

DOI: 10.18721/JPM.11309

УДК 539.3

КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ ОСТРОГО ВЫРЕЗА В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В.В. Тихомиров

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Рассмотрены критерии хрупкого разрушения острого выреза при его антиплоском нагружении сосредоточенными силами: *а)* максимального среднего напряжения, *б)* средней плотности энергии деформации, *в)* подход, основанный на совместном использовании силового и энергетического критериев. Найдены оценки разрушающих нагрузок на основе точных решений и с использованием асимптотик напряжений вблизи вершины выреза. Проведен сравнительный анализ разрушающих нагрузок, найденных с помощью указанных критериев. Для несимметричного нагружения определен начальный угол распространения трещины из вершины выреза. Показано, что при вычислении этого угла применение асимптотик напряжений приводит к значительным погрешностям и требует учета регулярных слагаемых в представлениях напряжений.

Ключевые слова: антиплоская деформация, острый вырез, критерий разрушения, среднее напряжение, энергия деформации

Ссылка при цитировании: Тихомиров В.В. Критерии разрушения острого выреза в условиях антиплоской деформации // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 99–107. DOI: 10.18721/JPM.11309

SHARP V-NOTCH FRACTURE CRITERIA UNDER ANTIPLANE DEFORMATION

V.V. Tikhomirov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The criteria for brittle fracture of a sharp V-notch when it is loaded with antiplane concentrated forces have been considered: a criterion for the maximum average stress, a criterion for the average energy density of deformation, and an approach based on the joint use of the force and energy criteria. Failure loads estimates on the basis of the exact solutions and using asymptotics of stresses near the V-notch tip were found. A comparative analysis of the failure loads obtained through those criteria was carried out. For the asymmetric loading, the initial angle of the crack propagation from the V-notch tip was determined. In the calculation of this angle, the application of the stress asymptotics was shown to result in significant errors and to require the consideration of regular terms in the stress representations.

Key words: antiplane deformation, sharp V-notch, fracture criterion, average stress, deformation energy

Citation: V.V. Tikhomirov, Sharp V-notch fracture criteria under antiplane deformation, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 11 (3) (2018) 99–107. DOI: 10.18721/JPM.11309

Введение

Вершины острых вырезов в упругих телах являются точками сингулярности полей напряжений. При определенных условиях из этих особых точек могут развиваться трещины, приводящие к разрушению упругих структур. Это обстоятельство пробуждает интерес к изучению напряженно-деформированного состояния тел с вырезами, а также к разработке критериев разрушения и экспериментального их подтверждения.

Хотя плоские трещины, для которых известны критерии разрушения, восходящие к А.А. Гриффитсу и Дж. Ирвину, относятся к частным случаям вырезов, для последних эти критерии непосредственно не применимы. В связи с этим за последние десятилетия предложено несколько других критериев разрушения структурных элементов с острыми вырезами:

силовой [1 – 5];

энергетический [6 – 10];

сформулированный в рамках так называемой финитной механики разрушения и основанный на совместном применении силового и энергетического условий [11, 12].

В подавляющем числе работ применение этих критериев проводилось в рамках плоской задачи для структур, имеющих конечные или полубесконечные вырезы. При этом использование указанных критериев базировалось на асимптотических представлениях напряжений вблизи концентраторов напряжений. Было показано, что критические значения параметров разрушения, например предельных нагрузок, можно выразить через макроскопические характеристики материалов, такие как предел прочности на растяжение и вязкость разрушения.

В последние годы появились работы, в которых оценивается, как влияет учет несингулярных членов в разложениях напряжений в окрестности вершины выреза на такие параметры, как обобщенный ко-

эффициент интенсивности [13] и на угол инициализации трещины [14]. Результаты этих работ показывают, что учет первого несингулярного члена в разложении Вильямса существенно влияет на отмеченные параметры разрушения.

Что касается антиплоских задач, относящихся к рассматриваемой тематике, то количество работ в этом направлении весьма ограничено [8, 15, 16]. При этом сравнительный анализ различных критериев разрушения клиновидных областей в отмеченных публикациях не проводился.

Основная цель настоящей статьи состоит в распространении критериев разрушения, разработанных для плоских задач, на случай антиплоской деформации тел с вырезами и в их сравнительном анализе при определении предельных нагрузок.

Поскольку при антиплоском нагружении упругое решение для однородной клиновидной области удастся получить в замкнутой форме в виде явных представлений для напряжений и перемещений, то появляется возможность оценить точность вычисления разрушающей нагрузки при использовании асимптотик напряжений в вершине выреза.

