

DOI: 10.18721/JPM.11303

УДК 517

## СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ КРОККО

**М.Р. Петриченко, Д.Д. Заборова, Е.В. Котов, Т.А. Мусорина**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе предлагается прием построения приближенного решения типичной предельной задачи Крокко, который состоит в замене этой исходной задачи интегральным уравнением. Последнее решено прямым вычислением интеграла с использованием теоремы о среднем. Параметр осреднения исключен интегрированием по параметру в промежутке  $(0, 1)$ . Продемонстрированы расширения способа решения и найдены слабые решения. Для классического случая полученное слабое решение незначительно отличается от точного решения Блазиуса. Приближенное значение постоянной Блазиуса оказывается равным  $1/3$  и отличается от точного  $(0,33206)$  на  $0,3\%$ .

**Ключевые слова:** задача Коши, интегральное уравнение, теорема о среднем, группа преобразований, уединенная волна

**Ссылка при цитировании:** Петриченко М.Р., Заборова Д.Д., Котов Е.В., Мусорина Т.А. Слабые решения предельных задач Крокко // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 27–38. DOI: 10.18721/JPM.11303

## WEAK SOLUTIONS OF THE CROCCO BOUNDARY PROBLEMS

**M.R. Petrichenko, D.D. Zaborova, E.V. Kotov, T.A. Musorina**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

A procedure for designing an approximate solution of the Crocco boundary typical problem has been proposed in the paper. The procedure calls for the change of this initial problem by a nonlinear integral equation. The latter was solved by direct calculation of the integral using the mean-value theorem. The averaging parameter was eliminated by integrating over the parameter in the  $(0, 1)$  interval. Widening the scope of the solution procedure was demonstrated and weak solutions were found. For the classical case, the weak solution was not too different from the Blasius exact one. The approximate value of the Blasius constant turned out to be  $1/3$  and differed from the exact one  $(0.33206)$  by  $0.3\%$ .

**Key words:** Cauchy problem, integral equation, mean value theorem, group of transformations, solitary wave

**Citation:** M.R. Petrichenko, D.D. Zaborova, E.V. Kotov, T.A. Musorina, Weak solutions of the Crocco boundary problems, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 11 (3) (2018) 27–38. DOI: 10.18721/JPM.11303

### Введение

Известно, что предельные задачи Крокко, в основном, связаны с гидродинамическими приложениями, в частности с продольным обтеканием пластины вязким потоком, с нестационарной фильтрацией в однородной и изотропной (скалярной) пористой среде [1 – 3].

Типичная предельная задача Крокко ставится следующим образом [1]:

$$2\varphi \frac{d^2\varphi}{du^2} + u = 0,$$

$$D(\varphi) = (u : 0 \leq u_0 < u < 1), \varphi \in C^{(2)}(D(\varphi)), \quad (1)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=u_0} = \varphi(1) = 0,$$

$$\text{Im}(\varphi) = (0, a), a := \varphi(u_0),$$

причем в классическом случае Блазиуса  $u_0 = 0$ .

В представленном виде задача (1) широко используется в гидродинамике, где переменная  $u$  трактуется как продольная скорость, а распределение  $\varphi$  – как напряжение трения [1].

В задачах теории фильтрации задача (1) возникает при расчете уединенной волны расхода, т. е. при решении предельной задачи для уравнения Буссинеска [2, 3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left( ku \frac{\partial u}{\partial s} \right), \quad (1a)$$

где  $u = u(t, s) \leq 1$  – глубина фильтрационного потока ( $t > 0, s > 0$ );  $k$  – коэффициент фильтрации.

В частном случае

$$u(0, s) - 1 = u(t, 0) = 0.$$

В общем случае

$$k = k(u), \quad c = -k(u) \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^c,$$

где  $c$  – скорость фильтрации.

В классическом случае Буссинеска  $k = 1, c = 1$ . Тогда уравнение Буссинеска имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left( u \frac{\partial u}{\partial s} \right). \quad (16)$$

Наконец, уравнение Крокко возникает в задачах о струйных движениях вязкой

жидкости (свободная конвекция в обогреваемых каналах, свободные затопленные и пристеночные струи и др.) [4, 5].

В отличие от «естественной» постановки прикладных предельных задач, задача (1) удобна тем, что позволяет найти инъективное отображение компакта  $(u_0, 1)$  в компакт

$$(0, a), \varphi : (u_0, 1) \rightarrow (0, a).$$

Выражаясь точнее, утверждаем, что каждая ветвь решения предельной задачи (1) – это 2-диффеоморфизм  $\varphi : (u_0, 1) \rightarrow (0, a)$ .

Решения предельной задачи (1) приведены в работах [6 – 32]. Эти работы распадаются на два класса:

в первом используются, в основном, аналитические методы и в том числе решения, полученные в виде степенных и расщепляющих (плоских) рядов;

во втором доминируют численные решения.

К аналитическим относятся работы (мы их относим к первому классу), использующие методы теории групп преобразований Ли и разложения в степенные и обвертывающие ряды.

Например, уравнение Буссинеска (16) допускает линейное преобразование

$$z = \alpha t \pm \sqrt{\alpha s},$$

и тогда существует решение уравнения Буссинеска в виде уединенной волны расхода:

$$z = u + c_1 - c_2 \ln(u + c_2).$$

В этом решении случай  $c_2 = 0$  отвечает центрированной волне расхода, распространяющейся со скоростью  $\pm \alpha^{1/2}$  либо вверх, либо вниз по течению.

