для однородных функций. Очевидно, что выражение (7) будет однородной по Эйлеру функцией степени $(-k-1)$, если U будет однородной по Эйлеру функцией степени k. Однако прямолинейное (не использующее отсылку к общей формуле Томсона (4)) доказательство гармоничности выражения (7) при условии гармоничности функции U потребует некоторых дополнительных усилий. В частности, такое доказательство можно найти в трактате [32] (см. там приложение Б к главе 1).

Для полноты картины приведем историческую справку. Уи́льям То́мсон, лорд Ке́львин (*англ.* William Thomson, 1st Baron Kelvin) − британский физик и механик, известный своими выдающимися заслугами в чистой и прикладной науке. В литературе формула (2) называется либо формулой Томсона, либо преобразованием Кельвина, в зависимости от традиции, которой придерживается исследователь. Для формулы (3), насколько можно судить, в общепринятой математической литературе используется исключительно термин «формула Томсона», как правило, с уточняющим указанием «для однородных функций». Комбинированный же термин «преобразование Томсона» для линейных дифференциально-алгебраических операторов общего вида, преобразующих гармонические функции в новые гармонические функции, предложен авторами данной статьи.

Описанный выше процесс получения формул общего вида для гармонических однородных функций (состоящий из дифференцирования формул Донкина (5) или (6) по переменным x, y или z и последующего применения формулы Томсона (4) или (7)) позволяет генерировать в широком ассортименте новые однородные гармонические функции с целочисленными степенями однородности. Его несомненным достоинством является то, что таким образом можно получить любую однородную гармоническую функцию целочисленной степени. Обоснование полноты данного процесса генерирования трехмерных однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности хотя и достаточно просто, но тем не менее не вполне очевидно.

Действительно, теорема о дифференцировании однородных гармонических функций [44, 46] гарантирует, что для любой однородной гармонической функции существует однородный гармонический прототип на единицу большей степени, из которого ее можно получить путем дифференцирования по любой из пространственных переменных x, y или z. Формула Томсона обладает аналогичным свойством обратимости: для любой однородной гармонической функции для нее существует однородный и гармонический прототип, из которого ее можно получить, применив преобразование (4) либо (7). Данное утверждение почти очевидно, поскольку преобразование Томсона, повторенное дважды, приводит к исходной однородной гармонической функции.

Наконец, формулы Донкина (5), (6) обеспечивают исчерпывающее описание трехмерных однородных гармонических функций со степенями однородности 0 и −1, причем в качестве источника двумерных гармонических функций для формул Донкина можно использовать вещественные и мнимые части аналитических функций комплексного переменного [47 − 50]. В результате у любой трехмерной однородной гармонической функции целочисленной степени найдется прототип вида (5) либо (6), как правило, не единственный.

С практической точки зрения очень важно, что имеется конструктивный процесс, с помощью которого (в принципе) имеется возможность перебрать все однородные гармонические функции с целочисленными степенями однородности, используя двумерные гармонические функции в качестве исходного материала (см. Примечание 2 в конце статьи). Более подробно описанный алгоритм получения однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности описывается в работах [24, 44]. К сожалению, для однородных гармонических функций с нецелочисленными степенями однородности вопрос получения и полного перечисления остается в настоящее время открытым.

Дифференцирование по переменным x, y и z является не единственным преобразованием, обладающим нужными свойствами. Будем называть линейный дифференциальный оператор оператором Донкина (по имени первооткрывателя этого класса преобразований [42 – 45]) при следующих условиях:

а) оператор преобразует произвольную однородную гармоническую функцию в новую однородную гармоническую функцию, возможно, с другой степенью однородности;

б) для любой однородной гармонической функции существует функция-прототип (также однородная и гармоническая, но, возможно, не единственная), из которой посредством рассматриваемого оператора можно получить данную однородную гармоническую функцию.

Тривиальным и не слишком интересным примером служит тождественное преобразование $L[U] = U$ (возможно, с участием произвольного ненулевого множителя). Теорема о дифференцировании однородных гармонических функций [44, 46] показывает, что операторы дифференцирования

$$L[U] = U_x,\ L[U] = U_y,\ L[U] = U_z,$$

или, в общем случае, оператор

$$L[U] = aU_x + bU_y + cU_z$$

(a, b, c – константы, не все равны нулю), несомненно, являются операторами Донкина.

Задачей настоящей работы является нахождение исчерпывающего списка операторов Донкина первого порядка для трехмерных однородных гармонических функций. Данная статья прямо продолжает и описывает исследования, начало которых представлено в работах [40, 41].

Пример нетривиального оператора Донкина

Публикации [42, 43] являются, по всей видимости, первыми, в которых исчерпывающим образом решен вопрос о перечислении всех трехмерных однородных гармонических функций с целочисленными неотрицательными порядками однородности. Для этой цели автором был использован линейный дифференциальный оператор специального вида, исследованию которого посвящен этот раздел.

Пусть дана однородная гармоническая функция $U(x,y,z)$ со степенью однородности, равной m. Процедура конструирования новой однородной гармонической функции $V(x,y,z)$ со степенью однородности, равной $m + 1$, выглядит, согласно данным работ [42, 43], следующим образом.

1. С помощью взаимно-однозначного перехода от декартовых переменных x, y, z к сферическим r, θ, φ, т. е.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+y^2}\big/ z\right), \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(y/x\right), \end{cases} \tag{8}$$

однородная по Эйлеру функция U записывается в каноническом виде:

$$U(x,y,z) = r^m u(\theta,\varphi). \tag{9}$$

2. Сферическая функция $u(\theta,\varphi)$, заданная на единичной сфере, однозначным образом определяется по заданной однородной функции U. Поскольку функция U гармоническая (удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа), функция $u(\theta,\varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u(\theta,\varphi)}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u(\theta,\varphi)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} + m(m+1)u(\theta,\varphi) = 0. \tag{10}$$

Отсюда, в частности, следует, что

функция

$$U^*(x,y,z) = r^{-m-1} u(\theta,\varphi)$$

также будет гармонической (см. Примечание 3 в конце статьи).

3. От сферической функции $u(\theta,\varphi)$ осуществляется переход к новой сферической функции $v(\theta,\varphi)$ с помощью преобразования

$$v(\theta,\varphi) = \sin\theta \frac{\partial u(\theta,\varphi)}{\partial \theta} + (m+1)\cos\theta \cdot u(\theta,\varphi). \tag{11}$$

Можно проверить, что получившаяся функция $v(\theta,\varphi)$ должна будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 v(\theta,\varphi)}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial v(\theta,\varphi)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} + (m+1)(m+2)v(\theta,\varphi) = 0, \tag{12}$$

поскольку функция $u(\theta,\varphi)$ удовлетворяет уравнению (10).