Функции Грина для острого выреза

Рассмотрим антиплоскую деформацию однородной изотропной клиновидной области с углом раствора 2α ($\pi/2 < \alpha \leq \pi$). Тогда вырез определяется углом $\beta \in [0, \pi)$. На стороне выреза $\theta = \alpha$ на расстоянии r_0 от вершины приложена сосредоточенная сила $2T$, выходящая из плоскости. Общую задачу о нахождении напряженно-деформированного состояния плоскости с вырезом в силу ее линейности представим в виде суперпозиции двух задач:

1) с симметричным нагружением граней выреза, когда

$$\tau_{0z}(r, \alpha) = \tau_{0z}(r, -\alpha) = T\delta(r - r_0), \quad (1)$$

2) с антисимметричным нагружением, при котором

$$\tau_{\theta z}(r, \alpha) = -\tau_{\theta z}(r, -\alpha) = T\delta(r - r_0) \quad (2)$$

($\delta(r - r_0)$ – дельта-функция Дирака).

Применяем далее к гармоническому уравнению равновесия интегральное преобразование Меллина и удовлетворяем граничным условиям (1) и (2); кроме того, используем теорему о вычетах. В результате получим следующие представления для напряжений;

в задаче 1:

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = \frac{K_3^N}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda}} \frac{1 + \rho^2}{1 + 2\rho^2 \cos 2\lambda\theta + \rho^4} \cos \lambda\theta, \quad (3)$$

$$\tau_{rz}(r, \theta) = \frac{K_3^N}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda}} \frac{1 - \rho^2}{1 + 2\rho^2 \cos 2\lambda\theta + \rho^4} \sin \lambda\theta;$$

в задаче 2:

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = \frac{K_3^N}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda}} \frac{\rho}{1 + 2\rho^2 \cos 2\lambda\theta + \rho^4} \sin 2\lambda\theta; \quad (4)$$

$$\tau_{rz}(r, \theta) = -\frac{K_3^N}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda}} \frac{\rho(\rho^2 + \cos 2\lambda\theta)}{1 + 2\rho^2 \cos 2\lambda\theta + \rho^4};$$

$$\rho = (r/r_0)^\lambda.$$

Здесь $\lambda = \pi/(2\alpha)$, причем $\lambda = 1$ в случае полуплоскости ($\alpha = \pi/2$) и $\lambda = 1/2$ в случае полубесконечной трещины в неограниченной плоскости ($\alpha = \pi$).

Величина K_3^N в соотношениях (3) представляет собой обобщенный коэффициент интенсивности напряжений (ОКИН), определяемый формулой

$$K_3^N = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi}r^{1-\lambda} \tau_{\theta z}(r, 0) = \frac{\sqrt{2\pi}T}{\alpha r_0^\lambda}. \quad (5)$$

При $\alpha = \pi$ ОКИН совпадает с коэффициентом интенсивности напряжений (КИН) в вершине полубесконечной трещины:

$$K_3^N(\pi) = K_3 = T \sqrt{\frac{2}{\pi r_0}}. \quad (6)$$

Когда сосредоточенные силы принимают критические значения, равные T_c , формулы (5) и (6) определяют критические коэффициенты интенсивности

$$K_{3c}^N = \frac{\sqrt{2\pi}T_c}{\alpha r_0^\lambda}, \quad K_{3c} = T_c \sqrt{\frac{2}{\pi r_0}}. \quad (7)$$

Следует подчеркнуть, что критический

коэффициент интенсивности напряжений в вершине выреза K_{3c}^N , в отличие от константы вязкости разрушения K_{3c} , не является константой материала, поскольку он зависит от угла α . Необходимо также отметить, что в задаче 1 напряжения (3) в вершине выреза имеют степенную особенность, а в задаче 2 напряжения (4) особенности не имеют. Асимптотики напряжений (3) при $r \rightarrow 0$ определяются формулами

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = \frac{K_3^N}{\sqrt{2\pi}} r^{1-\lambda} \cos \lambda\theta, \quad (8)$$

$$\tau_{rz}(r, \theta) = \frac{K_3^N}{\sqrt{2\pi}} r^{1-\lambda} \sin \lambda\theta.$$

Заметим, что формулы (3) для напряжений согласуются с результатами, представленными в работе [17].

Суммируя решения (3) и (4), получаем напряжения в задаче о действии сосредоточенной силы $2T$ на грани выреза $\theta = \alpha$:

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = \frac{K_3^N}{\sqrt{2\pi}} r^{1-\lambda} \frac{\cos \lambda\theta}{1 - 2\rho \sin \lambda\theta + \rho^2}, \quad (9)$$

$$\tau_{rz}(r, \theta) = \frac{K_3^N}{\sqrt{2\pi}} r^{1-\lambda} \frac{\sin \lambda\theta - \rho}{1 - 2\rho \sin \lambda\theta + \rho^2}.$$

Очевидно, что напряжения (9) при $r \rightarrow 0$ имеют асимптотики (8).

