

DOI: 10.5862/JPM.248.12

УДК: 539.3: 519.6

М.В. Сухотерин, С.О. Барышников, К.О. Ломтева

Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С.О. Макарова, г. Санкт-Петербург

ОБ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

В статье рассматривается метод, предложенный П.Ф. Папковичем для прямоугольных пластин, и его приложение для консольной пластины при изгибе равномерной нагрузкой. Искомая функция прогибов выбирается в виде суммы соответствующей балочной функции и бигармонической функции; последняя представляет собой бесконечный ряд по неортогональным собственным функциям задачи. Собственные функции удовлетворяют однородным граничным условиям на продольных кромках (заделка и противоположный край). Предлагается находить коэффициенты ряда из условия минимума работы невязок на соответствующих перемещениях поперечных кромок. Это приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов в комплексной форме. Коэффициенты однородных решений находились для случаев, когда аппроксимирующий ряд содержал последовательно 2, 3, ..., 7 слагаемых. Вычислялись собственные числа, прогибы края, противоположного заделке, и изгибающие моменты в заделанном сечении. Анализируется сходимость метода редукции и устойчивость вычислительного процесса.

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ КОНСОЛЬНАЯ ПЛАСТИНА, ИЗГИБ, ОДНОРОДНОЕ РЕШЕНИЕ, ЧИСЛЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ, НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

Введение

Прямоугольная консольная пластина является расчетной схемой для многих элементов инженерных конструкций. В частности, режущий инструмент ряда технологических операций выполняется в виде прямоугольных пластин, жестко защемленных по одному краю. С анализом напряженного и деформированного состояний консольных пластин связаны также расчеты прочности и жесткости отдельных элементов в конструкциях гидротурбин, кораблей, самолетов и ракет. Задача изгиба прямоугольной консольной пластины не имеет точного замкнутого решения, а известные приближенные решения требуют

анализа точности полученных результатов. Разброс численных результатов у различных авторов достигает 20 %.

Целью настоящей работы является получение достоверных численных результатов о напряженно-деформированном состоянии этих пластин методом однородных решений.

Первая работа по расчету консольных пластин принадлежит Д.Л. Холлу [1], который использовал метод конечных разностей (МКР, или метод сеток) для широкой пластины с отношением сторон 4 : 1. Нагрузкой служила сосредоточенная сила, приложенная в середине свободного края, противоположного защемленному. Этот ме-

тод использовали также многие авторы для различных видов нагрузки, отношения сторон пластины и шага сетки. Метод конечных элементов (МКЭ) впервые применили О. Zienkiewicz и Y. Cheung [2]; они разбили квадратную пластину на девять квадратных элементов и рассмотрели случай равномерной нагрузки. Для решения указанной задачи применялись и другие приближенные методы: Рэлея – Ритца, Бубнова – Галёркина, Канторовича – Власова и пр. В работе [3] функцию прогибов находили методом бесконечной суперпозиции исправляющих функций в виде гиперболических рядов; в ходе применения метода все невязки в граничных условиях стремились к нулю, обеспечивая в пределе точное решение задачи.

Однородные решения и соотношения обобщенной ортогональности упругих прямоугольных пластин

Решение бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 0 \quad (1)$$

П.Ф. Папкович [4] разыскивал в виде

$$w(x, y) = \sum_k c_k e^{-\beta_k x} F_k(y). \quad (2)$$

где ∇^2 – двумерный оператор Лапласа, w – прогиб пластины, c_k – коэффициенты ряда, β_k – собственные числа, $F_k(y)$ – собственные функции задачи.

Для плоской задачи теории упругости w – функция Эйри, а в случае изгиба тонкой пластины – это прогиб. Для функций $F_k(y)$ после подстановки суммы (2) в уравнение (1) получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F_k^{IV} + 2\beta_k^2 F_k'' + \beta_k^4 F_k = 0, \quad (3)$$

общее решение которого имеет вид

$$F_k(y) = A_k \sin \beta_k y + B_k \cos \beta_k y + C_k y \cos \beta_k y + D_k y \sin \beta_k y. \quad (4)$$

Рассмотрим прямоугольную пластину с относительными размерами

$$-\gamma / 2 \leq x \leq \gamma / 2, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

где $\gamma = a / b$ – отношение сторон пластины.

Если потребовать, чтобы функция прогибов (2) пластины удовлетворяла однородным граничным условиям на краях $y = 0$, $y = 1$, то для каждого вида этих условий получается трансцендентное уравнение, решением которого являются собственные числа β_k . Например, когда пластина заземлена на обоих краях, трансцендентное уравнение выглядит следующим образом:

$$\sin 2\beta_k \pm 2\beta_k = 0$$

(здесь знак плюс относится к четным функциям в выражении (4), минус – к нечетным).

Подобные уравнения имеют бесчисленное множество комплексных корней, группирующихся по квартетам (отдельные корни могут быть и действительными).

Если собственные числа найдены, то функции $e^{-\beta_k x} F_k(y)$ называют однородными решениями.

Для неортогональной системы комплексных функций – собственных функций задачи $F_k(y)$ авторы работ [5, 6] установили соотношение

$$\int_0^1 [F_k''(y) F_s''(y) - \beta_k^2 \beta_s^2 F_k(y) F_s(y)] dy = 0 \quad (5)$$

(при $k \neq s$), которое называется соотношением обобщенной ортогональности.

Коэффициенты c_k ряда (2) должны определяться из граничных условий на поперечных краях $x = \pm \gamma / 2$. Поскольку обычно таких условий два, а последовательность коэффициентов c_k одна, в общем случае не удастся строго удовлетворить сразу двум граничным условиям. Здесь следует отметить, что хотя коэффициенты c_k имеют действительные и мнимые части, однако требование вещественности результатов связывает их между собой. Однако в частном случае, если граничные условия задачи таковы, что для отыскания коэффициентов c_k необходимо совместное разложение на краях $x = \pm \gamma / 2$ двух различных заданных функций от y в ряды вида

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \sum_k a_k L_1[F_k(y)], \\ f_2(y) &= \sum_k a_k L_2[F_k(y)] \end{aligned} \quad (6)$$



(a_k – некоторые неизвестные комплексные постоянные, пропорциональные c_k), а функции L_1 и L_2 выражаются формулами

$$L_1[F_k(y)] = F_k(y), L_2[F_k(y)] = \beta_k^2 F_k(y) \quad (7)$$

или формулами

$$L_1[F_k(y)] = \beta_k F_k(y), L_2[F_k(y)] = \beta_k^3 F_k(y), \quad (8)$$

то удается удовлетворить сразу двум условиям (см., например, работу [4]); при этом используется соотношение обобщенной ортогональности (5), и с помощью приема Фурье находят коэффициенты a_k .