4. Новая функция V определяется в соответствии с формулой

$$V(x,y,z) = r^{m+1} v(\theta,\varphi). \tag{13}$$

Такая функция V не только будет однородной по Эйлеру со степенью однородности $m + 1$, но и должна будет удовлетворять трехмерному уравнению Лапласа, так как функция $v(\theta,\varphi)$ удовлетворяет уравнению (12).

Если просуммировать теперь приведенную здесь процедуру конструирования, то окажется, что новая функция V выражается через старую функцию U с помощью линейного дифференциального оператора первого порядка, явно зависящего от степени однородности гармонической функции:

$$V = L[U] = xz\frac{\partial U}{\partial x} + yz\frac{\partial U}{\partial y} - (x^2+y^2)\frac{\partial U}{\partial z} + (m+1)zU. \tag{14}$$

Так как функция U удовлетворяет дифференциальному соотношению Эйлера для однородных функций степени m [17, 18], т. е.

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z} - mU = 0, \tag{15}$$

оператор (14) можно преобразовать к виду

$$V(x,y,z) = -(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} + (2m+1)zU(x,y,z). \tag{16}$$

Формула (16) преобразует однородные функции в новые однородные функции со степенью однородности, большей на единицу, так как частные производные функций, однородных по Эйлеру, будут однородными [17, 18].

При гармоничности функции U гармоничность функции V, заданной с помощью преобразования (16), гарантируется тождеством

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \equiv (2m+1)z(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) - r^2(U_{xxz} + U_{yyz} + U_{zzz}) - 4(xU_{xz} + yU_{yz} + zU_{zz} - (m-1)U_z). \tag{17}$$

Поскольку функция U должна удовлетворять как уравнению Лапласа, так и соотношению Эйлера (15), а также удовлетворять дополнительным уравнениям более высокого порядка (они получаются при дифференцировании уравнения Лапласа и соотношения Эйлера по переменной z), правая часть равенства (17) обращается в нуль.

Теорема 1. *Оператор (16) является обратимым, т. е. для любой однородной гармонической функции V степени $(m + 1)$ существует прототип в виде такой однородной гармонической функции U степени m, что функции V и U будут связаны между собой условием (16).*

Доказательство. Преобразование Томсона (7) позволяет найти для однородной гармонической функции U степени m такую однородную гармоническую функцию $\hat{U}$ степени $(-m - 1)$, которая обеспечивает выполнение равенства

$$U(x,y,z) = r^{2m+1}\hat{U}(x,y,z). \tag{18}$$

Точно так же для однородной гармонической функции V степени $(m + 1)$ имеется однородная гармоническая функции $\hat{V}$ степени $(-m - 2)$, которая обеспечивает выполнение равенства

$$V(x,y,z) = r^{2m+3}\hat{V}(x,y,z). \tag{19}$$

Если подставить равенства (18) и (19) в выражение (16) и упростить полученное выражение, то получим следующее условие:

$$\hat{V}(x,y,z) = -\frac{\partial \hat{U}(x,y,z)}{\partial z}. \quad (20)$$

В соответствии с теоремой о дифференцировании трехмерных однородных гармонических функций [44, 46], для заданной произвольной однородной гармонической функции $\hat{V}$ можно найти такую трехмерную однородную гармоническую функцию-прототип $\hat{U}$, которая обеспечит выполнение соотношения (20). Но тогда однородная гармоническая функция U, которая получается из функции $\hat{U}$ с помощью преобразования Томсона (7), обеспечит выполнение равенства (16).

Следовательно, линейный дифференциальный оператор (16) является обратимым на подмножестве однородных гармонических функций степени m, то есть является оператором Донкина.

Теорема 1 доказана.

Оператор Донкина (16) есть полный аналог операции дифференцирования с точки зрения генерирования полного набора однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности. Действительно, поскольку известно, что все однородные гармонические функции нулевой степени можно получать с помощью формулы Донкина (5), то при последовательном применении операторов вида (16) к выражениям (5) можно получать все однородные гармонические функции со степенями однородности 1, 2, ...

Обратимость дифференциального оператора (16) гарантирует, что ни одна однородная гармоническая функция не будет пропущена. Правда, поскольку прототип U определяется по функции V не единственным образом, большинство однородных гармонических функций будут возникать не один раз в процессе генерирования (а именно, одна и та же однородная гармоническая функция может получаться из довольно разных функций-прототипов).

С помощью преобразований Томсона (4) либо (7), из полного набора однородных гармонических функций с целочисленными степенями 0, 1, 2, ... можно получать парный полный набор однородных гармонических функций с отрицательными целочисленными степенями −1, −2, ... Тем самым оператор (16), подобно дифференцированию однородных гармонических функций по x, y или z [44, 46], позволяет решить вопрос об исчерпывающем представлении однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности.

Однако, как уже отмечалось, вопрос об исчерпывающем представлении полного набора однородных гармонических функций с нецелочисленными степенями однородности по-прежнему остается актуальным, но нерешенным.

Дифференциальные формулы Томсона первого порядка

В публикации [40] приводятся дифференциальные аналоги первого порядка формулы Томсона (4) для трехмерных гармонических функций. Эти формулы преобразуют трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции, причем форма трансформирующих выражений сознательно выбрана таким образом, чтобы при подстановке в них функций, однородных по Эйлеру, на выходе получались новые однородные по Эйлеру функции, возможно, с другой степенью однородности. Указанный список формул выглядит следующим образом:

$$V(x,y,z) = U(x,y,z), \quad (21)$$

$$V(x,y,z) = U_x(x,y,z), \quad (22)$$

$$V(x,y,z) = U_y(x,y,z), \quad (23)$$

$$V(x,y,z) = U_z(x,y,z), \quad (24)$$

$$\begin{gathered} V(x,y,z) = xU(x,y,z) + \\ +\left(x^2 - y^2 - z^2\right)U_x(x,y,z) + \\ +2xyU_y(x,y,z) + 2xzU_z(x,y,z), \end{gathered} \quad (25)$$

$$\begin{gathered} V(x,y,z) = yU(x,y,z) + \\ +2xyU_x(x,y,z) + \\ +\left(-x^2 + y^2 - z^2\right)U_y(x,y,z) + \\ +2yzU_z(x,y,z), \end{gathered} \quad (26)$$

$$\begin{gathered} V(x,y,z) = zU(x,y,z) + \\ +2xzU_x(x,y,z) + \\ +2yzU_y(x,y,z) + \\ +\left(-x^2 - y^2 + z^2\right)U_z(x,y,z), \end{gathered} \quad (27)$$

$$\begin{gathered} V(x,y,z) = xU_x(x,y,z) + \\ +yU_y(x,y,z) + zU_z(x,y,z), \end{gathered} \quad (28)$$

$$V\left(x,y,z\right)=yU_x\left(x,y,z\right)-xU_y\left(x,y,z\right), \quad (29)$$

$$V\left(x,y,z\right)=zU_x\left(x,y,z\right)-xU_z\left(x,y,z\right), \quad (30)$$

$$V\left(x,y,z\right)=zU_y\left(x,y,z\right)-yU_z\left(x,y,z\right). \quad (31)$$