Критерии разрушения острого выреза

Применение критериев разрушения рассмотрим на примере выреза с симметрично нагруженными гранями. В этом случае напряжение $\tau_{\theta z}$ в силу симметрии достигает максимального значения на луче $\theta = 0$ и, следовательно, распространение трещины из вершины выреза будет происходить вдоль этого луча.

Силовой критерий. Аналогично допущениям, принятым в работах [1, 2], будем считать, что разрушение выреза начинается, когда максимальное среднее напряжение, вычисленное на некотором расстоянии d от его вершины, достигает критического значения, равного пределу прочности материала на сдвиг τ_c :

$$\bar{\tau} = \frac{1}{d} \int_0^d \max_{-\alpha < \theta < \alpha} \tau_{\theta z}(r, \theta) dr = \tau_c. \quad (10)$$

Подставим в выражение (10) напряжение τ_{0z} , найденное по формуле (3) при $\theta = 0$; получаем следующее равенство:

$$\frac{K_{3c}^N(\alpha)r_0^\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda d}} \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{r_0}\right)^\lambda = \tau_c. \quad (11)$$

Оно справедливо при любом значении угла $\alpha \in (\pi/2, \pi]$. Определим параметр d для угла $\alpha = \pi$, т. е. в случае трещины, когда $\lambda = 1/2$, а $K_{3c}^N(\pi) = K_{3c}$, т. е. вязкости разрушения по моде III. Тогда из условия (11) получаем следующее уравнение для определения относительного расстояния $x = d/r_0$:

$$x = \gamma \operatorname{arctg}\sqrt{x}. \quad (12)$$

Здесь введен безразмерный параметр

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi r_0}} \frac{K_{3c}}{\tau_c}, \quad (13)$$

аналог которого использовался для случая плоской задачи в работе [12], где вместо расстояния r_0 до точки приложения нагрузки применялся другой линейный размер – глубина выреза. Этот параметр в статье [12] был назван параметром, или числом хрупкости материала.

Оценим величину γ на примере такого хрупкого материала, как графит. Вязкость разрушения графита по моде III, согласно работе [18], имеет значение $K_{3c} = 0,415 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. Учитывая, что $\tau_c = \sqrt{3}\sigma_c$ (σ_c – предел прочности на растяжение, принимающий для графита значение 20 МПа [19]), получаем, согласно формуле (13), $\gamma = 0,0287/\sqrt{r_0}$. Отсюда, например при $r_0 = 0,01 \text{ м}$, имеем значение $\gamma = 0,287$.

Используя критериальное соотношение (11) и представления (7), получаем оценку для отношения критических сил в случае выреза и трещины:

$$\frac{T_c^N}{T_c} = \frac{x}{\gamma \operatorname{arctg}(x^\lambda)}. \quad (14)$$

При $\gamma \ll 1$ корень уравнения (12) может быть представлен в виде

$$x = \gamma^2 + O(\gamma^3)$$

и, следовательно, асимптотика относительной критической нагрузки (14) будет определяться формулой

$$\frac{T_c^N}{T_c} = \gamma^{1-2\lambda}. \quad (15)$$

Поскольку при любом значении угла α из интервала $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ величина λ лежит в диапазоне $1/2 \leq \lambda < 1$, то справедливы неравенства $-1 < 1 - 2\lambda \leq 0$. Тогда из формулы (15) вытекает, что для разрушения острого выреза при малых значениях параметра γ необходимо приложить большие по величине силы, по сравнению с силами, требующимися для распространения трещины. Иными словами, трещину, рассматриваемую как предельный случай выреза при $\alpha \rightarrow \pi$, можно считать самым опасным из вырезов. Этот вывод качественно согласуется с результатом, полученным при одноосном растяжении выреза в работе [12].

Отметим, что, если в критерии разрушения (10) использовать только сингулярные члены разложения напряжений (3), т. е. асимптотики (8), то для предельной нагрузки также получим равенство (15). Таким образом, при не слишком малых расстояниях r_0 от вершины выреза до точек приложения сил, оценки разрушающей нагрузки, построенные на основе точного и асимптотического решений, совпадают.

