



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

DOI: 10.18721/JPM.11205

УДК 626

ПАРАДОКС ДЮПИОУ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ОДНОРОДНОЙ ПЕРЕМЫЧКЕ

Д.Д. Заборова, М.Р. Петриченко, Т.А. Мусорина

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Целью представленного исследования является определение расхода жидкости и формы депрессионной кривой в условиях фильтрации сквозь прямоугольную перемычку. В связи с этим используются апериодические решения предельной задачи Буссинеска. Предельная форма депрессионной кривой и значение разрыва депрессионной кривой получены из решения предельной задачи Буссинеска. Установлено, что образование депрессионной кривой и промежутка высачивания (конечный скачок непрерывности, или разрыв депрессионной кривой в точке минимума напора) на границе нижнего бьефа и пористой среды в перемычке конечной длины происходит за конечное время, пропорциональное квадрату длины перемычки. Поэтому в короткой перемычке точка выклинивания не успевает упасть в нижний бьеф за время, в течение которого депрессионная кривая коснется уровня воды в верхнем бьефе. В полубесконечной перемычке всегда за конечное время устанавливается непрерывная депрессионная кривая без промежутка высачивания.

Ключевые слова: фильтрация грунтовых вод; пористая среда; депрессионная кривая; промежуток высачивания

Ссылка при цитировании: Заборова Д.Д., Петриченко М.Р., Мусорина Т.А. Парадокс Дюпиоу и математическое моделирование нестационарной фильтрации в однородной перемычке // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 2. С. 49 – 60. DOI: 10.18721/JPM.11205

THE DUPUIS PARADOX AND MATHEMATICAL SIMULATION OF UNSTEADY FILTRATION IN A HOMOGENEOUS CLOSING DIKE

D.D. Zaborova, M.R. Petritchenco, T.A. Musorina

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The aim of this study is to determine a flow rate and a shape of a depression curve in conditions of filtration through a rectangular closing dike using aperiodic solutions of the Boussinesq limit problem. We have established that the formation of this curve and the seepage area (the final jump of continuity or interruption of the curve at the minimum pressure point) on the border of the downstream and porous medium, in the closing dike of finite length, occurs for a finite amount of time proportional to the square of the closing dike length. Therefore, in the short closing dike, a cut-out point does not have time to fall into the downstream during the time, it takes for the depression curve to touch the water level in the upstream. The continuous curve

фильтрации и расхода [12]. В этой теории отсутствуют такие понятия, как разрывная депрессионная кривая и промежуток высачивания, так как в данном случае депрессионная кривая является гладкой, т. е. дифференцируемой в каждой точке.

Для вычисления высоты промежутка высачивания на границах области фильтрации используются искусственные приемы. Поэтому для определения формы депрессионной кривой и расхода жидкости через перемычку естественно использовать задачу на установления для решения нестационарной задачи Буссинеска.

Депрессионная кривая

В теории Дюпюи рассматривается фильтрационное движение воды с мгновенной средней скоростью v , которая, согласно формуле Дюпюи, выражается как

$$v = kJ,$$

где k – коэффициент фильтрации (в классической теории Дюпюи $k = \text{const}$); J – гидравлический уклон.

Последний определяется как

$$J := -\partial h / \partial s,$$

где $h = h(t, s)$ – глубина фильтрационного потока (t – время, s – горизонтальная координата).

Парадокс Дюпюи состоит в следующем противоречии. Пусть имеется однородная перемычка длиной L , пропускающая фильтрационный поток с отметки $h = H$ (справа) на отметку $h = h_e$ слева (см. рис. 1).

Депрессионная кривая (свободная поверхность фильтрационного потока), или предельная линия тока, должна касаться горизонтальной прямой в сечении $s = L$, поскольку грань $s = L$ (отрезок CD на рис. 1) представляет собой поверхность постоянного напора (живое сечение). Но тогда по формуле Дюпюи, в сечении $s = L$ получается, что скорость $v = 0$ и фильтрационный расход $q = 0$. В традиционной теории этот парадокс игнорируется и для построения депрессионной кривой используется условие неразрывности, трактуемое как дифференциальное уравнение относительно h :

$$\frac{dq}{ds} = \frac{d}{ds}(vh) = 0.$$

Депрессионная кривая $u = f(s)$ имеет следующий вид:

$$u = \sqrt{u_e^2 + \frac{s}{L}(1-u_e^2)}, \quad (1)$$

$$u := h/H \in (0 \leq u_e := h_e/H, 1).$$

Величина фильтрационного расхода выражается как

$$q = k \frac{H^2 - h_e^2}{2L},$$

причем вывод этой формулы не зависит от вида депрессионной кривой.

Логика рассуждений следующая.

Скорость фильтрации в среднем по длине перемычки следует выражению

$$v = k(H - h_e)/L;$$

и поэтому величину расхода можно получить, умножив среднюю по длине перемычки скорость на среднюю глубину h_m , вычисляемую как среднее арифметическое предельных глубин:

$$h_m = (1/2)(H + h_e).$$

Мы приходим сразу же к формуле Дюпюи для расхода.