Соотношение (5) было доказано для случая, когда края $y = 0, y = 1$ защемлены. В работе [7] было показано, что указанное соотношение имеет место и для свободных краев, а также когда один из них защемлен, а другой свободен.

Таким образом, соотношение обобщенной ортогональности справедливо и для консольной пластины, однако точно удовлетворить двум условиям на свободных поперечных краях $x = \pm \gamma / 2$ с его помощью не удастся, так как выражения функций L_1 и L_2 в этом случае отличаются от соответствующих выражений (7) и (8).

Таким образом, при решении задачи об изгибе консольной пластины следует использовать какой-либо приближенный метод, чтобы определить коэффициенты разложения (2). Например, можно строго выполнить только одно граничное условие или минимизировать некоторый функционал, например функционал потенциальной энергии, квадратичных погрешностей выполнения граничных условий, работы невязок на соответствующих перемещениях и т. п.

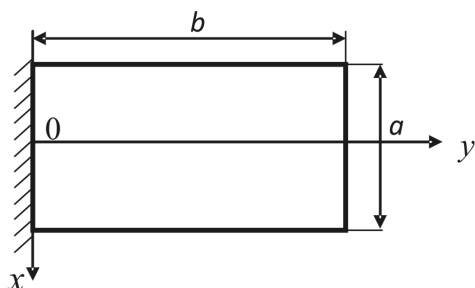


Рис. 1. Прямоугольная консольная пластина: $a = \gamma, b = 1$ ($\gamma = a/b$ – отношение сторон пластины)

Однородные решения и трансцендентное уравнение задачи для консольной пластины

Рассмотрим теперь задачу изгиба консольной пластины (рис. 1) [8] под действием равномерной поперечной нагрузки q_0 :

$$\nabla^2 \nabla^2 w = -1 \quad (9)$$

с граничными условиями

$$w = 0; \quad w'_y = 0 \quad (\text{при } y = 0); \quad (10)$$

$$M_y = -(w''_{yy} + \nu w''_{xx}) = 0,$$

$$V_y = -[w'''_{yyy} + (2 - \nu)w'''_{xxy}] = 0 \quad (11)$$

(при $y = 1$);

$$M_x = -(w''_{xx} + \nu w''_{yy}) = 0,$$

$$Q_x = -[w'''_{xxx} + (2 - \nu)w'''_{xyy}] = 0 \quad (12)$$

(при $x = \pm \gamma / 2$);

$$H_{xy}(\pm \gamma / 2; 1) = -(1 - \nu)w''_{xy}(\pm \gamma / 2; 1) = 0, \quad (13)$$

где ν – коэффициент Пуассона; M_x, M_y – изгибающие моменты; Q_x, Q_y – перерезывающие силы; H_{xy} – крутящий момент.

Здесь прогиб отнесен к величине

$$q_0 b^4 / D,$$

где $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$ – цилиндрическая жесткость пластины (E – модуль Юнга, h – толщина пластины).

Заметим, что условие (13) выражает отсутствие сосредоточенных сил в угловых точках свободной части контура.

Частное решение уравнения (9) выберем в виде балочной функции

$$w_8(y) = -(y^4 - 4y^3 + 6y^2) / 24, \quad (14)$$

которая удовлетворяет граничным условиям заделки ($y = 0$) и противоположного края ($y = 1$), а также условию (13).

Функция (14) порождает на краях $x = \pm \gamma / 2$ невязки

$$g(y) = M_x(\pm \gamma / 2, y) = \nu(y - 1)^2 / 2 \quad (15)$$

(в виде изгибающего момента).

Однородные бигармонические решения, в силу симметрии нагрузки, будут содержать четную функцию координаты x :

$$w_{ns}(x, y) = \text{ch } \beta x (A \sin \beta y + B \cos \beta y + C y \cos \beta y + D y \sin \beta y), \quad (16)$$

где β – некоторый параметр (собственное число); A, B, C, D – неизвестные коэффициенты.

Общее решение задачи представляется суммой

$$w(x, y) = w_{\delta}(y) + w_{hs}(x, y). \quad (17)$$

Коэффициенты A, B, C, D в формуле (16) найдутся из граничных условий на продольных краях: $y = 0$ и $y = 1$.

Удовлетворяя условиям при $y = 0$, получим $A\beta + C; B = 0$, и тогда решение (16) можно записать в следующем виде:

$$w_{hs}(x, y) = \text{ch } \beta x [A(\sin \beta y - \beta y \cos \beta y) + Dy \sin \beta y]. \quad (18)$$

Запишем выражения изгибающего момента и перерезывающей силы на краю $y = 1$:

$$\begin{aligned} [M_y]_{y=1} &= -\beta \text{ch } \beta x \{A\beta[(1 + \nu) \sin \beta + \\ &+ (1 - \nu)\beta \cos \beta] + \\ &+ D[2 \cos \beta - (1 - \nu)\beta \sin \beta]\}, \\ [V_y]_{y=1} &= -\beta^2 \text{ch } \beta x \{A\beta[2 \cos \beta + \\ &+ (1 - \nu)\beta \sin \beta] + \\ &+ D[(1 - \nu)\beta \cos \beta - (1 + \nu) \sin \beta]\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее, если потребовать обращение в нуль этих величин при любых значениях x , то получим систему двух уравнений для определения коэффициентов A и D :

$$\begin{aligned} A\beta[(1 + \nu) \sin \beta + (1 - \nu)\beta \cos \beta] + \\ + D[2 \cos \beta - (1 - \nu)\beta \sin \beta] &= 0, \\ A\beta[2 \cos \beta + (1 - \nu)\beta \sin \beta] + \\ + D[(1 - \nu)\beta \cos \beta - (1 + \nu) \sin \beta] &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для того чтобы система имела нетривиальное решение, ее определитель должен обращаться в нуль; это приводит к трансцендентному уравнению относительно параметра β :

$$\cos 2\beta = \alpha_1 \beta^2 + \alpha_2, \quad (21)$$

где

$$\alpha_1 = 2 \frac{1 - \nu}{3 + \nu}, \quad \alpha_2 = -\frac{5 + 2\nu + \nu^2}{(3 + \nu)(1 - \nu)}. \quad (22)$$