Энергетический критерий. Разрушение выреза путем образования трещины начнется, когда средняя плотность энергии деформации, вычисленная в конечном объеме радиуса R с центром в вершине выреза, достигнет критической величины Π_c [6]:

$$\frac{1}{2\mu\alpha R^2} \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} (\tau_{rz}^2 + \tau_{0z}^2) r dr d\theta = \Pi_c, \quad (16)$$

где μ – модуль сдвига материала.

Радиус контрольного объема R зависит от свойств материала.

Критическое значение средней плотности энергии деформации в предположении, что оно не зависит от угла раствора выреза, можно выразить через предел прочности материала на сдвиг τ_c :

$$\Pi_c = \tau_c^2 / (2\mu).$$

Тогда, используя представления для напряжений (3) для критического состояния материала и вычисляя интегралы в критерии (16), придем к равенству

$$\frac{(K_{3c}^N)^2 r_0^{2\lambda}}{8\lambda^2 \alpha R^2} \ln \frac{1 + (R/r_0)^{2\lambda}}{1 - (R/r_0)^{2\lambda}} = \tau_c^2. \quad (17)$$

В предельном случае, когда вырез вырождается в трещину, т. е. при $\alpha = \pi$ и, значит, когда $K_{3c}^N(\pi) = K_{3c}$, равенство (17) дает уравнение для определения радиуса контрольного объема:

$$y = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\ln \frac{1+y}{1-y}}, \quad y = \frac{R}{r_0}. \quad (18)$$

С учетом равенства (7) и уравнения (18) условие (17) приводит к следующей оценке разрушающей нагрузки для выреза:

$$\frac{T_c^N}{T_c} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{y}{\gamma} \sqrt{\ln \frac{1+y^{2\lambda}}{1-y^{2\lambda}}}. \quad (19)$$

Из формулы (19) получаем при $y = R/r_0 \ll 1$, что

$$\frac{T_c^N}{T_c} = \frac{1}{f(\lambda)} \gamma^{1-2\lambda}, \quad (20)$$

причем функция $f(\lambda) = 2^{1-\lambda} \sqrt{\lambda} \geq 1$ для любого $\lambda \in [0,5; 1,0]$.

Тогда, сравнивая оценки (15) и (20), заключаем, что предельная нагрузка, полученная на основе силового критерия, превосходит предельную нагрузку, найденную с помощью критерия средней плотности энергии, при любом угле $\alpha \in (\pi/2, \pi]$.

Заметим, что применение энергетического критерия (16) при использовании только асимптотических представлений (8) также приводит к оценке вида (20).

Критерий, базирующийся на финитной механике разрушения [12]. В данном случае предполагается, что при конечном продвижении Δ трещины из вершины выреза должны одновременно выполняться два условия: силовое и энергетическое (для напряжений и энергетического баланса):

$$\int_0^{\Delta} \tau_{\theta z}(r, 0) dr \geq \tau_c \Delta, \quad (21)$$

$$\int_0^{\Delta} K_3^2(\varepsilon) d\varepsilon \geq K_{3c}^2 \Delta,$$

где $K_3(\varepsilon)$ — коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины длины ε .

Таким образом, для использования это-

го критерия необходимо, кроме поля напряжений (3), иметь еще решение задачи о трещине конечной длины ε , исходящей из вершины выреза (рис. 1).

Применяем теперь интегральное преобразование Меллина к гармоническому уравнению равновесия, условию (1) на грани $\theta = \alpha$ и к следующим смешанным условиям на луче $\theta = 0$:

$$\tau_{\theta z}(r, +0) = 0 \quad (0 \leq r \leq \varepsilon),$$

$$w(r, +0) = 0 \quad (\varepsilon \leq r < \infty).$$

В результате приходим к уравнению Винера — Хопфа:

$$\text{ctg}(p\alpha) T_-(p) + \frac{\mu}{\varepsilon} U_+(p) = \frac{Tr_0^p}{\varepsilon^{p+1} \sin(p\alpha)} \quad (22)$$

$$(p \in L).$$

Здесь p — параметр преобразования Меллина. Трансформанты напряжений $T_-(p)$ и перемещений $U_+(p)$ на луче $\theta = 0$ являются аналитическими функциями в левой и правой (относительно контура L) полуплоскостях.