Депрессионная кривая Дюпюи (см. формулу (1)) пересекает сечение $s = 0$ на отметке $h = h_e$ ($u = u_e$) и прямую $h = H$ ($u = 1$) в сечении $s = L$.

Другими словами, на параболе Дюпюи (1) выполняются следующие условия:

- a) отсутствие промежутка высачивания;
- b) в точке $s = L, h = H$ (точка C на рис. 1) депрессионная кривая Дюпюи не касается прямой $h = H$ (пунктирная прямая на рис. 1), поэтому эта кривая не может быть линией тока, ортогонально пересекающей живое сечение $s = L$.

Выполнение обоих указанных условий необходимо для существования фильтрационного потока. Именно в этом и есть суть парадокса Дюпюи.

Если объяснять возникновение парадокса особым характером (сингулярностью) точки $s = L, h = H$, то такое объяснение

следует признать несостоятельным.

В данной работе предлагается некоторая альтернативная схема, которая объясняет мгновенную конфигурацию депрессионной кривой переменным характером мгновенного фильтрационного расхода по длине пористой среды.

Суть объяснения состоит в следующем.

Пусть до начального момента времени $t = 0$ глубина фильтрационного потока равна H ($h = H$) в полуограниченном массиве $s > 0$, заполненном пористой средой. В момент времени $t = 0$ уровень жидкости в левом бьефе $s < 0$ мгновенно опускается от отметки $h = H$ до отметки $h = h_e$. Начинается истечение жидкости из пористой среды, где $s > 0$, в нижний бьеф, где $s < 0$. Депрессионная кривая деформируется (рис. 2). Ее начальная длина равна нулю и увеличивается с течением времени. В любой момент времени $t > 0$ левый конец депрессионной кривой пересекает вертикальный откос $s = 0$ на ординате $h = h_0$ (величина h_0 лежит в области $h_e < h_0 \leq H$), причем $dh_0/dt < 0$, а правый конец этой кривой касается прямой $h = H$ в сечении $s = L > 0$, причем $dL/dt > 0$. Левый конец депрессионной кривой падает вниз со скоростью $c_0 = -dh_0/dt$, а правый конец касается и скользит по пря-

мой $h = H$ со скоростью $c_\lambda := dL/dt$.

Другими словами, депрессионная кривая играет роль гибкого (деформируемого) непроницаемого «поршня», выдавливающего жидкость из пористой среды при повороте против часовой стрелки вокруг точки $s = L, h = H$. Если в момент времени $t = t_\lambda$ правый конец депрессионной кривой достигает сечения $s = L_\infty$ (L_∞ – длина перемычки), то дальнейшее движение правого конца прекращается, депрессионная кривая стабилизируется (полубесконечная перемычка срезается абсциссой $s = L_\infty$). На левом конце депрессионной кривой в этот момент времени возможны два случая:

1. Величина $h_0 > h_e$, и образуется конечный разрыв на левом конце депрессионной кривой (промежуток высачивания);
2. $h_0 \rightarrow h_e + 0$, и промежуток высачивания мал.

Первый случай реализуется, если за время $t = T_\lambda$ точка высачивания не успевает опуститься (упасть) на уровень воды в нижнем бьефе. Это возможно, если время T_λ мало, перемычка короткая и начальная разность уровней $H - h_e$ есть конечная величина.

Для реализации второго случая достаточно, чтобы перемычка была длинной и

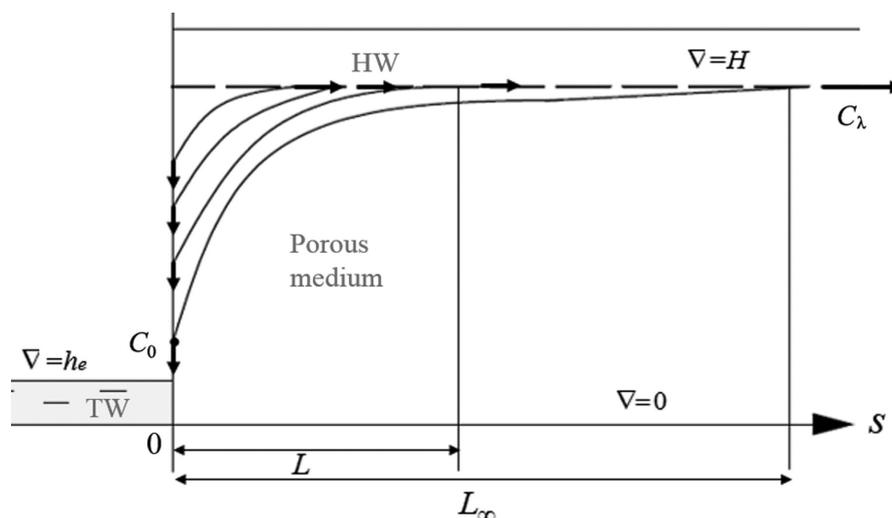


Рис. 2. Рассматриваемая система, на которой показано деформирование во времени депрессионной кривой:

ее правый конец скользит по прямой $h = H$ от нижнего бьефа (ТW) в верхний (НW), а левый скользит вниз (L_∞ – длина перемычки); C_0, C_λ – скорости движения левого и правого концов депрессионной кривой

начальная разность уровней $H - h_e$ была малой. Достаточные условия существования промежутка высачивания соответствуют результатам гидромеханической теории фильтрации.

