

DOI: 10.18721/JPM.11310

УДК 532.5.013.4

ЛИНЕЙНАЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДАЛЬНОГО ПОЛЯ ЗАТОПЛЕННОЙ ЛАМИНАРНОЙ СТРУИ

Р.И. Мулляджанов, Н.И. Яворский

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе, СО РАН

г. Новосибирск, Российская Федерация

Рассмотрена линейная задача устойчивости для затопленной струи Ландау – Сквайра. Показано, что амплитуда собственных возмущений изменяется в пространстве степенным образом как функция сферического радиуса R , отсчитываемого от источника движения. Установлено, что инкремент синусоидальных возмущений становится выше, чем у осесимметричных возмущений, при $Re_D > 31$. Предложен модельный критерий ламинарно-турбулентного перехода в дальней области струи, который позволил впервые получить хорошее согласие между результатами линейной теории устойчивости и экспериментальными данными при $Re_D < 2000$ для значения координаты ламинарно-турбулентного перехода как функции числа Рейнольдса.

Ключевые слова: ламинарная струя, решение Ландау, гидродинамическая устойчивость, дальнее поле

Ссылка при цитировании: Мулляджанов Р.И., Яворский Н.И. Линейная гидродинамическая устойчивость дальнего поля затопленной ламинарной струи // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 108–121. DOI: 10.18721/JPM.11310

THE FAR FIELD OF A SUBMERGED LAMINAR JET: LINEAR HYDRODYNAMIC STABILITY

R.I. Mullyadzhanov, N.I. Yavorsky

Kutateladze Institute of Thermal Physics, Novosibirsk, Russian Federation

A linear stability problem for a submerged Landau – Squire jet has been considered. It was shown that in the space, the intrinsic perturbation amplitude varied as a power function of the spherical radius R , read from the motion source. It was established that the increment in the sinusoidal disturbance became more than that for axisymmetric one for $Re_D > 31$. The linear stability theory was applied to the value of the laminar-turbulent transition coordinate as a function of the Reynolds number. A model criterion for a laminar-turbulent transition in the far jet region was proposed. For the first time, this made it possible to obtain a good agreement between the theoretical results and experimental data for $Re_D < 2000$.

Key words: laminar jet, Landau solution, hydrodynamic stability, far field

Citation: R.I. Mullyadzhanov, N.I. Yavorsky, The far field of a submerged laminar jet: Linear hydrodynamic stability, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 11 (3) (2018) 108–121. DOI: 10.18721/JPM.11310

Введение

В теории гидродинамической устойчивости исследуются условия, при которых один режим течения жидкости или газа сменяется другим [1 – 3]. Такие ситуации

часто реализуются в широком спектре природных явлений и технических устройств, поэтому новые результаты в этой области имеют многочисленные фундаментальные и практические приложения. Свободные



сдвиговые течения относятся к одному из широчайших классов в гидродинамике, в котором струйные потоки занимают центральное место. Классическая задача об устойчивости круглой затопленной ламинарной струи, вытекающей из локализованного источника, до сих пор не имеет окончательного решения, что побуждает ученых к дальнейшим исследованиям.

Экспериментально показано, что круглая струя теряет устойчивость при относительно небольших скоростях потока. Одним из первых, кто проводил соответствующие эксперименты, был Г. Шаде; они описаны в работе [4]. Его опыты указали на возможность получить устойчивое струйное течение при числах Рейнольдса в несколько сотен. Далее, в 1962 году, А. Виилу [5] получил результат, несколько противоречащий данным Шаде, определив критическое число Рейнольдса в диапазоне всего лишь 10,5 – 11,8. В том же году результаты аналогичных экспериментов опубликовал А.Дж. Рейнольдс [6], который привел достаточно детальное описание сценариев потери устойчивости потока.

В подобных экспериментах входные условия часто реализуются при помощи длинной трубы, профиль скорости на выходе из которой должен быть близок к параболическому профилю Пуазейля. Однако выходные характеристики сильно зависят от длины подводящей трубки.

Относительно недавняя серия экспериментов [7, 8] отличается тщательным исследованием выходного профиля скорости. Измерения показали, что длина подводящей трубки, составляющей около 200 диаметров канала, оказывается достаточной, чтобы сформировать параболический профиль скорости вплоть до чисел Рейнольдса порядка 6700. Кроме того, было установлено, что при высоких значениях скорости потока и достаточно близко к соплу, начинает развиваться неосесимметричная мода, визуализированная в поперечном сечении.

В экспериментах В.В. Леманова и др. [9] изучались затопленные струи, вытекающие из подводящей трубки длиной $100D$ (D – диаметр трубки). Кроме того, была проведена визуализация течения и показа-

но, что при увеличении числа Рейнольдса область устойчивого ламинарного течения сокращается. При этом обнаружено (в согласии с результатами предыдущих авторов), что в области, расположенной перед окончательной турбулизацией струи, начинают возрастать синусоидальные возмущения. Экспериментальные данные этой работы будут далее нами использоваться для качественного и количественного сравнения с представленной ниже теорией.

Аналитическое исследование этой задачи началось с работы Дж.К. Бэтчелора и А.Е. Гилла [5], в которой авторы установили, что в невязком случае неустойчивой модой в дальнем поле является только синусоидальное возмущение. Однако они указали, что учет расширения струи вниз по потоку может несколько изменить выводы, полученные при помощи плоскопараллельного приближения.

Т. Татсуми и Т. Какутани [10] отмечают, что анализ устойчивости непараллельных потоков недостаточно развит в теории гидродинамической устойчивости, в рамках которой даже такие течения, как струи и следы рассматриваются как квазипараллельные. Ч.-Х. Линг и У.К. Рейнольдс [11] развили подход, при котором учитывается расширение потока в рамках теории возмущения. В.К. Гарг [12] использовал более общий подход, который применялся только к (двумерной) струе У.Г. Бикли [13]. В отличие от двумерного случая, где характеристики возмущений меняются с продольной координатой неавтомодельным образом и необходимо использовать некоторые приближения [14, 15], в трехмерном случае общий вид возмущений может быть выписан при помощи соображений автомодельности. Впервые такой анализ был выполнен О.А. Лихачёвым [16] для струи Шлихтинга. Помимо неустойчивых возмущений с $m = 1$ (m – азимутальное волновое число), были обнаружены неустойчивые осесимметричные моды с $m = 0$. И хотя осесимметричные возмущения оказались наиболее неустойчивыми только в небольшом диапазоне довольно малых чисел Рейнольдса, это позволило качественно объяснить экспериментально наблюдаемые осесимметричные

пульсации, описанные У.К. Рейнольдсом. Напомним, что при относительно больших значениях чисел Re наиболее опасными становятся возмущения при $m = 1$. В данном анализе использовано решение Шлихтинга, которое является аналогом точного решения Ландау в приближении пограничного слоя.

