



Математическое моделирование физических процессов

DOI: 10.18721/JPM.12302
УДК 519.63:621.039

СХЕМА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МНОГОФАЗНЫХ ПОТОКОВ В РАВНОВЕСНОМ БАРОТРОПНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

С.В. Булович

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Для модели многофазной среды с общим давлением в жидкостях предложена экономичная схема интегрирования системы дифференциальных уравнений. Алгоритм позволяет рассматривать варианты потока многофазной среды с формированием любой структуры по количеству рассматриваемых жидкостей и допускает асимптотический переход к одножидкостной модели. Алгебраическое соотношение баланса объемной доли жидкостей сформулировано в виде дифференциального уравнения относительно давления. Корректность задачи Коши для системы уравнений, описывающих поведение многофазной среды с общим давлением, восстанавливается путем использования повторных производных по пространственной координате от разыскиваемых функций. В качестве примера работы алгоритма рассмотрен вариант течения для трех жидкостей. Решена задача Римана о распаде разрыва в канале переменного сечения при различных значениях давления и объемной доли жидкостей по разные стороны диафрагмы.

Ключевые слова: многожидкостная модель, численное моделирование, корректность задачи Коши, экономичный алгоритм

Ссылка при цитировании: Булович С.В. Схема численного интегрирования системы уравнений многофазных потоков в равновесном баротропном приближении // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 17–25. DOI: 10.18721/JPM.12302

THE SYSTEM OF MULTIPHASE FLOW EQUATIONS IN THE EQUILIBRIUM BAROTROPIC APPROXIMATION: A NUMERICAL SCHEME

S.V. Bulovich

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, an economical integration scheme of a differential equation system has been proposed for the model of multiphase medium with a common pressure in liquids. The algorithm allows someone to consider various cases of multiphase medium flows with formation of any structure by the number of liquids under study and admits an asymptotic transition to a single-fluid model. The algebraic balance relation of the fluid volume fraction was stated through the form of a differential equation in pressure. The correctness of the Cauchy problem for an equation system was remade using repeated derivatives of the sought-for functions with respect to a spatial coordinate. The Riemann problem in the varying-area channel at various values of liquid pressure and its volume fraction on the different sides of a diaphragm in the three-fluid version was solved.

Keywords: multi-fluid model, numerical simulation, correctness of Cauchy problem, economical algorithm

Citation: Bulovich S.V. The system of multiphase flow equations in the equilibrium barotropic approximation: a numerical scheme, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 17–25. DOI: 10.18721/JPM.12302

Введение

Для описания явлений, происходящих в гетерогенных средах, сформулирован ряд математических моделей, обладающих определенной иерархией по полноте и адекватности отражения происходящих процессов. Простейшие модели оперируют представлениями о многофазном потоке как смеси, которая рассматривается в рамках одного общего для смеси уравнения баланса массы, импульса и энергии. Более полное описание, введенное в рассмотрение Х.А. Рахматулиным [1], использует понятие взаимопроникающих континуумов, когда одна и та же область пространства характеризуется количеством объемной доли вещества, находящегося в различных агрегатных состояниях. При этом, в зависимости от допущений о равновесности происходящих процессов, для определения оставшихся термо- и газодинамических функций состояния многофазного потока, используют необходимое количество балансовых соотношений. В случае более широкого толкования концепции взаимопроникающих континуумов привлекают понятие жидкостей, когда допускается, что для одного и того же агрегатного состояния вещества варьируются состав, уровень скоростей, температур и давлений. В такой постановке широкое распространение получила модель, в которой реализовано допущение о равных значениях давления в жидкостях. По принятой классификации это так называемые равновесные по давлению модели.