Особое место занимают работы [26 – 31], содержащие аналитический аппарат для построения решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) рассматриваемого типа вблизи сингулярной особенности. В указанных публикациях обращается внимание на то, что свойства аналитической функции определяются в основном ее особенностями, которые невозможно изучать, оставаясь на вещественном интервале. «Выход» в комплексную плоскость автоматически означает



выход (отображение) на риманову поверхность решения [31].

«Точные» решения предельной задачи для уравнения Крокко получаются также при использовании степенных рядов по  $u$ . Но для этих решений неизвестны тауберовские теоремы, а именно — ряды для функции  $\varphi(u)$  оказываются «плохо» сходящимися при  $u \rightarrow 1 - 0$ . Так, в работе [32] продемонстрирована расходимость ряда для  $\varphi(u)$  на внешней границе пограничного слоя ( $u \rightarrow 1 - 0$ ) и бифуркация решения во внешней, струйной части пограничного слоя.

Из приведенного обзора опущены так называемые интегральные методы, в которых вместо уравнений на плотности распределения решаются ОДУ для самих распределений (интегральных соотношений). Эти методы идейно ближе к совершенно иным методам — прямым или вариационным.

Таким образом, на сегодняшний день существует единственная альтернатива численным методам решения уравнений типа Блазиуса, Шази, Крокко — плоские ряды для аналитических решений.

Цель настоящего исследования — построить приближенное решение типичной предельной задачи Крокко с использованием процедуры осреднения.

### Построение решения задачи

В данной работе используется прием построения приближенного решения предельной задачи (1), основанный на замене этой исходной предельной задачи интегральным уравнением, с последующим введением фиктивного параметра и осреднения по этому параметру. Другими словами, вместо точного решения используется распределение (функционал) с плотностью, совпадающей с приближенным решением.

Суть этого приема следующая. Пусть

$$f(u) \in C^{(1)}(0, 1), f(u) \geq 0.$$

Предельная задача Крокко для промежутка  $(0, 1)$  имеет вид

$$2\varphi \frac{d^2\varphi}{du^2} + f(u) = 0, \varphi'(0) = \varphi(1) = 0$$

и допускает формальное понижение порядка:

$$2 \frac{d\varphi}{du} = - \int_0^u \frac{f(v)dv}{\varphi(v)}.$$

Для положительной ветви решения  $\varphi := \varphi^+$  функция  $1 / \varphi(u)$  представляет собой положительное, монотонно убывающее распределение, отображающее промежуток  $u \in (u_0, 1)$  на промежуток  $\varphi \in (0, a)$ , где  $a := \varphi(0)$ .

Тогда, согласно теореме Бонне, справедливо равенство

$$\frac{d\varphi_\theta^2}{du} = - \int_{\theta u}^u f(v)dv, \quad (\#)$$

где  $0 < \theta < 1$  — параметр (правильная дробь).

Пусть в этой формуле  $u = 1$ . В этом случае при  $u \rightarrow 1 - 0$

$$d\varphi_\theta^2 / du = O(1).$$

Это означает, что необходимо выполнение равенств

$$\varphi_\theta(u) = O(\varepsilon^m), \quad d\varphi_\theta / du = O(\varepsilon^{-m}), \\ m = n,$$

где  $m, n$  — положительные параметры.

Интегрируя равенство (#) еще раз, получим:

$$\varphi_\theta^2(u) = \int_u^1 dv \int_{\theta v}^v f(t)dt.$$

Это равенство и есть приближенное  $\theta$ -решение уравнения Крокко (отмечено нижним индексом  $\theta$ ). Данное решение зависит непрерывным образом от дроби (параметра)  $\theta$ , причем ясно, что

$$\varphi_1^2(u) = 0, \varphi_\theta^2(u) = \int_u^1 dv \int_0^u f(t)dt = \\ = \int_0^1 (1-t)f(t)dt - \int_0^u (u-t)f(t)dt > \varphi_\theta^2(u) > 0, \\ \forall \theta \in (0, 1),$$

и вообще  $\partial\varphi / \partial\theta < 0$ .

Исключить параметр  $\theta$  можно, например, осреднением по нему дериватива:

$$\frac{d\varphi^2}{du} := \int_0^1 \frac{d\varphi_\theta^2}{du} d\theta,$$

что приводит к выражению

$$\frac{d\varphi^2}{du} = -1 / u \int_0^u \nu f(\nu) d\nu.$$

Окончательно можем записать следующее приближенное решение предельной задачи (1):

$$\varphi^2(u) = \int_0^1 \nu f(\nu) \ln \frac{1}{\nu} d\nu - \int_0^u \nu f(\nu) \ln \frac{u}{\nu} d\nu. \quad (2)$$

Полученный результат не зависит от порядка интегрирования по параметру  $\theta$  и по аргументу  $u$ . Решение (2) назовем слабым  $\theta$ -решением.

### Свойства решений предельной задачи (1)

В данном разделе мы перечислим свойства решений предельной задачи (1) (доказательства этих свойств опускаются).

1. Предельные условия в задаче (1) можно заменить одноточечными условиями (Коши):

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=u_0} = \varphi(0) - a = 0, \quad (3)$$

причем в начальных условиях (3) параметр  $a$  подбирается так, чтобы  $\varphi(1) = 0$ . Такое наложение условий оправдано в силу непрерывной зависимости  $\varphi$  от параметра  $a$ .

