

DOI: 10.5862/JPM.242.14

УДК: 539.3

*В.В. Тихомиров*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## **ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ ТРЕЩИНА МОДЫ III В БИМАТЕРИАЛЬНОМ КЛИНЕ**

Получено точное решение антиплоской задачи для полубесконечной интерфейсной трещины в кусочно-однородном клине при самоуравновешенной нагрузке на ее берегах. Рассмотрены три типа граничных условий на сторонах клина: обе стороны свободны от напряжений, обе стороны защемлены и одна сторона свободна, а вторая защемлена. В результате применения метода Винера–Хопфа решение представлено в квадратурах. Для коэффициентов интенсивности напряжений получены функции Грина, а в случае клина геометрически симметричной структуры для них найдены простые формулы. Изучена сингулярность напряжений в вершине клина. В отличие от однородной структуры, асимптотика напряжений вблизи вершины при некоторых значениях параметров композита может иметь два сингулярных члена.

ИНТЕРФЕЙСНАЯ ТРЕЩИНА МОДЫ III, БИМАТЕРИАЛЬНЫЙ КЛИН, КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ.

### **Введение**

Исследованию полей напряжений при антиплоской деформации клиновидных областей, содержащих дефекты типа трещин, посвящен ряд публикаций. Помимо самостоятельного значения, интерес к изучению этой проблемы связан, например, с возникновением и распространением трещин в зоне высокой концентрации напряжений вблизи вершины острого выреза. Как правило, в литературе рассматривались трещины конечной длины, которые ориентированы вдоль интерфейса разнородных материалов композита, причем как изотропных, так и анизотропных.

Одной из первых работ в этом направлении явилась статья Ф. Эрдогана и Г. Гупты [1], в которой рассмотрена интерфейсная трещина в композитном клине, получено сингулярное интегральное уравнение и использован численный метод его решения. В работе [2] для случая нескольких коллинеарных трещин, расположенных на оси симметрии изотропного клина, построено точное решение. Анализ трещины, исходящей из вершины анизотропного клина, был проведен А. Шахани [3]. На основе метода

дислокаций в работе [4] для нескольких произвольно ориентированных трещин в изотропном клине получена система сингулярных интегральных уравнений, для решения которой была предложена численная процедура. К. Ву, Ю. Дзенис и В. Зоу [5] исследовали методом комплексных потенциалов равновесие клина, состоящего из двух трансверсально-изотропных пьезоэлектрических материалов, с интерфейсной трещиной конечной длины.

В работе [6] было установлено, что решение антиплоской задачи для композитного анизотропного клина может быть получено из решения соответствующей задачи, в которой материалы являются изотропными, с помощью преобразования полярных координат. По этой причине решения, полученные для изотропных компонент композита, приобретают особую важность.

Эффективный способ построения точных решений задач рассматриваемого направления продемонстрирован в работах Х. Беома и Х. Янга [7, 8] для интерфейсной трещины и трещины, лежащей вне зоны интерфейса. Для случая нагружения граней клина сосредоточенными силами авторы свели задачу к скалярному уравнению Ви-

нера – Хопфа. Однако при решении этого уравнения для факторизации функций использовался метод бесконечных произведений, что несколько снижает эффективность подхода.

В настоящей работе исследовано равновесие кусочно-однородного клина с полубесконечной интерфейсной трещиной моды III, на берегах которой приложена самоуравновешенная нагрузка. Рассмотрены три варианта граничных условий на сторонах клина:

- 1) обе стороны свободны от напряжений;
- 2) обе стороны защемлены;
- 3) одна сторона свободна, а вторая защемлена.

В каждом из вариантов с помощью интегрального преобразования Меллина задача сведена к задаче Римана [9]. На основе техники, развитой в работе [10], построено ее точное решение в квадратурах. При этом факторизация функций выполнена с использованием интегралов типа Коши. В случае геометрически симметричной структуры композита получены простые формулы для коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины. Исследованы предельные ситуации, когда относительная жесткость композита стремится к нулю или к бесконечности. Изучена сингулярность напряжений в вершине клина.

Оказывается, что в отличие от случая однородного материала, при некоторых значениях параметров композиции асимптотика напряжений вблизи этой особой точки будет содержать два сингулярных члена. Данный факт не был отмечен в предыдущих работах рассматриваемой тематики [11, 12].