В. Штерн и Ф. Хуссейн [17] провели аналогичный анализ для струи Ландау. В отличие от прежних работ, где зависимости возмущения v от продольной координаты имели вид $v \propto e^{ik(x)x}$ (x — координата вдоль направления распространения струи, $k(x)$ — продольное волновое число), при котором максимальное значение v уменьшается вниз по течению, эти исследователи рассмотрели возмущения вида $v \propto e^{ik(R)\ln R}$ (R — сферический радиус), опираясь на предыдущие работы для двумерного случая [14, 15]. Таким образом, авторы исследовали возмущения со степенной зависимостью от R и получили результаты, аналогичные представленным в работе [16]. Однако они рассмотрели только нейтральные решения (мнимая часть $k = 0$).

Помимо нестандартной зависимости от пространственной координаты, возмущения также не будут иметь (чисто) экспоненциальную зависимость от времени. Таким образом, анализ устойчивости не является модальным, что следует из того факта, что

характерное время в струйной задаче увеличивается как $(R/|u|) \propto R^2$ вниз по течению, где $|u|$ — значение локальной скорости на оси струи. Вместе с основным течением, эволюционируют и возмущения, длина волны и характерное время колебания которых также растет с величиной R [12]. На основе выводов работы [16] мы можем заключить, что если необходимо рассмотреть пространственную эволюцию малого возмущения фиксированной частоты ω_0 , то нейтральная кривая $\omega_0(Re)$ и масштабное подобие $\omega_0 \propto R^{-2}$ определяют диапазон изменения R , в котором это возмущение будет расти, для данного значения числа Re .

Это утверждение подтверждено трехмерными расчетами задачи устойчивости [18]. Кроме того, в работе [19] имеется важное замечание, что расчеты задачи устойчивости в неограниченных областях сильно осложняются численными трудностями из-за «выходных» граничных условий; последние могут существенно исказить получаемые результаты.

Из анализа вышеприведенного краткого обзора следует, что использование автоматического вида возмущений позволяет избежать упомянутых численных трудностей. Это утверждение можно рассматривать и в качестве дополнительного аргумента в пользу автоматического подхода в данной задаче.

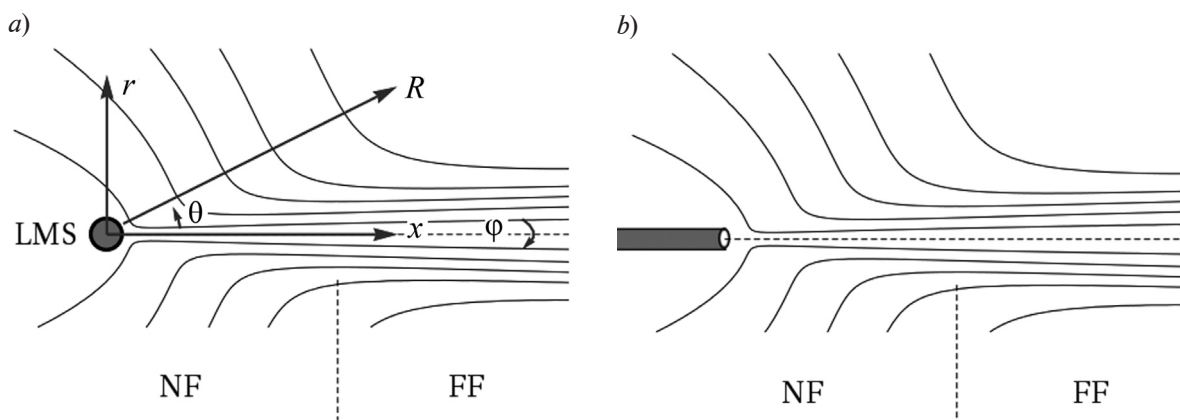


Рис. 1. Графическое представление решения (3):

a — идеализованное осесимметричное струйное течение (показаны линии тока), вызванное локализованным источником движения (LMS), и системы координат (сферическая и цилиндрическая); *b* — одна из реализаций такого течения — струя жидкости, вытекающая из длинной трубы в затопленное пространство; NF, FF — ближнее и дальнее поля, соответственно

Постановка задачи

Исследуется эволюция возмущений \mathbf{v} некоторого ламинарного поля скорости \mathbf{U} ; при этом полное поле скорости представляется как $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{v}$. Подставим это представление в уравнения Навье – Стокса и проведем линейризацию, считая при этом, что амплитуда возмущения скорости мала, по сравнению с основным потоком. Получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla \chi + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

где χ – возмущение поля давления, ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность жидкости.

Поле скорости основного течения описывается точным решением уравнений Навье – Стокса, которое можно представить в сферической системе координат (R, θ, φ) :

$$U_R = -\frac{\nu y'(\psi)}{R}, U_\theta = -\frac{\nu y(\psi)}{R\sqrt{1-\psi^2}}, \quad (2)$$

$$U_\varphi = 0, y(\psi) = 2\frac{1-\psi^2}{A-\psi},$$

где $\psi = \cos \theta$.

Параметр A связан с «импульсом» струи P_x следующим образом:

$$P_x = 16\pi\rho\nu^2 A \left[1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1} \right]. \quad (3)$$

Это решение было получено Н.А. Слезкиным [20], Л.Д. Ландау [21] и Г.Б. Сквайром [22] и соответствует струйному течению, вызванному точечным источником импульса.

На рис. 1 приведено графическое представление полученного решения. В нашем исследовании оно используется в качестве основного потока, так как его прямое сравнение с экспериментальными данными показало хорошее соответствие в дальнейшем поле струи [23 – 25].

Поскольку в постановке задачи отсутствует характерная размерность длины, из соображений размерности будем искать возмущения в следующем классе:

$$v_R = \frac{\nu}{R} f(\psi, \eta) e^{im\varphi}, \quad (4)$$

$$v_\theta = -\frac{\nu}{R\sqrt{1-\psi^2}} g(\psi, \eta) e^{im\varphi}, \quad (4)$$

$$v_\varphi = \frac{\nu}{R} h(\psi, \eta) e^{im\varphi}, \chi = \frac{\rho\nu^2}{R^2} q(\psi, \eta) e^{im\varphi},$$

где переменная $\eta = \sqrt{(R/\nu t)}$.

Стоит отметить, что переменные ψ и η были также использованы при анализе двумерных [14, 15, 26, 27] и трехмерных [28 – 30] конических течений. При помощи метода разделения переменных можно показать, что в случае $y = 0$ ($A \rightarrow \infty$) решение выражается аналитически через полиномы Лежандра по переменной ψ и через гипергеометрические функции по переменной η [31]. Фактически это означает, что решение имеет степенную зависимость от η , что неудивительно, потому что представление поля скорости основного потока, мотивированное соображениями размерности, имеет степенную зависимость R^{-1} . Далее преобразуем степенную зависимость с неким показателем n следующим образом:

$$\eta^n = (R/R_0)^n (\nu t/R_0^2)^{-n/2} = \exp[n \ln(R/R_0) - (n/2) \ln(\nu t/R_0^2)], \quad (5)$$

где R_0 – некоторая постоянная размерности длины (радиус подводящей трубки).