2. Существуют две ветви решения предельной задачи (1) и, соответственно, предельной одноточечной предельной задачи (3):

$$\varphi^+(u) \text{ и } \varphi^-(u)$$

(рис. 1). Эти ветви связаны следующим образом:

$$\varphi^+(u) + \varphi^-(u) = 0, \quad 0 < u < 1,$$

причем

$$0 \leq \varphi^+(u) \leq a, \quad \frac{d\varphi^+}{du} < 0, \quad \frac{d^2\varphi^+}{du^2} < 0;$$

$$a \leq \varphi^-(u) \leq 0, \quad \frac{d\varphi^-}{du} > 0, \quad \frac{d^2\varphi^-}{du^2} > 0.$$

Предельная задача (1) типична, поскольку к ней сводится, например, однородная предельная задача Крокко. Пусть  $u_0 = 0$  и вместо представления (1) рассматривается

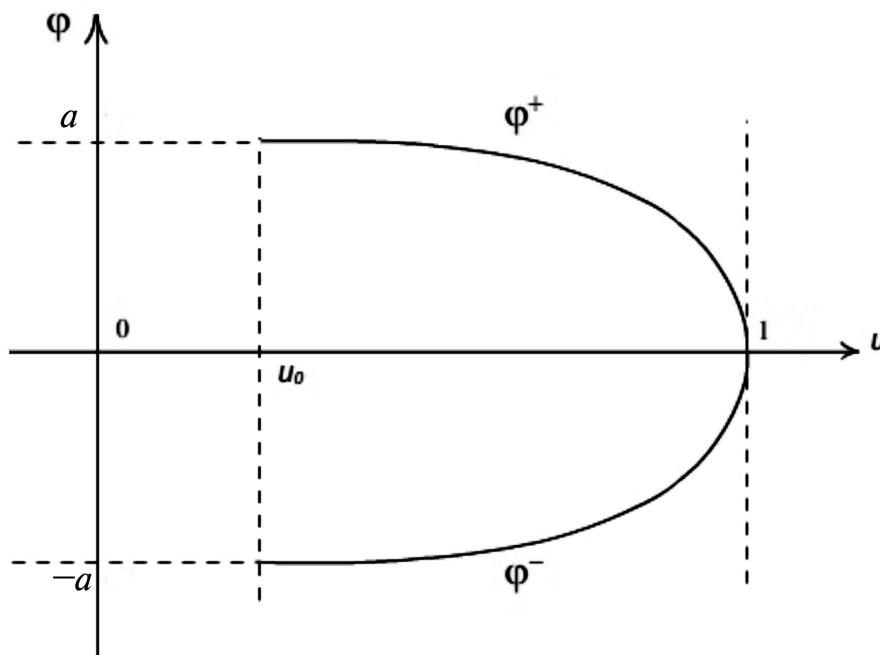


Рис. 1. Решение типичной предельной задачи Крокко: положительная ( $\varphi^+(u)$ ) и отрицательная ( $\varphi^-(u)$ ) монотонные ветви; вертикальными пунктирами показаны границы интервала

однородная предельная задача Крокко:

$$\begin{aligned} 2\varphi \frac{d^2\varphi}{du^2} + u &= 0, \\ \varphi(0) = \varphi(1) &= 0. \end{aligned} \quad (1в)$$

Решение однородной предельной задачи (1в) состоит из двух ветвей:

$$0 \leq \varphi^+(u) \text{ и } \varphi^-(u) \leq 0$$

(положительной и отрицательной), при этом таких, что

$$\varphi^+(u) + \varphi^-(u) = 0$$

для каждого значения  $u$  из промежутка  $0 < u < 1$ .

Существует значение  $u = u^*$  ( $0 < u^* < 1$ ), такое, что  $d\varphi^\pm / du^* = 0$  (согласно теореме Ролля). Поэтому каждая из ветвей решения,  $\varphi^\pm(u)$ , однородной задачи (1), распадается на два решения типичной предельной задачи Крокко (1):

$$\varphi_l^\pm(u), D(\varphi_l^\pm) = (0, u^*);$$

$$\varphi_r^\pm(u), D(\varphi_r^\pm) = (u^*, 1).$$

При этом решения  $\varphi(u) = \varphi_{l,r}^\pm(u)$  положительных и отрицательных типичных предельных задач сопрягаются непрерывно и гладко в точке  $u = u^*$  (рис. 2):

$$\begin{aligned} \varphi_l^\pm(0) &= \left( \frac{d\varphi_l^\pm}{du} \right)_{u=u^*-0} = \\ &= \left( \frac{d\varphi_r^\pm}{du} \right)_{u=u^*+0} = \varphi_r^\pm(1) = 0. \end{aligned}$$

Ветви решения однородной предельной задачи распадаются на решения типичных предельных задач:

$$\begin{aligned} \varphi_l^\pm(u^* - 0) - \varphi_r^\pm(u^* + 0) &= 0, \\ \left( \frac{d^2\varphi^+}{du^2} \right)_{u=u^*} < 0, \left( \frac{d^2\varphi^-}{du^2} \right)_{u=u^*} > 0. \end{aligned} \quad (##)$$

3. Решение предельной задачи (1) – (3) удовлетворяет тождеству

$$\int_{u_0}^1 \left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 du = \frac{1 - u_0^2}{4}. \quad (4)$$

4. Решение предельной задачи (1) – (3) равносильно задаче на минимум положительного функционала (распределения):

$$F(\varphi) = (1/2) \int_{u_0}^1 \left( \left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 + u \ln \frac{a}{\varphi} \right) du > 0.$$

Другими словами, вдоль экстремалей функционала  $F(\varphi)$  выполняется условие  $dF \leq \delta F$ , где  $dF$  – вариация вдоль харак-