Трансцендентное уравнение (21) получено аналогичными рассуждениями в той

или иной форме в работах ряда авторов [9 – 11]. Подробное исследование этого уравнения проведено в работе [11], где показано, что оно имеет бесчисленное множество комплексных корней. Причем, как легко видеть, если

$$\beta_k = p_k + iq_k \quad (23)$$

есть корень уравнения (21), то корнем будет и любая комбинация вида

$$\beta_k = \pm p_k \pm iq_k.$$

Подставляя выражение (23) в уравнение (21) и разделяя действительную и мнимую части, приходим к двум уравнениям, связывающим p_k и q_k :

$$\begin{aligned} \cos(2p_k) \text{ch}(2q_k) &= \alpha_1(p_k^2 - q_k^2) + \alpha_2, \\ \sin(2p_k) \text{sh}(2q_k) &= -2\alpha_1 p_k q_k. \end{aligned} \quad (24)$$

Корни этой системы таковы [11], что положительные числа p_k лежат в следующих пределах:

$$(2k - 1)\pi / 2 < p_k < k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (25)$$

При отыскании p_k и q_k для первого приближения можно принять, что

$$p_1 = 3\pi / 4, p_k = k\pi \quad (k = 2, 3, 4, \dots). \quad (26)$$

Мнимая часть найдется из трансцендентного уравнения

$$\text{sh } 2q_1 = \frac{3}{2} \pi \alpha_1 q_1 \quad (k = 1); \quad (27)$$

$$\text{ch } 2q_k + \alpha_1 q_k^2 = \alpha_1 \pi^2 k^2 + \alpha_2 \quad (k = 2, 3, 4, \dots).$$

Последующие приближения находятся по способу Ньютона:

$$\beta_{j+1} = \beta_j - f(\beta_j) / f'(\beta_j), \quad (28)$$

$$\text{где } f(\beta) = \cos 2\beta - \alpha_1 \beta^2 - \alpha_2. \quad (29)$$

В статье [11] приведены значения первых пяти кварталов комплексных корней для $\nu = 0,25$, однако в этом случае уравнение (21) имеет и два вещественных корня, которые различаются только знаками. Вещественные корни пропущены также в работе [9] для $\nu = 0,3$.

Подставляя выражение (23) в уравнение (28) и разделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\begin{aligned}
 p_{j+1} &= p_j + \frac{\tau\rho - \eta\psi}{2(\rho^2 + \psi^2)}, \\
 q_{j+1} &= q_j - \frac{\tau\psi + \eta\rho}{2(\rho^2 + \psi^2)}.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 \tau &= \cos(2p_j) \operatorname{ch}(2q_j) - \alpha_1(p_j^2 - q_j^2) - \alpha_2, \\
 \eta &= \sin(2p_j) \operatorname{sh}(2q_j) + 2\alpha_1 p_j q_j, \\
 \rho &= \sin(2p_j) \operatorname{ch}(2q_j) + \alpha_1 p_j, \\
 \psi &= \cos(2p_j) \operatorname{sh}(2q_j) + \alpha_1 q_j.
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Первые девять комплексных корней трансцендентного уравнения (21), рассчитанные нами на компьютере для $\nu = 0, 3$ по формулам (30), представлены в табл. 1.

Возвращаясь к системе (20), из ее первого уравнения получаем:

$$D = -\beta \frac{(1 + \nu) \sin \beta + (1 - \nu) \beta \cos \beta}{2 \cos \beta - (1 - \nu) \beta \sin \beta} A. \tag{32}$$

Заметим, что с помощью второго уравнения системы (20) также можно выразить D через A , но такая форма решения в конечном счете даст тот же результат, что и первая, так как они связаны уравнением (21).

Теперь однородные решения (18) запишутся в виде бесконечного ряда

Таблица 1

Рассчитанные значения корней $\beta_k = p_k + iq_k$

k	p_k	q_k
0	2,7068258	0
1	2,0272256	0,3565346
2	5,9638225	1,6741655
3	9,1813235	2,1312056
4	12,364771	2,4345402
5	15,534117	2,6642475
6	18,695830	2,8498262
7	21,852829	3,0057721
8	25,006673	3,1403666
9	28,158283	3,2588123

Примечание. Ошибка в последнем восьмом знаке каждого числа не превышает двух единиц.

$$w_{hs}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \operatorname{ch} \beta_k x F_k(y), \tag{33}$$

где собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned}
 F_k(y) &= d_k (\sin \beta_k y - \beta_k y \cos \beta_k y) - \\
 &- e_k \beta_k y \sin \beta_k y,
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

а в свою очередь

$$\begin{aligned}
 d_k &= 2 \cos \beta_k - (1 - \nu) \beta_k \sin \beta_k, \\
 e_k &= (1 + \nu) \sin \beta_k + (1 - \nu) \beta_k \cos \beta_k.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

В решении (33), которое удовлетворяет бигармоническому уравнению и граничным условиям на продольных кромках $y = 0, y = 1$, коэффициенты A_k должны определяться из граничных условий (12), (13) на поперечных кромках $x = \pm \gamma / 2$; эти граничные условия с учетом формулы (15) примут вид

$$\begin{aligned}
 [M_x]_{x=\pm\frac{\gamma}{2}} &= g(y) - \sum_k a_k [\beta_k^2 F_k(y) + \\
 &+ \nu F_k''(y)] = 0,
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
 [Q_x]_{x=\pm\frac{\gamma}{2}} &= -\sum_k a_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k [\beta_k^3 F_k(y) + \\
 &+ (2 - \nu) \beta_k F_k''(y)] = 0,
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

$$[R_{xy}]_{\substack{x=\pm\frac{\gamma}{2} \\ y=1}} = 2(1 - \nu) \sum_k a_k \beta_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k F_k'(1) = 0, \tag{38}$$

где сосредоточенная сила в угловой точке $R_{xy} = -2H_{xy}$;

$$\tilde{\beta}_k = \beta_k \gamma / 2, \quad a_k = A_k \operatorname{ch} \tilde{\beta}_k. \tag{39}$$

Таким образом, для того чтобы найти коэффициенты A_k (или a_k) ряда (33), нужно функцию $g(y)$ (см. формулу (15)) разложить в ряд по неортогональным функциям вида (36) и, кроме того, выполнить условия (37) и (38). Строго удовлетворить указанным требованиям не представляется возможным, поэтому обратимся к приближенному способу, основанному на минимизации некоторого функционала.