Видно, что в случае $y \neq 0$ целесообразно рассмотреть задачу устойчивости к возмущениям в виде волн в новых переменных:

$$v = (\nu/R) v_0(\psi) \exp(ik\xi - i\omega \ln \tau + im\varphi), \quad (6)$$

$$\xi = \ln(R/R_0), \tau = \nu t/R_0^2,$$

где v_0 – безразмерный вектор, зависящий только от угла ψ ; k, m – радиальное и азимутальное безразмерные волновые числа; ω – безразмерная частота, τ – безразмерное время.

Тогда компоненты возмущения поля скорости и давления имеют вид:

$$v_R = (\nu/R) f(\psi) \exp(ik\xi - i\omega \ln \tau + im\varphi),$$

$$v_\theta = \frac{\nu}{R\sqrt{1-\psi^2}} g(\psi) \exp(ik\xi - i\omega \ln \tau + im\varphi), \quad (7)$$

$$v_\varphi = \frac{\nu}{R\sqrt{1-\psi^2}} ih(\psi) \exp(ik\xi - i\omega \ln \tau + im\varphi),$$

$$\chi = \frac{\rho v^2}{R^2} q(\psi) \exp(ik\xi - i\omega \ln \tau + im\phi), \quad (7)$$

где f, g, h, q – безразмерные функции только угловой переменной ψ .

Подставим представление (7) в уравнения (1), и после некоторых преобразований получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & i\Omega f + \frac{2mh}{1-\psi^2} + (2-ik)q - 2g' + y''g + \\ & + \frac{2yg}{1-\psi^2} - \left(2 + ik + k^2 + \frac{m^2}{1-\psi^2}\right) f - \\ & - (2-ik)yf' - yf'' - 2\psi f' + (1-\psi^2)f'' = 0; \\ & i\Omega g + mh' + (1-\psi^2)(2f - (1+ik)f') - \\ & - \left(ik + k^2 - \frac{m^2}{1-\psi^2}\right) g - (1-ik)y'g - \\ & - \frac{2\psi yg}{1-\psi^2} - yg' - (1-\psi^2)q' = 0; \\ & i\Omega h - mq + 2mf - \frac{2m\psi g}{1-\psi^2} - \left(ik + k^2 + \frac{m^2}{1-\psi^2}\right) h + \\ & +iky'h - yh' + (1-\psi^2)h'' = 0; \\ & (1+ik)f + g' - \frac{mh}{1-\psi^2} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Omega = \omega R^2 / (vt)$ – некоторый постоян-

ный параметр, играющий роль обобщенной частоты; он включает в себя зависимость от радиуса и времени (пропорционально переменной η^2).

Во втором уравнении системы (8) понижен порядок производной функции g со второго до первого при помощи уравнения неразрывности. Стоит отметить, что уравнения (8) оказываются идентичны уравнениям, полученным В. Штерном и Ф. Хуссейном, где, однако, рассматривалась экспоненциальная зависимость возмущения от времени (точнее от $1/\eta^2$). При выводе потребовалось использовать приближение дальнего поля ($\eta \rightarrow \infty$, что эквивалентно $\tau \rightarrow 0$) и отбросить ряд слагаемых с высокими степенями τ . В настоящей работе не делается никаких приближений при выводе данных уравнений, кроме того, что Ω считается постоянным параметром.

Для полной постановки задачи система уравнений (8) должна быть дополнена подходящими граничными условиями. Из представления (7) вытекают следующие требования, налагаемые на поле скорости:

$$g(\pm 1) = 0, h(\pm 1) = 0, \quad (9)$$

они соответствуют требованиям ограниченности функций g и h .

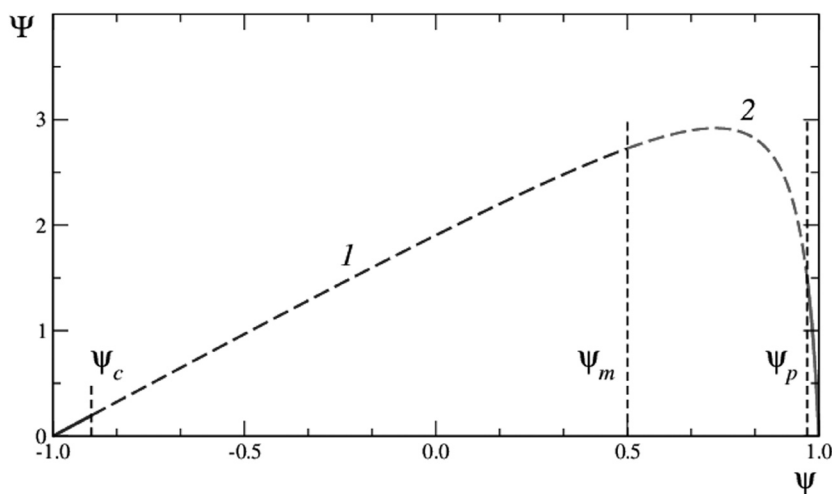


Рис. 2. Схема используемого численного алгоритма:

В диапазонах $\psi \in [-1, 0; \psi_c]$ и $[\psi_p; 1, 0]$ используются асимптотические разложения некой пробной функции Ψ в окрестности особых точек $\psi = \pm 1, 0$; пунктирные кривые 1, 2 – области дальнейшего численного интегрирования; в точке ψ_m необходимо обеспечить непрерывность значений функции ψ и ее производных

Процедура численного решения

Процедура численного решения полученной системы уравнений схематически изображена на рис. 2. Поскольку точки $\psi = \pm 1,0$ являются особыми, необходимо найти асимптотическое разложение функций задачи в их окрестности и сместить начало численного интегрирования. В диапазонах $\psi \in [-1,0; \psi_c]$ и $[\psi_p; 1,0]$ используются асимптотические разложения некоей пробной функции Ψ в окрестности особых точек $\psi = \pm 1,0$ (см. разложение (10)). Далее строятся два решения уравнений (8) численным интегрированием от ψ_c до ψ_m и от ψ_p до ψ_m . В точке ψ_m необходимо обеспечить непрерывность значений функции Ψ и ее производных, согласно порядку системы дифференциальных уравнений (см. условия (11)).

Можно показать [32], что для уравнений типа Лежандра функции задачи пропорциональны множителю $(1 - x^2)^{m/2}$ и определенной аналитической (в окрестности $\psi = \pm 1,0$) функции, которую, в свою очередь, можно представить в виде ряда Тейлора.