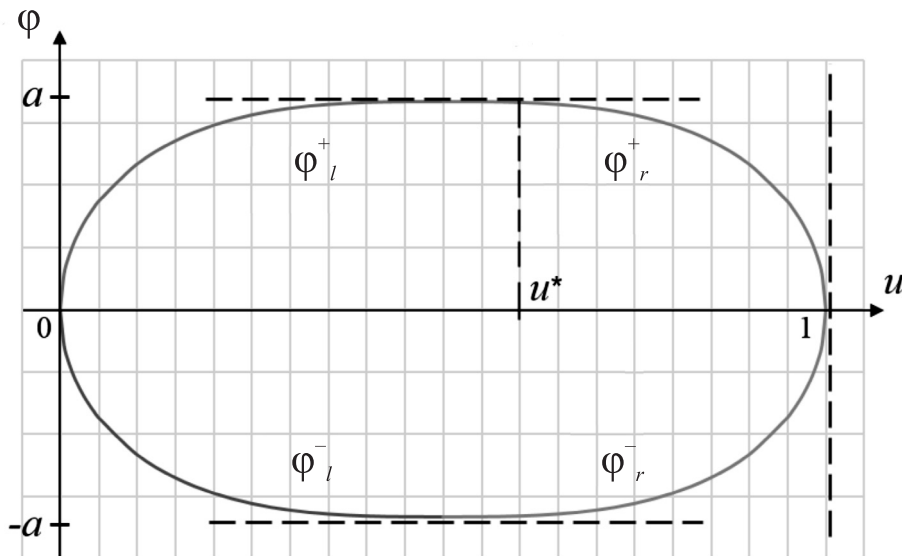


Рис. 2 . Зависимости  $\varphi^\pm(u)$ , на которых показано, как ветви решения однородной предельной задачи распадаются на решения (##) типичных предельных задач;  $u^*$  соответствует максимумам функции  $|\varphi|$

теристики (траектории решения), а  $\delta F$  – вариация вдоль допустимой (виртуальной) траектории. Доказательство свойства 4 основано на том, что необходимое условие минимума  $F(\varphi)$  совпадает с уравнением Крокко, а достаточность условия гарантирована выпуклостью плотности лагранжиана  $F(\varphi)$ .

5. Свойство решения при  $u_0 = 0$ . В этом случае предельная задача (1) равносильна следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{du} &= -\frac{1}{2} \int_0^u \frac{v dv}{\varphi(v)}, \\ \varphi(u) &= \frac{1}{2} \int_u^1 dv \int_0^v \frac{t dt}{\varphi(t)} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \frac{(1-t) t dt}{\varphi(t)} - \int_0^u \frac{(u-t) t dt}{\varphi(t)} \right). \end{aligned}$$

Для решения данного интегрального уравнения можно использовать итерационный процесс.

Пусть нижний индекс обозначает номер итерации, и тогда процесс решения выражается как

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_s}{du} &= -\int_0^u \frac{v dv}{\varphi_{s-1}(v)}, \\ \varphi_s(u) &= \frac{1}{2} \int_u^1 dv \int_0^v \frac{t dt}{\varphi_{s-1}(t)}. \end{aligned}$$

Если  $1/\varphi \in L_1(0,1)$ , то  $\varphi \in C^{(1)}(0,1)$ . Допустим, что последовательность итераций функции  $1/\varphi_s$  образует последовательность Коши. Тогда  $\varphi_s \rightarrow \varphi$  почти всюду на промежутке  $0 < u < 1$ , ввиду полноты области  $L_1(0,1)$ .

6. Решение позволяет сформулировать следствие из теоремы о среднем. Поскольку  $1/\varphi(u)$  – монотонно возрастающее распределение, то, согласно теореме Бонне о среднем, справедливы равенства

$$\begin{aligned} 2\varphi(u) \frac{d\varphi}{du} &= -\frac{u^2}{2} (1-\theta^2), \\ \varphi_0^2(u) &= \frac{1}{6} (1-u^3)(1-\theta^2), \end{aligned}$$

где  $\theta$  – правильная дробь ( $0 < \theta < 1$ ).

Окончательное выражение для прибли-

женного решения имеет вид

$$\varphi_0(u) = (1/\sqrt{6}) \sqrt{(1-u^3)(1-\theta^2)}.$$

Среднее квадратичное значение  $\varphi_0(u)$ , т. е.  $\theta$ -аппроксимация решения, определяется равенством

$$\varphi^2(u) = \int_0^1 \varphi_0^2(u) d\theta = (1/9)(1-u^3). \quad (5)$$

Отсюда  $\varphi(u) = (1/3)\sqrt{1-u^3}$ , и это приближение аппроксимирует точное решение Блазиуса, особенно при малых значениях  $u$ . Например, значение постоянной Блазиуса составляет  $a = 1/3$ . Ее точное значение, недавно анонсированное В.П. Вариным, составляет [29, 30]:

$$\begin{aligned} a &= 0,33205733621519 \\ &629893718006201058 \\ &296654709356141267 \\ &981810047564019872 \\ &417401806440507049 \\ &0731855146368... \end{aligned}$$

Рациональное значение константы отличается от приведенного иррационального менее, чем на 0,3 %.

Величина  $\mathfrak{D} := \int_0^1 \varphi du$  в задачах с физическим содержанием представляет диссипацию на отрезке  $(0, 1)$ . В данном случае ее значение составляет

$$\mathfrak{D} = (1/3) \int_0^1 \sqrt{1-u^3} du = \frac{\sqrt{\pi}}{18} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(11/6)} \approx 0,27.$$

Видно, что за диссипацию «отвечает» распределение  $\varphi(u)$  в окрестности точки  $u = 0$ .