В этом списке нет формул, представленных в статье [40], которые получаются при использовании преобразования Томсона в форме (4) для формул (21) – (31), поскольку такое преобразование меняет аргументы функции и дифференциальный оператор перестает иметь канонический вид. Однако после применения к операторам (21) – (31) преобразования Томсона в форме (7), к списку формул (21) – (31) добавляются операторы

$$V\left(x,y,z\right)=\frac{1}{r^{2m+1}}U\left(x,y,z\right), \quad (32)$$

$$V\left(x,y,z\right)=\frac{1}{r^{2m-1}}U_x\left(x,y,z\right), \quad (33)$$

$$V\left(x,y,z\right)=\frac{1}{r^{2m-1}}U_y\left(x,y,z\right), \quad (34)$$

$$V\left(x,y,z\right)=\frac{1}{r^{2m-1}}U_z\left(x,y,z\right), \quad (35)$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{x}{r^{2m+3}}U\left(x,y,z\right)+\\+\frac{x^2-y^2-z^2}{r^{2m+3}}U_x\left(x,y,z\right)+\\+\frac{2xy}{r^{2m+3}}U_y\left(x,y,z\right)+\frac{2xz}{r^{2m+3}}U_z\left(x,y,z\right),\end{gathered} \quad (36)$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{y}{r^{2m+3}}U\left(x,y,z\right)+\\+\frac{2xy}{r^{2m+3}}U_x\left(x,y,z\right)+\\+\frac{-x^2+y^2-z^2}{r^{2m+3}}U_y\left(x,y,z\right)+\\+\frac{2yz}{r^{2m+3}}U_z\left(x,y,z\right),\end{gathered} \quad (37)$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{z}{r^{2m+3}}U\left(x,y,z\right)+\\+\frac{2xz}{r^{2m+3}}U_x\left(x,y,z\right)+\frac{2yz}{r^{2m+3}}U_y\left(x,y,z\right)+\\+\frac{-x^2-y^2+z^2}{r^{2m+3}}U_z\left(x,y,z\right),\end{gathered} \quad (38)$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{x}{r^{2m+1}}U_x\left(x,y,z\right)+\\+\frac{y}{r^{2m+1}}U_y\left(x,y,z\right)+\frac{z}{r^{2m+1}}U_z\left(x,y,z\right),\end{gathered} \quad (39)$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{y}{r^{2m+1}}U_x\left(x,y,z\right)-\\-\frac{x}{r^{2m+1}}U_y\left(x,y,z\right),\end{gathered} \quad (40)$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{z}{r^{2m+1}}U_x\left(x,y,z\right)-\\-\frac{x}{r^{2m+1}}U_z\left(x,y,z\right),\end{gathered} \quad (41)$$

$$\begin{gathered}V\left(x,y,z\right)=\frac{z}{r^{2m+1}}U_y\left(x,y,z\right)-\\-\frac{y}{r^{2m+1}}U_z\left(x,y,z\right).\end{gathered} \quad (42)$$

В отличие от тех дифференциальных операторов, которые получаются из (21) – (31) после преобразования Томсона в форме (4), эти формулы сохраняют аргументы функции U неизменными. Однако теперь операторы (32) – (42) зависят от степени однородности функции в явном виде и, кроме того, генерируют новые гармонические функции только из других однородных гармонических функций. Формулы же (21) – (31) не зависят в явном виде от степени однородности преобразуемой функции, а также создают гармонические функции из произвольных трехмерных гармонических функций, не обязательно однородных по Эйлеру.

Теорема 2. *Линейные дифференциальные операторы первого порядка (21) – (27), (29) – (38), (40) – (42), преобразующие однородные гармонические функции в новые однородные гармонические функции, являются обратимыми на множестве однородных гармонических функций степени m.*

Доказательство. Формулы (32) – (42) наследуют свою обратимость и/или необратимость от формул (21) – (31), поскольку преобразование Томсона (7), безусловно, является обратимым. Поэтому для доказательства теоремы требуется доказать либо опровергнуть обратимость лишь для формул (21) – (31).

Обратимость оператора (21) тривиальна, так что в соответствии с данным ранее определением, тождественное преобразование

$$V(x, y, z) = U(x, y, z)$$

представляет собой частный, хотя и вполне бесполезный, случай оператора Донкина. Обратимость операторов (22) – (24) следует из теоремы о дифференцировании однородных гармонических функций, строгое доказательство которой приведено в работе [46].

Операторы (25) – (27) получаются путем дифференцирования формулы Томсона (4) по переменным x, y и z с последующим применением еще одного преобразования Томсона, чтобы вернуть аргументы функции к прежнему виду. Проделаем теперь эти преобразования в обратном порядке.

1. У заданной однородной гармонической функции $V(x, y, z)$ имеется однородный и гармонический прототип $V^*(x, y, z)$, из которого ее можно получить посредством преобразования (4).

2. У однородной гармонической функции $V^*(x,y,z)$ имеется однородный и гармонический прототип $U^*(x,y,z)$, из которого ее можно получить посредством дифференцирования: $V^* = U_x^*$, либо $V^* = U_y^*$, либо $V^* = U_z^*$ [44, 46].

3. У однородной гармонической функции $U^*(x, y, z)$ имеется однородный и гармонический прототип $U(x, y, z)$, из которого ее можно получить посредством преобразования (4).

В таком случае однородная гармоническая функция $U(x, y, z)$ оказывается прототипом, из которого посредством преобразования (25), либо (26), либо (27) получается заданная однородная гармоническая функция $V(x,y,z)$ (преобразования (25) – (27) представляют собой суперпозицию преобразований 1 – 3, выполненную именно в этом порядке, в чем легко убедиться с помощью прямого вычисления указанной суперпозиции).