Таким образом, некоторую пробную функцию Ψ (f, g, h или q) в окрестности точки $\psi = 1,0$ можно представить в следующем виде:

$$\Psi = (1 - \psi^2)^{m/2} (\Psi_0 + \Psi_1(1 - \psi) + \Psi_2(1 - \psi^2) + \Psi_3(1 - \psi^3) + \dots), \quad (10)$$

где комплекснозначные коэффициенты разложения $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ определяются при подстановке функции (10) в систему уравнений (8). Некоторые параметры остаются неопределенными (свободными); их следует находить уже при непосредственном решении спектральной задачи.

Разложение, аналогичное выражению (10), можно выписать и в окрестности точки $\psi = -1,0$. Далее для выбранных значений A (в функции y), Ω и набора свободных параметров надо построить два численных решения, при этом интегрирование уравнений (8) начинается из точек $\psi_c = -1,0 + \varepsilon_c$ и $\psi_p = 1,0 - \varepsilon_p$, где ε_c и ε_p — малые параметры (в диапазоне $10^{-5} - 10^{-3}$). В некоторой точке ψ_m ($\psi_m = 0,9$ для найденных ниже решений), выбор которой не влияет

на результат, необходимо удовлетворить условиям непрерывности функций задачи и их производных, согласно порядку системы обыкновенных дифференциальных уравнений. А именно, необходимо выполнить следующие условия:

$$\begin{aligned} f_-(\psi_m) &= f_+(\psi_m), \quad f'_-(\psi_m) = f'_+(\psi_m), \\ g_-(\psi_m) &= g_+(\psi_m), \\ h_-(\psi_m) &= h_+(\psi_m), \quad h'_-(\psi_m) = h'_+(\psi_m), \\ q_-(\psi_m) &= q_+(\psi_m), \end{aligned} \quad (11)$$

где плюс и минус соответствуют решениям, полученным при интегрировании системы уравнений из точек ψ_p и ψ_c , соответственно.

Условия (11) достигаются варьированием свободных параметров и волнового числа $k = k_{re} + ik_{im}$ при помощи метода Ньютона. Аналогичная схема расчета была использована нами в работе [33].

Результаты и их обсуждение

Растущие возмущения (при $-k_{im} > 0$) были обнаружены только для азимутальных волновых чисел $m = 0$ и $m = 1$, как и в работе [17], в которой, однако, исследовались только нейтральные возмущения ($k_{im} = 0$). Таким образом, в работе [17] зависимость $k_{im}(\text{Re})$ не была проанализирована, что как раз позволяет нам провести полноценное сравнение с экспериментальными данными, как будет показано ниже. В данной задаче удобно использовать число Рейнольдса, построенное по скорости на оси и расстоянию от начала координат:

$$\text{Re} = \frac{U_R R}{v} \Big|_{\psi=1} = -y'(1) = -\frac{4}{A-1}, \quad (12)$$

согласно точному решению (2).

На рис. 3 показаны дисперсионные кривые $-k_{im}(\Omega)$ для различных чисел Рейнольдса Re и $m = 0$. При увеличении числа Рейнольдса выше критического значения $\text{Re}_{crit}^{m=0} = 26,20$ появляется диапазон значений Ω , для которых существуют решения, у которых $-k_{im} > 0$. Следует отметить, что в работе [17] указано, что $\text{Re}_{crit}^{m=0} = 28,1$. Небольшое отличие можно объяснить недостаточно аккуратным алгоритмом расчета спектральной задачи, используемым в ра-

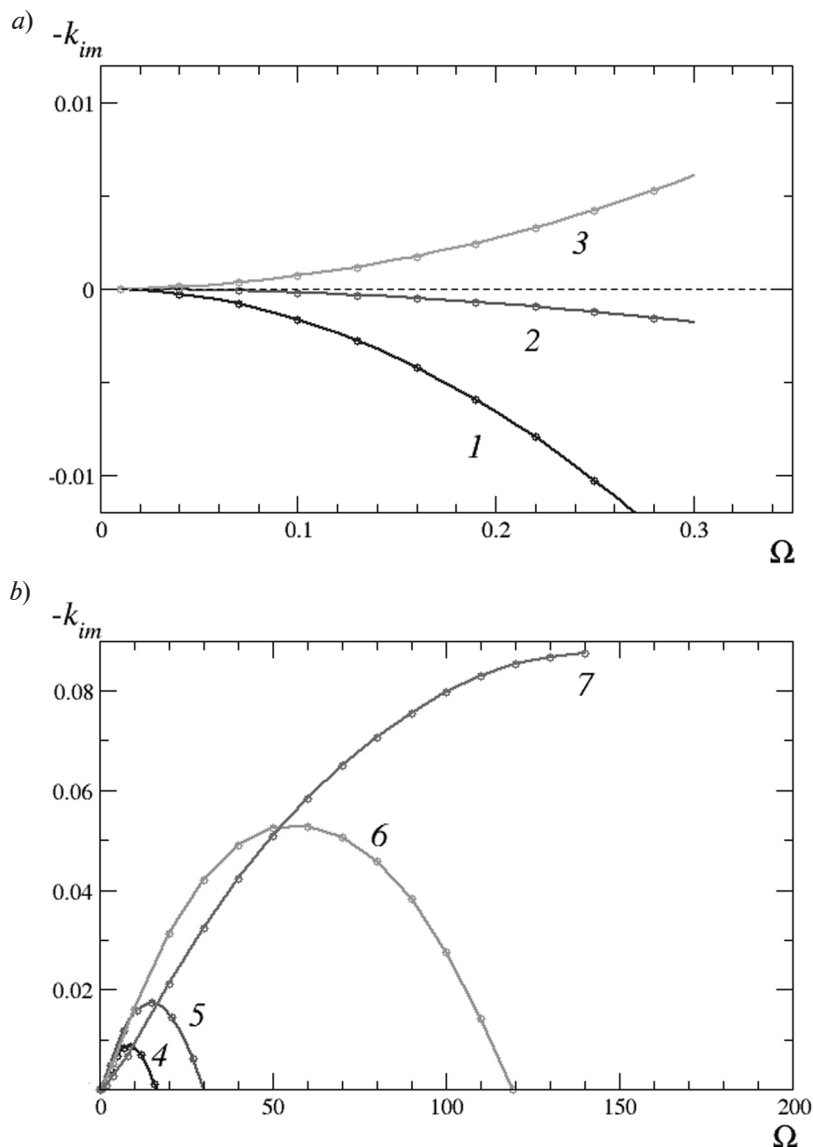


Рис. 3. Дисперсионные кривые $-k_{im}(\Omega)$ в диапазонах значений параметра Ω , равных $(0 - 0,35)$ (a) и $(0 - 200)$ (b), для самого неустойчивого решения при $m = 0$, при разных значениях числа Рейнольдса Re: 20 (1), 25 (2), 33,33 (3), 40 (4), 50 (5), 100 (6) и 200 (7)

боте [17], где не были использованы асимптотические разложения функций задачи в окрестности точек $\psi = \pm 1, 0$.