7. Сформулируем общее определение нормы  $\theta$ -аппроксимации:

$$\begin{aligned} \varphi_r(u) &= \frac{1}{\sqrt{6}} (1-u^3) \cdot \left( \int_0^1 (1-\theta^2)^{r/2} d\theta \right)^{1/r} = \\ &= \frac{1-u^3}{\sqrt{6}} \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(r/2 + 1)}{2\Gamma(r/2 + 3/2)} \right)^{1/r}, \end{aligned}$$

где  $r > 0$  – любое положительное вещественное число.

Далее нижний индекс опускается и норма должна быть понятна из контекста. На-



пример, в предыдущем пункте было принято  $r = 2$ , и тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi(u) &:= \varphi_2(u) = \frac{1-u^3}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(5/2)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{2}{3}} (1-u^3) = (1/3)(1-u^3). \end{aligned}$$

Далее выполняется равномерно по  $0 < u < 1$  неравенство Коши – Гельдера

$$\varphi_r(u) \leq \varphi_{r+\alpha}(u), \forall \alpha > 0,$$

и последовательность норм не убывает с возрастанием индекса  $r$  от 0 до  $\infty$ , а точнее,

$$(1/\sqrt{6}) \exp(-c/2 - 0,02) < \|a\|_r < 1/\sqrt{6},$$

где  $c$  – постоянная Маскерони.

8. Первое обобщенное свойство решения. Пусть предельная задача Крокко (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} 2\varphi \frac{d^2\varphi}{du^2} + u^m &= 0, \\ \varphi'(0) = \varphi(0) &= 0. \end{aligned}$$

Данное представление уравнения Крокко возникает из уравнения Буссинеска, если

$$k = k(h) = k_0 (h/H)^{m-1}.$$

Тогда  $\theta$ -аппроксимация решения предельной задачи (1а) имеет вид

$$\varphi_0^2(u) = \frac{(1-\theta^{b+1})(1-u^{m+2})}{(m+1)(m+2)}, \quad (5a)$$

и, если применить среднеквадратичное осреднение по  $\theta$ , то слабое решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{\sqrt{1-u^{m+2}}}{m+2}, \\ a &= \frac{1}{m+2}. \end{aligned} \quad (5b)$$

Тождество (4) записывается следующим образом:

$$\int_0^1 \left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 du = \frac{1}{2(m+1)}. \quad (4a)$$

Условие минимума квадратичного функционала практически не меняется и выражается как

$$F(\varphi) = (1/2) \int_0^1 \left( \left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 + u^m \ln \frac{a}{\varphi} \right) du \rightarrow \inf \geq 0.$$

Величина диссипации в данном случае следует выражению

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \frac{1}{m+2} \int_0^1 \sqrt{1-u^{m+2}} du = \\ &= \frac{1}{(m+2)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3m+8}{2(m+2)}\right)} = \\ &= O\left(\frac{1}{m+2}\right), m \gg 1, \end{aligned} \quad (6)$$

и она уменьшается при увеличении  $m$ .

В силу тождества (4а) справедливо выражение

$$\overline{\varphi}(u) := \frac{\varphi(u)}{a} = \sqrt{1-u^{m+2}},$$

из которого видно, что с увеличением параметра  $m$  степень заполнения профиля

$$\overline{\varphi}(u) := \frac{\varphi(u)}{a}$$

увеличивается.

Вкладывая физическое содержание в решение, предположим, что  $\varphi = \varphi(u)$  – трение в пограничном слое. Тогда трение на поверхности пластины, обтекаемой продольным вязким потоком,  $a = \varphi(0)$  монотонно снижается и сохраняется от пристеночной к струйной части слоя:

$$\text{при } m \rightarrow \infty, \varphi(u) \rightarrow \varphi(0) = 0,$$

$$0 < u < 1.$$

9. Второе обобщенное свойство решения. Пусть уравнение Буссинеска и предельные условия для него имеют вид

$$\frac{\partial u^a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left( u^b \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^c \right),$$

где  $a, b, c$  – вещественные параметры;

$$D(u) = (t > 0, s > 0),$$

$$u(0, s) - 1 = u(t, 0) = 0.$$

Тогда соответствующее преобразование Крокко приводит это уравнение к виду

$$u^b = \frac{a}{c+1} \varphi(u) \left( -\frac{d}{du} \left( u^{1-a} \frac{d\varphi}{du} \right) \right)^c, \quad (7)$$

причем предельные условия ставятся следующим образом:

$$\varphi(1) = \varphi'(0) = 0. \quad (8)$$

В этом случае  $\theta$ -решение предельной задачи (7), (8) имеет вид

$$\varphi_\theta(u) = \frac{(c+1)c^{\frac{c}{c+1}}}{a^{\frac{1}{c+1}}(b+c)^{\frac{c}{c+1}}(b+ac)^{\frac{c}{c+1}}} \times \{ (1-\theta^{b/c+1})(1-u^{a+b/c+1}) \}^{\frac{c}{c+1}}. \quad (9)$$

*Примечание 1.* Если в частном случае  $a = b = 1$ , то из формулы (9) следует выражение, известное как фильтрационная модель Христиановича для плоского фильтрационного потока:

$$\varphi_\theta(u) = \frac{\left( \left( 1 - \theta^{\frac{c+1}{c}} \right) \left( 1 - u^{\frac{2c+1}{c}} \right) \right)^{\frac{c}{c+1}}}{(c+1)^{\frac{c}{c+1}}}. \quad (9a)$$

Тогда

$$a_\theta = \left( \frac{1 - \theta^{\frac{c+1}{c}}}{c+1} \right)^{\frac{c}{c+1}},$$

и, далее

$$a^r = \frac{c}{(c+1)^{\frac{c(r+1)+1}{c}}} \frac{\Gamma\left(\frac{c}{c+1}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{c(r+1)+1}{c+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{c(r+2)+1}{c+1}\right)},$$

при этом  $r \geq 0$ .