Действительно, при неизменных прочих условиях высота промежутка высачивания тем больше, чем короче перемычка. При неизменной длине перемычки высота промежутка высачивания уменьшается вместе с величиной $H - h_e$, и для бесконечно тонкой перемычки высота промежутка высачивания $\Delta := h_0 - h_e$ получается равной $H - h_0$ ($\Delta = H - h_0$), т. е. $h_0 = H$.

Таким образом, предлагается рассматривать фильтрацию сквозь перемычку как нестационарное движение в области пористой среды, ограниченной подвижной (опускающейся и растягивающейся) депрессионной кривой.

Если же движение депрессионной кривой прекращается, наступает стационарная фильтрация.

Целью работы является определение расхода и мгновенной формы депрессионной кривой в условиях нестационарной фильтрации сквозь прямоугольную перемычку.

О решениях предельной задачи Буссинеска

Для вычисления интегральных характеристик фильтрации – расхода, высоты промежутка высачивания и формы депрессионной кривой необходимо интегрировать уравнение нестационарной фильтрации Буссинеска. Для плоского одномерного потока выполняется условие неразрывности:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(vh) = 0.$$

Предполагается, что в нестационарном движении справедлива формула Дюпюи

$$v = -k \cdot \partial h / \partial s,$$

и в этом случае выполняется равенство

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(k \frac{\partial h}{\partial s} \right). \quad (2)$$

Уравнение (2) рассматривается в области $0 < s < L \leq L_\infty$, $t > 0$, причем предельные условия имеют вид

$$h(0, s) - H = h(t, 0) - h_0 = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_{s=0} = 0. \quad (3)$$

Если перейти к безразмерным координатам

$$\begin{aligned} u &:= h / H, u_e < u_0 < u < 1, \\ \tau &= kt / H > 0, \sigma = s / H, 0 < \sigma < \lambda \leq \lambda_\infty, \\ \lambda &:= L / H, \lambda_\infty = L_\infty / H, \end{aligned}$$

то вместо равенства (2) получается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(u \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right), \quad (2a)$$

а вместо предельных условий (3) предельные условия вида

$$u(0, \sigma) - 1 = u(\tau, 0) - u_0(\tau) = \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=\lambda} = 0. \quad (3a)$$

Предельную задачу (2a), (3a) можно усложнить, если предположить, что коэффициент фильтрации есть функция напора, например

$$k = k_0 \cdot f(u)/u$$

с произвольной функцией $f(u)$.

В этом случае уравнение (2a) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(f(u) \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right). \quad (2б)$$

Можно показать, что предельная задача (2б), (3a) равносильна следующей типичной предельной задаче Крокко:

$$2\varphi \frac{d^2 \varphi}{du^2} + f(u) = 0, \varphi(u) := \int_u^1 \zeta dz, \zeta := \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}},$$

$$\mathfrak{D}(\varphi) = (u : u_0 < u < 1), \left(\frac{d\varphi}{du} \right)_{u=u_0} = \varphi(1) = 0.$$

Решения типичной предельной задачи Крокко известно в терминах слабых решений (или слабых аппроксимаций решений). Например, пусть $u_0 = 0$. Тогда получается, что

$$\begin{aligned} \varphi^2(u) &= \int_u^1 F(v)dv + \int_0^u \ln \frac{u}{v} \cdot F(v)dv - \\ &\quad - \int_0^1 \ln \frac{1}{v} F(v)dv, \end{aligned}$$

где

$$F(u) := \int_0^u f(v)dv$$

— первообразная функция для $f(u)$.

В частности, если $f(u) = u$ (классический случай, коэффициент фильтрации есть постоянная величина), то из предыдущей формулы следует, что

$$\varphi(u) = 1 / 3\sqrt{1 - u^3},$$

и далее получается такое выражение для мгновенной депрессионной кривой:

$$\zeta := -\frac{d\varphi}{du} = \frac{u^2}{2\sqrt{1 - u^3}}. \quad (4)$$

Пусть $c := c(\tau, \sigma) = -\partial u / \partial \tau \geq 0$ есть скорость снижения депрессионной кривой и $c_0 := c(\tau, 0) = -du_0 / d\tau \geq 0$ — скорость снижения (падения) левого конца этой кривой (в долях коэффициента фильтрации k).