Текущая постановка задачи позволяет исследовать эволюцию возмущений во всем пространстве, благодаря автомодельности основного течения и рассматриваемых возмущений и, таким образом, является глобальной. Отношение амплитуды скорости возмущения на оси к скорости основного потока подчиняется следующей зависимости:

$$v_R / U_R = \left| [(v / R) f(1) e^{-k_{im}(\text{Re}) \xi}] \times [(-v / R) y'(1)]^{-1} \right|_{\infty} (R / R_0)^{-k_{im}(\text{Re})}. \quad (13)$$

Амплитуда возмущения растет (затухает) вниз по потоку относительно основного течения алгебраически в зависимости от расстояния, отсчитываемого от начала координат. При этом скорость роста определяется мнимой частью волнового числа и зависит от числа Рейнольдса. Очень важным оказы-

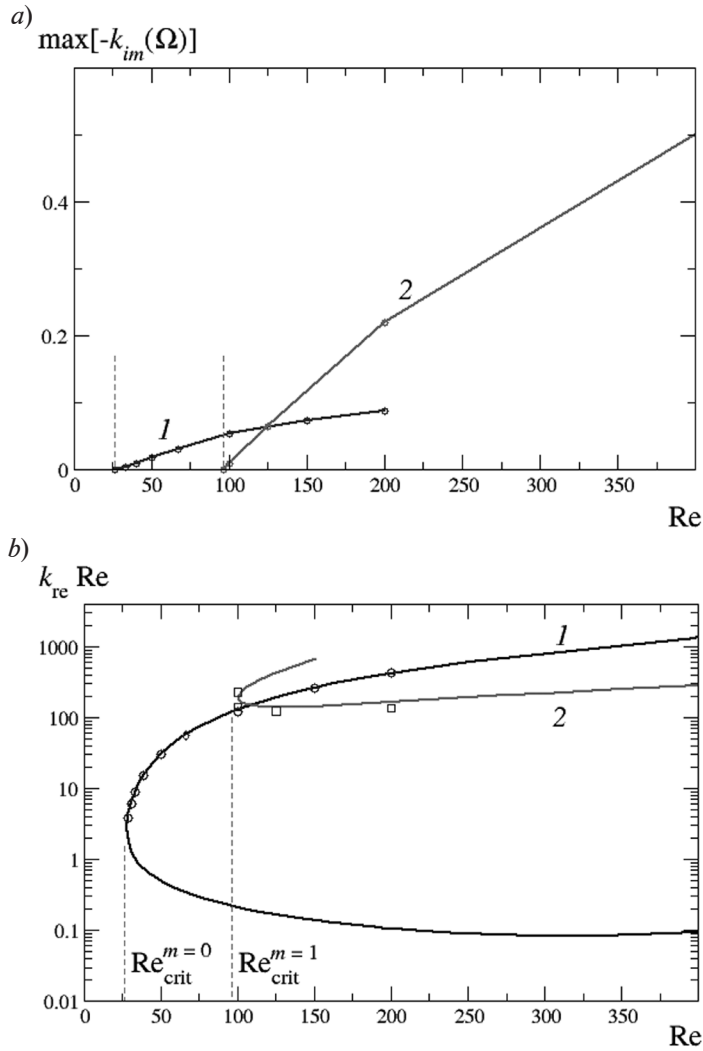


Рис. 4. Зависимости максимального значения мнимой части $-k_{im}(a)$ и значения действительной части $k_{re} Re$ (b) волнового числа k от величины числа Рейнольдса для самых неустойчивых решений при $m = 0$ (1) и $m = 1$ (2).

Проведено сравнение (b) данных настоящей работы (символы) с таковыми работы [17] (сплошные линии).

Значения $Re_{crit}^{m=0} = 26,20$ и $Re_{crit}^{m=1} = 96,29$ отмечены вертикальными пунктирами

вается абсолютное значение $-k_{im}(Re)$.

На рис. 4 показана зависимость максимального значения $-k_{im}(\Omega)$, полученного для каждой дисперсионной кривой, при различных значениях Re . Видно, например, что, несмотря на существование положительных значений $-k_{im}$ для $Re \leq 40$, эти значения не превышают 0,01. Это дает основание утверждать, что отношение амплитуды возмущения к скорости основного потока на оси вырастет всего на 7 % (примерно) на расстоянии $R/R_0 = 10^3$, по срав-

нению с этим отношением на расстоянии $R/R_0 = 1$. При значении $Re = 200$ пик величины $-k_{im}(\Omega)$ на дисперсионной кривой достигается для $-k_{im} = 0,087$. Для этих параметров возмущение на расстоянии $R/R_0 = 10^3$ вырастет на 82 %.

Таким образом, можно заключить, что, несмотря на присутствие в рассматриваемом течении механизма роста осесимметричных возмущений, скорость такого роста оказывается крайне низкой. Это дает основания характеризовать осесимметричные

возмущения, в первом приближении, как нейтрально устойчивые. Вероятно, именно благодаря слабовыраженному эффекту возмущения при $m = 0$, справедливы только устойчивые решения в плоскопараллельном приближении. На рис. 4, *b* приведено сравнение зависимости $k_{re} Re$ от числа Рейнольдса Re , полученное нами в данном исследовании и в работе [17]. Отличительной особенностью является отсутствие нижней ветви на кривой, относящейся к работе [17], что наглядно продемонстрировано на рис. 4, *b*.

На рис. 4, *b* также можно видеть, что при увеличении числа Рейнольдса Re до величины порядка 100, появляется неустойчивое решение для $m = 1$. Полученное значение критического числа Рейнольдса составляет $Re_{crit}^{m=1} = 96,29$, что несколько меньше, чем соответствующее значение в работе [17] ($Re_{crit}^{m=1} = 101$).

Сравнение функций максимального значения $-k_{im}(\Omega)$ от числа Рейнольдса Re при $m = 0$ и при $m = 1$ указывает на то, что скорость роста возмущений при $m = 1$ существенно превышает таковую для $m = 0$ при увеличении числа Рейнольдса выше некоторого значения. При этом максимальные значения $-k_{im}$ примерно одинаковы при значениях $Re \approx 120 - 130$.