В классе течений, где тепловые процессы не являются определяющими, возможно дальнейшее упрощение математической модели, связанное с рассмотрением баротропных процессов. В этом случае многожидкостная модель будет состоять из уравнений неразрывности, уравнений количества движения, уравнений связи плотности со значением давления для каждой из жидкостей и алгебраического соотношения баланса объемной доли жидкостей. В квазиодномерной постановке система уравнений, записанная для канала переменного сечения, имеет вид

$$\frac{\partial(A\alpha_k\rho_k)}{\partial t} + \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k)}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k)}{\partial t} + \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k^2 + A\alpha_k p)}{\partial x} - \\ - p \frac{\partial(A\alpha_k)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{k=K} \alpha_k = 1, \rho_k = \rho_k(p),$$

где α_k – объемная доля k -ой жидкости; ρ_k , кг/м³, u_k , м/с, – ее плотность и скорость ($k = 1, 2, \dots, K$; K – общее количество жидкостей); p , Па, – общее для всех жидкостей давление в сечении канала; A , м², – площадь сечения канала; t , с, – время; x , м, – координата вдоль образующей канала.

Система дифференциальных уравнений (1) состоит из слагаемых в виде первых производных по пространству и времени. Источниковые слагаемые, описывающие массообменные процессы в жидкостях и процессы изменения импульса за счет взаимодействия фаз на межфазной поверхности или взаимодействия жидкостей со стенкой канала, не представлены. Как правило, при конструировании этих слагаемых не используют дифференциальные соотношения, и, следовательно, такие слагаемые не будут влиять на тип и свойства системы уравнений (1).

В рамках двухжидкостного подхода ($K = 2$) установлено, что система уравнений (1) всегда негиперболическа, если скорости в жидкостях по величине не равны между собой, а задача Коши для нее некорректна. Другими словами, такую систему уравнений формально нельзя использовать для описания состояния гетерогенной среды [2]. Известно несколько приемов, решающих эту проблему.

Формальный подход к системе уравнений (1) как к системе уравнений первого порядка позволяет ожидать от нее проявления гиперболических свойств как от совокупности уравнений переноса, что и наблюдается при предельном переходе к однофазному течению (одной жидкости). В случае двух и большего количества жидкостей комплексное значение собственных чисел (они трактуются как скорости распространения возмущений) у матрицы Якоби для этой системы свидетельствует об отсутствии характеристических направлений и утрате гиперболических свойств.



Понимание этого факта позволило сформировать путь регуляризации свойств матрицы, который исключает возникновение комплексных собственных чисел матрицы Якоби за счет добавления тех или иных слагаемых, содержащих первые производные от разыскиваемых функций.

Исторически в литературе такой подход восстановления гиперболических свойств системы уравнений Эйлера для многофазных задач в формулировке с общим давлением связывают с учетом присоединенных масс. Добавление производных по времени и по пространству от компонент скорости в уравнения количества движения позволяет установить размеры области, где неблагоприятное сочетание значений разыскиваемых функций не проявляется [3 – 5]. В конечном счете, развивая это направление, в системе уравнений (1) удалось ограничиться добавлением для каждой из жидкостей в уравнения количества движения всего одного слагаемого, содержащего в качестве сомножителя градиент объемной доли. Физическая интерпретация этого слагаемого раскрывается таким понятием, как давление на границе p_i (здесь индекс i обозначает принадлежность к интерфейсу, т. е. величину давления на поверхности между контактирующими жидкостями). Возникающую при этом разность давлений $p_i - p$ можно определить через характеристики контактирующих жидкостей. Подбор количественного значения для разности $p_i - p$ позволяет обеспечить действительные значения всех собственных чисел матрицы Якоби. В частности, для двухжидкостных моделей анализ корней характеристического уравнения указывает, что действительные значения обеспечиваются при выборе количественного значения разности в виде величины, которая пропорциональна скорости движения жидкости относительно скорости движения интерфейса, т. е. величине $u_{ki} - u_k$. Примеры использования этой методики для двухжидкостного подхода содержатся, например, в работах [6 – 8]; обоснование работоспособности этого приема для трех и большего количества жидкостей в литературе отсутствует.

Следует упомянуть еще об одном техническом приеме численного решения системы уравнений (1). Заключается он в использовании разностных операторов, аппроксимирующих производные с первым порядком точности, для представления

производных по пространству. В этом случае первое дифференциальное приближение разностной схемы в качестве главного слагаемого содержит повторную производную. Ее наличие приводит к изменению типа системы дифференциальных уравнений с неопределенного на параболический. В системе уравнений первого дифференциального приближения степень влияния этих производных обусловлена значением коэффициентов при старших производных, т. е. схемной вязкостью. Установлено, что при грубой дискретизации расчетной области, т. е. при высоких значениях схемной вязкости, получить численное решение системы уравнений (1) возможно. К сожалению, при этом подходе установить асимптотику поведения решения при уменьшении шага сетки невозможно, так как при уменьшении значения схемной вязкости возникающие колебания решения носят экспоненциальный характер.

В настоящей работе для решения системы уравнений (1) следует обратить внимание на два важных момента.

Во-первых, за счет дополнения уравнений количества движения повторными производными, изменен тип рассматриваемой системы уравнений на параболический. Это позволяет, в общем случае, не связывать устойчивость вычислительного процесса с использованием для представления производных по пространству операторов, которые выполняют аппроксимацию с первым порядком точности. Необходимый для этого коэффициент переноса (по аналогии с принятыми в вычислительной математике трактовками, его следует называть искусственной вязкостью) определяется параметрами решаемой задачи: свойствами рассматриваемых жидкостей и шагом дискретизации по пространству.

Во-вторых, вместо алгебраического уравнения баланса объемной доли сформулировано эволюционное дифференциальное уравнение параболического типа относительно давления.

Для вывода указанного уравнения воспользуемся уравнением неразрывности. Для каждой жидкости, расписывая значение производной по времени от произведения функций, можно получить уравнение следующего вида:

$$A \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + A \frac{\alpha_k}{\rho_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

При помощи уравнения состояния для каждой из жидкостей, заменяя производную от плотности производной от давления и, с учетом алгебраического соотношения баланса объемной доли, проводя суммирование по всем значениям объемных долей, можно получить уравнение эволюции давления, которое имеет ясный физический смысл как результирующая мера дисбаланса потоков массы различных жидкостей:

$$A \left(\sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\rho_k c_k^2} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k)}{\partial x} \right) = 0. \quad (3)$$

В первом слагаемом, сомножитель в виде суммы перед производной от давления по времени является ничем иным, как способом вычисления скорости звука в смеси жидкостей по формуле Вуда.

После названных двух модификаций система уравнений (1) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k)}{\partial t} + \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k^2)}{\partial x} + A \alpha_k \frac{\partial p}{\partial x} &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(v A \frac{\partial (\alpha_k \rho_k u_k)}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{A}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k)}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\rho_k = \rho_k(p), \quad c_k^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho_k}, \quad \rho = \sum_{k=1}^K \alpha_k \rho_k,$$

$$\frac{1}{\rho c^2} = \sum_{k=1}^K \left(\frac{\alpha_k}{\rho_k c_k^2} \right), \quad v = \Delta x c,$$

где c_k, c , м/с, – соответственно скорость звука в k -ой жидкости и таковая в гетерогенной среде, определенной по формуле Вуда; ρ – плотность смеси.

Выбор коэффициента искусственной вязкости основан на исследовании, проведенном в работе [9].

Численный метод

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (4) воспользуемся методом конечных разностей. Для этого

введем равномерную сетку по пространству с шагом дискретизации Δx и шагом интегрирования по времени Δt ; f_i^n – значение функции, заданное в узле сетки с координатами $i\Delta x$ и $n\Delta t$. Для упрощения изложения алгоритма воспользуемся простейшими разностными соотношениями:

$$\Lambda f_i = (f_i - f_{i-1}) / \Delta x$$

– двухточечный направленный разностный оператор, аппроксимирующий производную $\partial/\partial x$ с первым порядком точности;

$$\bar{\Lambda} f_i = (f_{i+1} - f_i) / \Delta x$$

– направленный разностный оператор, сопряженный к Λ .

Простейший алгоритм численного интегрирования системы уравнений (4) основан на явно-неявной аппроксимации ее слагаемых.

Конечно-разностная аппроксимация для K уравнений количества движения для каждой из жидкостей при $(u_k)_i^n > 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{(A \alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1} - (A \alpha_k \rho_k u_k)_i^n}{\Delta t} + \\ + \Lambda (A \alpha_k \rho_k u_k^2)_i^n - \\ - \Lambda (A v \bar{\Lambda} (\alpha_k \rho_k u_k)_i^n) + A (\alpha_k)_i^n \bar{\Lambda} p_i^{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Конечно-разностная аппроксимация эволюционного уравнения относительно давления может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{\rho c^2} \right)_i^n \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} + \\ + \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{(\rho_k)_i^n} \Lambda (A \alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Важным моментом является использование для аппроксимации градиента давления сопряженного оператора по отношению к оператору конвективного переноса. Это приводит, в случае разнонаправленного движения жидкостей, к связи по давлению текущей точки с двумя соседними. Заметим, что если $(u_k)_i^n < 0$, то в формулах (5) и (6) применяется циклическая замена Λ на $\bar{\Lambda}$.

Совокупность уравнений (K уравнений (5) и уравнение (6)) образует замкнутую систему, в которой непосредственной подстановкой можно исключить переменную $(A\alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1}$ и сформулировать уравнение относительно давления p_i^{n+1} . Если ввести обозначение для группы слагаемых, определенных на известном временном слое n по формуле

$$\begin{aligned} (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^* &= (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^n - \\ -\Delta t \left(\Lambda (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^n - \Lambda (Av\bar{\Lambda} (\alpha_k \rho_k u_k)_i^n) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

то значение давления в канале определяется из решения уравнения вида

$$\begin{aligned} &\left(\frac{A}{\rho c^2} \right)_i^n p_i^{n+1} - \\ -\Delta t^2 \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{(\rho_k)_i^n} \Lambda (A\alpha_k \bar{\Lambda} p_i^{n+1}) \right) &= \\ = -\Delta t \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{(\rho_k)_i^n} \Lambda (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^* \right) + & \\ + \left(\frac{A}{\rho c^2} \right)_i^n p_i^n. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что любые сочетания последовательности операторов

$$\Lambda (A\alpha_k \bar{\Lambda} p_i^{n+1}) \text{ или } \bar{\Lambda} (A\alpha_k \Lambda p_i^{n+1}),$$

являющихся, по сути, операторами для представления повторной производной, эквивалентны между собой. Стандартное представление повторной производной приводит к формированию трехдиагональной матрицы коэффициентов перед неизвестными значениями p_i^{n+1} . Для получения однозначного решения задачи необходимо сформулировать относительно давления два граничных условия на разных концах канала.

Рассмотрим формулировку граничных условий для проницаемой границы и для непроницаемой. Для входной границы, когда все жидкости поступают в расчетную область, как правило, заданы значения величин

$$\alpha_k^{inlet}, \rho_k^{inlet}, u_k^{inlet},$$

т. е. задан расход каждой жидкости

$$G_k^{inlet} = A\alpha_k^{inlet} \rho_k^{inlet} u_k^{inlet}.$$

Если полагать, что изменение этих величин во времени не порождает существенных градиентов давления в окрестности границы, то можно воспользоваться однородным граничным условием 2-го рода:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

которое в разностном виде можно представить как двухточечное соотношение. Такое же граничное условие можно применить для тупикового канала (непроницаемая торцевая поверхность канала), что непосредственно следует из уравнения количества движения при нулевом значении расхода.

Для выходной границы, когда все жидкости покидают расчетную область, для установления уровня давления можно воспользоваться граничным условием 1-го рода:

$$p = p^{outlet}. \quad (10)$$

Значения остальных функций на выходной границе для покидающих расчетную область жидкостей доопределяются, исходя из условия гладкости их поведения, т. е. экстраполяцией.

Вариант, когда на проницаемой границе реализуется ситуация, при которой одновременно ряд жидкостей поступает в расчетную область, а оставшиеся жидкости ее покидают, не рассматривается.

После определения давления из уравнения (8) при помощи стандартной процедуры скалярной прогонки с двухточечными граничными условиями, остальные значения функций вычисляются по явным формулам для всех K жидкостей в следующем порядке:

$$\begin{aligned} (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1} &= (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^* - \\ -\Delta t \alpha_k A \bar{\Lambda} p_i^{n+1}, \\ (A\alpha_k \rho_k)_i^{n+1} &= (A\alpha_k \rho_k)_i^n - \\ -\Delta t \Lambda (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Описанная в работе схема дискретизации переменных и применяемые разностные операторы приводят к первому порядку аппроксимации системы дифференциальных уравнений по времени и по пространству. Ограничение на шаг интегрирования по времени, связанное с явной формой описания конвективных и диффузионных потоков, определяется стандартными оценками:

$$\Delta t \leq \min\left(\frac{\Delta x}{c}, \frac{\Delta x^2}{2\nu}\right). \quad (12)$$

Как можно судить по неравенству (12), для выбранного способа определения коэффициента искусственной вязкости явная аппроксимация диффузионных слагаемых накладывает в два раза более жесткое ограничение на шаг интегрирования по времени, по сравнению с условием, следующим из оценки устойчивости вычислительного процесса, связанного с конвективным переносом.

Заметим, что искусственная «параболизация» системы уравнений (1) по всем переменным открывает более широкие возможности, чем направление, связанное с восстановлением гиперболических свойств системы уравнений (1). В частности, допустимы более вариативные функциональные значения для уравнения состояния. Например, можно рассматривать многофазные потоки с несжимаемыми включениями, когда уравнение состояния сводит-

ся к константе по плотности (в этом случае скорость звука в этой компоненте равна бесконечности). Возможен предельный переход, когда все компоненты многофазного течения несжимаемы. В этом предельном случае в уравнении (6) отсутствует нестационарное слагаемое (тип уравнения для давления меняется на эллиптический) и происходит асимптотический переход к классической модели несжимаемой жидкости, обобщенной на несколько компонентов.

Пример расчета

Для иллюстрации предложенного алгоритма в настоящей работе проведен расчет развития течения в канале переменного сечения, соединяющего два резервуара, в трехжидкостном приближении. Постановка задачи взята из работы [10], где решение получено по методике, реализованной в коде «КОРСАР» [11] в трехжидкостном приближении. Решение и приведенные графики демонстрируют поведение функций, которые возникают после мгновенного разрушения диафрагмы, расположенной посередине канала.

Используемые количественные значения термодинамических функций и их уравнения состояния для жидкостей сведены в таблице.

Развитие нестационарного течения из состояния покоя в канале конической формы с отношением площадей 4 : 1 и протяженностью 1 м для состава из трех

Таблица

Использованные количественные значения термодинамических функций и их уравнения состояния для трех жидкостей

Термодинамическая функция	Значение функции или ее уравнение		
	Пар	Несжимаемая жидкость	Слабосжимаемая жидкость
Давление, МПа в левом резервуаре в правом резервуаре	2,0	2,0	2,0
	0,2	0,2	0,2
Объемная доля в левом резервуаре в правом резервуаре	0,40	0,59	0,01
	0,59	0,40	0,01
Плотность материала, кг/м ³	$\left(\frac{p}{1,0e5}\right)^{0,714}$	1,0e3	$1,0e3\left(\frac{p}{1,0e6}\right)^{0,130}$

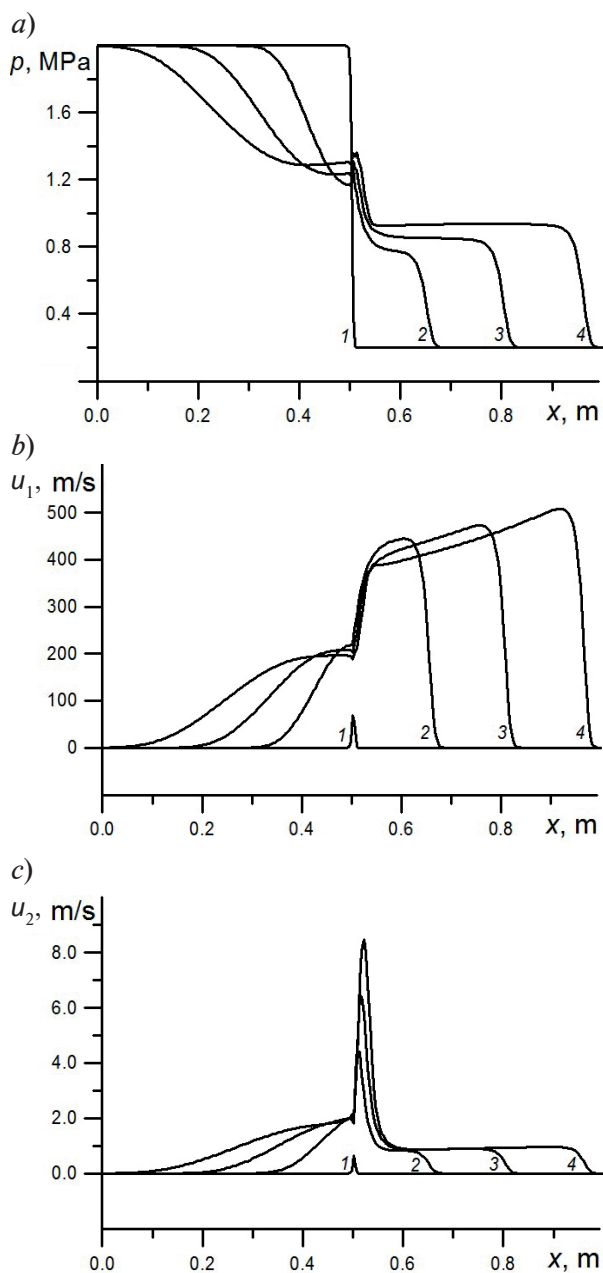


Рис. 1. Расчетные профили газодинамического давления (а), скоростей пара (b) и несжимаемой жидкости (с) по продольной координате в моменты первого (1), 100-го (2), 200-го (3) и 300-го (4) шагов по времени

жидкостей (см. таблицу) было выполнено на сетке, состоящей из 256 узлов. Шаг интегрирования по времени был выбран ($2,0e - 6$) с.

Результат численного интегрирования после 300 шагов по времени представлен на рис. 1, где приведены профили газодинамических функций первого и каждого сотого шага по времени. В частности, на рисунке представлены зависимости давления (а), скорости пара (b) и несжимаемой жидкости (с) от продольной координаты в выбранные моменты времени.

Заключение

В качестве подведения итогов отметим ключевые положительные моменты предложенного алгоритма.

Во-первых, он не содержит ограничения на количество рассматриваемых жидкостей.

Во-вторых, прием регуляризации задачи Коши при помощи повторных производных позволяет, не искажая скорости распространения акустических возмущений, получать характеристики течения на начальных фазах быстропротекающих процессов.

В-третьих, он превосходит по эффективности все существующие на настоящий момент алгоритмы решения систем уравнений для двухжидкостного (многожидкостного) подхода, так как вычисления проводятся по явным формулам и процедуре одной скалярной прогонки.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 3.3314.2017/4.6. (период 2017 – 2019 гг.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 2. С. 184–195.
2. Клебанов Л.А., Крошилин А.Е., Нигматулин Б.И., Нигматулин Р.И. О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы дифференциальных урав-

- нений двухскоростного движения двухфазных сред // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. № 1. С. 83–95.
3. Lyczkowski R.W., Gidaspow D., Solbrig Ch.W., Hughes E.D. Characteristics and stability analysis of transient one-dimensional two-phase equations and their finite-difference approximation // Nuclear Science and

Engineering, 1978. Vol. 66. No. 3. Pp. 378–396.

4. **Chao B.T., Sha W.T., Soo S.L.** On inertial coupling in dynamic equations of components in a mixture // International Journal of Multiphase Flow. 1978. Vol. 4. No. 2. Pp. 219–222.

5. **Drew D.A., Lahey R.T.** Application of general constitutive principles to the derivation of multidimensional two-phase flow equations // International Journal of Multiphase Flow. 1979. Vol. 5. No. 4. Pp. 243–264.

6. **Figueiredo A.B., Baptista R.M., Rachid F.B.F., Bodstein G.C.R.** Numerical simulation of stratified-pattern two-phase flow in gas pipelines using a two-fluid model // International Journal of Multiphase Flow. 2017. Vol. 88. January. Pp. 30–49.

7. **Evje S., Flatten T.** On the wave structure of two-phase flow models // SIAM J. Appl. Math. 2007. Vol. 67. No. 2. Pp. 487–511.

8. **Крошилин А.Е., Крошилин В.Е.** Корректное численное моделирование двухфаз-

ного теплоносителя // Теплоэнергетика. 2016. № 2. С. 22–30.

9. **Bulovich S.V., Smirnov E.M.** Experience in using a numerical scheme with artificial viscosity at solving the Riemann problem for a multi-fluid model of multiphase flow // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. No. 1. P. 050007.

10. **Smirnov S.I., Bulovich S.V., Smirnov E.M.** Calculation of unsteady two-phase quasi-onedimensional channel flow based on the two-fluid model and the artificial viscosity numerical scheme // Proceedings of International Conference Physica. SPb/2018. St. Petersburg, October, 23–25, 2018. Journal of Physics: Conference Series. 1135. 012103. 10.1088/1742-6596/1135/1/012103.

11. **Мигров Ю.А., Волкова С.Н., Юдов Ю.В. и др.** КОРСАР – теплогидравлический расчетный код нового поколения для обоснования безопасности АЭС с ВВЭР // Теплоэнергетика. 2001. № 9. С. 36–43.

Статья поступила в редакцию 26.03.2019, принята к публикации 13.05.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

БУЛОВИЧ Сергей Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
bulovic@yandex.ru

REFERENCES

1. **Rakhmatulin Kh.A.**, Osnovy gazodinamiki vzaimopronikayushchikh dvizheniy szhimayemykh sred [Gas dynamics principles of interpenetrating motions of compressible media], J. Appl. Math. Mech. 20 (2) (1956) 184–195.

2. **Klebanov L.A., Kroshilin A.E., Nigmatulin B.I., Nigmatulin R.I.**, O giperbolichnosti, ustoychivosti i korrektnosti zadachi Koshi dlya sistemy differentsialnykh uravneniy dvukhskorostnogo dvizheniya dvukhfaznykh sred [On hyperbolicity, stability and correctness of the Cauchy problem for a differential equations system of a two-speed motion of biphasic media], J. Appl. Math. Mech. 46 (1) (1982) 83–95.

3. **Lyczkowski R.W., Gidaspow D., Solbrig Ch.W., Hughes E.D.**, Characteristics and stability analysis of transient one-dimensional two-phase equations and their finite-difference approximation, Nuclear Science and Engineering. 66 (3) (1978) 378–396.

4. **Chao B.T., Sha W.T., Soo S.L.**, On inertial coupling in dynamic equations of components in

a mixture, International Journal of Multiphase Flow. 4 (2) (1978) 219–222.

5. **Drew D.A., Lahey R.T.**, Application of general constitutive principles to the derivation of multidimensional two-phase flow equations, International Journal of Multiphase Flow. 5 (4) (1979) 243–264.

6. **Figueiredo A.B., Baptista R.M., Rachid F.B.F., Bodstein G.C.R.**, Numerical simulation of stratified-pattern two-phase flow in gas pipelines using a two-fluid model, International Journal of Multiphase Flow. 88 (January) (2017) 30–49.

7. **Evje S., Flatten T.**, On the wave structure of two-phase flow models, SIAM J. Appl. Math. 67 (2) (2007) 487–511.

8. **Kroshilin A.E., Kroshilin V.E.**, Correct numerical simulation of a two-phase coolant, Thermal Engineering. 63 (2) (2016) 98–106.

9. **Bulovich S.V., Smirnov E.M.**, Experience in using a numerical scheme with artificial viscosity at solving the Riemann problem for a multi-



fluid model of multiphase flow, AIP Conference Proceedings. 1959 (1) (2018) 050007.

10. **Smirnov S.I., Bulovich S.V., Smirnov E.M.**, Calculation of unsteady two-phase quasi-onedimensional channel flow based on the two-fluid model and the artificial viscosity numerical scheme, Proceedings of International Conference PhysicA, SPb/2018. St. Petersburg, October, 23–25, (2018), Journal of Physics:

Conference Series. 1135. 012103. 10.1088/1742-6596/1135/1/012103.

11. **Migrov Yu.A., Volkova S.N., Yudov Yu.V., et al.**, KORSAR – teplogidravlicheskiy raschetnyy kod novogo pokoleniya dlya obosnovaniya bezopasnosti AES s VVER [KORSAR is a heat-hydraulic new-generation design code for a safety case of a NPP with LWR], Thermal Engineering. (9) (2001) 36–43.

Received 26.03.2019, accepted 13.05.2019.

THE AUTHOR

BULOVICH Sergei V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

bulovic@yandex.ru