Поэтому преобразования (25) – (27) обратимы и, следовательно, являются операторами Донкина в соответствии с данным ранее определением.

Остается разобраться с преобразованиями (28) – (31). Например, рассмотрим преобразование (29):

$$V(x,y,z) = yU_x(x,y,z) - xU_y(x,y,z). \quad (43)$$

С помощью замены координат Донкина [1, 2, 11, 24], а именно

$$\begin{cases} p = \dfrac{x}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ q = \dfrac{y}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \quad (44)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2pr}{1+p^2+q^2}, \\ y = \dfrac{2qr}{1+p^2+q^2}, \\ z = \pm\dfrac{r\left(1-p^2-q^2\right)}{1+p^2+q^2}, \end{cases}$$

функции U и V, которые однородны по Эйлеру со степенью однородности m, можно записать в виде

$$U(x,y,z) = r^m F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \quad (45)$$

$$V(x,y,z) = r^m G\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right). \quad (46)$$

Для того чтобы функции $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ были гармоническими (удовлетворяли уравнению Лапласа), необходимо и достаточно, чтобы функции $F(p, q)$ и $G(p, q)$ удовлетворяли дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2} + \frac{4m(m+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2} F(p,q) = 0, \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 G(p,q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 G(p,q)}{\partial q^2} + \frac{4m(m+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2} G(p,q) = 0. \quad (48)$$

При такой подстановке уравнение (43) приобретает вид

$$q\frac{\partial F(p,q)}{\partial p} - p\frac{\partial F(p,q)}{\partial q} = G(p,q). \quad (49)$$

В полярных координатах $p = s\cos\varphi$,

$q = s\sin\varphi$ функции F и G принимают вид

$$F(p,q) = F_0\left(\operatorname{arctg}(q/p), \sqrt{p^2+q^2}\right), \quad (50)$$

$$G(p,q) = G_0\left(\operatorname{arctg}(q/p), \sqrt{p^2+q^2}\right), \quad (51)$$

а уравнения (47), (48), (49) записываются как

$$\frac{\partial^2 F_0(\varphi,s)}{\partial\varphi^2} + s^2\frac{\partial^2 F_0(\varphi,s)}{\partial s^2} + s\frac{\partial F_0(\varphi,s)}{\partial s} + \frac{4m(m+1)s^2}{\left(1+s^2\right)^2}F_0(\varphi,s) = 0, \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 G_0(\varphi,s)}{\partial\varphi^2} + s^2\frac{\partial^2 G_0(\varphi,s)}{\partial s^2} + s\frac{\partial G_0(\varphi,s)}{\partial s} + \frac{4m(m+1)s^2}{\left(1+s^2\right)^2}G_0(\varphi,s) = 0. \quad (53)$$

$$\frac{\partial F_0(\varphi,s)}{\partial\varphi} + G_0(\varphi,s) = 0. \quad (54)$$

Из уравнения (54) следует, что общее решение поставленной задачи будет иметь вид

$$F_0(\varphi,s) = H(s) - \int_{\varphi_0}^{\varphi} G_0(\xi,s)\,d\xi, \quad (55)$$

где свободная функция $H(s)$ должна быть подобрана так, чтобы было выполнено уравнение (52).

После подстановки (55) уравнение (52) приобретает вид

$$s^2\frac{d^2H(s)}{ds^2} + s\frac{dH(s)}{ds} + \frac{4m(m+1)s^2}{\left(1+s^2\right)^2}H(s) = H_0(\varphi,s), \quad (56)$$

$$H_0(\varphi,s) = \frac{4m(m+1)s^2}{\left(1+s^2\right)^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} G_0(\xi,s)\,d\xi + \frac{\partial G_0(\varphi,s)}{\partial\varphi} + s\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\partial G_0(\xi,s)}{\partial s}d\xi + s^2\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\partial^2 G_0(\xi,s)}{\partial s^2}d\xi. \quad (57)$$

Чтобы у уравнения (56) было решение, функция $H_0(\varphi, s)$, стоящая в правой части, не должна зависеть от переменной φ.

Это действительно так:

$$\frac{\partial H_0(\varphi,s)}{\partial\varphi} = \frac{4m(m+1)s^2}{\left(1+s^2\right)^2}G_0(\varphi,s) + \frac{\partial^2 G_0(\varphi,s)}{\partial\varphi^2} + s\frac{\partial G_0(\varphi,s)}{\partial s} + s^2\frac{\partial^2 G_0(\varphi,s)}{\partial s^2} = 0, \quad (58)$$

поскольку в соответствии с исходным условием, функция $G_0(\varphi, s)$ обязана удовлетворять уравнению (53).

Теперь из обыкновенного дифференциального уравнения (56), где в качестве правой части можно использовать функцию

$$H_0(\varphi_0,s) = \partial G(\varphi,s)/\partial\varphi\Big|_{\varphi=\varphi_0}$$

не зависящую от переменной φ, находится подходящее решение $H(s)$.

Затем из соотношения (55) находится функция $F_0(\varphi, s)$, а из равенства (50) находится функция $F(p, q)$. Поскольку для полученной функции $F(p, q)$ выполнено как уравнение (47), так и уравнение (49), то однородная функция $U(x, y, z)$, заданная с помощью формулы (47), будет гармонической и будет удовлетворять соотношению (43). Следовательно, преобразование однородных гармонических функций (29) обратимо, а линейный дифференциальный оператор (29) есть оператор Донкина. Очевидно, операторами Донкина будут также и преобразования (30) и (31) (перестановка местами пространственных координат – это обратимое преобразование).

Таким образом, дифференциальные операторы (21) – (27), (29) – (31) и, соответственно, дифференциальные операторы (32) – (38), (40) – (42) являются обратимыми для подмножества однородных гармонических функций степени m.

Теорема 2 доказана.

Оператор (28) и, соответственно, оператор (39) рассматриваются отдельно. Из соотношения Эйлера (15) для однородных функций следует, что воздействие оператора (28) на гармоническую однородную функцию U эквивалентно ее умножению на степень однородности m, так что получать с помощью оператора (28) принципиально новые однородные гармонические функции не представляется возможным. С формальной точки зрения, при $m \neq 0$ этот оператор обратим, и поэтому его следует признать оператором Донкина. Однако при $m = 0$ результатом действия оператора (28) будет нуль, и, если только однородная гармоническая функция V нулевой степени не равна нулю, то у нее нет и быть не может однородного и гармонического прототипа U нулевой степени, из которого эту функцию можно получить посредством применения оператора (28).