Следующий этап проведенного нами исследования заключался в сравнении результатов описанного выше линейного анализа устойчивости с экспериментальными данными, представленными в литературе. Определим связь числа Рейнольдса, которая выражается формулой (12), с этим числом, которое используется в экспериментах и численных расчетах. Число, построенное по диаметру выходного сопла $D = 2R_0$ и среднерасходной скорости U_b , имеет вид

$$Re_D = U_b D / \nu. \quad (14)$$

Рассмотрим параболический профиль скорости, сформированный в подводящей трубе. В цилиндрических координатах (x, r, φ) с центром в середине выходного сечения ($x = 0$) этот профиль имеет следующий вид:

$$U(R) = 2U_b(1 - R^2 / R_0^2), \quad (15)$$

где R_0 – радиус трубы (как и прежде).

Полный поток импульса через выходное сечение определяется следующим соотношением:

$$P_x = \oint \rho U^2(R) dS = 2\pi\rho \int_0^{R_0} U^2(R) R dR. \quad (16)$$

Подставим формулу (15) в соотношение (16) и получим, что

$$P_x = \frac{1}{3} \pi \rho \nu^2 Re_D^2. \quad (17)$$

Таким образом, мы приходим к следующей связи:

$$Re_D = \sqrt{\frac{3P_x}{\pi\rho\nu^2}}. \quad (18)$$

Следовательно, имеется однозначная связь между величинами Re_D и Re (или между A и Re : $Re = -4/(A - 1)$). При больших значениях числа Рейнольдса можно выписать следующую асимптотику:

$$Re_D = \sqrt{8Re} + \sqrt{2}(8 + \ln 8 - 3 \ln Re) Re^{-1/2} + \dots, \quad Re \rightarrow \infty, \quad (19)$$

причем первое слагаемое часто используется в литературе ($Re_D = \sqrt{8Re}$).

В таблице показано сравнение результатов анализа для $m = 1$, полученных в данной работе, с результатами других авторов. Следует отметить, что критическое число Рейнольдса Re_{crit} будет существенно ниже, если учитывать расширение струи, однако значения числа Рейнольдса $Re_{D,crit}$ при таком учете будут различаться меньше. Немного ниже оказываются также значения действительной части волнового числа и обобщенной частоты. Тем не менее, данные, полученные В. Штерном и Ф. Хуссейном, а также О.А. Лихачёвым, находятся в хорошем согласии с результатами текущих расчетов.

Далее производилась оценка расстояния L от источника струи, на котором амплитуда возмущения принимает некоторое критическое значение, так как течение достигает турбулизации. В расчетах считается, что возмущение растет согласно формуле (13), в соответствии с рассмотренным линейным механизмом. Очевидно, что здесь

Таблица

Сравнение результатов разных авторов по анализу линейной устойчивости струи Ландау при значении азимутального волнового числа $m = 1$

Автор	Re_{crit}	$Re_{D,crit}$	$k_{re,crit}$	Ω_{crit}
В. Штерн, Ф. Хуссейн [17]	101,0	27,77	1,85	84,00
П.Дж. Моррис [34]	177,1	37,64	2,12	86,66
О.А. Лихачёв [16]	94,46	27,49	1,55	59,72
Данная работа	96,29	27,10	1,78	76,93

Обозначения: Re – число Рейнольдса, определенное формулой (12), Re_D – число Рейнольдса, построенное по диаметру D выходного сопла; k_{re} – действительная часть волнового числа k ; Ω – параметр, играющий роль обобщенной частоты; нижний индекс “crit” указывает на критическое значение.

Примечания. 1. В работе [34] исследована устойчивость профиля скорости в плоскопараллельном приближении с использованием решения Шлихтинга.
2. В статье [17] применялся такой же подход, как и в данной работе.

важно определить критерий ламинарно-турбулентного перехода.

В нашем исследовании принималось, что турбулизация происходит, когда в некоторой точке амплитуда возмущения достигает существенного преобладания над локальным значением скорости. Путем фиксирования этого расстояния, а также использования найденных зависимостей $-k_{im}(Re)$ и формулы (13), была получена зависимость L от Re .

На рис. 5 приведено сравнение экспериментальных данных, полученных А.Дж. Рейнольдсом [6], а также В.В. Лемановым и др. [9], с теоретической зависимостью, найденной в настоящей работе (показана сплошной линией).

Полученное выражение имеет вид

$$L / D = 2,0 \cdot 10^\alpha,$$

$$\alpha = 1 + 1 / (0,0081Re_D^{0,8} - 0,11);$$

оно найдено при помощи экстраполяции

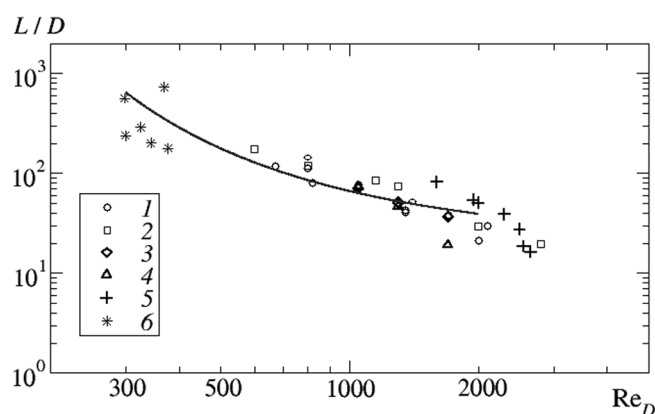


Рис. 5. Теоретическая (линия) и экспериментальная (символы) зависимости расстояния, на котором происходит турбулизация струи, от построенного для D числа Рейнольдса. Использованы экспериментальные данные работ [6, 9], теоретическая кривая получена в настоящей работе. В работе [6] диаметр подводящей трубки $D = 0,32$ мм (символы 6). Условия эксперимента в работе [9]: $D = 0,5$ мм (символы 1, 2); 1,0 мм (3, 4); 3,5 мм (5); измерения пульсаций скорости проведены термоанемометром (2, 4) и визуально (1, 3, 5)

функции $-k_{im}(Re)$ на более высокие значения числа Рейнольдса Re .

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов дает хорошее количественное согласие, несмотря на гораздо более сложные (по сравнению с моделью) процессы турбулизации в действительности, включающей этап нелинейного роста возмущения. Важно отметить, что при значении $Re_D > 2000$ в вытекающем потоке из трубы уже наблюдались турбулентные пульсации (согласно информации, полученной от В.В. Леманова), что ограничивает область сравнения теоретических и экспериментальных данных до значений $Re_D < 2000$.

Заключение

В данной работе рассмотрена линейная задача устойчивости для затопленной струи Ландау – Сквайра. Показано, что амплитуда собственных возмущений изменяется в пространстве степенным образом как функция сферического радиуса R , отсчитываемого от источника движения.

Получена задача на собственные значения, которая решается численно. Найдены неустойчивые возмущения для первых двух азимутальных волновых чисел ($m = 0$ и 1); при этом соответствующие критические

значения числа Рейнольдса, построенного по среднерасходной скорости с параболическим распределением внутри подводящей трубы и ее диаметру, составили

$$Re_D^{m=0} = 13,98;$$

$$Re_D^{m=1} = 27,10,$$

соответственно.