### Постановка задачи и ее сведение к задаче Римана

Рассмотрим полубесконечную интерфейсную трещину моды III между двумя разнородными клиньями с углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (рис. 1). Материалы клиньев в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  будем считать изотропными, однородными и имеющими модули сдвига  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Контакт материалов вне трещины предпо-

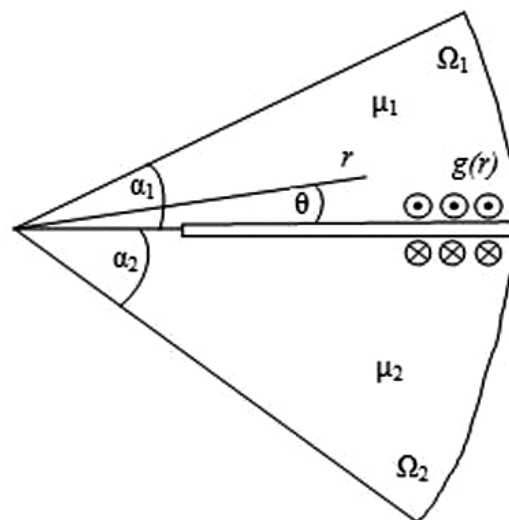


Рис. 1. Биматериальный клин с интерфейсной полубесконечной трещиной:

$\Omega_1, \Omega_2$  – области материала с модулями сдвига  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \theta, r$  – геометрические параметры;  $g(r)$  – самоуравновешенная нагрузка, приложенная к берегам трещины

лагается идеальным. Без ущерба общности будем считать, что вершина трещины находится на расстоянии единичной длины от вершины композитного клина. К берегам трещины приложена самоуравновешенная нагрузка  $g(r)$  ( $r$  – полярный радиус).

Как известно, перемещения  $w_j$  в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в рассматриваемом случае являются гармоническими функциями:

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial r} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

а напряжения в полярных координатах  $r$  и  $\theta$  определяются формулами

$$\tau_{\theta z j} = \frac{\mu_j}{r} \frac{\partial w_j}{\partial \theta}, \quad \tau_{r z j} = \mu_j \frac{\partial w_j}{\partial r}. \quad (2)$$

На линии  $\theta = 0$  напряжения и перемещения удовлетворяют условиям

$$\tau_{\theta z 1}(r, +0) = \tau_{\theta z 2}(r, -0),$$

$$w_1(r, +0) = w_2(r, -0) \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (3)$$

$$\tau_{\theta z 1}(r, +0) = \tau_{\theta z 2}(r, -0) = g(r) \quad (1 \leq r < \infty).$$

Рассмотрим три варианта граничных условий на сторонах клина:

$$\tau_{\theta z 1}(r, \alpha_1) = \tau_{\theta z 1}(r, -\alpha_2) = 0 \quad (\text{задача 1}); \quad (4)$$

$$w_1(r, \alpha_1) = w_2(r, -\alpha_2) = 0 \quad (\text{задача 2}); \quad (5)$$

$$\tau_{\theta z 1}(r, \alpha_1) = 0, \quad w_2(r, -\alpha_2) = 0 \quad (\text{задача 3}). \quad (6)$$

Решение каждой задачи ищем в виде интегралов Меллина ( $n$  – номер задачи):

$$w_{jn}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L W_{jn}(p, \theta) r^{-p} dp \quad (7)$$

$$(j = 1, 2; n = 1, 2, 3),$$

$$\tau_{\theta z n}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L T_{\theta z n}(p, \theta) r^{-p-1} dp,$$

$$\tau_{r z n}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L T_{r z n}(p, \theta) r^{-p-1} dp,$$

где трансформанты перемещений и напряжений в соответствии с равенствами (1) и (2) определяются следующими формулами:

$$W_{jn}(p, \theta) = A_{jn}(p) \sin p\theta + B_{jn}(p) \cos p\theta; \quad (8)$$

$$T_{\theta z n}(p, \theta) = \mu_j p [A_{jn}(p) \cos p\theta - B_{jn}(p) \sin p\theta];$$

$$T_{r z n}(p, \theta) = -\mu_j p [A_{jn}(p) \sin p\theta + B_{jn}(p) \cos p\theta].$$

Согласно условиям регулярности, контур интегрирования  $L$  расположен параллельно мнимой оси в полосе

$$-\varepsilon < \operatorname{Re} p < \delta \quad (\varepsilon, \delta > 0).$$

Величины  $A_{jn}(p)$  и  $B_{jn}(p)$  находятся из равенств (3) и соответствующих рассматриваемой задаче условий (4) – (6).