Распределение скорости снижения депрессионной кривой по ее длине зададим в виде бинома:

$$c(\tau, \sigma; \lambda) = c_0(\tau)(1 - \sigma / \lambda)^\alpha. \quad (4a)$$

Вместо уравнения (2а), с учетом выражения (4а), получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{d\sigma} \left(u \frac{du}{d\sigma} \right) = -c_0(1 - \sigma / \lambda)^\alpha, \quad (2b)$$

его решение имеет вид

$$\theta(\tau, \sigma) := u \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{c_0 \lambda}{\alpha + 1} (1 - \sigma / \lambda)^{\alpha+1}, \quad (5)$$

где $\theta = \theta(\tau, \sigma)$ — безразмерный расход жидкости (в долях kH^2/L).

Второе интегрирование приводит к выражению

$$u^2 / 2 = u_0^2 / 2 + \frac{c_0 \lambda^2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \times [1 - (1 - \sigma / \lambda)^{\alpha+2}]. \quad (5a)$$

Следовательно, мгновенная депрессионная кривая (5а) отличается от параболы Дюпюи и совпадает с параболой Дюпюи (1) при $\alpha = -1$.

Для расхода θ получаем, в силу решения (5), такое выражение:

$$\theta(\tau, \sigma) = \frac{1 - u_0^2}{2\lambda} (\alpha + 2)(1 - \sigma / \lambda)^{\alpha+1}. \quad (5b)$$

В итоге величина расхода изменяется от максимального значения $\theta_0(\tau)$ в сечении $\sigma = 0$, которая выражается как

$$\theta_0(\tau) := \theta(\tau, 0) = \frac{(\alpha + 2)(1 - u_0^2)}{2\lambda},$$

до нуля в сечении $\sigma = \lambda$.

Средняя по длине перемычки величина расхода $\theta_m(\tau)$, в силу выражения (5b), имеет вид

$$\theta_m(\tau) = \frac{1 - u_0^2}{2\lambda} \quad (6)$$

и совпадает со значением расхода по Дюпюи, если $u_0 = u_e$ и $\lambda = L$.

Таким образом, показано, что среднее значение расхода не зависит от величины параметра α и формально совпадает с расходом по Дюпюи.

Важным для дальнейших выкладок является такой прием. Вводится понятие о толщине фильтрационного пограничного слоя как о толщине слоя пористой среды, примыкающей к сечению $\sigma = 0$ ($\zeta = 0$), в котором локализовано конечное изменение напора, а именно — пусть δ — толщина фильтрационного пограничного слоя:

$$\delta = \frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}}.$$

Поэтому, по определению, толщина фильтрационного пограничного слоя определяется следующим образом:

$$\forall \zeta > \delta, \exists \varepsilon(\zeta) > 0 \Rightarrow 1 - \varepsilon < u < 1.$$

На рис. 3 показана толщина фильтрационного пограничного слоя для случая $u_0 > 0$.

Итак, согласно определению и с использованием уравнения Крокко, имеем:

$$\begin{aligned} \delta &:= \int_0^\infty (1 - u) d\zeta = (1 - u_0)\lambda(\tau) = \\ &= \int_0^1 (1 - u)(-\varphi''(u)) du = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{f(u)(1 - u)}{\varphi(u)} du. \end{aligned}$$

Можно доказать, что для любой сум-

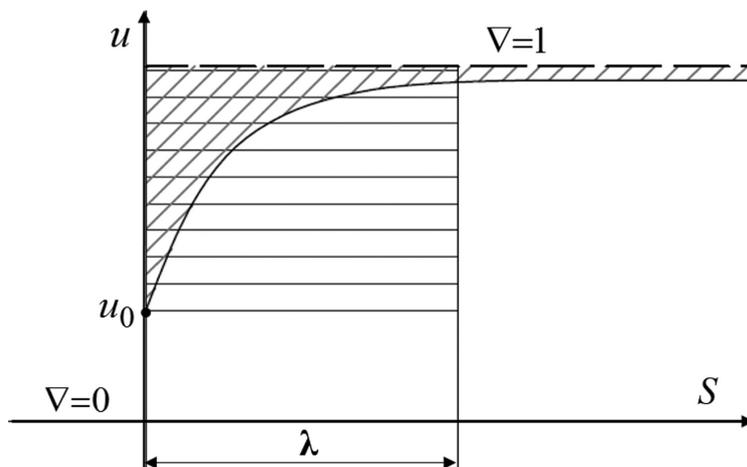


Рис. 3. Толщина фильтрационного пограничного слоя λ (заштрихованная область между пунктирной прямой и депрессионной кривой равна площади прямоугольника со сторонами $1 - u_0, \lambda$); $u_0 = h_0/H, \lambda = L/H$ – безразмерная длина перемычки

мируемой и ограниченной функции f толщина фильтрационного пограничного слоя $\delta < \infty$. Следовательно, безразмерная длина перемычки

$$\lambda = 2\delta\sqrt{\tau} = a\sqrt{\tau}, a = O(1),$$

и тогда

$$\Lambda = a\sqrt{T_\Lambda}.$$

Постоянная a ограничена, т. е. $a = O(1)$, поэтому, в силу выражения (6), величина расхода принимает вид

$$\begin{aligned} \theta_m(\tau) &= \frac{1 - u_0^2}{2a\sqrt{\tau}} = \\ &= \frac{1 - (1 - c_0\tau)^2}{2a\sqrt{\tau}} \xrightarrow{\tau \rightarrow T_\Lambda} \frac{2c_0T_\Lambda - c_0^2T_\Lambda^2}{2\Lambda}. \end{aligned}$$

При $c_0 = 1/T_\Lambda$ это выражение достигает максимума в форме

$$\theta_m(T_\Lambda) = \frac{1}{2\Lambda}, \quad (6a)$$

которая совпадает с расходом по Дюпюи.

Следовательно, можно сделать следующие заключения:

среднее по длине перемычки мгновенное значение расхода $\theta_m(\tau)$ не зависит от параметра α , т. е. от мгновенной формы депрессионной кривой;

предельное, при $\tau \rightarrow T_\Lambda - 0$, выраже-

ние для среднего по длине перемычки расхода совпадает с расходом по Дюпюи;

формула Дюпюи для расхода применима только в условиях установившейся фильтрации.

Основные интегральные соотношения

Из уравнения Дюпюи (2а) следует интегральное тождество, выражающее баланс расходов (вся жидкость, выдавливаемая опускающейся депрессионной кривой из перемычки, вытекает через сечение $s = 0$):

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^\lambda (1 - u) d\sigma = \theta_0(\tau) = \frac{c_0\lambda}{\alpha + 1}. \quad (7)$$

Приближенно положим, несколько увеличив значение $\lambda(\tau)$, что

$$\int_0^\infty (1 - u) d\sigma = \frac{1 - u_0(\tau)}{2} \lambda(\tau).$$

Тогда получаем простое уравнение для λ^2 :

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda^2}{d\tau} &= n(1 + u_0), n(\alpha) = (1 - \alpha)(2 + \alpha) > 0, \\ -2 < \alpha < 1, \end{aligned} \quad (8)$$

причем $\lambda(0) = 0$.

Величина параметра $n(\alpha)$ изменяется от нуля при $\alpha = 1, -2$ до максимального значения $n = 9/4$ при $\alpha = -1/2$; среднее ариф-

метическое значение $n(\alpha)$ составляет $3/2$.

Тогда решение (8) принимает следующий вид:

$$\lambda^2(\tau) = n(\alpha) \left(2\tau - \int_0^\tau c_0(\omega)(\tau - \omega) d\omega \right). \quad (9)$$

Пусть $\lambda = \Lambda$, тогда величина τ достигает значения $\tau = T_\Lambda$. В силу выражения (9), параметры Λ, T_Λ и скорость $c_0(\tau)$ связаны следующим условием:

$$\Lambda^2 = n(\alpha) \left(2T_\Lambda - \int_0^{T_\Lambda} c_0(\tau)(T_\Lambda - \tau) d\tau \right); \quad (9a)$$

если же $u_0 = u_e$, то $\tau = T_\Delta$.

Следовательно,

$$1 - u_e - \int_0^{T_\Delta} c_0(\tau) d\tau = 0. \quad (9б)$$

Очевидно, что $c_0 \leq 1$; тогда из формул (9a), (9б), соответственно, получим следующее:

$$\begin{aligned} \Lambda^2 / n &= 2T_\Lambda - 1 / 2T_\Lambda^2, T_\Lambda = 2 - \sqrt{4 - \frac{2\Lambda^2}{n}}, \\ T_\Lambda &= 2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Lambda^2}{2n}} \right) = \frac{\Lambda^2}{2n}, \\ T_\Delta &= 1 - u_e \leq 1, \end{aligned} \quad (10)$$

и, тогда, в силу выражения (6a), предельная величина среднего по длине перемычки расхода принимает вид

$$\lim_{\tau \rightarrow T_\Lambda} \theta_m = \frac{2}{\Lambda} - \sqrt{\frac{4}{\Lambda^2} - \frac{2}{n}} \leq \frac{\Lambda}{2n} = \frac{1 - u_0^2(T_\Lambda)}{2\Lambda}.$$

Для финального выражения ординаты левого конца депрессионной кривой получим:

$$u_0(T_\Lambda) = \sqrt{1 - \Lambda^2 / n}. \quad (6б)$$

Формулы (10) имеют смысл, если справедливо неравенство

$$\Lambda \leq \sqrt{2n} \leq \sqrt{9/2} = 2,121.$$

В противном случае перемычка считается длинной, т. е. $T_\Lambda = \infty$, и $u_0 \rightarrow u_e + 0$.