Показано, что инкремент роста синусоидальных возмущений становится больше при значениях $Re_D > 31$, т. е. больше, чем у осесимметричных возмущений.

Предложен модельный критерий ламинарно-турбулентного перехода в дальней области струи, который основан на том, что отношение амплитуды скорости возмущения к скорости основного потока меняется в пространстве как степенная функция от R ; при этом инкремент роста известен из решения сформулированной спектральной задачи.

Впервые получено хорошее согласие между результатами линейной теории устойчивости и экспериментальными данными при значениях $Re_D < 2000$ для величин координаты ламинарно-турбулентного перехода как функции числа Рейнольдса.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 14-19-01685.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Joseph D.D. Stability of fluid motions. Vol. I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1976. 282 p.
2. Drazin P., Reid W. Hydrodynamic stability. Cambridge: Cambridge University Press, 1981. 539 p.
3. Schmid P.J., Henningson D.S. Stability and transition in shear flows. (Applied Mathematical Sciences. Vol. 142). Berlin: Springer, 2001. 558 p.
4. Batchelor G.K., Gill A.E. Analysis of the stability of axisymmetric jets // Journal of Fluid Mechanics. 1962. Vol. 14. No. 4. Pp. 529–551.
5. Viilu A. An experimental determination of the minimum Reynolds number for instability in a free jet // Journal of Applied Mechanics. 1962. Vol. 29. No. 3. Pp. 506–508.
6. Reynolds A.J. Observations of a liquid-into-liquid jet // Journal of Fluid Mechanics. 1962. Vol. 14. No. 4. Pp. 552–556.
7. Козлов Г.В., Грек Г.Р., Сорокин А.М., Литвиненко Ю.А. Влияние начальных условий на срезе сопла на структуру круглой струи // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15. № 1. С. 59–73.
8. Козлов В.В., Грек Г.Р., Козлов Г.В., Литвиненко М.В. Дозвуковая круглая и плоская макро- и микроструи в поперечном акустическом поле // Вестник НГУ. Сер. Физика. 2010. Т. 5. № 2. С. 28–42.
9. Леманов В.В., Терехов В.И., Шаров К.А., Шумейко А.А. Экспериментальное исследование затопленных струй при низких числах Рейнольдса // Письма в Журнал технической физики. 2013. Т. 39. № 9. С. 34–40.
10. Tatsumi T., Kakutani T. The stability of a two-dimensional laminar jet // Journal of Fluid Mechanics. 1958. Vol. 4. No. 3. Pp. 261–275.
11. Ling Chi-Hai., Reynolds W.C. Non-parallel flow corrections for the stability of shear flows // Journal of Fluid Mechanics. 1973. Vol. 59. No. 3. Pp. 571–591.
12. Garg V.K. Spatial stability of the non-parallel

bickley jet // Journal of Fluid Mechanics. 1981. Vol. 102. Pp. 127–140.

13. **Bickley W.G.** The plane jet // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1937. Vol. 23. No. 156. Pp. 727–731.

14. **Tam K.K.** Linear stability of the non-parallel Bickley jet // Canadian Applied Mathematics Quarterly. 1995. Vol. 3. No. 1. Pp. 99–110.

15. **McAlpine A., Drazin P.G.** On the spatio-temporal development of small perturbations of Jeffery – Hamel flows // Fluid Dynamics Research. 1998. Vol. 22. No. 3. Pp. 123–138.

16. **Лихачёв О.А.** Анализ устойчивости автотомодельной круглой струи с учетом эффектов непараллельности // Прикладная механика и техническая физика. 1990. № 4. С. 118–124.

17. **Shtern V., Hussain F.** Effect of deceleration on jet instability // Journal of Fluid Mechanics. 2003. Vol. 480. Pp. 283–309.

18. **Garnaud X., Lesshafft L., Schmid P.J., Huerre P.** Modal and transient dynamics of jet flows // Physics of Fluids. 2013. Vol. 25. No. 4. P. 044103.

19. **Lesshafft L.** Artificial eigenmodes in truncated flow domains // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2018. Vol. 32. No. 3. Pp. 245–262.

20. **Слѣзкин Н.А.** Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // Ученые записки МГУ. 1934. Вып. 2. С. 89–90.

21. **Ландау Л.Д.** Об одном новом точном решении уравнений Навье – Стокса // Доклады АН СССР. 1944. Т. 43. № 7. С. 299–301.

22. **Squire H.B.** The round laminar jet // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1951. Vol. 4. No. 3. Pp. 321–329.

23. **Andrade E.N. da C., Tsien L.C.** The velocity-distribution in a liquid-into-liquid jet // Proceedings of the Physical Society. 1937. Vol. 49. No. 4. Pp. 381–391.

24. **Rankin G.W., Sridhar K., Arulraja M., Kumar K.R.** An experimental investigation of laminar axisymmetric submerged jets // Journal of Fluid Mechanics. 1983. Vol. 133. Pp. 217–231.

25. **Boersma B.J., Brethouwer G., Nieuwstadt F.T.M.** A numerical investigation on the effect of the inflow conditions on the self-similar region of a round jet // Physics of Fluids. 1998. Vol. 10. No. 4. Pp. 899–909.

26. **Шапеев А.В.** Нестационарное автотомодельное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 1. С. 41–46.

27. **Шапеев А.В.** Исследование смешанной спектрально-разностной аппроксимации на примере задачи о вязком течении в диффузоре // Сибирский журнал вычислительной математики. 2005. Т. 8. № 2. С. 149–162.

28. **Sozou C., Pickering W.M.** The round laminar jet: the development of the flow field // Journal of Fluid Mechanics. 1977. Vol. 80. No. 4. Pp. 673–683.

29. **Sozou C.** Development of the flow field of a point force in an infinite fluid // Journal of Fluid Mechanics. 1979. Vol. 91. No. 3. Pp. 541–546.

30. **Cantwell B.J.** Transition in the axisymmetric jet // Journal of Fluid Mechanics. 1981. Vol. 104. Pp. 369–386.

31. **Мулладжанов Р.И.** Затопленные струйные МГД течения. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН. Новосибирск, 2012. 108 с.

32. **Shtern V., Hussain F.** Instabilities of conical flows causing steady bifurcations // Journal of Fluid Mechanics. 1998. Vol. 366. Pp. 33–85.

33. **Mullyadzhyanov R.I., Yavorsky N.I.** On the self-similar exact MHD jet solution // Journal of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 746. Pp. 5–30.

34. **Morris P.J.** The spatial viscous instability of axisymmetric jets // Journal of Fluid Mechanics. 1976. Vol. 77. No. 3. Pp. 511–529.