Тем не менее, когда V есть однородная гармоническая функция нулевой степени, то для нее у оператора (28) существуют гармонические, но не однородные функции-прототипы. Такие функции имеют вид

$$U(x, y, z) = U_0(x, y, z) + V(x, y, z) \ln(z + r),$$

где $U_0(x, y, z)$ есть однородная функция нулевой степени, которая подбирается таким образом, чтобы обеспечить гармоничность функции U.

Действительно, после подстановки

$$V(x,y,z) = W\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right),$$

$$U_0(x,y,z) = H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right),$$

которую можно использовать в силу того, что $U_0(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ будут однородными функциями нулевой степени, условие

$$x\,U_x + y\,U_y + z\,U_z = V$$

выполняется автоматически, а для гармоничности функции $U(x, y, z)$ с учетом того, что функция $W(p, q)$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа по причине гармоничности функции $V(x, y, z)$, потребуется, чтобы функция $H(p,q)$ удовлетворяла двумерному уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = \frac{4}{1 + p^2 + q^2}\left(p\frac{\partial W}{\partial p} + q\frac{\partial W}{\partial q}\right),$$

у которого заведомо имеются решения.

Упрощенная форма для операторов Донкина

Если предположить, что функция U есть однородная функция степени m, которая подчиняется дифференциальному соотношению Эйлера (15), то выражения (25) − (27) и (36) − (38) упрощаются:

$$V(x,y,z) = (2m+1)xU(x,y,z) - \\ -r^2U_x(x,y,z), \tag{59}$$

$$V(x,y,z) = (2m+1)yU(x,y,z) - \\ -r^2U_y(x,y,z), \tag{60}$$

$$V(x,y,z) = (2m+1)zU(x,y,z) - \\ -r^2U_z(x,y,z), \tag{61}$$

$$V(x,y,z) = \frac{(2m+1)x}{r^{2m+3}}U(x,y,z) - \\ -\frac{1}{r^{2m+1}}U_x(x,y,z), \tag{62}$$

$$V(x,y,z) = \frac{(2m+1)y}{r^{2m+3}}U(x,y,z) - \\ -\frac{1}{r^{2m+1}}U_y(x,y,z), \tag{63}$$

$$V(x,y,z) = \frac{(2m+1)z}{r^{2m+3}}U(x,y,z) - \\ -\frac{1}{r^{2m+1}}U_z(x,y,z), \tag{64}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В этот список не включены операторы (28) и (39). При упрощении оператор (28) приобретает вид

$$V(x, y, z) = mU(x, y, z)$$

и тем самым совпадает с оператором (21) (тождественным преобразованием) с точностью до множителя-константы.

Аналогичным образом оператор (39) приобретает вид

$$V(x,y,z) = mU(x,y,z)/r^{2m+1}$$

и тем самым совпадает с оператором (32) (преобразованием Томсона (7)) с точностью до множителя-константы.

Несмотря на очевидные отличия, формулы (59) − (64) по сути являются уже известными операторами Донкина, только записанными в другой форме. В частности, формула (61) совпадает с оператором (16), который был исследован в разделе «Пример нетривиального оператора Донкина». При этом операторы (59) − (64) алгебраически отличаются от породивших их операторов (25) − (27) и (36) − (38), так что их действие на произвольные функции $U(x, y, z)$ будет, вообще говоря, другим. Однако применительно к однородным функциям степени m использование операторов (25) − (27), (36) − (38) и операторов (59) − (61), (62) − (64)

будет приводить к одному и тому же результату.

Заключение

Исследование всех возможных представлений дифференциальных формул Томсона для трехмерных однородных гармонических функций, выполненное в работах [40, 41], показывает, что с точностью до линейных комбинаций с постоянными коэффициентами и, в частности, с точностью до умножения на константу, других операторов Донкина для трехмерных однородных гармонических функций не существует.

Утверждение, высказанное в такой сильной форме, требует некоторого разъяснения. Например, можно получить и другие соотношения, отличные от полученных ранее, если рассматривать линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базовых соотношений (21) – (31) и (32) – (42), с одной и той же степенью однородности трансформированной функции. Другая возможность – использовать для этой цели упрощенные выражения (59) – (64). Следует отметить, что исследованию обратимости линейных комбинаций, составленных из базовых операторов Донкина (21) – (31) и (32) – (42), будет посвящена отдельная публикация.

Вместе с тем, кроме упрощенных выражений (59) – (64), существуют и другие эквивалентные формы операторов Донкина, например приведенные в предыдущем разделе; ведь если прибавить к любой из формул (21) – (31) или (32) – (42) соотношение Эйлера (16), умноженное на произвольную функцию, то получится новая трансформирующая формула с такими же свойствами. Следует отметить, что для чистоты эксперимента эта функция должна быть однородной по Эйлеру с соответствующей степенью однородности, иначе искусственную аддитивную добавку будет слишком легко вычленить из нового выражения.

Рассмотрим, например, оператор

$$\begin{gathered} L[U] = AU_x(x,y,z) + \\ +BU_y(x,y,z) + CU_z(x,y,z), \\ A = a(2m+1)xz + b(2m+1)yz + \\ +c\left(-mx^2 - my^2 + (m+1)z^2\right), \\ B = a(2m+1)xy + \\ +b\left(-mx^2 + (m+1)y^2 - mz^2\right) + c(2m+1)yz, \\ C = a\left((m+1)x^2 - my^2 - mz^2\right) + \\ +b(2m+1)xy + c(2m+1)xz, \end{gathered} \tag{65}$$

с произвольными константами a, b и c (в нашей статье [41] использован тот же оператор).

С алгебраической точки зрения, этот оператор отличается как от любой из полученных ранее базовых формул (21) – (31), так и от их линейной комбинации с постоянными коэффициентами, но при этом допускает представление в виде

$$\begin{gathered} L[U] = \Big(a(2m+1)xz + b(2m+1)yz + \\ +c\left(-mx^2 - my^2 + (m+1)z^2\right)\Big)U_x + \\ +\Big(a(2m+1)xy + b\left(-mx^2 + (m+1)y^2 - mz^2\right) + \\ +c(2m+1)yz\Big)U_y + \\ +\Big(a\left((m+1)x^2 - my^2 - mz^2\right) + \\ +b(2m+1)xy + c(2m+1)xz\Big)U_z = \\ = (2m+1)(cx + by + az)\times \\ \times\left(xU_x + yU_y + zU_z - mU\right) + \\ +mc\left((2m+1)xU - \left(x^2+y^2+z^2\right)U_x\right) + \\ +mb\left((2m+1)yU - \left(x^2+y^2+z^2\right)U_y\right) + \\ +ma\left((2m+1)zU - \left(x^2+y^2+z^2\right)U_z\right). \end{gathered} \tag{66}$$

Из этого тождества видно, что фактически оператор (65) ничем не отличается от линейной комбинации операторов (59), (60) и (61), пока он рассматривается на узком подмножестве, состоящем из однородных функций степени m.