Если же $\Lambda \ll 1$, то

$$T_\Lambda = \frac{\Lambda^2}{2n} < T_\Delta = 1 - u_e.$$

Следовательно, в короткой перемычке правый конец депрессионной кривой достигает уровня воды в верхнем бьефе быстрее, чем точка выклинивания депрессионной кривой упадет на уровень воды в нижнем бьефе.

Пусть $\tau = T_\Delta = \Lambda^2 / (2n)$, и тогда справедливо выражение

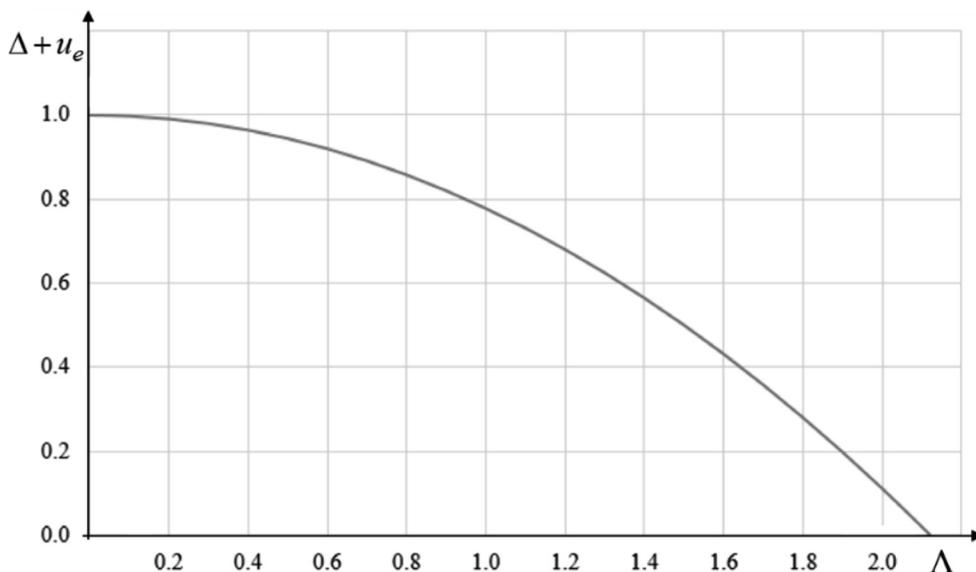


Рис. 4. График зависимости высоты промежутка высачивания Δ от длины перемычки $\Lambda = L_\infty / H$ при фиксированном уровне u_e

$$u_0(T_\Lambda) = 1 - \Lambda^2 / (2n),$$

$$\Delta(T_\Lambda) := u_0(T_\Lambda) - u_e = 1 - u_e - \Lambda^2 / (2n).$$

Окончательно получаем формулу

$$\Delta = 1 - u_e - \Lambda^2 / (2n) = 1 - u_e - 2 / 9\Lambda^2.$$

Пусть $\Lambda \rightarrow +0$, тогда $\Delta = 1 - u_e$. График зависимости $\Delta = \Delta(\Lambda)$ представлен на рис. 4. При значении $\Lambda > (9/2)^{1/2}$ полагаем $\Delta = 0$.

Отметим, что возможно улучшение оценок. А именно, в силу справедливости решения (9), имеем:

$$\lambda^2 = n(2\tau - \tau^2 / 2). \quad (11)$$

Пусть $\tau = 2 = T_\Lambda$. Тогда длина перемычки λ достигает максимального значения $\lambda = \Lambda$, при этом $\Lambda^2 = 2n = 9/2$. Эта оценка Λ совпадает с предыдущей. Если мы формально положим $T_\Lambda = 2$ в формуле (11), то получим, что $\Lambda^2 = 4n = 9$.

Итак, перемычка считается длинной, если

$$9/2 < \Lambda^2 < 9, \text{ т. е. } 2,12 < \Lambda < 3,00,$$

и в среднем значение $\Lambda = 2,52$. Эти оценки близки к оценкам, полученным в гидромеханической теории, где при $\Lambda \approx 2,7, \dots, 2,8$ промежуток высачивания исчезает практически при всех значениях u_e [12, 16].

Выводы

На основании определения расхода и

формы депрессионной кривой в условиях фильтрации сквозь прямоугольную перемычку можно сделать следующие заключения:

высота промежутка высачивания Δ однозначно определяется длиной перемычки. В короткой перемычке, когда $\Delta = 1 - u_e$, высота промежутка высачивания определяется только уровнем жидкости в нижнем бьефе;

установление промежутка высачивания происходит за время $T_\Lambda = O(\Lambda^2)$ и поэтому в короткой перемычке это время меньше времени падения точки выклинивания T_Λ в нижний бьеф, т. е. $T_\Lambda < T_\Lambda$;

в длинной перемычке точка выклинивания успевает упасть в нижний бьеф за время T_Λ , меньшее, чем время T_Λ касания правым концом депрессии верхнего бьефа;

высота промежутка высачивания в процессе установления монотонно уменьшается от значения $1 - u_e$ в момент времени $\tau = 0$ до значения $\Delta(T_\Lambda) \geq 0$.

Предложенная альтернативная схема, объясняющая мгновенную конфигурацию депрессионной кривой переменным характером нестационарности фильтрационного расхода по длине пористой среды, вполне оправдана и позволяет получить новые важные результаты, в частности величину промежутка высачивания, мгновенный локальный и средний фильтрационный расход.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губкина Е.В., Монахов В.Н. Фильтрация жидкости со свободными границами в неограниченных областях // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41. № 5 (243). С. 188–195.
2. Марголин В.М. Исследование основных параметров противофильтрационных конструкций // Промышленное и гражданское строительство. 2014. № 12. С. 73–76.
3. Пургина Д.В., Строкова Л.А., Кузеванов К.И. Моделирование гидрогеологических условий для обоснования противооползневых мероприятий на участке набережной реки Камы в городе Перми // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2016. Т. 327. № 1. С. 116–127.
4. Стрелков А.К., Теплых С.Ю., Бухман Н.С., Саргсян А.М. Анализ и характеристика фильтрации поверхностного стока в балластной призме железнодорожного пути // Водоснабжение и санитарная техника. 2015. № 12. С. 63–72.
5. Терлеев В.В., Никоноров А.О., Того И. и др. Гистерезис водоудерживающей способности почвы на примере песчаных почв // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 2 (70). С. 84–92.
6. Орлов В.Т., Зайцев О.И., Локтионова Е.А. Оценка размеров области загрязнения естественных грунтовых вод инфильтрационным потоком // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2013. № 6 (11). С. 28–33.
7. Косиченко Ю.М. Развитие исследований

в области применения новых материалов для противодиффузионных целей // Пути повышения эффективности орошаемого земледелия. 2015. № 58-2. С. 21–27.

8. **Ищенко А.В., Соколов А.С.** Гидравлическая модель водопроницаемости бетонопленочного противодиффузионного покрытия канала // Мелиорация и водное хозяйство. Матер. научн.-практ. конф. Москва, 29–30 марта 2016. С. 73–77.

9. **Куваев А.А., Пашковский И.С., Поздняков С.П., Рошаль А.А. В.М.** Шестаков и развитие современных идей гидрогеодинамики // Вестник Московского университета. Сер. 4. Геология. 2009. № 1. С. 58–62.

10. **Сольский С.В., Самофалов Д.П., Булганин Е.В., Семанина Е.П.** Обоснование методики оценки параметров водной эрозии откосов глубоких котлованов // Изв. Всерос. НИИ гидротехники им. Б.Е. Веденеева. 2015. № 278. С. 95–106.

11. **Брумштейн Ю.М.** Анализ возможных подходов к методам компьютерного моделирования некоторых специальных задач геофильтрации // Известия ВолгГТУ. Сер. Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. Межвуз. сб. научн. статей. 2014. Вып. 22. № 25 (152). С. 5–11.

12. **Гиргидов А.Д.** Время понижения уров-

ня грунтовой воды при строительстве котлована // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 4(30). С. 52–56.

13. **Подольский В.А.** Применение метода конечных элементов для решения профильной задачи расчета изменения положения депрессионной кривой // Горный информ.-анал. бюл. (научно-технический журнал). 2007. № 4. С. 58–60.

14. **Афонин А.А.** Математическое моделирование реальных нелинейных задач фильтрации со свободной границей // Известия ЮФУ. Технические науки. 2006. № 3 (58). С. 260–264.

15. **Подольский В.А.** Расчет положения свободной поверхности при нестационарной фильтрации методом конечных элементов // Горный информ.-анал. бюл. (научно-технический журнал). 2007. № 4. С. 63–67.

16. **Мемарианфард М.Е., Анискин Н.А.** Расчет фильтрации в грунтовых плотинах и основаниях с учетом анизотропии // Вестник МГСУ. 2009. № 51. С. 125–128.

17. **Чагиров П.С., Кадет В.В.** Новый метод определения границ применимости закона Дарси // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-3. С. 1243–1244.

18. **Кадет В.В., Максименко А.А.** Принципы аналитического описания течения жидкости в решеточных моделях пористых сред // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2000. № 1. С. 79–83.

Статья поступила в редакцию 12.02.2018, принята к публикации 01.03.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЗАБОРОВА Дарья Дмитриевна – аспирантка кафедры гидравлики и прочности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
zaborova-dasha@mail.ru

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – доктор технических наук, заведующий кафедрой гидравлики и прочности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
fonpetrich@mail.ru

МУСОРИНА Татьяна Александровна – аспирантка кафедры гидравлики и прочности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
flamingo-93@mail.ru

REFERENCES

[1] **E.V. Gubkina, V.N. Monakhov**, Filtration of a liquid with free boundaries in unbounded regions, J. Appl. Mech. Tech. Phys. 41 (5(243)) (2000) 930–936.