Статья поступила в редакцию 23.03.2018, принята к публикации 23.05.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

МУЛЛЯДЖАНОВ Рустам Илхамович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физических основ энергетических технологий Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1.
rustammul@gmail.com

ЯВОРСКИЙ Николай Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1.
nick@itp.nsc.ru

REFERENCES

- [1] **D.D. Joseph**, Stability of fluid motions, Vol. I. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [2] **P. Drazin, W. Reid**, Hydrodynamic stability. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [3] **P.J. Schmid, D.S. Henningson**, Stability and transition in shear flows, Applied Mathematical Sciences, Springer, Berlin, 142 (2001).
- [4] **G.K. Batchelor, A.E. Gill**, Analysis of the stability of axisymmetric jets, Journal of Fluid Mechanics. 14 (4) (1962) 529–551.
- [5] **A. Viilu**, An experimental determination of the minimum Reynolds number for instability in a free jet, Journal of Applied Mechanics. 29 (3) (1962) 506–508.
- [6] **A.J. Reynolds**, Observations of a liquid-into-liquid jet, Journal of Fluid Mechanics. 14 (4) (1962) 552–556.
- [7] **G.V. Kozlov, G.R. Grek, A.M. Sorokin, Yu.A. Litvinenko**, Influence of initial conditions at the nozzle exit on the structure of round jet, Thermophysics and Aeromechanics. 15 (1) (2008) 55–68.
- [8] **V.V. Kozlov, G.R. Grek, G.V. Kozlov, M.V. Litvinenko**, Subsonic round and plane jets in the transversal acoustic field, Vestnik NGU. Ser. Physics. 5(2) (2010) 28–42.
- [9] **V.V. Lemanov, V.I. Terekhov, K.A. Sharov, A.A. Shumeyko**, An experimental study of submerged jets at low Reynolds numbers, Technical Physics Letters. 39 (5) (2013) 421–423.
- [10] **T. Tatsumi, T. Kakutani**, The stability of a two-dimensional laminar jet, Journal of Fluid Mechanics. 4 (3) (1958) 261–275.
- [11] **Chi-Hai Ling, W.C. Reynolds**, Non-parallel flow corrections for the stability of shear flows, Journal of Fluid Mechanics. 59 (3) (1973) 571–591.
- [12] **V.K. Garg**, Spatial stability of the non-parallel Bickley jet, Journal of Fluid Mechanics. 102 (1981) 127–140.
- [13] **W.G. Bickley**, The plane jet, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 23 (156) (1937) 727–731.
- [14] **K.K. Tam**, Linear stability of the non-parallel Bickley jet, Canadian Applied Mathematics Quarterly. 3 (1) (1995) 99–110.
- [15] **A. McAlpine, P.G. Drazin**, On the spatio-temporal development of small perturbations of Jeffery–Hamel flows, Fluid Dynamics Research. 22 (4) (1998) 123–138.
- [16] **O.A. Likhachev**, Analysis of stability in a self-similar circular jet with consideration of the nonparallel effect, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 31 (4) (1990) 621–626.
- [17] **V. Shtern, F. Hussain**, Effect of deceleration on jet instability, Journal of Fluid Mechanics. 480 (2003) 283–309.
- [18] **X. Garnaud, L. Lesshafft, P.J. Schmid, P. Huerre**, Modal and transient dynamics of jet flows, Physics of Fluids. 25 (4) (2013) 044103.
- [19] **L. Lesshafft**, Artificial eigenmodes in truncated flow domains, Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 32 (3) (2018) 245–262.
- [20] **N.A. Slyozkin**, Ob odnom sluchaye integriruyemosti polnykh differentsialnykh uravneniy dvizheniya vyazkoy zhidkosti [On a case of integrability of the complete differential equations of the motion of viscous fluid], Uchenyye zapiski MGU. (2) (1934) 89–90.
- [21] **L.D. Landau**, Ob odnom novom tochnom reshenii uravneniy Navye –Stoksa [On an innovative exact solution to the Navier – Stokes equations], Doklady USSR AS. 43 (7) (1944) 299–301.
- [22] **H.B. Squire**, The round laminar jet, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 4 (3) (1951) 321–329.
- [23] **E.N. Andrade da C., L.C. Tsien**, The velocity-distribution in a liquid-into-liquid jet, Proceedings of the Physical Society. 49 (4) (1937) 381–391.
- [24] **G.W. Rankin, K. Sridhar, M. Arulraja, K.R. Kumar**, An experimental investigation of laminar axisymmetric submerged jets, Journal of Fluid Mechanics. 133 (1983) 217–231.
- [25] **B.J. Boersma, G. Brethouwer, F.T.M. Nieuwstadt**, A numerical investigation on the effect of the inflow conditions on the self-similar region of a round jet, Physics of Fluids. 10 (4) (1998) 899–909.
- [26] **A.V. Shapeev**, Unsteady self-similar flow of a viscous incompressible fluid in a plane divergent channel, Fluid Dynamics. 39 (1) (2004) 36 –41.
- [27] **A.V. Shapeev**, Issledovaniye smeshannoy spektralno-raznostnoy approksimatsii na primere zadachi o vyazkom techenii v diffuzore [Studies in the mixed spectral-difference approximation illustrated by the example of the problem on the viscous flow in a diffuser], Numerical Analysis and Applications. 8 (2) (2005) 149–162.
- [28] **C. Sozou, W.M. Pickering**, The round laminar jet: the development of the flow field, Journal of Fluid Mechanics. 80 (4) (1977) 673–683.
- [29] **C. Sozou**, Development of the flow field of a point force in an infinite fluid, Journal of Fluid Mechanics. 91 (3) (1979) 541–546.



[30] **B.J. Cantwell**, Transition in the axisymmetric jet, *Journal of Fluid Mechanics*. 104 (1981) 369–386.

[31] **R.I. Mullyadzhанov**, *Zatoplennyye struynnye MGD techeniya [Submerged MHD jet flows]*, Thesis for Ph.D., Kutateladze Institute of Thermal Physics, SO RAS, Russian Federation, 2012.

[32] **V. Shtern, F. Hussain**, Instabilities of

conical flows causing steady bifurcations, *Journal of Fluid Mechanics*. 366 (1998) 33–85.

[33] **R.I. Mullyadzhанov, N.I. Yavorsky**, On the self-similar exact MHD jet solution, *Journal of Fluid Mechanics*. 746 (2014) 5–30.

[34] **P.J. Morris**, The spatial viscous instability of axisymmetric jets, *Journal of Fluid Mechanics*. 77 (3) (1976) 511–529.

Received 23.03.2018, accepted 23.05.2018.

THE AUTHORS

MULLYADZHANOV Rustam I.

Kutateladze Institute of Thermal Physics

1 Acad. Lavrentiev Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation
rustammul@gmail.com

YAVORSKY Nikolay I.

Kutateladze Institute of Thermal Physics

1 Acad. Lavrentiev Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation
nick@itp.nsc.ru