Если не ограничиваться дифференциальными операторами первого порядка, то в качестве аддитивных добавок вместо соотношения Эйлера (16) можно в равной степени использовать трехмерное уравнение Лапласа, а также дифференциальные соотношения более высокого порядка, которые получаются при дифференцировании этих дифференциальных уравнений по переменным x, y или z, умноженные на произвольные функции. Однако, хотя подобные формулы могут серьезным образом отличаться (в алгебраическом смысле) от формул из полученного ранее списка, все эти формулы, по своему действию в качестве генераторов новых аналитических выражений для трехмерных однородных гармонических функций, будут полностью эквивалентны базовым формулам (21) – (31) либо их линейным комбинациям с постоянными коэффициентами. Указанная связь, однако, не всегда является очевидной (см. пример в виде выражения (65)). Следует отметить, что операторы Донкина не являются в этом плане исключением и, в частности, похожие проблемы, касающиеся фактической идентичности математических выражений, не равных друг другу тождественно в алгебраическом смысле, рассматриваются, например, в работах [51 – 54], хотя и на совершенно ином содержательном материале.

Остается нерассмотренной задача о существовании и нахождении таких формул Томсона и таких операторов Донкина для однородных гармонических функций, когда аргументы функции U подвергаются замене переменных

$$x \to f(x, y, z),\ y \to g(x, y, z),$$
$$z \to h(x, y, z).$$

При этом для частного случая симметризованной замены переменных

$$x \to x\varphi(x, y, z),\ y \to y\varphi(x, y, z),$$
$$z \to z\varphi(x, y, z)$$

(см. наши статьи [40, 41]) общий множитель $\varphi(x, y, z)$ выносится из-под аргументов однородной функции U, и тем самым все такие случаи замены переменных совпадают с уже рассмотренным случаем, когда аргументы функции U остаются прежними. Однако исследование дополнительных вариантов для формул Томсона и операторов Донкина, которые могут возникать при использовании замены переменных общего вида для аргументов функции U, выходит за рамки данного исследования.

Примечания

1. Трехмерная гармоническая функция общего вида $U(x, y, z)$ полностью определяется двумя произвольными функциями двух переменных, например, значением $U^{(0)}(x, y) = U(x, y, 0)$ функции $U(x, y, z)$ вдоль плоскости $z = 0$ и значением

$$U^{(n)}(x, y) = \partial U(x, y, 0)/\partial z$$

нормальной производной функции $U(x, y, z)$ вдоль плоскости $z = 0$.

Это следует из того факта, что решение такой задачи Коши для трехмерного уравнения Лапласа однозначным образом находится (по крайней мере, в окрестности плоскости $z = 0$) с помощью ряда Шерцера по переменной z:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U^{(0)}(x, y) + zU^{(n)}(x, y) - \\ &- \frac{z^2}{2!}\left(U^{(0)}_{xx}(x, y) + U^{(0)}_{yy}(x, y)\right) - \\ &- \frac{z^3}{3!}\left(U^{(n)}_{xx}(x, y) + U^{(n)}_{yy}(x, y)\right) + \\ &+ \frac{z^4}{4!}\left(U^{(0)}_{xxxx}(x, y) + 2U^{(0)}_{xxyy}(x, y) + U^{(0)}_{yyyy}(x, y)\right) + \\ &+ \frac{z^5}{5!}\left(U^{(n)}_{xxxx}(x, y) + 2U^{(n)}_{xxyy}(x, y) + U^{(n)}_{yyyy}(x, y)\right) - \cdots, \end{aligned} \tag{67}$$

где коэффициенты перед степенями переменной z выражаются однозначным образом через функции $U^{(0)}$, $U^{(n)}$ и их частные производные, поскольку функция U обязана удовлетворять уравнению Лапласа.

Для получения трехмерной однородной гармонической функции степени m необходимо и достаточно, чтобы функции $U^{(0)}(x,y) = U(x, y, 0)$ и

$$U^{(n)}(x, y) = \partial U(x, y, 0)/\partial z$$

были однородными по Эйлеру со степенями однородности m и $m - 1$ (достаточность следует из формулы (67) и того факта, что частные производные однородных функций $U^{(0)}(x, y)$ и $U^{(n)}(x, y)$ сами являются однородными функциями соответствующей степени [17, 18]). Однако однородная по Эйлеру функция двух переменных задается с помощью произвольной функции одной переменной, как это следует из ее представления в следующем виде [17, 18]:

$$f(x, y) = x^k g(y/x).$$

Тем самым трехмерные однородные функции однозначным образом определяются через две произвольные функции всего лишь одного вещественного переменного, в отличие от трехмерных гармонических функций общего вида.

2. Неудобным моментом процесса, описанного во введении, с помощью которого есть возможность вычислить любую однородную гармоническую функцию с целочисленными степенями однородности, выступает тот факт, что одна и та же трехмерная однородная гармоническая функция может получаться многократно из разных двумерных гармонических прототипов. Формулы Донкина (5), (6) в этом плане гораздо более удобны для пользователя, так как устанавливают взаимно-однозначное соответствие между трехмерными однородными и гармоническими функциями V_0 и V_{-1} и двумерными гармоническими функциями H. Процедура же однородного гармонического дифференцирования (точнее, интегрирования) по переменным x, y и z подобным полезным свойством не обладает, поскольку прототип U для заданной функции V восстанавливается с некоторой свободой выбора [44, 46].

3. Из уравнения (10) следует, что при той же самой сферической функции $u(\theta,\varphi)$, для которой однородная функция

$$V(x, y, z) = r^m u(\theta,\varphi)$$

будет гармонической, однородная функция

$$V(x, y, z) = r^{-m-1} u(\theta, \varphi)$$

также будет гармонической.

Это связано с тем, что при замене $m \to (-m - 1)$ произведение $m\,(m + 1)$ в уравнении (10) для сферической функции $u(\theta, \varphi)$, которое, собственно, и обеспечивает гармоничность функции V, не меняется. Данный факт можно рассматривать как еще одно доказательство гармоничности преобразования Томсона (7) для однородных функций, поскольку

$$V\left(x, y, z\right) = r^{-m-1} u\left(\theta,\varphi\right) = r^{-2m-1} U\left(x, y, z\right).$$

Вычисления, приведенные в данной работе, выполнены с помощью программы Wolfram Mathematica [55].