Из условий (3), с учетом представлений (7) и (8) имеем:

$$\mu_1 p A_{1n}(p) = \mu_2 p A_{2n}(p) = T_{n+}(p) + G_-(p),$$

$$-p [B_{1n}(p) - B_{2n}(p)] = U_{n-}(p),$$

где

$$T_{n+}(p) = \int_0^1 \tau_{\theta z 1n}(r, +0) r^p dr,$$

$$G_-(p) = \int_1^\infty g(r) r^p dr,$$

$$U_{n-}(p) = \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial r} [w_{1n}(r, +0) - w_{2n}(r, -0)] r^p dr.$$

Функции  $G_-(p)$  и  $U_{n-}(p)$  регулярны и не имеют нулей в левой от контура  $L$  полуплоскости  $\Omega_-$ , а  $T_{n+}(p)$  – в правой полуплоскости  $\Omega_+$  [13].

Используя граничные условия на сторо-

нах клина (4) – (6), приходим к неоднородным скалярным задачам Римана [9]:

$$F_n(p) [T_{n+}(p) + G_-(p)] - q \mu_2 U_{n-}(p) = 0 \quad (9)$$

$$(p \in L; n = 1, 2, 3).$$

Здесь  $q = (-1)^n$ , в качестве контура  $L$  может быть взята мнимая ось, а функции  $F_n(p)$  имеют вид

$$F_1(p) = \mu \operatorname{ctg} p\alpha_1 + \operatorname{ctg} p\alpha_2;$$

$$F_2(p) = \mu \operatorname{tg} p\alpha_1 + \operatorname{tg} p\alpha_2; \quad (10)$$

$$F_3(p) = \mu \operatorname{ctg} p\alpha_1 - \operatorname{tg} p\alpha_2.$$

Входящая в эти формулы постоянная  $\mu = \mu_2/\mu_1$  является относительной жесткостью композита, которая может изменяться в пределах от нуля до бесконечности.

### Решение задач Римана

Ключевым моментом при решении задач (9) является факторизация функций. Представим их коэффициенты (10) в виде

$$F_n(p) = (1 + \mu) p^q M_n(p), \quad (11)$$

$$M_n(p) = X^{-q}(p) \Phi_n(p), \quad X(p) = p \operatorname{ctg} p\alpha_1,$$

где

$$\Phi_1(p) = (1 + \mu)^{-1} (\mu + \operatorname{tg} p\alpha_1 \operatorname{ctg} p\alpha_2);$$

$$\Phi_2(p) = (1 + \mu)^{-1} (\mu + \operatorname{ctg} p\alpha_1 \operatorname{tg} p\alpha_2); \quad (12)$$

$$\Phi_3(p) = (1 + \mu)^{-1} (\mu - \operatorname{tg} p\alpha_1 \operatorname{tg} p\alpha_2).$$

Факторизация функции  $X(p)$  осуществляется элементарно [13]:

$$X(p) = \frac{X_+(p)}{X_-(p)}, \quad (13)$$

$$X_\pm(p) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}} \frac{\Gamma(1 \pm p\alpha_1/\pi)}{\Gamma(1/2 \pm p\alpha_1/\pi)},$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция.

На мнимой оси при  $p = it$  функции (12) непрерывны, не имеют нулей и полюсов, их индекс равен нулю, и при  $t \rightarrow \infty$  экспоненциально стремятся к единице. Поэтому справедливы следующие равенства [10, 13]:

$$\Phi_n(p) = \frac{\Phi_{n+}(p)}{\Phi_{n-}(p)}, \quad (14)$$

$$\Phi_{n\pm}(p) = \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \Phi_n(t)}{t - p} dt \right] \quad (p \notin L).$$

С учетом четности функций (12) аналитические функции в областях  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$  могут быть представлены в форме

$$\Phi_{n\pm}(p) = \exp \left[ \frac{p}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln \Phi_n(i\xi)}{\xi^2 + p^2} d\xi \right].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M_n(p) &= M_{n+}(p)M_{n-}^{-1}(p), \\ M_{n\pm}(p) &= X_\pm^q(p)\Phi_{n\pm}(p). \end{aligned} \quad (15)$$