Очевидно, что

$$\bar{\varphi}(u) := \frac{\varphi(u)}{a} = \left( 1 - u^{\frac{2c+1}{c}} \right)^{\frac{c}{c+1}},$$

и с уменьшением параметра  $c$  происходит заполнение профиля безразмерного распределения  $\bar{\varphi}(u)$ .

Например, если  $c = 1/2$ , то

$$\bar{\varphi}(u) = (1 - u^4)^{1/3};$$

а если  $c = 1/3$ , то

$$\bar{\varphi}(u) = (1 - u^5)^{1/4}.$$

*Примечание 2.* Пусть  $a = 1$ ;  $b, c$  – свободные параметры. Тогда, в силу  $\theta$ -решения (9), получаем выражения

$$\varphi_\theta(u) = \frac{(c+1)c^{\frac{c}{c+1}}}{(b+c)^{\frac{2c}{c+1}}} \{ (1 - \theta^{b/c+1})(1 - u^{b/c+2}) \}^{\frac{c}{c+1}},$$

$$\bar{\varphi}(u) = (1 - u^{b/c+2})^{\frac{c}{c+1}},$$

и при увеличении параметра  $b$  заполнение профиля  $\varphi(u)$  увеличивается.

Например, если  $c = 1/2$ , то

$$\bar{\varphi}(u) = (1 - u^{2(b+1)})^{1/3} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0, \quad 0 < u < 1.$$

## Выводы

В результате проведенного исследования установлено следующее.

Типичная предельная задача Крокко допускает положительную и отрицательную ветви решения ( $\varphi^+$  и  $\varphi^-$ ), такие что

$$\varphi^+(u) + \varphi^-(u) = 0.$$

Однородная предельная задача Крокко редуцируется на две типичные предельные задачи Крокко, сопрягаемые в критической точке  $u = u^*$ , такой что

$$0 < u_0 < u^* < 1,$$

$$\left( \frac{d\varphi}{du} \right)_{u=u^*} = \varphi(u^* - 0) - \varphi(u^* + 0) = 0.$$

Типичная предельная задача Крокко равносильна нелинейному интегральному уравнению. Последнее решается прямым вычислением интеграла с использованием второй теоремы о среднем. Параметр осреднения исключается интегрированием по параметру в промежутке  $(0, 1)$ .

В данной статье демонстрируются расширения предложенного способа решения. Для классического случая  $a = b = c = 1$  слабое  $\theta$ -решение незначительно отличается от точного. Приближенное значение постоянной Блазиуса  $a = \varphi(0)$  оказывается равным  $1/3$ . При этом точное значение  $\varphi(0) = 0,33206$ .





## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Crocco L.** Sulla strato limite laminare nei gas lungo una lamina plana // *Rend. Math. Appl. Ser.* 5. 1941. Vol. 21. No. 2. Pp. 138–152.
2. **Полубаринова-Кочина П.Я.** Теория движения грунтовых вод. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. **Петриченко М.Р.** Предельная задача Буссинеска и ее гидравлическое приложение // Сб. трудов заочной конф. «Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке». М.: «Prospero», 2015. С. 3–7.
4. **Петриченко М.Р.** Предельные задачи Крокко в теории струй вязкой жидкости // Сб. трудов заочной конф. «Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке». М.: «Prospero», 2016. С. 10–14.
5. **Nemova D., Reich E., Subbotina S., Khayrutdinova E, Petrichenko M.** Heat and mass transfer in a vertical channel under heat-gravitational convection conditions // *Experimental Fluid Mechanics Proceedings of the International Conference.* Prague, 2015. Pp. 604–616.
6. **Akdi M., Sedra M.B.** Numerical solution of the Blasius problem // *The African Review of Physics.* 2014. Vol. 9. No. 0022. Pp. 165–168;
7. **Allan F.M., Syam M.I.** On the analytic solutions of the nonhomogeneous Blasius problem // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2005. Vol. 182. No. 2. Pp. 362–371.
8. **Aminikhah H.** Analytical approximation to the solution of nonlinear Blasius viscous flow equation by LTNHPM // *International Scholarly Research Network. ISRN Mathematical Analysis.* 2012. Vol. 2012. Article ID 957473 (10 p.).
9. **Aminikhah H., Kazemi S.** Numerical solution of the Blasius viscous flow problem by quartic B-spline method // *Hindawi Publishing Corporation. International Journal of Engineering Mathematics.* 2016. Vol. 2016. Article ID 9014354 (6 p.). <http://dx.doi.org/10.1155/2016/9014354>.
10. **Andrzejczak G., Nockowska-Rosiak M., Przeradzki B.** A note on Blasius type boundary value problems // *Opuscula Math.* 2013. Vol. 33. No. 1. Pp. 5–17.
11. **Bataller R.C.** Numerical comparisons of Blasius and Sakiadis flows // *Matematika.* 2010. Vol. 26. No. 2. Pp. 187–196.
12. **Cortell R.** Numerical solutions of the classical Blasius flat-plate problem // *Applied Mathematics and Computation.* 2005. Vol. 170. No. 1. Pp. 706–710.
13. **Chang C.-W., Liu C.-S.** The Lie-group shooting method for boundary layer equations in fluid mechanics // *Proceedings of the Conference of Global Chinese Scholars on Hydrodynamics.* Beijing, 2006 –07. Pp. 103–108.
14. **Fang T., Lee C.F.** A moving-wall boundary layer flow of a slightly rarefied gas free stream over a moving flat plate // *Applied Mathematics Letters.* 2005. Vol. 18. No. 5. Pp. 487–495.
15. **Tiegang Fang, Wei Liang, Chia-fon F. Lee.** A new solution branch for the Blasius – A shrinking equation sheet problem // *Computers and Mathematics with Applications.* 2008. Vol. 56. No. 12. Pp. 3088–3095.
16. **Fazio R.** Blasius problem and Falkner – Skan model: Tufper’s algorithm and its extension // *Computers & Fluids.* 2013. Vol. 73. 15 March. Pp. 202–209.
17. **Goh J., Majid A.A., Ismail A.I.M.** A quartic B-spline for second-order singular boundary value problems // *Computers and Mathematics with Applications.* 2012. Vol. 64. No. 12. Pp. 115–120.
18. **He J.-H.** A simple perturbation approach to Blasius equation // *Applied Mathematics and Computation.* 2003. Vol. 140. No. 2–3. Pp. 217–222.
19. **Chen-Shan Liu, Jiang-Ren Chang.** The Lie-groups shooting method for multiple-solutions of Falkner – Skan equation under suction-injection conditions // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2008. Vol. 43. No. 9. Pp. 844–851.
20. **Liu C.-S.** Cone of non-linear dynamical system and group preserving schemes // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2001. Vol. 36. No. 7. Pp. 1047–1068.
21. **Liu C.-S.** The Lie-group shooting method for nonlinear two-point boundary value problems exhibiting multiple solutions // *Comput. Model. Eng. Sci.* 2006. Vol. 13. No. 2. Pp. 149–163.
22. **Ding Xu, Xin Guo.** Fixed point analytical method for nonlinear differential equations // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics.* 2013. Vol. 8. No. 1. P. 011005 (9 p.)
23. **Варин В.П.** Плоские разложения и их приложения. М.: Препринты ИПМ РАН им. М.В. Келдыша, 2014. № 23. 25 с. URL: [http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014\\_23.pdf](http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_23.pdf).
24. **Варин В.П.** Плоские разложения и их приложения // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2015. Т. 55. № 5. С. 807–821.
25. **Варин В.П.** Плоский асимптотический ряд Блазиуса // *Математический форум (сборник). Сер. «Итоги науки. Юг России».* Владикавказ, 2015. С. 34–47.
26. **Варин В.П.** Специальные решения уравнения Чейзи. Препринты ИПМ РАН им. М.В. Келдыша. 2015. № 43. 39 с. [http://keldysh.ru/papers/2015/prep2015\\_43\\_eng.pdf](http://keldysh.ru/papers/2015/prep2015_43_eng.pdf).

27. **Варин В.П.** Специальные решения уравнения Шази // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 2. С. 210–236.

28. **Варин В.П.** Интегрирование ОДУ на Римановых поверхностях как вычислительный инструмент // Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач

математической физики. Тез. докл. XXI Всерос. конф. и молод. школы-конф., посв. памяти К.И. Бабенко. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2016. С. 73–74.

29. **Фаиз Ахмад.** Применение уравнение Крокко – Ванга к решению задачи Блазиуса // Электронный журнал «Техническая акустика». <http://ejta.org>, 2007, 2.

*Статья поступила в редакцию 23.05.2018, принята к публикации 04.06.2018.*

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович** – доктор технических наук, заведующий кафедрой гидравлики и прочности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
fonpetrich@mail.ru

**ЗАБОРОВА Дарья Дмитриевна** – ассистент кафедры гидравлики и прочности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
zaborova-dasha@mail.ru

**КОТОВ Евгений Владимирович** – аспирант кафедры гидравлики и прочности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
ekotov.cfd@gmail.com

**МУСОРИНА Татьяна Александровна** – аспирантка кафедры гидравлики и прочности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
flamingo-93@mail.ru.

#### REFERENCES

[1] **L. Crocco**, Sulla strato limite laminare nei gas lungo una lamina plana, Rend. Math. Appl., Ser. 5. 21 (2) (1941) 138–152.

[2] **Р.Я. Полубарина-Кочина**, Teoriya dvizheniya gruntovykh vod [Groundwater movement theory], 2<sup>nd</sup> ed., Nauka, Moscow, 1977.

[3] **M.R. Petrichenko**, Predelnaya zadacha Bussineska i yeye gidravlicheskiye prilozheniye [The Boussinesq limit problem and its hydraulic application], In the collection of scientific papers “The Scientific Review of Physics, Mathematics and Engineering Sciences for the 21st Century”, “Prospero” publ. house, Moscow (2015) 3–7.

[4] **M.R. Petrichenko**, Predelnyye zadachi Krokko v teorii struy vyazkoy zhidkosti [The Crocco limit problems in the viscous-fluid jet theory], In the collection of scientific papers “The Scientific Review of Physics, Mathematics and Engineering Sciences for the 21st Century”, “Prospero” publ. house, Moscow, (2016) 10–14.

[5] **D. Nemova, E. Reich, S. Subbotina, et al.**, Heat and mass transfer in a vertical channel under heat-gravitational convection conditions, Experimental Fluid Mechanics Proceedings of the International Conference, Prague (2015) 604–616.

[6] **M. Akdi, M.B. Sedra**, Numerical solution of the Blasius problem, The African Review of Physics 9 (0022) (2014) 165–168.