Работа частично выполнена в рамках НИР 0074-2019-0009, входящей в состав государственного задания № 075-00780-19-02 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 2. С. 91–94.

2. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44–47.

3. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.

4. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.

5. **Краснова Н.К.** Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.04.04. СПб, 2013. 259 с.

6. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. № 1. С. 50–58.

7. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.

8. **Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.** Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.

9. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Антонов А.С., Соловьев К.В.** Синтез краевых магнитных полей для статических масс-анализаторов спектрографического типа // Масс-спектрометрия. 2018. Т. 15. № 1. С. 26–43.

10. **Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Синтез электродных конфигураций, сохраняющих для краевых электрических полей свойство однородности по Эйлеру // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 4. С. 609–613.

11. **Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Применение формулы Донкина в теории электростатических призм // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 11. С. 1711–1719.

12. **Бердников А.С., Аверин И.А.** О невозможности двойной фокусировки в комбинированных электрических и магнитных полях, однородных по Эйлеру // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13. № 1. С. 67–70.

13. **Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.** Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I. Общий принцип и однокаскадные схемы // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12. № 4. С. 272–281.

14. **Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.** Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II. Условия двойной фокусировки высокого порядка у двухкаскадной схемы // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13. № 1. С. 11–20.

15. **Бердников А.С., Аверин И.А.** Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 89–95.

16. **Аверин И.А., Бердников А.С.** Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 5–8.

17. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

18. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.

19. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Об однородности скалярных и векторных потенциалов электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5. № 1. С. 10–27.

20. **Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В.** Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Ленинград: Изд-во ЛПИ, 1984. 79 с.

21. **Голиков Ю.К., Соловьёв К.В.** Электростатические ионные ловушки. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2008. 152 с.

22. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Простейшие аналитические электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. 2016. № 2 (44). С. 17–32.

23. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. 2016. № 2 (44). С. 147–165.

24. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 4. С. 13–30.

25. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Интегральные формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 4. С. 31–42.

26. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Квазиполиномиальные трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 1. С. 71–80.

27. **Краснова Н.К., Бердников А.С., Соловьев К.В., Аверин И.А.** О квазиполиномиальных трехмерных потенциалах электрических и магнитных полей // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 1. С. 81–92.

28. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Анализ интегральной формулы Уиттекера общего вида для электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 4. С. 63–71.

29. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Интегральная формула Уиттекера для электрических и магнитных потенциалов с нулевым порядком однородности и ее следствия // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 4. С. 72–79.

30. **Thomson W.** Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de mathématiques pures et appliquées. Tome XII. 1847. Pp. 256–264.

31. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.**

Трактат по натуральной философии. Часть I. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 572 с.

32. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Часть II. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 560 с.

33. **Сретенский Л.Н.** Теория ньютоновского потенциала. Москва, Ленинград: ОГИЗ–ГИТТЛ, 1946. 318 с.

34. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.

35. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

36. **Kellogg O.D.** Foundations of potential theory. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1967. 386 p.

37. **Уэрмлер Дж.** Теория потенциала. М.: Мир, 1980. 134 с.

38. **Helms L.L.** Potential theory. Second Ed. London, Heidelberg, New-York, Dordrecht: Springer, 2014. 485 p.

39. **Голиков Ю.К**. Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2(44). С. 165–181.

40. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 32–48.

41. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 49–62.

42. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. Pp. 43–57.

43. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c // Proceedings of the Royal Society of London. 1856–1857. Vol. 8. Pp. 307–310.

44. **Гобсон Е.В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.

45. **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.** Курс современного анализа. Часть 2: Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 516 с.

46. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Теорема о дифференцировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 3. С. 107 –119.

47. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

48. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1968. 486 с., 624 с.

49. **Евграфов М.А.** Аналитические функции. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 448 с.

50. **Гурвиц А., Курант Р.** Теория функций. М.: Наука, 1968. 646 с.

51. **Буляница А.Л., Курочкин В.Е.** Исследование процессов упорядочивания в открытых системах // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 2. С. 43–49.

52. **Буляница А.Л., Евстрапов А.А., Рудницкая Г.Е.** Метод моментов при расчете параметров каналов в микроразмерных системах // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 4. С. 28–40.

53. **Евстрапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Беленький Б.Г., Петряков А.О., Курочкин В.Е.** Особенности применения алгоритмов цифровой фильтрации электрофореграмм при анализе веществ на микрочипе // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 2. С. 57–63.

54. **Буляница А.Л.** Математическое моделирование в микрофлюидике: основные положения // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 2. С. 51–66.

55. Wolfram Mathematica // URL : http://wolfram.com/mathematica/

Статья поступила в редакцию 20.06.2019, принята к публикации 10.07.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26

asberd@yandex.ru

ГАЛЛЬ Лидия Николаевна – *доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
lngall@yandex.ru

ГАЛЛЬ Николай Ростиславович – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
gall@ms.ioffe.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

REFERENCES

1. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, I, Technical Physics. 45 (2) (2000) 232–235.

2. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, II, Technical Physics. 45 (3) (2000) 330–333.

3. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Teoriya synteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, St.Petersburg, 2010.

4. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 56 (2) (2011) 164–170.

5. **Krasnova N.K.,** Theory and synthesis of disperging and focusing electron optical media, Dr. Sci. Thesis. St. Petersburg, 2013 (in Russian).

6. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Analytical structures of generalized homogeneous electrical spectrographic media, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 24 (1) (2014) 50–58.

7. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Generalized similarity principle of similarity in electron spectrography, Prikladnaya fizika (Applied Physics). (2) (2007) 5–11.

8. **Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R.,** The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Technical Physics Letters. 43 (2) (2017) 156–158.

9. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Antonov A.S., Soloviev K.V.,** Synthesis of fringing magnetic fields for static mass analyzers of the spectrographic type, Journal of Analytical Chemistry. 73 (14) (2018) 1301–1316.

10. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.,** Synthesis of electrode configurations that conserve fringing electric field homogeneity in Euler terms, Technical Physics. 63 (4) (2018) 593–597.

11. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.,** Application of the Donkin formula in the theory of electrostatic prisms, Technical Physics. 63 (11) (2018) 1659–1666.

12. **Berdnikov A.S., Averin I.A.,** On the impossibility of double focusing in combined electric and magnetic fields homogeneous in Euler terms, Journal of Analytical Chemistry. 71 (14) (2016) 1389–1391.

13. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K.,** Static mass spectrometers of new type, using Euler's homogeneous electric and magnetic fields. I. General principle and single-stage systems, Journal of Analytical Chemistry. 71 (13) (2016) 1280–1287.

14. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K.,** Static mass spectrometers of new type, using Euler's homogeneous electric and magnetic fields. II: Conditions of high-order double focusing for two-cascade schemes, Journal of Analytical Chemistry. 71 (14) (2016) 1332–1340.

15. **Berdnikov A.S., Averin I.A.,** New approach

to ion optics design for static mass spectrographs based on non-uniformed fields homogenious in Euler terms, Uspekhi prikladnoy fiziki (Advances in Applied Physics). 4 (1) (2016) 89–95.

16. **Averin I.A., Berdnikov A.S.,** Fringe fields of gridless electronic spectrographs with Euler's homogeneous electrostatic fields, Uspekhi prikladnoy fiziki (Advances in Applied Physics). 4 (1) (2016) 5–8.

17. **Fichtenholz G.M.,** Differential- und Integralrechnung, I, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 1968.

18. **Smirnov V.I.**, A course of higher mathematics, Vol. I: Elementary calculus, Pergamon Press, Oxford, 1964.

19. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** On homogeneity of scalar and vector potentials of electric and magnetic fields, homogeneous in Euler terms, Uspekhi Prikladnoi Fiziki (Advances in Applied Physics). 5 (1) (2017) 10–27.

20. **Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuhin V.V.,** Raschet elementov elektrostaticheskikh elektronno-opticheslikh sistem [Design of elements of electron optical systems], Leningrad Polytechnic Inst. Publishing, Leningrad, 1984.

21. **Golikov Yu.K., Solovyov K.V.,** Elektrostaticheskiye ionnyye lovushki [Electrostatic ion traps], Polytechnic University Publishing, St. Petersburg, 2008.

22. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Prosteyshiye analiticheskiye elektricheskiye i magnitnyye potentsialy, odnorodnyye po Eyleru [The simplest analytical electric and magnetic potentials homogenous in Euler terms], Vestnik Aktyubinskogo Regionalnogo Gosudarstvennogo Universiteta Im. K. Zhubanova. (2 (44)) (2016) 17–32.

23. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Trekhmernyye elektricheskiye i magnitnyye potentsialy, odnorodnyye po Eyleru [Three-dimensional electric and magnetic potentials homogenous in Euler terms], Vestnik Aktyubinskogo Regionalnogo Gosudarstvennogo Universiteta Im. K. Zhubanova. (2 (44)) (2016) 147–165.

24. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** General formulas for three-dimensional electric and magnetic potentials homogeneous in Euler terms with an integer order of homogeneity, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 26 (4) (2016) 13–30.

25. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Integral expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms and have non-integer orders of uniformity, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 26 (4) (2016) 31–42.

26. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Quasi-polynomial 3D electric and magnetic potentials homogeneous in Euler's sense, St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 3 (1) (2017) 39–46.

27. **Krasnova N.K., Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Averin I.A.,** On the quasi-polynomial 3D potentials of electric and magnetic fields, St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics. 3 (1) (2017) 47–56.

28. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Analysis of the general Whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials homogeneous in Euler terms, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 27 (4) (2017) 63–71.

29. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials with a zero order of homogeneity and its consequencies, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 27 (4) (2017) 72–79.

30. **Thomson W.,** Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville, Journal de mathématiques pures et appliqués. 12 (1847) 256–264.

31. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 1, University Press, Cambridge, 1912.

32. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 2, University Press, Cambridge, 1912.

33. **Sretensky L.N.,** Teoriya niyutonovskogo potentsiala [Theory of the Newtonian potential], Moscow, Leningrad, OGIZ-GITTL, 1946.

34. **Smirnov V.I.,** A course of higher mathematics, Vol. 4: Integral equations and partial differential equations, Pergamon Press, Oxford, 1964.

35. **Vladimirov V.S.,** Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics], Mir Publishers, Moscow, 1984.

36. **Kellogg O.D.**, Foundations of potential theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.

37. **Wermer J.,** Potential theory, 2nd Ed., Ser. "Lecture Notes in Mathematics", Vol. 408, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1981.

38. **Helms L.L.,** Potential theory, 2nd Ed., Springer, London, Heidelberg, New-York, Dordrecht, 2014.

39. **Golikov Yu.K.,** Analytical ways of describing harmonic functions, Vestnik of Aktobe's K. Zhubanov Regional State University, Physics and

Mathematics. (2(44)) (2016) 165–181.

40. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., et al.,** Generalization of the Thomson formula for harmonic functions of a general type, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48.

41. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., et al.,** Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 49–62.

42. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 147 (1857) 43–57.

43. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Proceedings of the Royal Society of London. 8 (1856–1857) 307–310.

44. **Hobson E.W.,** The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, University Press, Cambridge, 2012.

45. **Whittaker E.T., Watson G.N.,** A course of modern analysis, University Press, Cambridge, 1950.

46. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** The theorem on the differentiation of three-dimensional electric and magnetic potentials, homogeneous in Euler terms, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 27 (3) (2017) 107–119.

47. **Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.,** Methoden der komplexen Funktionen-theorie, Verlag Wissenshaft, 1969.

48. **Markushevich A.I.,** Theory of functions of a complex variable, Vol. 1–3, Providence, US, Amer. Math. Society Publ., 2005.

49. **Evgrafov M.A.,** Analytic functions, Dover Publ., 1978.

50. **Hurwitz A., Courant R.,** Vorlesungen Über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen, Springer, Berlin. 1964.

51. **Bulyanitsa A.L., Kurochkin V.E.,** Studying ordering processes in open systems (on the example of pattern evolution in colonies of imperfect mycelial fungi), Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 10 (2) (2000) 43–49.

52. **Bulyanitsa A.L., Evstrapov A.A., Rudnitskaya G.E.,** Calculation of microscale system channel parameters by the method of moments, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (4) (2003) 28–40.

53. **Evstrapov A.A., Bulyanitsa A.L., Rudnitskaya G.E., et al.,** Characteristic features of digital signal filtering algorithms as applied to electrophoresis on a microchip, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (2) (2003) 57–63.

54. **Bulyanitsa A.L.,** Mathematical modeling in microfluidics: basic concepts, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 15 (2) (2005) 51–66.

55. Wolfram Mathematica, URL: http://wolfram.com/mathematica/.

Received 20.06.2019, accepted 10.07.2019.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

GALL Lidia N.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
lngall@yandex.ru

GALL Nikolaj R.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
gall@ms.ioffe.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru