

DOI: 10.18721/JPM.12112
УДК 531.391+681.5.01

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОВ

А.В. Федотов

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Представленная статья продолжает работы автора, в которых рассматривалась задача об управлении вынужденными изгибными колебаниями металлической балки с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. При этом все результаты управления были получены экспериментально. Однако для того, чтобы процесс проектирования систем управления был наиболее эффективным, необходима разработка численной модели, позволяющей получать результаты для разных вариантов таких систем, что и является задачей данной работы. В данном исследовании численно на основе конечно-элементной модели объекта воспроизводятся основные экспериментальные результаты, а также проектируются более эффективные модальные системы управления, приводящие к большему снижению амплитуды резонансных колебаний балки, по сравнению с системами, рассмотренными ранее в эксперименте.

Ключевые слова: управление колебаниями, мехатроника, модальное управление, пьезоэлемент, конечно-элементная модель

Ссылка при цитировании: Федотов А.В. Численное моделирование гашения колебаний распределенной системы с помощью пьезоэлементов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 142–155. DOI: 10.18721/JPM.12112

THE DAMPING OF THE DISTRIBUTED SYSTEM VIBRATIONS USING PIEZOELECTRIC TRANSDUCERS: SIMULATION

A.V. Fedotov

Institute for Problems in Mechanical Engineering, RAS,
St. Petersburg, Russian Federation

The present paper continues the author's studies where the problem of the control of forced bending vibrations of a metal beam using piezoelectric sensors and actuators has been investigated. In those studies, all the control results were obtained experimentally. However, in order to make the design of the control systems the most effective, it was necessary to develop a numerical model, which would allow one to get the results for different variants of such systems, and that was the objective of the present study. In this study, the main experimental data were reproduced numerically on a basis of the finite element model of the object. In addition, new modal control systems were designed, providing a more efficient reduction of the amplitude of resonance vibrations of a beam compared to the systems considered experimentally.

Keywords: active vibration control, mechatronics, modal control, piezoelectric transducer, finite element model

Citation: A.V. Fedotov, The damping of the distributed system vibrations using piezoelectric transducers: simulation, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 142–155. DOI: 10.18721/JPM.12112



Введение

Сложность управления колебаниями распределенных механических систем состоит в том, что такие системы имеют бесконечное количество форм колебаний, поэтому они не являются полностью управляемыми и наблюдаемыми. Однако на практике для рассмотрения динамики таких систем можно, как правило, ограничиться некоторым конечным набором собственных форм объекта. В работе [1] было экспериментально показано, что в таких случаях большую эффективность, по сравнению с локальным управлением, имеет модальное, причем по тем формам, которые преимущественно задействованы в работе рассматриваемой конструкции.

Модальный подход к управлению колебаниями упругих систем был впервые сформулирован в статье [2], а развитие данного подхода представлено в монографии [3]. Для отслеживания и регулирования отдельных форм колебаний упругого объекта в модальной системе управления могут использоваться как распределенные сенсоры и актуаторы в качестве модальных фильтров [4, 5], так и массивы дискретных элементов управления [6 – 8]. В последнем случае возникает проблема идентификации объекта управления, которая обычно решается либо с помощью конечно-элементного (КЭ) моделирования объекта [9 – 11], либо аналитически [12, 13]. Экспериментальная процедура идентификации объекта с целью создания модальной системы управления предложена нами в статье [14]. В задачах управления колебаниями распределенных систем широко применяются пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы, которые просты в использовании и обладают высокими эксплуатационными характеристиками.

Настоящая работа является логическим продолжением экспериментального исследования, изложенного в статьях [1, 14]. В данных публикациях подробно описан эксперимент по созданию систем управления, снижающих вынужденные колебания консольно закрепленной металлической балки. В полученных системах управления используется набор дискретных пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. В рамках эксперимента были созданы как локальные системы, так и модальная система управления; при этом самой эффективной из рассмотренных оказалась именно модальная.

Целью данной работы является числен-

ное воспроизведение основных экспериментальных результатов, а также создание более эффективных систем управления, по сравнению с системами, полученными в рамках эксперимента.

В первой части статьи рассматривается постановка экспериментального исследования по управлению вынужденными изгибными колебаниями балки; далее описываются результаты КЭ-моделирования объекта управления, которые сравниваются с результатами эксперимента. Затем излагаются теоретические основы модального управления колебаниями распределенной механической системы, а также выводятся критерии устойчивости замкнутой системы с двумя контурами обратной связи. Наконец, в заключительном разделе статьи рассматривается работа различных систем управления, снижающих амплитуду резонансных колебаний балки.

Постановка эксперимента

Постановка, процедура проведения и результаты рассматриваемого здесь экспериментального исследования подробно изложены в статьях [1, 14].

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1, *a*. В качестве объекта управления выбрана алюминиевая балка 1 длиной 70 см с прямоугольным сечением 3×35 мм, закрепленная в вертикальном положении в одной точке на расстоянии 10 см от нижнего конца. Данная балка испытывает вынужденные изгибные колебания, вызванные продольной вибрацией пьезоэлектрического стержня-толкателя 2, входящего в состав конструкции закрепления, соединяющей балку с неподвижным основанием 3.

Основное назначение созданной экспериментальной установки заключалось в том, чтобы отработать модальный подход к управлению вынужденными колебаниями балки. Для этого проектировалась система управления с двумя контурами, включающая два актуатора и два сенсора. Пьезоэлектрические актуаторы 4 и сенсоры 5 расположены попарно по обеим сторонам балки. На рис. 1, *b* показан фрагмент КЭ модели балки, включающий конструкцию закрепления с пьезотолкателем 2 и один из актуаторов 4. В отличие от упрощенной схемы, представленной на рис. 1, *a*, в конечно-элементной модели присутствует полная конструкция закрепления балки,

используемая в экспериментальной установке. Конструкция включает (помимо пьезотолкателя) стальную пластину и болты, воспринимающие вес балки и освобождающие таким образом пьезотолкатель от поперечной нагрузки.

Сигналы, измеряемые сенсорами, преобразуются в управляющие, подаваемые на актуаторы, с помощью дискретного контроллера 6. Задача системы управления состоит в том, чтобы снижать амплитуду вынужденных резонансных колебаний балки с первой и со второй собственными частотами. Таким образом, модальное управление ведется по первой и по второй формам изгибных колебаний балки. Данные формы представлены на рис. 1,с. Качество подавления вынужденных колебаний определяется по показаниям лазерного виброметра, измеряющего скорость колебаний точки на верхнем конце балки. Амплитуда колебаний данной точки максимальна среди всех точек балки как для первой, так и для второй формы.

Актуаторы и сенсоры представляют собой одинаковые прямоугольные пластинки из пьезоматериала размерами $50 \times 30 \times 0,5$ мм, покрытые с двух сторон электрода-

ми и помещенные внутрь тонкой изоляции. Работа таких пьезоэлементов рассмотрена в книге [15]. При приложении к электродам актуатора электрического напряжения слой пьезоматериала растягивается или сжимается, приводя к изгибной деформации того участка балки, к которому приклеен актуатор. Таким образом, действие актуатора на балку эквивалентно приложению к двум сечениям балки (концевым сечениям актуатора) пары противоположных изгибающих моментов. Работа пьезосенсора аналогична: при изгибе участка балки, к которому прикреплен сенсор, материал сенсора растягивается или сжимается в продольном направлении, что приводит к появлению на электродах сенсора разности потенциалов, измеряемой в качестве сигнала сенсора. Для максимальной эффективности управления первой и второй формами изгибных колебаний балки сенсоры и актуаторы расположены в тех местах балки, где данные формы имеют наибольшую кривизну:

$$110,5 \leq x \leq 160,5 \text{ мм}$$

для первой пары сенсор-актуатор и

$$377,5 \leq x \leq 427,5 \text{ мм}$$

для второй пары (координата x отсчитывается от нижнего конца балки).

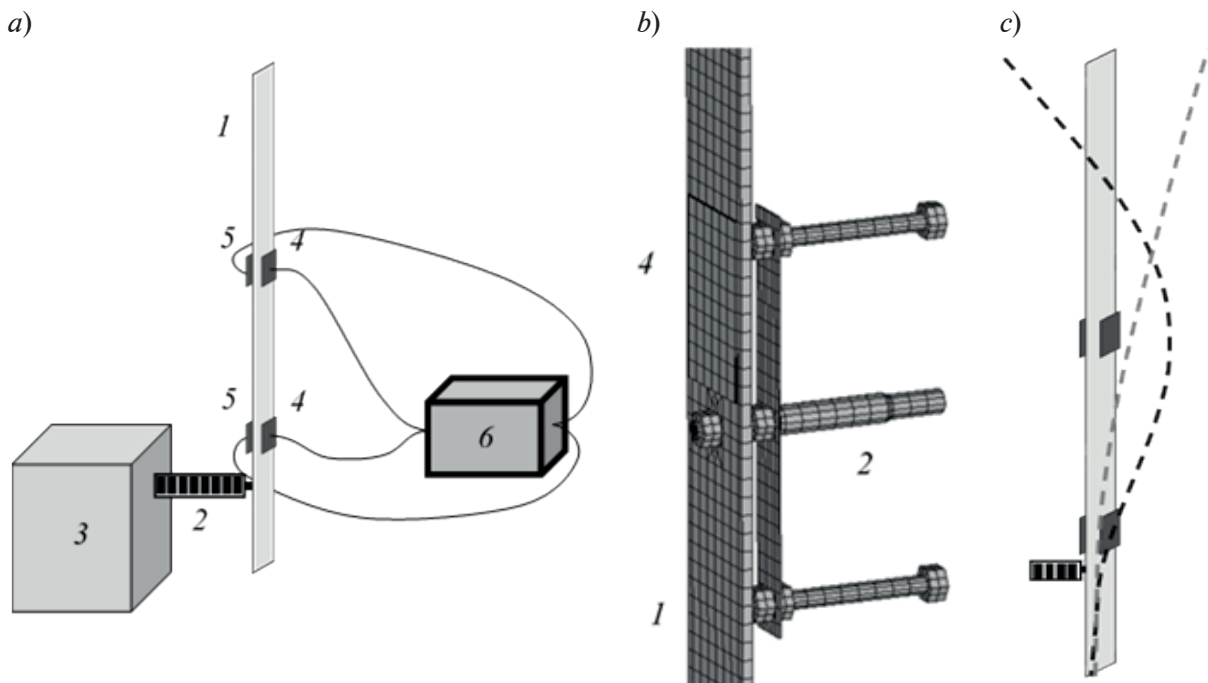


Рис. 1. Схема экспериментальной установки (а), а также фрагмент конечно-элементной модели объекта (b) и две нижних формы изгибных колебаний балки (с):

1 – алюминиевая балка; 2 – пьезоэлектрический толкатель; 3 – неподвижное основание; 4 – актуаторы; 5 – сенсоры; 6 – контроллер

Помимо основных элементов (см. рис. 1), в систему управления входят также дополнительные:

усилитель, увеличивающий в 25 раз амплитуду управляющего сигнала перед его подачей на актуаторы;

фильтры нижних частот с частотой среза 1 кГц, сглаживающие высокочастотную составляющую электрического сигнала и предохраняющие оборудование от высоких значений входного напряжения.

Через фильтр проходит как измеренный сигнал перед подачей на контроллер, так и управляющий сигнал перед подачей на актуаторы.

Для того чтобы проектировать системы управления, необходимо измерить ряд характеристик объекта управления.

Во-первых, измерялись амплитудно- и фазочастотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) балки при воздействии на каждый из актуаторов и при измерении сигнала каждым из сенсоров.

Во-вторых, снимались также АЧХ и ФЧХ балки при воздействии на пьезотолкатель и измерении сигнала с помощью виброметра. Таким образом, всего было получено девять амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик для каждого из трех вариантов внешнего воздействия (актуаторы, пьезотолкатель) и каждого из трех вариантов измерения (сенсоры, виброметр). При этом все характеристики измерялись в присутствии фильтров и усилителей.

В-третьих, анализировались колебания балки в резонансных режимах (резонансные колебания с первой и второй собственными частотами) для того, чтобы определить модальные матрицы T и F , в соответствии с идентификационной процедурой, изложенной в статье [14].

После этого на основании измеренных характеристик объекта методом логарифмических амплитудно-частотных характеристик (метод ЛАХ) синтезировались и затем тестировались экспериментально законы управления, позволяющие наиболее эффективно снижать вынужденные резонансные колебания балки.

В результате были получены как локальные системы, так и модальная система управления.

Наиболее эффективной оказалась модальная система; она позволила снизить амплитуды резонансных колебаний на первом резонансе на 83,5 %, а на втором

– на 87,2 %. Спроектированные локальные системы управления показали хороший результат либо на первом резонансе (снижение на 78,0 %), либо на втором (снижение на 88,9 %), однако в рамках локального подхода не удалось получить систему управления, работающую одновременно и одинаково эффективно на обоих резонансах. Результаты тестирования полученных систем управления подробно изложены в статье [1].

Конечно-элементная модель системы

Одной из задач данной работы является численное воспроизведение результатов, полученных в эксперименте, описанном в предыдущем разделе статьи. Для этого исследуемая система была смоделирована в КЭ-пакете ANSYS. Фрагмент КЭ-модели балки с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами представлен на рис. 1, *b*.

КЭ-модель состоит из трехмерных 20-узловых элементов Solid186 (используется для обычных материалов: алюминий балки, сталь конструкции опоры и изоляция пьезоэлементов) и Solid226 (для пьезоэлектрических материалов сенсоров, актуаторов и пьезотолкателя). Всего модель содержит 3534 элемента и 21088 узлов. В качестве механических граничных условий задано жесткое закрепление точек конструкции опоры, которые в экспериментальной установке прикреплены к неподвижному основанию; в качестве электрических граничных условий заданы электрические потенциалы на электродах актуаторов и пьезотолкателя.

Для задания коэффициента демпфирования в КЭ-модели экспериментальной установки были проанализированы результаты эксперимента, а именно – для всех снятых АЧХ, на каждом из резонансов по ширине резонансного пика был определен коэффициент демпфирования ξ в соответствии с формулой

$$\xi = \frac{\Delta f}{2f_0}, \quad (1)$$

где f_0 – резонансная частота; Δf – ширина резонансного пика, ограниченная значениями частоты, на которых резонансная амплитуда падает в $\sqrt{2}$ раз.

Полученные таким образом значения коэффициентов демпфирования приведены в табл. 1 (обозначения представлены в примечании к табл. 1). В итоге в КЭ-модели для всех форм колебаний был задан

одинаковый коэффициент демпфирования $\xi = 0,0020$.

В пакете ANSYS производился гармонический анализ системы при трех вариантах воздействия: с помощью каждого из двух актуаторов или пьезоэлектрического толкателя. Для каждого варианта отслеживалось по три АЧХ и ФЧХ, которые соответствовали либо измерению сигнала одним из двух сенсоров, либо поперечному смещению точки на верхнем конце балки. После получения данных характеристик в комплексе ANSYS, они подвергались модификации: к ним были добавлены характеристики фильтров и усилителей, отдельно измеренные в рамках эксперимента. Таким образом, были получены амплитудно- и фазочастотные характеристики, аналогичные измеренным экспериментально.

На рис. 2 проведено сравнение АЧХ, полученных численно и экспериментально для каждого из двух актуаторов и каждого из двух сенсоров. Видно, что резонансные частоты в эксперименте и в КЭ-модели совпадают хорошо, но по амплитуде кривые, соответствующие эксперименту, оказываются несколько выше кривых, получен-

ных в результате моделирования. К тому же присутствует некоторое несовпадение в величинах резонансных пиков кривых, объясняемое тем, что в реальности демпфирование является разным для разных форм колебаний и отличается от значения, выбранного в модели. Однако в целом данные, полученные численно, достаточно хорошо соответствуют результатам эксперимента.

Модальное управление колебаниями упругой системы

Рассмотрим работу модальной системы управления колебаниями упругого объекта, состоящей из n сенсоров и n актуаторов. Основной принцип модального управления состоит в раздельном управлении различными формами колебаний объекта; при этом каждый контур управления соответствует своей форме колебаний. Пусть система управления содержит m контуров, и управление ведется по m низшим формам колебаний объекта. Очевидно, что число используемых сенсоров и актуаторов должно быть не меньше количества независимо управляемых форм, т. е. $n \geq m$.

Таблица 1

Коэффициенты демпфирования, полученные из экспериментальных АЧХ на разных резонансных частотах f_0

Номер формы	f_0 , Гц	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
1	7,125	0,0044	0,0044	0,0055	0,0055
2	42,55	0,0022	0,0021	0,0026	0,0026
3	113,9	0,0031	0,0031	0,0034	0,0034
4	175,2	0,0022	0,0025	0,0031	0,0031
5	249,5	0,0018	0,0019	0,0019	0,0019
6	390,9	0,0010	0,0010	0,0012	0,0010
7	579,4	0,0013	0,0012	0,0016	0,0016
8	790,5	0,0010	0,0009	0,0014	0,0014
9	1073	0,0016	0,0016	0,0018	0,0017
10	1338	0,0015	0,0014	0,0019	0,0019
11	1471	0,0016	0,0017	0,0025	0,0025
12	1763	0,0022	0,0023	0,0034	0,0033

Обозначения: $\xi_1 - \xi_4$ – коэффициенты демпфирования, полученные из разных АЧХ: актуатор-сенсор (ξ_1), актуатор-виброметр (ξ_2), пьезотолкатель-сенсор (ξ_3), пьезотолкатель-виброметр (ξ_4).

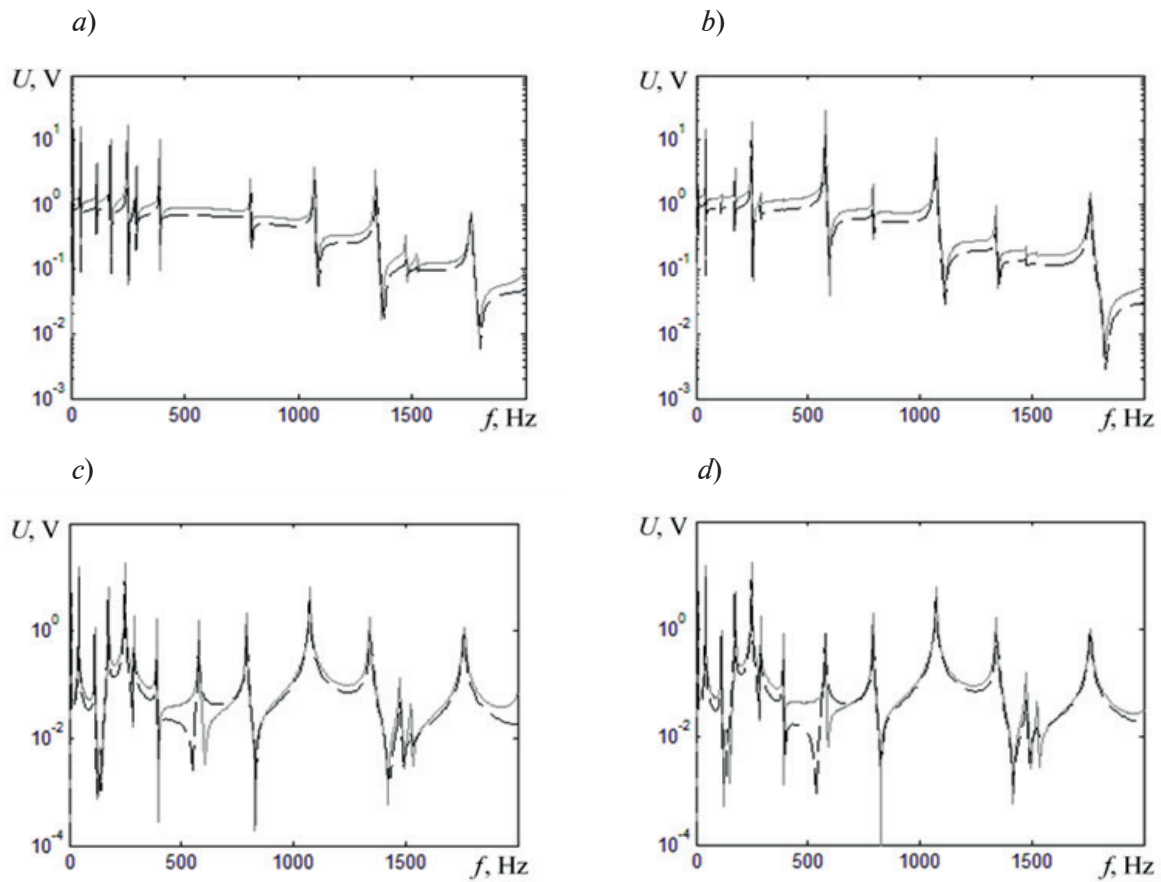


Рис. 2. Сравнение АЧХ, полученных экспериментально (сплошные линии) и численно (пунктиры) при воздействии на актуаторы $A1$ (a, c), $A2$ (b, d) и измерениях сигналов сенсоров $S1$ (a, d) и $S2$ (b, c)

Будем считать, что динамика распределенной системы может быть описана с помощью разложения перемещения $u(r, t)$ в ряд по собственным формам колебаний системы:

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(r) \beta_k(t), \quad (2)$$

где $\beta_k(t)$ – обобщенные координаты, $w_k(r)$ – формы колебаний.

Пусть формы колебаний не зависят друг от друга; в таком случае динамика каждой из форм описывается уравнением

$$\ddot{\beta}_k(t) + 2\xi_k \lambda_k \dot{\beta}_k(t) + \lambda_k^2 \beta_k(t) = f_k + y_k, \quad (3)$$

где λ_k – k -я собственная частота объекта; ξ_k – k -ый коэффициент демпфирования; f_k – k -я внешняя обобщенная сила; y_k – управляющее воздействие, соответствующее k -ой форме колебаний объекта.

Управляющее воздействие прикладывается к объекту с помощью n актуаторов и является для каждой формы колебаний линейной комбинацией управляющих сигна-

лов U_i , подаваемых на актуаторы:

$$y_k = \sum_{i=1}^n \theta_{ki}^a U_i, \quad (4)$$

где θ_{ki}^a – коэффициент влияния i -го актуатора на k -ю форму колебаний.

Разделение первых m форм колебаний объекта в системе управления обеспечивается за счет следующей структуры управляющего воздействия:

$$U_{n \times 1} = F K_{m \times m} T Y_{n \times 1}, \quad (5)$$

где $K_{m \times m}$ – диагональная матрица законов управления, каждый элемент которой K_{ii} соответствует одному из контуров управления и является функцией комплексной переменной s ; $F_{n \times m}$, $T_{m \times n}$ – модальные матрицы (синтезатор и анализатор форм), осуществляющие линейное преобразование векторов управляющих и измеряемых сигналов; $Y_{n \times 1}$ – вектор сигналов сенсоров.

Вектор $Y_{n \times 1}$ связан с вектором первых m обобщенных координат $\beta_{m \times 1}$ следующим образом:

$$Y_{n \times 1} = \theta_{n \times m}^s \beta_{m \times 1} + \tilde{Y}, \quad (6)$$

где $\theta_{n \times m}^s$ – весовая матрица, определяющая, как каждый из n сенсоров реагирует на каждую из m форм колебаний; \tilde{Y} – слагаемое, зависящее только от высших собственных форм объекта, по которым не ведется управление.

Подставляя выражения (4) – (6) в уравнение (3), получим уравнение движения для m первых обобщенных координат в матричном виде:

$$\begin{aligned} & \ddot{\beta}_{m \times 1} + 2\xi_{m \times m} \Lambda_{m \times m} \dot{\beta}_{m \times 1} + \\ & + \Lambda_{m \times m}^2 \beta_{m \times 1} = \\ & = f_{m \times 1} + \theta_{m \times n}^a F_{n \times m} K_{m \times m} \times \\ & \times T_{m \times n} \theta_{n \times m}^s \beta_{m \times 1} + \Delta_{m \times 1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Lambda_{m \times m}$, $\xi_{m \times m}$ – диагональные матрицы собственных частот и коэффициентов демпфирования, соответственно; $\Delta_{m \times 1}$ – вектор, содержащий только высшие гармоники.

Очевидно, что для раздельного управления m низшими формами колебаний объекта необходимо обеспечить диагональную структуру матрицы

$$M = \theta^a F K T \theta^s.$$

Для этого модальные матрицы F и T должны быть заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{m \times n} &= (\theta_{m \times n}^{sT} \theta_{n \times m}^s)^{-1} \theta_{m \times n}^{sT}, \\ F_{n \times m} &= \theta_{n \times m}^{aT} (\theta_{m \times n}^a \theta_{n \times m}^{aT})^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Итак, для создания модальной системы управления необходимо, во-первых, задать модальные матрицы F и T в соответствии с формулой (8), а во-вторых, выбрать законы управления для каждого контура $K_{ii}(s)$.

Устойчивость замкнутой системы с двумя контурами обратной связи

Для начала рассмотрим работу системы управления с одним контуром обратной связи. Пусть на вход объекта управления с передаточной функцией $H(s)$ подается возмущение d , а выходной сигнал объекта у преобразуется в контуре обратной связи с передаточной функцией $R(s)$ в управляющее воздействие u , которое также подается со знаком «минус» на вход объекта. Таким образом, выходной и управляющий сигналы оказываются связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} y &= H(s) (d - u), \\ u &= R(s) y. \end{aligned} \quad (9)$$

Ограничимся рассмотрением передаточных функций $H(s)$ и $R(s)$, не имеющих полюсов в правой полуплоскости комплексной плоскости переменной s . Таким образом, разомкнутая система является устойчивой. Из соотношений (9) выводится связь между входным и выходным сигналами системы:

$$y = \frac{H(s)}{1 + H(s)R(s)} d = \frac{H(s)}{1 + H_0(s)} d. \quad (10)$$

Для того чтобы определить устойчивость замкнутой системы, необходимо проанализировать функцию, стоящую в знаменателе полученной дроби. Для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы все нули данной функции лежали в левой полуплоскости s . Однако на практике удобнее ограничиться анализом передаточной функции разомкнутой системы

$$H_0(s) = H(s)R(s).$$

Согласно критерию Найквиста, при устойчивости разомкнутой системы замкнутая система устойчива в том случае, если годограф функции $H_0(i\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ не охватывает на комплексной плоскости точку $(-1; 0)$. Теперь получим аналогичный критерий для системы с двумя обратными связями.

Пусть объект управления имеет два входа и два выхода, при этом на входы подаются возмущающие воздействия d_1 и d_2 , а выходные сигналы y_1 и y_2 измеряются системой управления, преобразуются с помощью передаточных функций $R_1(s)$ и $R_2(s)$ в управляющие воздействия u_1 и u_2 , которые также подаются со знаком «минус» на входы объекта:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1(s) y_1, \\ u_2 &= R_2(s) y_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Для описания поведения объекта в рассматриваемой системе необходимо использовать четыре передаточных функции – $H_{11}(s)$, $H_{12}(s)$, $H_{21}(s)$ и $H_{22}(s)$, каждая из которых соответствует одному из двух входов и одному из двух выходов:

$$\begin{aligned} y_1 &= H_{11}(s)(d_1 - u_1) + H_{21}(s)(d_2 - u_2), \\ y_2 &= H_{12}(s)(d_1 - u_1) + H_{22}(s)(d_2 - u_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь также будем считать, что все передаточные функции $H_{ij}(s)$ и $R_i(s)$ не имеют полюсов в правой полуплоскости s . Из равенств (11) и (12) путем несложных ма-

тематических преобразований получаются выражения, связывающие входные и выходные сигналы системы при замкнутых контурах управления:

$$y_1 = \left((H_{11}(s) + (H_{11}(s)H_{22}(s) - H_{12}(s)H_{21}(s))R_2(s))d_1 + H_{21}(s)d_2 \right) / \left((1 + H_{11}(s)R_1(s)) \times (1 + H_{22}(s)R_2(s)) - H_{12}(s)H_{21}(s)R_1(s)R_2(s) \right); \quad (13)$$

$$y_2 = \left((H_{22}(s) + (H_{11}(s)H_{22}(s) - H_{12}(s)H_{21}(s))R_1(s))d_2 + H_{12}(s)d_1 \right) / \left((1 + H_{11}(s)R_1(s)) \times (1 + H_{22}(s)R_2(s)) - H_{12}(s)H_{21}(s)R_1(s)R_2(s) \right). \quad (14)$$

Для определения устойчивости данной системы необходимо проанализировать знаменатель полученных дробей (у обеих дробей он одинаков). Можно заметить, что данная функция не имеет полюсов в правой полуплоскости s . Поэтому, как и в случае системы управления с одним контуром, замкнутая система будет устойчивой, если все нули данной функции лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости переменной s .

Знаменатель дробей (13) и (14) может быть переписан в виде

$$1 + H_0(s),$$

где функция $H_0(s)$ определяется следующим образом:

$$H_0(s) = H_{11}(s)R_1(s) + H_{22}(s)R_2(s) + (H_{11}(s)H_{22}(s) - H_{12}(s) \times H_{21}(s))R_1(s)R_2(s). \quad (15)$$

Следовательно, для рассматриваемой системы также можно применить критерий, аналогичный критерию Найквиста: для устойчивости данной системы необходимо, чтобы годограф функции $H_0(i\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ не охватывал на комплексной плоскости точку $(-1; 0)$.

Создание систем управления

Первый этап создания модальной системы управления – это задание модальных матриц F (синтезатор форм) и T (анализа-

тор форм). Соответствующая экспериментальная процедура, включающая исследования на резонансных режимах, приведена в статье [14].

При численном решении задачи для вычисления модальных матриц необходимо проанализировать высоту первого и второго резонансных пиков на АЧХ пьезотокатель-сенсор и актуатор-вибромметр. Синтезатор форм F задается таким образом, чтобы первый контур управления не вызывал колебаний балки по второй форме, а второй – по первой форме. Аналогично, анализатор форм T задается таким образом, чтобы первый контур не реагировал на активизацию второй формы колебаний, а второй – на активизацию первой формы.

При анализе АЧХ было получено, что первый и второй актуаторы возбуждают первую форму изгибных колебаний балки в пропорциях 3,08 : 1,00 а вторую форму – в пропорциях – 0,97 : 1,00. Первый и второй сенсоры реагируют на активизацию первой формы в пропорциях 3,07 : 1,00, а второй – в пропорциях – 0,95 : 1,00. Отсюда были получены модальные матрицы:

$$F = \begin{bmatrix} 1,01 & -0,49 \\ 0,98 & 1,50 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1,01 & 0,96 \\ -0,49 & 1,49 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Данные значения достаточно близки к значениям матриц, полученным в рамках эксперимента:

$$F^{(exp)} = \begin{bmatrix} 1,000 & -0,500 \\ 1,035 & 1,525 \end{bmatrix}, \quad T^{(exp)} = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,01 \\ -0,49 & 1,52 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Результаты разделения форм в модальных контурах управления с помощью матриц T и F показаны на рис. 3. На данном рисунке приведены модули передаточных функций H_{ij}^m , соответствующие возбуждению колебаний с помощью i -го модального контура управления и измерению с помощью j -го модального контура. Данные функции получаются из передаточных функций H_{ij} , соответствующих возбуждению колебаний с помощью i -го актуатора и измерению с помощью j -го сенсора, по следующей формуле:

$$H_{ij}^m = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 T_{jl} F_{ki} H_{kl}.$$

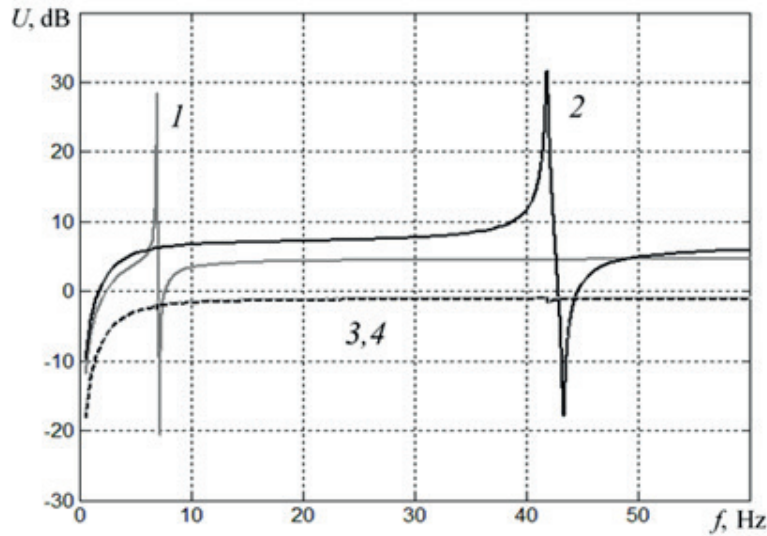


Рис. 3. АЧХ системы, соответствующие возбуждению колебаний с помощью i -го модального контура управления и измерению с помощью j -го модального контура; $ij = 11$ (кривая 1), 22 (2), 12 (3) и 21 (4)

Как видно из рисунка, выбранные модальные матрицы обеспечивают качественное разделение первой и второй форм колебаний: на амплитудно-частотной характеристике H_{11}^m , соответствующей первому модальному контуру управления, присутствует только первый резонансный пик; на АЧХ H_{22}^m – только второй резонансный пик, а на перекрестных АЧХ H_{12}^m и H_{21}^m отсутствуют оба резонанса. Таким образом, взаимное влияние контуров управления оказывается минимальным.

В рамках численного исследования колебаний балки с управлением необходимо как спроектировать системы управления, так и получить результаты использования данных систем. В качестве результата использования систем управления анализируются амплитудно-частотные характеристики балки, полученные при возбуждении колебаний с помощью пьезотолкателя и при измерении амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки. Для определения эффективности созданных систем управления сравниваются данные АЧХ при включенной и отключенной системе управления в области первой и второй резонансных частот изгибных колебаний балки. АЧХ балки с управлением получаются из имеющихся АЧХ и ФЧХ балки без управления в соответствии с математической процедурой, изложенной ниже.

Пусть на балку одновременно действуют три источника возбуждения, а именно – напряжения:

- U_d , подаваемое на пьезотолкатель;
- U_1 , подаваемое на первый актуатор;
- U_2 , подаваемое на второй актуатор.

При этом измеряются поперечное смещение y точки на верхнем конце балки, напряжения Y_1 на первом сенсоре и Y_2 на втором. Измеряемые величины выражаются через приложенные воздействия с использованием передаточных функций $H_d^{(1)}$, $H_d^{(2)}$, $H_a^{(1)}$, $H_a^{(2)}$, $H_{as}^{(11)}$, $H_{as}^{(12)}$, $H_{as}^{(21)}$, $H_{as}^{(22)}$:

$$\begin{cases} y = H_d U_d + H_a^{(1)} U_1 + H_a^{(2)} U_2, \\ Y_1 = H_d^{(1)} U_d + H_{as}^{(11)} U_1 + H_{as}^{(21)} U_2, \\ Y_2 = H_d^{(2)} U_d + H_{as}^{(12)} U_1 + H_{as}^{(22)} U_2. \end{cases} \quad (19)$$

Пусть управляющие воздействия U_1 и U_2 зависят от измеряемых сигналов Y_1 и Y_2 сенсоров следующим образом:

$$\begin{cases} U_1 = -R_{11} Y_1 - R_{12} Y_2, \\ U_2 = -R_{21} Y_1 - R_{22} Y_2. \end{cases} \quad (20)$$

В таком случае путем несложных математических преобразований можно выразить смещение точки на верхнем конце балки y через подаваемое на пьезотолкатель напряжение U_d :

$$\begin{cases}
 y = H_d U_d + H_a^{(1)} U_1 + H_a^{(2)} U_2, \\
 U_1 = U_d \left(-R_{21} H_d^{(1)} - R_{22} H_d^{(2)} + \right. \\
 \left. + (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}) \times \right. \\
 \left. \times (H_{as}^{(12)} H_d^{(1)} - H_{as}^{(11)} H_d^{(2)}) \right) / (1 + \\
 + R_{11} H_{as}^{(11)} + R_{12} H_{as}^{(12)} + R_{21} H_{as}^{(21)} + \\
 + R_{22} H_{as}^{(22)} + (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}) \times \\
 \left. \times (H_{as}^{(11)} H_{as}^{(22)} - H_{as}^{(12)} H_{as}^{(21)})), \right. \\
 U_2 = U_d \left(-R_{11} H_d^{(1)} - R_{12} H_d^{(2)} - \right. \\
 \left. - (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}) \times \right. \\
 \left. \times (H_{as}^{(22)} H_d^{(1)} - H_{as}^{(21)} H_d^{(2)}) \right) / (1 + \\
 + R_{11} H_{as}^{(11)} + R_{12} H_{as}^{(12)} + \\
 + R_{21} H_{as}^{(21)} + R_{22} H_{as}^{(22)} + \\
 + (R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21}) \times \\
 \left. \times (H_{as}^{(11)} H_{as}^{(22)} - H_{as}^{(12)} H_{as}^{(21)})). \right.
 \end{cases}$$

Таким образом, на основании известных передаточных функций системы без управления и выбранных законов управления вычисляются передаточные функции системы с управлением.

В рамках данного численного исследования была протестирована в первую очередь модальная система управления I, синтезированная в рамках эксперимента. Затем была спроектирована модальная система управления II, отличающаяся от системы I передаточными функциями в контурах управления. При создании системы II ставилась цель получить систему управления, наиболее эффективно снижающую амплитуду вынужденных изгибных колебаний балки на первом и на втором резонансах. Система I, тестируемая в численном исследовании, отличается от модальной системы, используемой в эксперименте, только коэффициентами усиления в контурах управления, которые были подобраны из условия наибольшей эффективности работы системы.

Передаточные функции и коэффициенты усиления для обоих контуров систем управления I и II представлены в Приложении.

На рис. 4,а представлена диаграмма Найквиста для системы управления I, полученная для обоих контуров управления в соответствии с формулой (15). На рис. 4,б показан участок данной диаграммы вблизи точки (-1; 0). Поскольку годограф не охватывает на комплексной плоскости точку (-1; 0), данная система управления является устойчивой. Диаграмма Найквиста для системы управления II выглядит аналогичным образом.

На рис. 5 изображены АЧХ балки, полученные при воздействии пьезотолкателем и измерении амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки с управлением и без него для систем управления I и II. Видно, что обе рассматриваемые системы управления достаточно эффективно снижают амплитуду колебаний балки как на первом, так и на втором резонансе. Система управления I приводит к снижению амплитуды колебаний на первом резонансе на 87,8 %, а на втором – на 89,1 %. Система управления II снижает амплитуду колебаний на первом резонансе на 92,4 %, а на втором – на 90,7 %. Таким образом, система управления II несколько эффективнее системы I. Однако в случае использования системы управления II, вблизи первой и второй резонансных частот балки образуются два резонанса вместо одного.

Результаты управления в эксперименте и при численном моделировании приведены в табл. 2. Для каждой из систем управления представлены коэффициенты усиления в первом и втором контурах K_{p1} и K_{p2} , а также отношение максимальной амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки с включенным управлением к амплитуде резонансных колебаний данной точки без управления на первом резонансе $y_1/y^{(0)}_1$ и на втором резонансе $y_2/y^{(0)}_2$. Из данных табл. 2 видно, что эффективность модальной системы управления I в эксперименте близка к ее эффективности в численном исследовании, а результаты системы II превосходят результаты системы I, особенно для первой резонансной частоты.

Заключение

В рамках настоящей работы была построена конечно-элементная модель экспериментальной установки [1, 14] с учетом пьезоэффекта. Данная модель позволила численно получить амплитудно-частотные

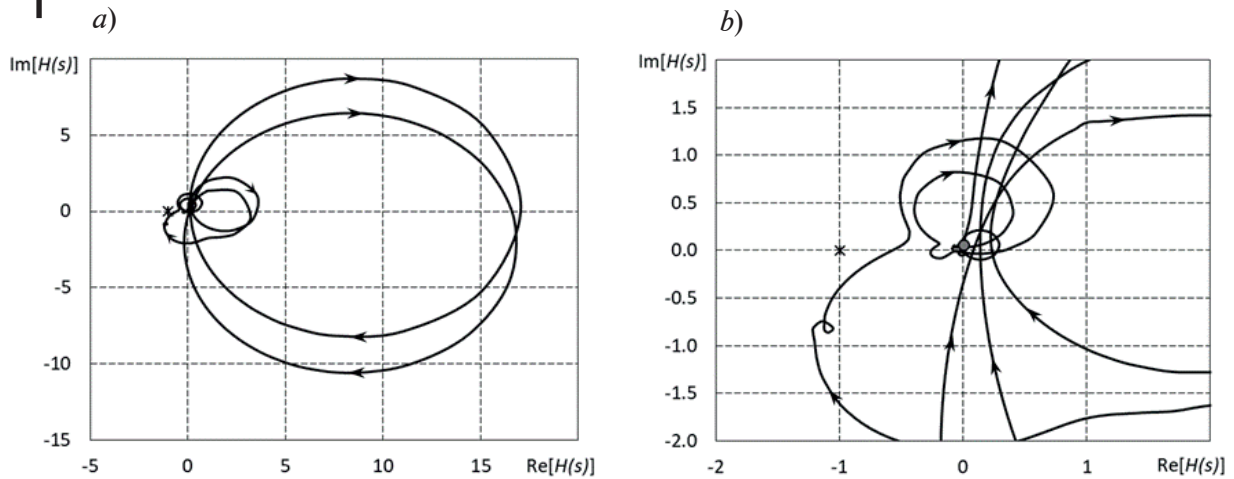


Рис. 4. Диаграмма Найквиста для обоих контуров системы управления I: общий вид (a) и увеличенный фрагмент (b)

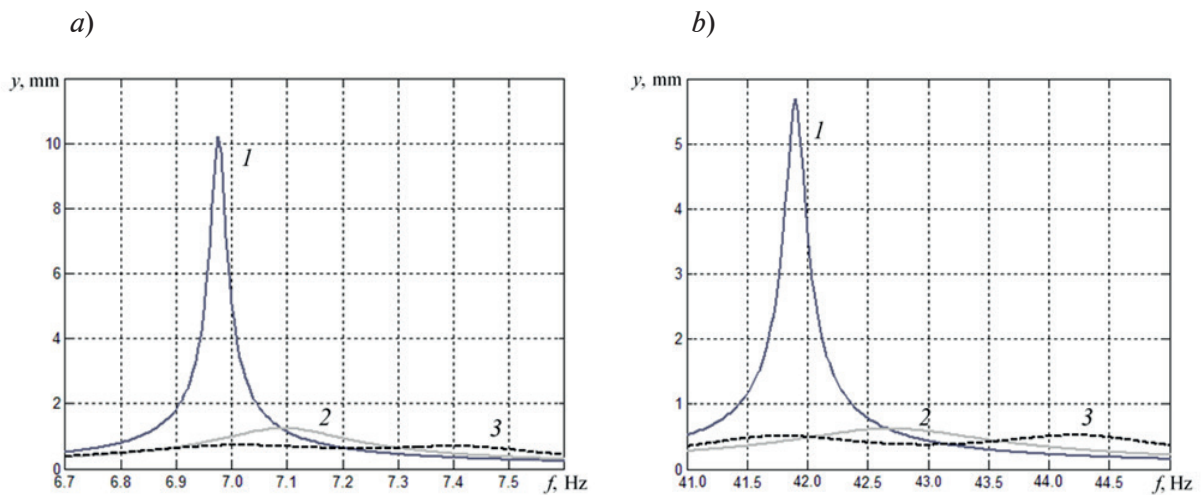


Рис. 5. АЧХ балки без управления (кривая 1) и с управлением для систем I (2) и II (3) вблизи первого (a) и второго (b) резонансов

Таблица 2

Результаты работы различных систем управления, полученные численно и экспериментально

Система управления	K_{p1}	K_{p2}	$y_1/y^{(0)}_1, \%$	$y_2/y^{(0)}_2, \%$
I (эксперимент)	0,100	0,020	16,5	12,8
I (расчет)	0,170	0,044	12,2	10,9
II (расчет)	0,530	0,650	7,6	9,3

Обозначения: K_{p1} , K_{p2} – коэффициенты усиления в первом и втором контурах; $y_1/y^{(0)}_1$, $y_2/y^{(0)}_2$ – отношения максимальной амплитуды колебаний точки на верхнем конце балки с включенным управлением к амплитуде резонансных колебаний данной точки без управления на первом и втором резонансах соответственно.



характеристики (АЧХ) для различных случаев воздействия на балку и измерения выходного сигнала. Результаты расчета оказались достаточно близкими к характеристикам, полученным экспериментально. Различия в значениях высоты резонансных пиков между расчетом и экспериментом обусловлены отличием коэффициентов демпфирования реальной системы от соответствующих значений конечно-элементной модели.

На основании АЧХ и ФЧХ системы, полученных численно, были построены решения задачи о колебаниях балки при наличии модального управления для различных законов управления. Результаты численного моделирования наиболее эффективной системы управления, созданной в рамках эксперимента (снижение резонансных амплитуд на первом и на втором резонансах 87,8 и 89,1 % соответственно), оказались близкими к экспериментальным (снижение на 83,5 и 87,2 %). В качестве развития исследования были получены и протестированы более эффективные законы управления для обоих контуров, приводящие к более низким значениям амплитуд резонансных колебаний балки, чем системы, рассмотренные в эксперименте (снижение резонансных амплитуд на 92,4 и 90,7 %).

Приложение

Передаточные функции контуров управления

Передаточная функция первого контура системы управления I:

$$R_1^{(1)}(s) = (44s^6 + 7,2 \cdot 10^3 s^5 + 1,3 \cdot 10^8 s^4 + 1,4 \cdot 10^{10} s^3 + 5,5 \cdot 10^{13} s^2 + 4,8 \cdot 10^{15} s + 1,1 \cdot 10^{17}) / (s^7 + 668s^6 + 3,1 \cdot 10^6 s^5 + 7,4 \cdot 10^8 s^4 + 1,3 \cdot 10^{12} s^3 + 1,8 \cdot 10^{14} s^2 + 7,1 \cdot 10^{15} s + 6,3 \cdot 10^{17}).$$

Коэффициент усиления $K_{p1}^{(1)} = 0,170$.
Передаточная функция второго контура системы управления I:

$$R_2^{(1)}(s) = (1,4 \cdot 10^5 s^5 + 9,3 \cdot 10^7 s^4 + 2 \cdot 10^{11} s^3 + 1,1 \cdot 10^{14} s^2 + 2,9 \cdot 10^{16} s + 1,92 \cdot 10^{18}) / (s^7 + 1,1 \cdot 10^3 s^6 + 2,1 \cdot 10^6 s^5 + 1,8 \cdot 10^9 s^4 + 1,1 \cdot 10^{12} s^3 + 6 \cdot 10^{14} s^2 + 1,1 \cdot 10^{17} s + 4,36 \cdot 10^{19}).$$

Коэффициент усиления $K_{p2}^{(1)} = 0,044$.
Передаточная функция первого контура системы управления II:

$$R_1^{(2)}(s) = (403s^4 + 2,9 \cdot 10^4 s^3 + 9,7 \cdot 10^8 s^2 + 8,6 \cdot 10^9 s + 1,88 \cdot 10^{12}) / (s^5 + 1,1 \cdot 10^3 s^4 + 2,7 \cdot 10^6 s^3 + 1,5 \cdot 10^9 s^2 + 7,8 \cdot 10^9 s + 3,54 \cdot 10^{12}).$$