В результате использования формул (11), (13) – (15), перегруппировки слагаемых в уравнениях (9) и применения теоремы Лиувилля [13], получаем:

$$\begin{aligned} M_{n+}(p)T_+(p) + Q_{n+}(p) &= q\mu_2(1+\mu)^{-1}p^{-q} \times \\ &\times M_{n-}(p)U_-(p) - Q_{n-}(p) = J_n(p), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{n\pm}(p) &= \mp \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_n(t)}{t-p} dt, \\ Q_n(t) &= \frac{M_{n-}(t)}{(1+\mu)t^q} F_n(t)G_-(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Из оценок членов в равенстве (16) при  $p \rightarrow \infty$  вытекает, что единые аналитические функции  $J_n(p) = \text{const} = C_n$ , причем  $C_2 = 0$ .

Константы  $C_1$  и  $C_3$  определим из уравнения (16) при значении  $p = 0$ . Учитывая формулы (17), находим:

$$\begin{aligned} C_n &= M_{n+}(0)G_-(0) - \frac{1}{2\pi i(1+\mu)} \times \\ &\times \int_L M_{n-}(t)F_n(t)G_-(t)dt \quad (n = 1, 3). \end{aligned} \quad (18)$$

Запишем функции (10) в задачах 1 и 3 в виде

$$F_n(t) = (1+\mu)\Delta_n(t)/f_n(t); \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= \sin(\alpha_1 + \alpha_2)t + m \sin(\alpha_1 - \alpha_2)t; \\ \Delta_3(t) &= \cos(\alpha_1 + \alpha_2)t - m \cos(\alpha_1 - \alpha_2)t; \end{aligned} \quad (20)$$

$$f_1(t) = 2 \sin t\alpha_1 \sin t\alpha_2;$$

$$f_3(t) = 2 \sin t\alpha_1 \cos t\alpha_2.$$

В формулы (20) входит биупругая постоянная  $m = (1-\mu)/(1+\mu)$ . Для всех сочетаний модулей сдвига материалов эта величина удовлетворяет неравенству  $|m| \leq 1$ ,

причем значение  $m = 0$  отвечает однородной среде.

Из представлений (19) вытекает, что подынтегральные функции в формулах (18) имеют в полуплоскости  $\Omega_-$  полюсы в точках  $t_{k1} = -\pi k/\alpha_1$  и  $t_{k2} = -\pi k/\alpha_2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) в задаче 1, а в задаче 3 – в точках  $t_{k1}$  и  $s_{k2} = -\pi(2k-1)/(2\alpha_2)$ . Тогда, используя теорему о вычетах, находим:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\sqrt{\frac{\alpha_1 + \mu\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2(1+\mu)}}G_-(0) - \frac{1}{1+\mu} \times \\ &\times \left[ \frac{\mu}{\alpha_1} \sum_{k=1}^\infty M_{1-}(t_{k1})G_-(t_{k1}) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\alpha_2} \sum_{k=1}^\infty M_{1-}(t_{k2})G_-(t_{k2}) \right], \\ C_3 &= -\sqrt{\frac{\mu}{\alpha_1(1+\mu)}}G_-(0) - \frac{1}{1+\mu} \times \\ &\times \left[ \frac{\mu}{\alpha_1} \sum_{k=1}^\infty M_{3-}(t_{k1})G_-(t_{k1}) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\alpha_2} \sum_{k=1}^\infty M_{3-}(s_{k2})G_-(s_{k2}) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Из уравнения (16) для  $n = 1, 3$  получаем:

$$T_{n+}(p) = [C_n - Q_{n+}(p)]X_+^{-1}(p)\Phi_{n+}^{-1}(p). \quad (22)$$

При  $p \rightarrow \infty$ , согласно формулам (13), (14) и (17), имеют место оценки

$$X_+(p) = O(p^{1/2}), \quad \Phi_{n\pm}(p) = O(1),$$

$$Q_{n+}(p) = O(p^{-1}).$$

Следовательно, представление (22) приводит к асимптотике

$$T_{n+}(p) \sim C_n p^{-1/2} \quad (p \rightarrow \infty).$$

Отсюда по теореме абелева типа [13] заключаем, что асимптотика напряжений при  $r \rightarrow 1-0$  имеет вид

$$\tau_{\theta z r 1}(r, 0) \sim \frac{C_n}{\sqrt{\pi(1-r)}} \quad (n = 1, 3). \quad (23)$$