В работах [12, 13] доказывается, что элементарные однородные решения бигармонического уравнения образуют полную систему функций (о полноте системы функций см., например, работу [14]). Из этого, в частности, следует существование и единственность решения бесконечной

системы, получаемой путем минимизации функционала

$$\Phi = \Phi_2(a_0, a_1, \dots) + \Phi_1(a_0, a_1, \dots) + \Phi_0,$$

который является положительно-определенной функцией и представлен в виде суммы квадратичной (Φ_2) и линейной (Φ_1) форм коэффициентов a_k однородных решений и постоянного слагаемого. Из этого же следует сходимость метода редукции для определения a_k и сходимость приближенных решений при $k \rightarrow \infty$.

В качестве функционала Φ могут быть выбраны потенциальная энергия пластины, квадратичные отклонения от граничных условий задачи, работа этих невязок (силовых факторов) на соответствующих перемещениях и т. п.

Решение исходной задачи (17) с учетом формулы балочной функции (14) и бесконечного ряда (33) запишется в виде

$$w(x, y) = -(y^4 - 4y^3 + 6y^2) / 24 + \sum_k A_k \operatorname{ch} \beta_k x F_k(y), \quad (40)$$

где $A_k = a_k / \operatorname{ch} \tilde{\beta}_k$, а $F_k(y)$ определяется формулой (34).

Поскольку при замене комплексного параметра β_k ($k = 1, 2, \dots$) на сопряженное значение $\tilde{\beta}_k = p_k - iq_k$ (оно также является корнем уравнения (21)) выражение под знаком суммы в решении (40) тоже заменится на сопряженное, то результат, как и следовало ожидать, получается вещественным.

Если теперь заметить, что функции $F_k(y)$ и коэффициенты A_k нечетны по отношению к β_x , то решение задачи можно записать в виде

$$w(x, y) = -(y^4 - 4y^3 + 6y^2) / 24 + 2A_0 \operatorname{ch} \beta_0 x F_0(y) + 4 \operatorname{Re} \sum_{k=1,2,\dots} A_k \operatorname{ch} \beta_k x F_k(y), \quad (41)$$

где учитываются лишь те собственные числа $\beta_k = p_k + iq_k$, которые имеют положительные действительные и мнимые части $p_k, q_k > 0$ (в случае двух вещественных корней учитывается корень $\beta_0 > 0$).

Определение коэффициентов в однородных решениях минимизацией работы краевых невязок

Для того чтобы найти указанные коэффициенты, используем левые части граничных условий на поперечных кромках $x = \pm \gamma / 2$ и в углах свободного контура (36) – (38). Эти выражения будем называть невязками граничных условий, так как в общем случае они отличны от нуля.

Минимизируем работу указанных невязок на соответствующих перемещениях.

Эта работа следует выражению

$$P = \int_0^1 (-M_x w'_x + Q_x w)_{x=\gamma/2} dy + (R_{xy} w)_{x=\gamma/2, y=1}. \quad (42)$$

Подставляя в это выражение формулы (17), (33), (36) – (38), получим:

$$P = - \int_0^1 \left\{ \left[g(y) - \sum_k a_k [\beta_k^2 F_k(y) + \nu F_k''(y)] \right] \times \right. \\ \times \sum_k a_k \beta_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k F_k(y) + \left[w_\delta(y) + \sum_k a_k F_k(y) \right] \times \\ \left. \times \sum_k a_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k [\beta_k^3 F_k(y) + (2 - \nu) \beta_k F_k''(y)] \right\} dy + \\ + 2(1 - \nu) \left[w_\delta(1) + \sum_k a_k F_k(1) \right] \times \\ \times \sum_k a_k \beta_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k F_k'(1). \quad (43)$$

Условие минимума функционала выражается как

$$\partial P / \partial a_j = 0 \quad (44)$$

и приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_k :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{kj} = T_j, \quad (45)$$

где

$$J_{kj} = \int_0^1 [L_k^{(M)}(y) L_j^{(9)}(y) + L_j^{(M)}(y) L_k^{(9)}(y) - \\ - L_k^{(Q)}(y) F_j(y) - L_j^{(Q)}(y) F_k(y)] dy + \\ + 2(1 - \nu) [L_k^{(R)} F_j(1) + L_j^{(R)} F_k(1)], \quad (46)$$

$$T_j = \int_0^1 [g(y) L_j^{(9)}(y) + w_\delta(y) L_j^{(Q)}(y)] dy - \\ - 2(1 - \nu) w_\delta(1) L_j^{(R)}; \quad (47)$$

функции, обозначенные буквой L , имеют вид

$$\begin{aligned} L_k^{(S)}(y) &= \beta_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k F_k(y), \quad L_k^{(R)} = \beta_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k F_k'(1), \\ L_k^{(M)}(y) &= \beta_k^2 F_k(y) + \nu F_k''(y), \quad (48) \\ L_k^{(O)}(y) &= [\beta_k^3 F_k(y) + (2 - \nu)\beta_k F_k''(y)] \operatorname{th} \tilde{\beta}_k. \end{aligned}$$

Аналогичные функции с индексом j получаются из соответствующих выражений заменой индексов.

Выполняя интегрирование в выражениях (46), (47) и обычные преобразования, получим:

$$\begin{aligned} T_j &= \frac{1}{24\beta_j^2} \operatorname{th} \tilde{\beta}_j \{ d_j [3(1 - \nu)\beta_j^4 - \\ &- 4(1 + \nu)\beta_j^2 - 24(1 - 2\nu)] \beta_j \sin \beta_j + \\ &+ 2[(1 + 2\nu)\beta_j^4 - 24(1 - 4\nu)] \cos \beta_j + 48\nu\beta_j^2 + \\ &+ 48(1 - 4\nu)\} - e_j \{ [(1 - 7\nu)\beta_j^4 + \\ &+ 24(1 - 6\nu)] \sin \beta_j + [3(1 - \nu)\beta_j^4 - 8\beta_j^2 - \\ &- 24(1 - 2\nu)] \beta_j \cos \beta_j + 96\nu\beta_j \}; \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{kj} &= -\frac{1}{2} \{ (h_\varepsilon - h_\omega) d_k d_j t_1 - (m_\omega - m_\varepsilon) e_k d_j t_2 - \\ &- (m_\omega + m_\varepsilon) d_k e_j \tilde{t}_2 + (s_\varepsilon - s_\omega) (e_k d_j t_3 + d_k e_j \tilde{t}_3) + \\ &+ (s_\omega + s_\varepsilon) (e_k d_j \beta_j t_2 + d_k e_j \beta_k \tilde{t}_2) + \\ &+ (u_\omega - u_\varepsilon) (d_k d_j t_3 + e_k e_j \beta_j t_2) + \\ &+ (u_\omega - u_\varepsilon) (d_k d_j \tilde{t}_3 + e_k e_j \beta_k \tilde{t}_2) - \\ &- t_4 [(d_k d_j - e_k e_j) l_\omega + (d_k d_j + e_k e_j) l_\varepsilon + \\ &+ (d_k e_j + e_k d_j) n_\omega + (e_k d_j - d_k e_j) n_\varepsilon] - \\ &- 4(1 - \nu) (t_5 + \tilde{t}_5) \} \quad (k \neq j), \quad (50) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} t_1 &= \beta_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k [(3 - \nu)\beta_k^2 - (1 + \nu)\beta_j^2] + \\ &+ \beta_j \operatorname{th} \tilde{\beta}_j [(3 - \nu)\beta_j^2 - (1 + \nu)\beta_k^2], \\ t_2 &= 2\beta_k^2 [(2 - \nu)\beta_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k - \nu\beta_j \operatorname{th} \tilde{\beta}_j], \\ t_3 &= \beta_k \{ \beta_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k [(1 - \nu)\beta_k^2 + (1 + \nu)\beta_j^2] - \\ &- \beta_j \operatorname{th} \tilde{\beta}_j [(3 - \nu)\beta_j^2 - (1 - \nu)\beta_k^2] \}, \\ t_4 &= (1 - \nu)\beta_k \beta_j (\beta_k^2 + \beta_j^2) (\beta_k \operatorname{th} \tilde{\beta}_k + \beta_j \operatorname{th} \tilde{\beta}_j), \\ t_5 &= \beta_k^2 \operatorname{th} \tilde{\beta}_k [d_k \beta_k \sin \beta_k - \\ &- e_k (\sin \beta_k + \beta_k \cos \beta_k)] \times \\ &\times [d_j (\sin \beta_j - \beta_j \cos \beta_j) - e_j \beta_j \sin \beta_j]. \quad (51) \end{aligned}$$

Коэффициенты $\tilde{t}_2, \tilde{t}_3, \tilde{t}_5$ получаются из соответствующих выражений путем перестановки индексов k и j . Величины d_k, e_k определяются по формуле (35); значения коэффициентов h, l, m, n, s, u с индексом ω определяются следующими выражениями (значения с индексом ε получаются заменой индексов):

$$\begin{aligned} h_\omega &= \frac{1}{\omega} \sin \omega, \quad l_\omega = \frac{1}{\omega^3} [2\omega \cos \omega + (\omega^2 - 2) \sin \omega], \\ m_\omega &= \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega), \\ n_\omega &= \frac{1}{\omega^3} [2\omega \sin \omega - (\omega^2 - 2) \cos \omega - 2], \\ s_\omega &= \frac{1}{\omega^2} (\cos \omega + \omega \sin \omega - 1), \\ u_\omega &= \frac{1}{\omega^2} [\sin \omega - \omega \cos \omega], \quad (52) \end{aligned}$$

где $\omega = \beta_k + \beta_j, \quad \varepsilon = \beta_k - \beta_j$.

При $k = j$ в формуле (50) следует заменить индекс k на j у коэффициентов d, e, t и параметра β . Кроме того, в этом случае

$$\begin{aligned} m_\varepsilon &= n_\varepsilon = u_\varepsilon = 0, \quad l_\varepsilon = \frac{1}{3}, \quad s_\varepsilon = \frac{1}{2}, \\ h_\varepsilon - h_\omega &= 1 - \frac{1}{2\beta_j} \sin 2\beta_j, \quad m_\omega = \frac{1 - \cos 2\beta_j}{2\beta_j}, \\ n_\omega &= \frac{1}{8\beta_j^3} [4\beta_j \sin 2\beta_j - (4\beta_j^2 - 2) \cos 2\beta_j - 2], \\ l_\omega &= \frac{1}{8\beta_j^3} [4\beta_j \cos 2\beta_j + (4\beta_j^2 - 2) \sin 2\beta_j], \\ s_\omega &= \frac{1}{4\beta_j^2} (\cos 2\beta_j - 1 + 2\beta_j \sin 2\beta_j), \\ u_\omega &= \frac{1}{4\beta_j^2} (\sin 2\beta_j - 2\beta_j \cos 2\beta_j). \quad (53) \end{aligned}$$

Выделим из комплексной системы (45) действительную и мнимую части, положив, как и ранее, $a_k = \lambda_k + i\mu_k$; тогда получим систему $2 \times \infty$ линейных уравнений типа относительно вещественных неизвестных λ_k, μ_k . Выражение этой системы — весьма громоздкое и поэтому здесь не приводится.

Решив указанную систему относительно λ_k, μ_k , мы тем самым найдем комплексные

коэффициенты a_k , дающие минимум функционалу (43). Составленная компьютерная программа позволяет находить указанные вещественные части комплексных коэффициентов

$$a_k = \lambda_k + i\mu_k.$$

Программой предусмотрено вычисление прогибов свободного края ($y = 1$) и изгибающих моментов защемленного края ($y = 0$):

$$[w]_{y=1} = -\frac{1}{8} - 4a_0 \left(\beta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_0 \right) \frac{\text{ch } \beta_0 x}{\text{ch}(\beta_0 \gamma / 2)} - 8 \operatorname{Re} \sum_{k=1,2,\dots} a_k \left(\beta_k - \frac{1}{2} \sin 2\beta_k \right) \frac{\text{ch } \beta_k x}{\text{ch}(\beta_k \gamma / 2)}, \quad (54)$$

$$[M_y]_{y=0} = \frac{1}{2} + 4a_0 \beta_0^2 e_0 \frac{\text{ch } \beta_0 x}{\text{ch}(\beta_0 \gamma / 2)} + 8 \operatorname{Re} \sum_{k=1,2,\dots} a_k \beta_k^2 e_k \frac{\text{ch } \beta_k x}{\text{ch}(\beta_k \gamma / 2)}. \quad (55)$$

При вычислениях использовалась укороченная система (45), соответствующая количеству n собственных чисел β_k , которое принималось последовательно равным $n = 2, 3, \dots, 8$. Программа была составлена для традиционной системы программирования Фортран, которая использует вычисления с обычной точностью (восемь десятичных цифр в мантиссе).