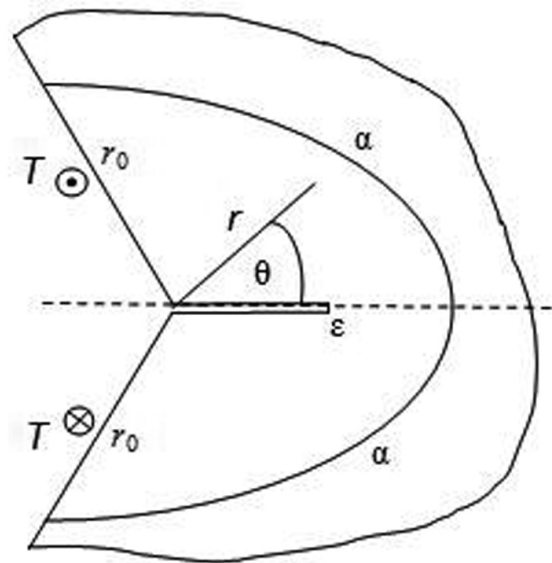


Рис. 1. Острый вырез с симметричной трещиной длиной ε , исходящей из его вершины; 2α — угол раствора клиновидной области; r_0 — расстояние от вершины до точки приложения сосредоточенных сил T , выходящих из плоскости; r, θ — координаты

Используя технику, развитую в работе [20], получим точное решение уравнения (22), которое позволяет выразить КИН в вершине трещины как

$$K_3 = K_3^N \psi(\lambda) \varepsilon^{\lambda-1/2}, \quad (23)$$

где $\psi(\lambda) = \{2\lambda[1 + (\varepsilon/r_0)^{2\lambda}]\}^{-1/2}$.

В результате подстановки напряжения (3) и КИН (23) в критерий (21) (при критическом состоянии выреза) получим равенства

$$K_{3c}^N \frac{r_0^\lambda}{\lambda\sqrt{2\pi}} \operatorname{arctg}(\Delta/r_0)^\lambda = \tau_c \Delta, \quad (24)$$

$$(K_{3c}^N)^2 \frac{r_0^{2\lambda}}{4\lambda^2} \ln[1 + (\Delta/r_0)^{2\lambda}] = K_{3c}^2 \Delta.$$

Отсюда приходим к уравнению, определяющему относительное продвижение трещины $\varsigma = \Delta/r_0$:

$$\varsigma = \gamma^2 \frac{\operatorname{arctg}^2 \varsigma^\lambda}{\ln(1 + \varsigma^{2\lambda})}. \quad (25)$$

С помощью равенств (7) находим из первого уравнения (24) относительную разрушающую нагрузку в виде

$$\frac{T_c^N}{T_c} = \frac{\varsigma}{\gamma \operatorname{arctg} \varsigma^\lambda}. \quad (26)$$

Заметим, что при $\varsigma \ll 1$ уравнение (25) имеет корень $\varsigma \approx \gamma^2$. В этом случае равенство (26) приводит к следующей оценке разрушающей нагрузки:

$$\frac{T_c^N}{T_c} = \gamma^{1-2\lambda},$$

которая совпадает с формулой (15) при использовании силового критерия разрушения.

Угол начального направления трещины при несимметричном нагружении выреза

Для определения начального угла пространства трещины из вершины выреза в случае его несимметричного нагружения воспользуемся, например, силовым критерием, который был предложен в рамках плоской задачи [5]. Инициализация трещины происходит вдоль луча $\theta = \theta_*$, где среднее касательное напряжение принимает максимальное значение:

$$\bar{\tau}_{\theta_z}(\theta) = \frac{1}{d} \int_0^d \max_{-\alpha < \theta < \alpha} \tau_{\theta_z}(r, \theta) dr, \quad (27)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\tau}_{\theta_z}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_*} = 0. \quad (28)$$

Подставляя выражение (9) в формулу (27), получаем для среднего касательного напряжения следующее представление:

$$\bar{\tau}_{\theta_z}(\theta) = \frac{K_3^N r_0^\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda} d} \times \left[\operatorname{arctg} \frac{(d/r_0)^\lambda - \sin \lambda\theta}{\cos \lambda\theta} + \lambda\theta \right]. \quad (29)$$

Отсюда после использования условия (28) находим угол θ_* , определяющий направление начального роста трещины:

$$\theta_* = \frac{1}{\lambda} \arcsin(d/r_0)^\lambda. \quad (30)$$

Заметим, что из критерия разрушения (10) и формул (29) и (30) вытекает следующая оценка разрушающей нагрузки:

$$\frac{T_c^N}{T_c} = \frac{x}{\gamma \arcsin(x^\lambda)},$$

где $x = d/r_0$ является корнем уравнения

$$x = \gamma \arcsin \sqrt{x}.$$

Численные результаты и их обсуждение

На основе трех рассмотренных критериев проведено вычисление разрушающих нагрузок при симметричном нагружении выреза в зависимости от параметра γ и различных углов α . Сравнительный анализ результатов, базирующихся на точном решении задачи (3), показывает, что при малых значениях параметра ($\gamma < 0,1$) все критерии дают близкие результаты и максимальное расхождение не превышает 3%. При этом разрушающая нагрузка, согласно формулам (15) и (20), имеет асимптотическую оценку

$$T_c^N / T_c = O(\gamma^{1-2\lambda}).$$

С увеличением параметра γ относительная предельная нагрузка снижается, а ее значения, определяемые с помощью критериев (10), (16) и (21), расходятся.