Коэффициент усиления $K_{p1}^{(2)} = 0,530$.
Передаточная функция второго контура системы управления II:

$$R_2^{(2)}(s) = (2,2 \cdot 10^5 s^4 + 8 \cdot 10^6 s^3 + 2,7 \cdot 10^{11} s^2 + 4,2 \cdot 10^{12} s + 1,7 \cdot 10^{16}) / (s^6 + 372s^5 + 1,5 \cdot 10^6 s^4 + 4,1 \cdot 10^8 s^3 + 4,2 \cdot 10^{11} s^2 + 3,4 \cdot 10^{13} s + 2,6 \cdot 10^{16}).$$

Коэффициент усиления $K_{p2}^{(2)} = 0,650$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belyaev A.K., Fedotov A.V., Irschik H., Nader M., Polyanskiy V.A., Smirnova N.A. Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems // Structural Control and Health Monitoring. 2017. Vol. 25. No. 8. P. e2105.
2. Gould L.A., Murray-Lasso M.A. On the modal control of distributed parameter systems with distributed feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. Vol. 11. No. 4. Pp. 729–737.
3. Meirovitch L. Dynamics and control of structures. New York: John Wiley & Sons, 1990. 425 p.

4. **Lee C.-K., Moon F.C.** Modal sensors/actuators // ASME Journal of Applied Mechanics. 1990. Vol. 57. No. 2. Pp. 434–441.
5. **Donoso A., Bellido J.C.** Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2009. Vol. 38. No. 4. Pp. 347–356.
6. **Stoebener U., Gaul L.** Modal vibration control for PVDF coated plates // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2000. Vol. 11. No. 4. Pp. 283–293.
7. **Hurlebaus S., Stoebener U., Gaul L.** Vibration reduction of curved panels by active modal control // Computers and Structures. 2008. Vol. 86. No. 3–5. Pp. 251–257.
8. **Zenz G., Berger W., Gerstmayr J., Nader M., Krommer M.** Design of piezoelectric transducer arrays for passive and active modal control of thin plates // Smart Structures and Systems. 2013. Vol. 12. No. 5. Pp. 547–577.
9. **Braghin F., Cinquemani S., Resta F.** A new approach to the synthesis of modal control laws in active structural vibration control // Journal of Vibration and Control. 2012. Vol. 19. No. 2. Pp. 163–182.
10. **Cinquemani S., Ferrari D., Bayati I.** Reduction of spillover effects on independent modal space control through optimal placement of sensors and actuators // Smart Materials and Structures. 2015. Vol. 24. No. 8. P. 085006.
11. **Canciello G., Cavallo A.** Selective modal control for vibration reduction in flexible structures // Automatica. 2017. Vol. 75. January. Pp. 282–287.
12. **Biglar M., Gromada M., Stachowicz F., Trzepiecinski T.** Optimal configuration of piezoelectric sensors and actuators for active vibration control of a plate using a genetic algorithm // Acta Mechanica. 2015. Vol. 226. No. 10. Pp. 3451–3462.
13. **Song Z.-G., Li F.-M., Carrera E., Hagedorn P.** A new method of smart and optimal flutter control for composite laminated panels in supersonic airflow under thermal effects // Journal of Sound and Vibration. 2018. Vol. 414. 3 February. Pp. 218–232.
14. **Беляев А.К., Полянский В.А., Смирнова Н.А., Федотов А.В.** Процедура идентификации при модальном управлении распределенным упругим объектом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 2. С. 69–81.
15. **Preumont A.** Mechatronics: dynamics of electromechanical and piezoelectric systems. Dordrecht: Springer, 2006.

Статья поступила в редакцию 17.01.2019, принята к публикации 18.02.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ФЕДОТОВ Александр Васильевич – младший научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.
199178, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61.
alvafed@yandex.ru

REFERENCES

- [1] **A.K. Belyaev, A.V. Fedotov, H. Irschik, et al.**, Experimental study of local and modal approaches to active vibration control of elastic systems, Structural Control and Health Monitoring. 25(8) (2017) e2105.
- [2] **L.A. Gould, M.A. Murray-Lasso**, On the modal control of distributed parameter systems with distributed feedback, IEEE Transactions on Automatic Control. 11(4) (1966) 729–737.
- [3] **L. Meirovitch**, Dynamics and control of structures, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [4] **C.-K. Lee, F.C. Moon**, Modal sensors/actuators, ASME Journal of Applied Mechanics. 57(2) (1990) 434–441.
- [5] **A. Donoso, J.C. Bellido**, Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile, Structural and Multidisciplinary Optimization. 38(4) (2009) 347–356.
- [6] **U. Stoebener, L. Gaul**, Modal vibration control for PVDF coated plates, Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 11(4) (2000) 283–293.
- [7] **S. Hurlebaus, U. Stoebener, L. Gaul**, Vibration reduction of curved panels by active modal control, Computers and Structures. 86(3–5) (2008) 251–257.
- [8] **G. Zenz, W. Berger, J. Gerstmayr, et al.**, Design of piezoelectric transducer arrays for



passive and active modal control of thin plates, *Smart Structures and Systems*. 12(5) (2013) 547–577.

[9] **F. Braghin, S. Cinquemani, F. Resta**, A new approach to the synthesis of modal control laws in active structural vibration control, *Journal of Vibration and Control*. 19(2) (2012) 163–182.

[10] **S. Cinquemani, D. Ferrari, I. Bayati**, Reduction of spillover effects on independent modal space control through optimal placement of sensors and actuators, *Smart Materials and Structures*. 24(8) (2015) 085006.

[11] **G. Cenciello, A. Cavallo**, Selective modal control for vibration reduction in flexible structures, *Automatica*. 75 (January) (2017) 282–287.

[12] **M. Biglar, M. Gromada, F. Stachowicz, T. Trzepiecinski**, Optimal configuration of

piezoelectric sensors and actuators for active vibration control of a plate using a genetic algorithm, *Acta Mechanica*. 226 (10) (2015) 3451–3462.

[13] **Z.-G. Song, F.-M. Li, E. Carrera, P. Hagedorn**, A new method of smart and optimal flutter control for composite laminated panels in supersonic airflow under thermal effects, *Journal of Sound and Vibration*. 414 (3 Febr.) (2018) 218–232.

[14] **A.K. Belyaev, V.A. Polyanskiy, N.A. Smirnova, A.V. Fedotov**, Identification procedure in the modal control of a distributed elastic system, *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*. 10 (2) (2017) 69–81.

[15] **A. Preumont**, *Mechatronics: dynamics of electromechanical and piezoelectric systems*, Springer, Dordrecht, 2006.

Received 17.01.2019, accepted 18.02.2019.

THE AUTHOR

FEDOTOV Aleksandr V.

Institute for Problems in Mechanical Engineering, RAS

61 Bolshoi Ave. V.O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

alvafed@yandex.ru