Коэффициенты a_k однородных решений, прогибы и изгибающие моменты вычислялись для пластин с отношением сторон $\gamma = 0, 5; 1; 2$. В данной статье приведены численные результаты лишь для пластины с отношением сторон $\gamma = 2$. Табл. 2 содержит значения действительных и мнимых частей коэффициентов a_k для различных приближений. На рис. 2 приведены соответственно графики прогибов кромки $y = 1$ и изгибающие моменты M_y в заделке.

Таблица 2

Значения коэффициентов a_k однородных решений для консольной пластины с отношением сторон $\gamma = 2$ в различных приближениях

n a_k	2	3	4	5	6	7
a_0	$3,5460 \cdot 10^{-4}$ 0	$-1,6904 \cdot 10^{-4}$ 0	$-2,8560 \cdot 10^{-4}$ 0	$-2,3812 \cdot 10^{-4}$ 0	$-3,0673 \cdot 10^{-4}$ 0	$-2,8112 \cdot 10^{-4}$ 0
a_1	$-4,8938 \cdot 10^{-4}$ $1,9224 \cdot 10^{-3}$	$1,1152 \cdot 10^{-4}$ $7,0776 \cdot 10^{-4}$	$3,0931 \cdot 10^{-4}$ $3,9588 \cdot 10^{-4}$	$2,7873 \cdot 10^{-4}$ $1,3223 \cdot 10^{-4}$	$2,4019 \cdot 10^{-4}$ $3,0081 \cdot 10^{-4}$	$2,1043 \cdot 10^{-4}$ $1,5977 \cdot 10^{-4}$
a_2	—	$-5,0662 \cdot 10^{-6}$ $1,6410 \cdot 10^{-5}$	$3,8333 \cdot 10^{-6}$ $8,6984 \cdot 10^{-6}$	$2,2329 \cdot 10^{-6}$ $7,2097 \cdot 10^{-6}$	$4,1138 \cdot 10^{-6}$ $3,8810 \cdot 10^{-6}$	$3,7921 \cdot 10^{-6}$ $3,7000 \cdot 10^{-6}$
a_3	—	—	$8,2457 \cdot 10^{-7}$ $1,4970 \cdot 10^{-6}$	$8,2633 \cdot 10^{-7}$ $2,8363 \cdot 10^{-7}$	$7,5411 \cdot 10^{-7}$ $7,2660 \cdot 10^{-7}$	$7,5629 \cdot 10^{-7}$ $6,2377 \cdot 10^{-7}$
a_4	—	—	—	$-3,8964 \cdot 10^{-8}$ $1,5435 \cdot 10^{-7}$	$1,7640 \cdot 10^{-7}$ $1,0928 \cdot 10^{-7}$	$5,3895 \cdot 10^{-8}$ $1,0721 \cdot 10^{-7}$
a_5	—	—	—	—	$7,2555 \cdot 10^{-8}$ $6,3986 \cdot 10^{-9}$	$9,0276 \cdot 10^{-8}$ $2,0807 \cdot 10^{-8}$
a_6	—	—	—	—	—	$1,9447 \cdot 10^{-8}$ $5,4913 \cdot 10^{-9}$

Примечания. $a_k = \lambda_k + i\mu_k$; верхние числа относятся к значениям λ_k , нижние — к значениям μ_k ; n — количество собственных чисел β_k .

Кривая 1 соответствует решению, полученному методом суперпозиции исправляющих функций [3]. Номера кривых на каждом графике, начиная со второго и до предпоследнего, соответствуют количеству $n = 2, 3, \dots$ удерживаемых однородных решений в выражении (40). При этом последняя прямая линия соответствует цилиндрическому изгибу. Для сравнения на рисунках приведены кривые с нулевыми номерами, полученные в работе [10] при учете собственных чисел β_0 и β_1 .

Приведенные результаты (табл. 2 и рис. 2) показывают, что с увеличением числа членов в выражении (40) имеет место сходимость полученного решения. Однако сравнение графиков прогибов и моментов с аналогичными кривыми, полученными методом суперпозиции исправляющих функций [3] указывает на то, что применение данного способа для отыскания коэффициентов однородных решений дает заниженные значения изгибающих моментов M_y в заданном сечении, хотя поведение кривых аналогичное. Полученные абсолютные значения прогибов оказались также ниже, чем соответствующие значения, для определения которых использовался метод суперпозиции.

Авторы работ [10, 15] отмечают, что с увеличением числа членов в выражении функции прогибов (более двух-трех), представляющем собой некоторый ряд по начальным [10] или однородным [15] функциям, численные результаты дают расходящееся решение (так это и получено в указанных публикациях). Снижение точности связывается авторами с ростом модулей собственных чисел β_k , что приводит к сближению гиперболических функций синуса и косинуса, содержащих эти величины. В работе [10] указывается, что увеличение количества удерживаемых членов в решении необходимо сопровождать увеличением и числа значащих цифр в корнях β_k , а также во всех вычислениях.

В настоящей работе все расчеты, включая вычисление собственных чисел β_k , производились более точно, чем в работах [10, 15]. Поэтому построение решения, дающего минимум функционалу (43), имело

характер сходящегося процесса, как это и должно быть. Однако сравнение с результатами, полученными методом суперпозиции исправляющих функций, приводит к заключению, что проведенные нами расчеты методом однородных решений также трудно признать полностью удовлетвори-