Критерий, основанный на финитной механике разрушения, дает наибольшее значение этой нагрузки, а критерий средней плотности энергии деформации обеспечивает оценку нагрузки снизу. Так например, при $\gamma = 0,8$ и вырезе с углом 90° разница в оценках величины T_c^N/T_c на основе этих критериев составляет около 13 %.

Значения разрушающих нагрузок для выреза, найденные с помощью асимптотик напряжений (8), практически совпадают, вплоть до $\gamma = 0,5$, со значениями, вычисленными на основе точного решения (3).

Таким образом, применение асимптотик полей напряжений вблизи вершины выреза для оценки разрушающей нагрузки в рамках антиплоской задачи является вполне допустимым.

При несимметричном нагружении грани выреза начальный угол распространения трещины является величиной, существенно зависящей от регулярных членов в представлении напряжений (9). Использование только асимптотик полей (9) в форме (8) с помощью критерия (27), (28) определяет начальный угол $\theta_*^{as} = 0$. Одна-

ко этот угол, вычисляемый на основе точного решения (9) по формуле (30), может значительно отличаться от величины θ_*^{as} (рис. 2). Отсюда вытекает, что при нахождении направления начального роста трещины из вершины выреза учет несингулярных слагаемых при $r \rightarrow 0$ в формулах для напряжений является обязательным.

Заключение

В представленной статье рассмотрены критерии хрупкого разрушения острого выреза при его антиплоском нагружении сосредоточенными силами: а) максимального среднего напряжения, б) средней плотности энергии деформации, в) подхода, основанного на совместном использовании силового и энергетического критериев.

Показано, что разрушающие нагрузки, получаемые в результате применения различных критериальных соотношений, выражаются через один безразмерный параметр, определяемый константами материала – пределом прочности на сдвиг и вязкостью разрушения по моде III. При этом

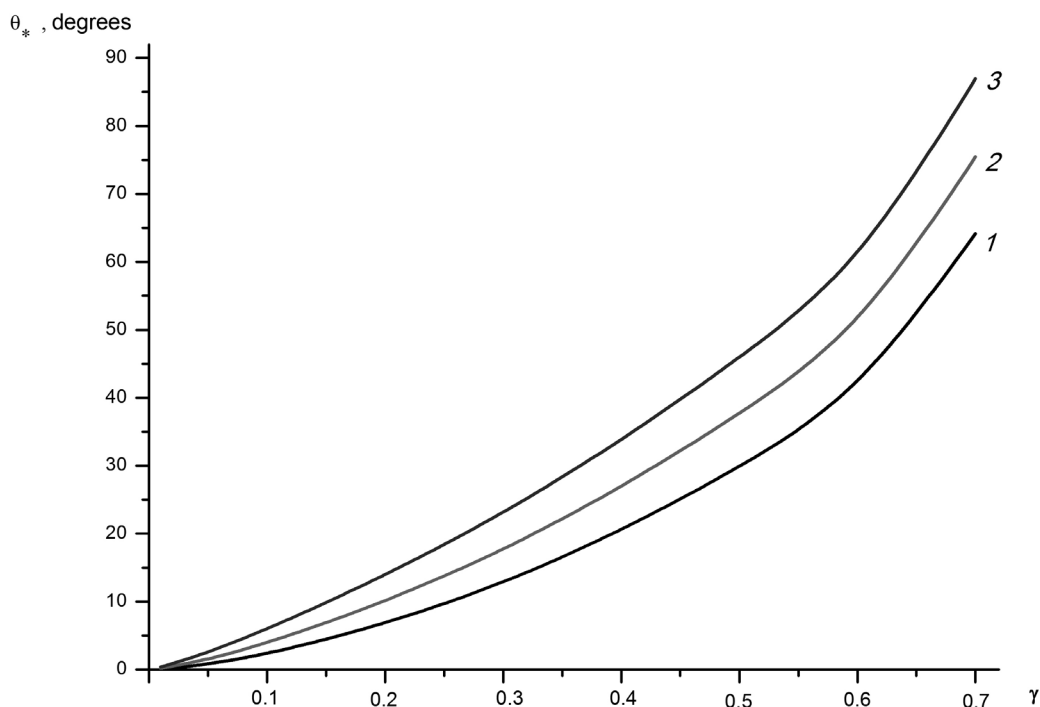


Рис. 2. Зависимости начального угла распространения трещины из вершины выреза от параметра γ при различных углах раствора выреза α , град: 120 (1) 135 (2), 150 (3)

величины предельных нагрузок, найденные с помощью разных подходов, оказываются достаточно близкими.