[2] **V.M. Margolin**, Study of key parameters of impervious structures, Industrial and Civil Engineering. (12) (2014) 73–76.

- [3] **D.V. Purgina, L.A. Strokova, K.I. Kuzevanov**, Modeling hydrogeological conditions for antilandslide measures justification on the plot of the Kama river embankment in Perm, Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, Geo Assets Engineering. 327 (1) (2016) 116–127.
- [4] **A.K. Strelkov, D.Yu. Teplykh, N.S. Bukhman, A.M. Sargsyan**, Analysis and specifications of filtration of surface runoff from railway track ballast section, Water Supply and Sanitary Technique. (12) (2015) 63–72.
- [5] **V.V. Terleev, A. Nikonorov, I. Togo, et al.**, Nysteretic water-retention capacity of sandy soil, Magazine of Civil Engineering. (2 (70)) (2017) 84–92.
- [6] **V.T. Orlov, O.I. Zaytsev, E.A. Loktionova**, Assessment of pollution area's sizes natural ground waters infiltration stream, Construction of Unique Buildings and Structures. 2013. (6 (11)) (2013) 28–33.
- [7] **Yu.M. Kosichenko**, Razvitiye issledovaniy v oblasti primeneniya novykh materialov dlya protivofiltratsionnykh tseley [The progress of studies in advance materials applications for impervious purpose], Puti povysheniya effektivnosti oroshayemogo zemledeliya [The ways for improving the efficiency of irrigated farming]. (58-2) (2015) 21–27.
- [8] **A.V. Ishchenko, A.S. Sokolov**, Gidravlicheskaya model vodopronitsayemosti betonoplenochnogo protivofiltratsionnogo pokrytiya kanala [A hydraulic model of the water permeability of a concrete-film impervious coating of a canal], In: Melioratsiya i vodnoye khozyaystvo. Materialy nauchno-prakticheskoy konferentsii [Reclamation and water industry, Conference proceedings] (2016) 73–77.
- [9] **A.A. Kuvayev, I.S. Pashkovsky, S.P. Pozdnyakov, A.A. Roshal, V.M. Shestakov** and the development of modern hydrogeodynamic ideas, Moscow University Geology Bulletin. (1) (2009) 54–58.
- [10] **S.V. Solsky, D.P. Samofalov, E.V. Bulganin, E.P. Semanina**, Justification of the method to assess the parameters of ablation of the slopes of deep pits, Bull. of B.E. Vedeneev VINIG. (278) (2015) 95–106.
- [11] **Yu.M. Brumshteyn**, Analysis of possible approaches to methods of computer modelling for some special geofiltration problems, Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2014. 22 (25 (152)) 5–11.
- [12] **A.D. Girgidov**, The time of groundwater free surface lowering before foundation pit construction, Magazine of Civil Engineering. (4(30)) (2012) 52–56.
- [13] **V.A. Podolsky**, Primeneniye metoda konechnykh elementov dlya resheniya profilnoy zadachi rascheta izmeneniya polozheniya depressionnoy krivoy [An application of the finite element method to a solution of a profile problem on a changing position of a depression curve], Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten (nauchno-tekhnicheskii zhurnal) [The Mining Informational-Analytical Bulletin]. (4) (2007) 58–60.
- [14] **A.A. Afonin**, Matematicheskoye modelirovaniye realnykh nelineynykh zadach filtratsii so svobodnoy granitsey [Mathematical simulation of real nonlinear problems on filtration with a free boundary], Izvestiya YuFU. Tekhnicheskiiye nauki. 2006. (3 (58)) (2006) 260–264.
- [15] **V.A. Podolsky**, Raschet polozheniya svobodnoy poverkhnosti pri nestatsionarnoy filtratsii metodom konechnykh elementov [The calculation of a free surface position in the non-stationary filtration using the finite element method], Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten (nauchno-tekhnicheskii zhurnal) [The Mining Informational-Analytical Bulletin]. (4) (2007) 63–67.
- [16] **M.E. Memarianfard, N.A. Aniskin**, Raschet filtratsii v gruntovykh plotinakh i osnovaniyakh s uchedom anizotropii [The calculation of filtration in the earth dams and bases with allowance for anisotropy], Vestnik MGSU. (S1) (2009) 125–128.
- [17] **P.S. Chagirov, V.V. Kadet**, A New method for determining the applicability of the Darcy law, Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. (4-3) (2011) 1243–1244.
- [18] **V.V. Kadet, A.A. Maksimenko**, Printsipy analiticheskogo opisaniya techeniya zhidkosti v reshetochnykh modelyakh poristyykh sred [Principles of analytical description of a flow in lattice models of porous media], Fluid Dynamics. 35 (1) (2000) 79–83.

Received 12.02.2018, accepted 01.03.2018.

THE AUTHORS

ZABOROVA Dariya D.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

zaborova-dasha@mail.ru

PETRITCHENKO Mikhail R.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

fonpetrich@mail.ru

MUSORINA Tatiana A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

flamingo-93@mail.ru