[7] **F.M. Allan, M.I. Syam**, On the analytic solutions of the nonhomogeneous Blasius problem, Journal of Computational and Applied Mathematics. 182 (2) (2005) 362–371.

[8] **H. Aminikhah**, Analytical approximation to the solution of nonlinear Blasius viscous flow equation by LTNHPM, International Scholarly Research Network, ISRN Mathematical Analysis. 2012 (2012) ID 957473 (10 p).

[9] **H. Aminikhah, S. Kazemi**, Numerical solution of the Blasius viscous flow problem by



quartic B-spline method, Hindawi Publishing Corporation, International Journal of Engineering Mathematics. 4 (2016) ID 9014354 (6 p), <http://dx.doi.org/10.1155/2016/9014354>.

[10] **G. Andrzejczak, M. Nockowska-Rosiak, B. Przeradzki**, A note on Blasius type boundary value problems, *Opuscula Math.* 33 (1) (2013) 5–17.

[11] **R.C. Bataller**, Numerical comparisons of Blasius and Sakiadis flows, *Matematika.* 26 (2) (2010) 187–196.

[12] **R. Cortell**, Numerical solutions of the classical Blasius flat-plate problem, *Applied Mathematics and Computation.* 170 (1) (2005) 706–710.

[13] **C.-W. Chang, C.-S. Liu**, The Lie-group shooting method for boundary layer equations in fluid mechanics, *Proceedings of the Conference of Global Chinese Scholars on Hydrodynamics*, Beijing, 2006–07, 103–108.

[14] **T. Fang, C.F. Lee**, A moving-wall boundary layer flow of a slightly rarefied gas free stream over a moving flat plate, *Applied Mathematics Letters.* 18 (5) (2005) 487–495.

[15] **Tiegang Fang, Wei Liang, Chia-fon F. Lee**, A new solution branch for the Blasius – A shrinking equation sheet problem, *Computers and Mathematics with Applications.* 56 (12) (2008) 3088–3095.

[16] **R. Fazio**, Blasius problem and Falkner – Skan model: Tüpfel’s algorithm and its extension, *Computers & Fluids.* 73 (15 March) (2013) 202–209.

[17] **J. Goh, A.A. Majid, A.I.M. Ismail**, A quartic B-spline for second-order singular boundary value problems, *Computers and Mathematics with Applications.* 64 (12) (2012) 115–120.

[18] **J.-H. He**, A simple perturbation approach to Blasius equation, *Applied Mathematics and Computation.* 140 (2003) 217–222.

[19] **Chein-Shan Liu, Jiang-Ren Chang**, The Lie-groups shooting method for multiple-solutions of Falkner – Skan equation under suction-injection conditions, *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 43 (2008) 844–851.

[20] **C.-S. Liu**, Cone of non-linear dynamical system and group preserving schemes, *International*

*Journal of Non-Linear Mechanics.* 36 (7) (2001) 1047–1068.

[21] **C.-S. Liu**, The Lie-group shooting method for non-linear two-point boundary value problems exhibiting multiple solutions, *Comput. Model. Eng. Sci.* 13 (2) (2006) 149–163.

[22] **Ding Xu, Xin Guo**, Fixed point analytical method for nonlinear differential equations, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics.* 8 (1) (2013) 011005 (9 p).

[23] **V.P. Varin**, Flat expansions and their applications, Moscow, KIAM Preprint (23) (2014). URL: [http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014\\_23\\_eng.pdf](http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_23_eng.pdf).

[24] **V.P. Varin**, Flat expansions and their applications, *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 55 (5) (2015) 797–810.

[25] **V.P. Varin**, Ploskiy asimptoticheskiy ryad Blaziusa [The Blasius’s flat asymptotic expansion], In: *Mathematics Forum Ser. “Sciences summary, The South of Russia”* (2015) 34–47.

[26] **V.P. Varin**, Special solutions to Chazy equation, Moscow, KIAM Preprint (43) (2015). [http://keldysh.ru/papers/2015/prep2015\\_43\\_eng.pdf](http://keldysh.ru/papers/2015/prep2015_43_eng.pdf).

[27] **V.P. Varin**, Special solutions to Chazy equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 57 (2) (2017) 211–235.

[28] **V.P. Varin**, Integrirovaniye ODU na Rimanovykh poverkhnostyakh kak vychislitelnyy instrument, [ODE integration on the Riemann surfaces as numerical instrument], In: *Teoreticheskiye osnovy konstruirovaniya chislennykh algoritmov i resheniye zadach matematicheskoy fiziki [Theoretical foundation of synthesizing the numerical algorithms and the solution of math-physical problems]*, Tezisy dokladov XXI Vserossiyskoy konferentsii i Molodezhnoy shkoly-konferentsii, posvyashchennoy pamyati K.I. Babenko [Sci. abstracts of the 21th All-Russian Conf. and the Youth School-Conf. Dedicated to the Memory of K.I. Babenko], KIAM (2016) 73–74.

[29] **Faiz Ahmad**, Application of Crocco – Wang equation to the Blasius problem, *Electronic Journal “Technical Acoustics”*, <http://www.ejta.org>, 2007, 2.

*Received 23.05.2018, accepted 04.06.2018.*

#### THE AUTHORS

##### **PETRICHENKO Mikhail R.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
fonpetrich@mail.ru

##### **ZABOROVA Dariya D.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
zaborova-dasha@mail.ru

**KOTOV Eugeny V.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
ekotov.cfd@gmail.com

**MUSORINA Tatiana A.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
flamingo-93@mail.ru