Однако угол начального распространения трещины из вершины выреза суще-

ственно зависит от точности вычисления напряжений вблизи этой вершины, т. е. расчет этого угла на основе асимптотик напряжений приводит к существенным погрешностям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Новожилов В.В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33. № 2. С. 212–222.
2. **Knesl Z.** A criterion of V-notch stability // Int. J. Fract. 1991. Vol. 48. No. 4. Pp. R79–R83.
3. **Sewerin A.** Brittle fracture criterion for structures with sharp notches // Eng. Fract. Mech. 1994. Vol. 47. No. 5. Pp. 673–681.
4. **Dunn M.L., Suwito W., Cunningham S.J.** Fracture initiation at sharp notches: correlation using critical stress intensities // Int. J. Solids Struct. 1997. Vol. 34. No. 29. Pp. 3873–3883.
5. **Klusak J., Profant T., Kotoul M.** Determination of the threshold values of orthotropic bi-material notches // Proc. Engineering. 2010. Vol. 2. No. 1. Pp. 1635–1642.
6. **Lazzarin P., Zambardi R.** A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches // Int. J. Fract. 2001. Vol. 112. No. 3. Pp. 275–298.
7. **Yosibash Z., Bussiba A., Giland I.** Failure criteria for brittle elastic materials // Int. J. Fract. 2004. Vol. 125. No. 2. Pp. 307–333.
8. **Treifi M., Oyadiji O.** Strain energy approach to compute stress intensity factors for isotropic homogeneous and bi-material V-notches // Int. J. Solids Struct. 2013. Vol. 50. No. 14–15. Pp. 2196–2212.
9. **Lazzarin P., Campagnolo A., Berto F.** A comparison among some recent energy- and stress-based criteria for the fracture assessment of sharp V-notched components under Mode I loading // Theor. Appl. Fract. Mech. 2014. Vol. 71. No. 1. Pp. 21–30.
10. **Campagnolo A., Berto F., Leguillon D.** Fracture assessment of sharp V-notched components under Mode II loading: a comparison among some recent criteria // Theor. Appl. Fract. Mech. 2016. Vol. 85. Part B. Pp. 217–226.
11. **Garsia I.G., Leguillon D.** Mixed-mode crack initiation at a V-notch in presence of an adhesive joint // Int. J. Solids Struct. 2012. Vol. 49. No. 15–16. Pp. 2138–2149.
12. **Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A.** On the most dangerous V-notch // Int. J. Solids Struct. 2010. Vol. 47. No. 7–8. Pp. 887–893.
13. **Ayatollahi M.R., Dehghany M., Nejati M.** Fracture analysis of V-notched components – effects of first non-singular stress term // Int. J. Solids Struct. 2011. Vol. 48. No. 10. Pp. 1579–1589.
14. **Mirsayar M.M., Aliha M.R.M., Samaei A.T.** On fracture initiation angle near bimaterial notches – effects of first non-singular stress term // Eng. Fract. Mech. 2014. Vol. 119. No. 1. Pp. 124–131.
15. **Zappalorto M., Lazzarin P.** A unified approach to the analysis of nonlinear stress and strain fields ahead of mode III-loaded notches and cracks // Int. J. Solids Struct. 2010. Vol. 47. No. 6. Pp. 851–864.
16. **Shi W.** Path-independent integral for the sharp V-notch in longitudinal shear problem // Int. J. Solids Struct. 2011. Vol. 48. No. 3–4. Pp. 567–572.
17. **Chuo C-H., Wei W-B., Liu T.J-C.** The antiplane electro-mechanical field of a piezoelectric wedge under a pair of concentrated forces and free charges // J. Chin. Inst. Eng. 2003. Vol. 26. No. 5. Pp. 575–583.
18. **Aliha M.R.M., Bahmani A., Akhondi S.** Determination of mode III fracture toughness for different materials using a new designed test configuration // Mat. Design. 2015. Vol. 86. Pp. 863–871.
19. **Morrison C.N., Jivkov A.P., Vertyagina Ye., Marrow T.J.** Multi-scale modelling of nuclear graphite tensile strength using the site-bond lattice model // Carbon. 2016. Vol. 100. Pp. 273–282.
20. **Тихомиров В.В.** Трещина моды III, приближающаяся к упругому клиновидному включению // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 2. С. 99–109.