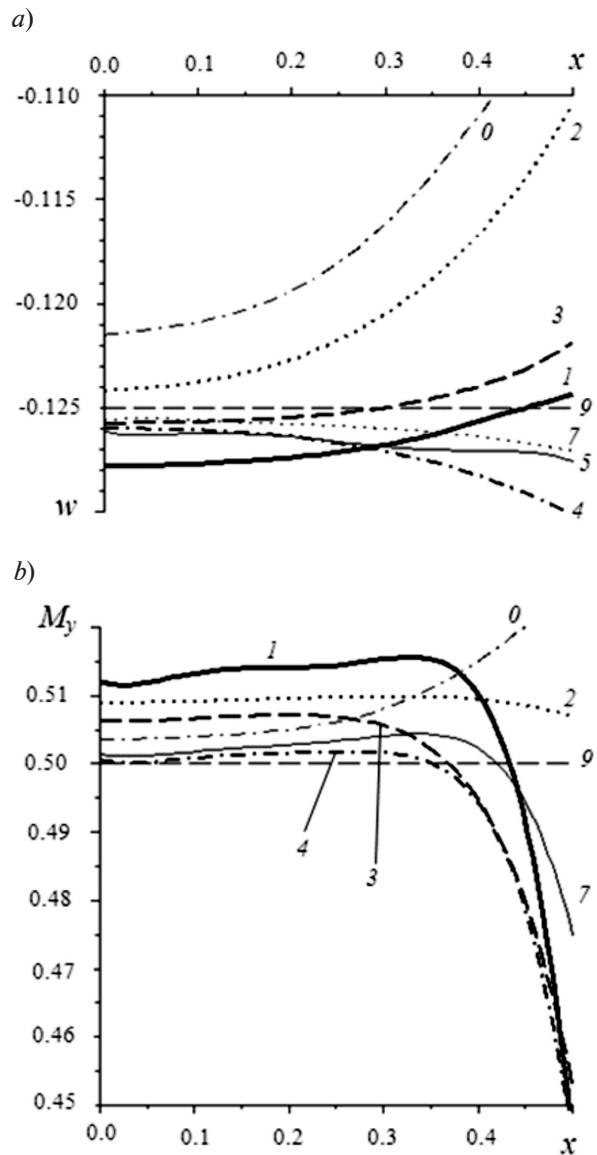


Рис. 2. Линии прогибов грани $y = 1$ (a) и эпюры изгибающих моментов M_y в корневом сечении (b) консольной пластины с $\gamma = 2$.

Номера кривых 2 – 5, 7 соответствуют значению n (см. табл. 2), прямые 9 – цилиндрическому изгибу; кривые 0 и 1 относятся к решениям [10] и [3] соответственно

тельными. Например, численные результаты для пластин с отношением сторон 0,5 и 1,0 еще хуже согласуются с известными и более достоверными данными [3, 16, 17], полученными другими методами. По всей вероятности, лучших результатов можно достичь, если проводить все вычисления с увеличенной мантиссой (например, в системе Maple).

В работе [18] отмечается вычислительная неустойчивость алгоритма начальных функций (аналог метода однородных решений) для плоских задач теории упругости в прямоугольной области при использовании тригонометрических рядов для высоких гармоник. Автор статьи [18] связывает это как с накоплением ошибок при расчете числовых коэффициентов в рядах, так и с характером сходимости самих рядов, приводящим к большой потере верных цифр в получаемой сумме этих рядов. Указанные суммы используются, в свою очередь, в качестве коэффициентов разрешающей системы, которая становится плохо обусловленной с увеличением номера гармоники. Решение проблемы автор работы [18] видит в наращивании мантиссы при вычислениях в системе аналитических вычислений Maple и проводит соответствующие вычислительные эксперименты. Однако в указанной работе не объясняется, почему другие приближенные методы не обладают этим недостатком.

Заключение

В статье проанализирован метод, предложенный П.Ф. Папковичем, и его приложение для консольной прямоугольной пластины при изгибе равномерной нагрузкой. При рассмотрении задачи установлено, что процесс последовательных приближений при увеличении числа однородных решений является сходящимся. Характер графиков прогибов свободного края напротив заделки и изгибающих моментов в заделке дает правильную качественную картину напряженно-деформированного состояния пластины, однако численные результаты оказываются заниженными по сравнению с таковыми, полученными методом суперпозиции исправляющих функций. Решение комплексной системы вызывает как значительные трудности, так и препятствия, относящиеся к неустойчивости вычислительного процесса.

В дальнейшем предполагается провести по разработанному алгоритму численные эксперименты в аналитической системе программирования Maple, которая позволяет производить вычисления с мантиссой произвольной длины. Путем увеличения мантиссы и контроля выполнения граничных условий на боковых кромках планируется исследовать причины неустойчивости метода и найти как оптимальный размер мантиссы, так и оптимальное число однородных решений, которые бы обеспечивали приемлемую точность решения задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Holl D.L.** Cantilever plate with concentrated edge load // *Journal of Applied Mechanics*. 1937. Vol. 4. No. 1. Pp. 8–10.
- [2] **Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K.** The finite element method for analysis of elastic isotropic and ortotropic slabs // *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. 1964. Vol. 28. Aug., Pp. 471–488.
- [3] **Сухотерин М.В.** Прямоугольная консольная пластина под действием поперечной нагрузки // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика, телекоммуникации, управление*. 2009. № 4 (82). С. 101–106.
- [4] **Папкович П.Ф.** Строительная механика корабля. Ч. 2. Л.: Судпромгиз, 1941. 960 с.
- [5] **Schiff P.A.** Sur l'équilibre d'une cylinder élastique // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1883. Vol. 9. Ser. 3. Pp. 407–421.
- [6] **Папкович П.Ф.** Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // *Доклады АН СССР*. 1940. Т. 27. № 4 С. 335–339.
- [7] **Прокопов В.К.** О соотношении обобщенной ортогональности Папковича для прямоугольной пластинки // *Прикладная математика и механика*. 1964. Т. 28. № 2. С. 351–355.
- [8] **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
- [9] **Груздев Ю.А., Прокопов В.К.** Применение однородных решений к задаче изгиба консольной плиты // *Труды Ленинградского политех-*

нического института. 1966. № 266. С. 54–63.

[10] **Агарев В.А.** Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 203 с.

[11] **Китовер К.А.** Об использовании специальных систем бигармонических функций для решения некоторых задач теории упругости // Прикладная математика и механика. 1952. Т. 16. № 6. С. 739–748.

[12] **Устинов Ю.А., Юдович В.И.** О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. № 4. С. 707–714.

[13] **Устинов Ю.А.** О полноте системы однородных решений теории плит // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. № 3. С. 236–243.

[14] **Канторович Л.В., Крылов В.И.** Приближенные методы высшего анализа. Л.-М.: ГИТТЛ, 1949. 695 с.

[15] **Журавская О.А., Дьяченко Д.Я.** К расчету консольных пластин // Труды Магнитогорского горно-металлургического института. 1971. № 77. С. 74–80.