Статья поступила в редакцию 19.03.2018, принята к публикации 20.05.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич – кандидат физико-математических наук, заместитель директора по образовательной деятельности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
victikh@mail.ru

REFERENCES

- [1] **V.V. Novozhilov**, On the necessary and sufficient criterion for brittle strength, *J. Appl. Math. Mech.* 33 (2) (1969) 212–222.
- [2] **Z. Knesl**, A criterion of V-notch stability, *Int. J. Fract.* 48 (4) (1991) R79–R83.
- [3] **A. Sewerin**, Brittle fracture criterion for structures with sharp notches, *Eng. Fract. Mech.* 47 (5) (1994) 673–681.
- [4] **M.L. Dunn, W. Suwito, S.J. Cunningham**, Fracture initiation at sharp notches: Correlation using critical stress intensities, *Int. J. Solids Struct.* 34 (29) (1997) 3873–3883.
- [5] **J. Klusak, T. Profant, M. Kotoul**, Determination of the threshold values of orthotropic bi-material notches, *Proc. Engineering.* 2 (1) (2010) 1635–1642.
- [6] **P. Lazzarin, R. Zambardi**, A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches, *Int. J. Fract.* 112 (3) (2001) 275–298.
- [7] **Z. Yosibash, A. Bussiba, I. Giland**, Failure criteria for brittle elastic materials, *Int. J. Fract.* 125 (2) (2004) 307–333.
- [8] **M. Treffi, O. Oyadiji**, Strain energy approach to compute stress intensity factors for isotropic homogeneous and bi-material V-notches, *Int. J. Solids Struct.* 50 (14–15) (2013) 2196–2212.
- [9] **P. Lazzarin, A. Campagnolo, F. Berto**, A comparison among some recent energy- and stress-based criteria for the fracture assessment of sharp V-notched components under Mode I loading, *Theor. Appl. Fract. Mech.* 71 (1) (2014) 21–30.
- [10] **A. Campagnolo, F. Berto, D. Leguillon**, Fracture assessment of sharp V-notched components under Mode II loading: a comparison among some recent criteria, *Theor. Appl. Fract. Mech.* 85 B (2016) 217–226.
- [11] **I.G. Garsia, D. Leguillon**, Mixed-mode crack initiation at a V-notch in presence of an adhesive joint, *Int. J. Solids Struct.* 49 (15–16) (2012) 2138–2149.
- [12] **A. Carpinteri, P. Cornetti, N. Pugno, A. Sapora**, On the most dangerous V-notch, *Int. J. Solids Struct.* 47 (7–8) (2010) 887–893.
- [13] **M.R. Ayatollahi, M. Dehghany, M. Nejati**, Fracture analysis of V-notched components – effects of first non-singular stress term, *Int. J. Solids Struct.* 48 (10) (2011) 1579–1589.
- [14] **M.M. Mirsayar, M.R.M. Aliha, A.T. Samaei**, On fracture initiation angle near bi-material notches – effects of first non-singular stress term, *Eng. Fract. Mech.* 119 (1) (2014) 124–131.
- [15] **M. Zappalorto, P. Lazzarin**, A unified approach to the analysis of nonlinear stress and strain fields ahead of mode III-loaded notches and cracks, *Int. J. Solids Struct.* 47 (6) (2010) 851–864.
- [16] **W. Shi**, Path-independent integral for the sharp V-notch in longitudinal shear problem, *Int. J. Solids Struct.* 48 (3–4) (2011) 567–572.
- [17] **C-H. Chuo, W-B. Wei, T-J-C. Liu**, The antiplane electro-mechanical field of a piezoelectric wedge under a pair of concentrated forces and free charges, *J. Chin. Inst. Eng.* 26 (5) (2003) 575–583.
- [18] **M.R.M. Aliha, A. Bahmani, S. Akhondi**, Determination of mode III fracture toughness for different materials using a new designed test configuration, *Mat. Design.* 86 (2015) 863–871.
- [19] **C.N. Morrison, A.P. Jivkov, Ye. Vertyagina, T.J. Marrow**, Multi-scale modelling of nuclear graphite tensile strength using the site-bond lattice model, *Carbon.* 100 (2016) 273–282.
- [20] **V.V. Tikhomirov**, Mode III crack approaching to the wedge-shaped elastic inclusion, *St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 10 (2) (2017) 99–109.

Received 19.03.2018, accepted 20.05.2018.

THE AUTHOR

TIKHOMIROV Victor V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
victikh@mail.ru