[16] **Даль Ю.М.** Об изгибе упругой консольной пластины переменной толщины // Расчет пространственных конструкций. № 16. М.: Стройиздат, 1974. С. 169–178.

[17] **Bauer F., Reiss E.L.** Stresses in cantilever plates // Computers and Structures. 1972. Vol. 2. No. 4. Pp. 675–691.

[18] **Матросов А.В.** Вычислительная неустойчивость алгоритма метода начальных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2010. Сер. 10. № 4. С. 30–39.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

СУХОТЕРИН Михаил Васильевич — доктор технических наук, заведующий кафедрой математики Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7 mv@sukhoterin.com

БАРЫШНИКОВ Сергей Олегович — доктор технических наук, ректор Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7 rector@gumrf.ru

ЛОМТЕВА Ксения Олеговна — аспирантка кафедры прикладной математики Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7 lomteva_ksu@mail.ru

Sukhoterin M.V., Baryshnikov S.O., Lomteva K.O. ON HOMOGENEOUS SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF A RECTANGULAR CANTILEVER PLATE BENDING.

The paper considers the method, suggested by P.F. Papkovich for rectangular plates and its application for a cantilever plate with a bending under a uniform load. The required function of bendings is chosen in the form of a sum of the corresponding beam function and a biharmonic function, which is a series in terms of unorthogonal eigenfunctions of the problem. The eigenfunctions satisfy the homogeneous boundary conditions on the longitudinal edges (the clamped and the opposite ones). It is suggested to find series coefficients from the condition of the minimum discrepancies work on the corresponding displacements of the transverse edges. It leads to an infinite system of linear algebraic equations for the required coefficients in the complex form. The coefficients of homogeneous solutions were found for the cases in which the approximating series contained sequentially 2, 3, ..., 7 terms. The eigenvalues, the bendings of the edge opposite to the clamped edge, and the bending moments in the clamped section were calculated. Convergence of the reduction method and stability of the computational process were analyzed.

RECTANGULAR CANTILEVER PLATE, BENDING, HOMOGENEOUS SOLUTION, NUMERICAL RESULT, INSTABILITY OF CALCULATIONS.

REFERENCES

- [1] **D.L. Holl**, Cantilever plate with concentrated edge load, *Journal of Applied Mechanics*. 4(1) (1937) 8–10.
- [2] **O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung**, The finite element method for analysis of elastic isotropic and ortotropic slabs, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. 28 (8) (1964) 471–488.
- [3] **M.V. Sukhoterin**, Rectangular cantilever plate under transverse load, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunications and Control Systems*. 4 (82) (2009) 101–106.
- [4] **P.F. Papkovich**, *Stroitel'naya mekhanika korablya, Ch. 2. [Structural mechanics of a ship], Part 2*, Leningrad, Sudpromgiz, 1941.
- [5] **P.A. Schiff**, Sur l'équilibre d'une cylinder élastique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 9(3) (1883) 407–421.
- [6] **P.F. Papkovich**, Ob odnoy forme resheniya ploskoy zadachi teorii uprugosti dlya pryamougolnoy polosy [About one form of solution of plane problem of elasticity theory for a rectangular strip], *Doklady AN SSSR*. 27(4) (1940) 335–339.
- [7] **V.K. Prokopov**, Osootnoshenii obobshchennoy ortogonalnosti Papkovicha dlya pryamougolnoy plastinki [On the ratio of generalized orthogonality of Papkovich for the rectangular plate], *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 28(2) (1964) 351–355.
- [8] **S.P. Timoshenko, S. Voynovskiy-Kriger**, *Plastinki i obolochki [Plates and shells]*, Moscow, Fizmatgiz, 1963.
- [9] **Yu.A. Gruzdev, V.K. Prokopov**, Primeneniye odnorodnykh resheniy k zadache izgiba konsolnoy plity [An application of homogeneous solutions to the problem of bending of a cantilever plate] *Trudy Leningradskogo politekhnicheskogo instituta*. No. 266 (1966) 54–63.
- [10] **V.A. Agarev**, Metod nachalnykh funktsiy dlya dvumernykh krayevykh zadach teorii uprugosti [Method of initial functions for two-dimensional boundary value problems of elasticity theory], Kiev, izd-vo Akad. Nauk USSR, 1963.
- [11] **K.A. Kitover**, Ob ispolzovanii spetsialnykh sistem bigarmonicheskikh funktsiy dlya resheniya nekotorykh zadach teorii uprugosti. [On the use of special systems of biharmonic functions for the solution of some problems of elasticity theory], *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 16(6) (1952) 739–748.
- [12] **Yu.A. Ustinov, V.I. Yudovich**, O polnote sistemy elementarnykh resheniy bigarmonicheskogo uravneniya v polupolose. [On completeness of the system of elementary solutions of biharmonic equation in a strip], *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 37(4) (1973) 707–714.
- [13] **Yu.A. Ustinov**, O polnote sistemy odnorodnykh resheniy teorii plit. [On the completeness of the system of homogeneous solutions of the theory of plates], *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 40(3) (1976) 236–243.
- [14] **L.V. Kantorovich, V.I. Krylov**, *Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximate methods of higher analysis]*, Leningrad, Moscow, GITTL, 1949.
- [15] **O.A. Zhuravskaya, D.Ya. Dyachenko**, K raschetu konsolnykh plastin. [To the calculation of cantilever plates]. *Trudy Magnitogorskogo gornometallurgicheskogo instituta*. No. 77 (1971) 74–80.
- [16] **Yu.M. Dal**, Ob izgibe uprugoy konsolnoy plastiny peremennoy tolshchiny [About the bending of an elastic cantilever plate of variable thickness], *Raschet prostranstv. Konstruktsiy*, No. 16, Moscow, Stroyizdat. (1974) 169–178.
- [17] **F. Bauer, E.L. Reiss**, Stresses in cantilever plates, *Computes and Structures*. 2(4) (1972) 675–691.
- [18] **A.V. Matrosov**, Vychislitel'naya neustoychivost algoritma metoda nachalnykh funktsiy [Computational instability of the algorithm of the method of initial functions], *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*. 10(4) (2010) 30–39.

THE AUTHORS

SUKHOTERIN Mikhail V.

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya St., Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation
mv@sukhoterin.com

BARYSHNIKOV Sergey O.

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya St., Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation
rector@gumrf.ru

LOMTEVA Kseniya O.

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya St., Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation
lomteva_ksu@mail.ru