В задаче 2 из уравнения (16) находим

$$T_{2+}(p) = -X_+(p)\Phi_{2+}^{-1}(p)Q_{2+}(p).$$

Отсюда получаем, что  $T_{2+}(p) \sim -Bp^{-1/2}$  при  $p \rightarrow \infty$ , где

$$B = \frac{1}{2\pi i(1+\mu)} \int_L \frac{F_2(t)}{t} \frac{\Phi_{2-}(t)}{X_-(t)} G_-(t) dt,$$

$$F_2(t) = (1+\mu)\Delta_2(t)/f_2(t), \quad (24)$$

$$\Delta_2(t) = \sin(\alpha_1 + \alpha_2)t - m \sin(\alpha_1 - \alpha_2)t, \quad (25)$$

$$f_2(t) = 2 \cos t\alpha_1 \cos t\alpha_2.$$

Тогда, аналогично предыдущим случаям, в задаче 2 будем иметь:

$$\tau_{0z21}(r, 0) \sim -\frac{B}{\sqrt{\pi(1-r)}} \quad (r \rightarrow 1-0). \quad (26)$$

В результате применения теоремы о вычетах константу  $B$  можно представить в виде

$$B = \frac{2}{\pi(1+\mu)} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_j \Phi_{2-}(s_{kj}) G_-(s_{kj})}{(2k-1) X_-(s_{kj})}, \quad (27)$$

$$\beta_1 = \mu, \quad \beta_2 = 1, \quad s_{kj} = -\pi(2k-1)/(2\alpha_j) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

### Коэффициенты интенсивности напряжений

Определим коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины в каждой задаче формулой

$$K_{III}^{(n)} = \lim_{r \rightarrow 1-0} \sqrt{2\pi r} \tau_{0z1n}(r, 0).$$

Тогда, используя асимптотики (23) и (26), получаем:

$$K_{III}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \mu) = \sqrt{2} C_n \quad (n = 1, 3), \quad (28)$$

$$K_{III}^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2, \mu) = -\sqrt{2} B.$$

В случае геометрически симметричного клина формулы для КИН в задачах 1 и 2 существенно упрощаются. При  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  из формул (12) вытекает, что  $\Phi_1(p) = \Phi_2(p) = 1$  и, следовательно, согласно (14),  $\Phi_{n\pm}(p) = 1$  ( $n = 1, 2$ ). Учитывая равенства (13), (15), (21) и (27), в итоге из (28) будем иметь:

$$K_{III}^{(1)}(\alpha, \alpha, \mu) = K_{III^*}^{(1)}(\alpha) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \left[ G_-(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} G_-\left(-\frac{\pi k}{\alpha}\right) \right], \quad (29)$$

$$K_{III}^{(2)}(\alpha, \alpha, \mu) = K_{III^*}^{(2)}(\alpha) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} G_-\left(-\frac{\pi}{2\alpha}(2k+1)\right).$$

Отсюда вытекает, что в случае клина

геометрически симметричного строения с одинаковыми граничными условиями на его гранях КИН в вершине трещины не зависит от относительной жесткости материалов и совпадает с КИН для однородного клина.

Если к берегам трещины приложены сосредоточенные силы  $T_0$  на расстоянии  $r_0 > 1$  от вершины клина, т. е.  $g(r) = -T_0 \delta(r - r_0)$  ( $\delta(r - r_0)$  — дельта-функция), то  $G_-(p) = -T_0 r_0^p$ . Тогда ряды в (29) суммируются, и для КИН получаем простые представления

$$K_{III^*}^{(1)} = T_0 \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{r_0^{\pi/(2\alpha)}}{\sqrt{r_0^{\pi/\alpha} - 1}}, \quad (30)$$

$$K_{III^*}^{(2)} = T_0 \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{r_0^{\pi/\alpha} - 1}}.$$

Поскольку  $K_{III^*}^{(1)}/K_{III^*}^{(2)} = r_0^{\pi/(2\alpha)} > 1$  при  $r_0 > 1$  и  $0 < \alpha \leq \pi$ , то КИН в вершине трещины для клина со свободными гранями всегда превышает его значение для случая, когда грани клина защемлены.

В частности, при  $n = 1$  и  $\alpha = \pi$  получаем задачу о взаимодействии двух коллинеарных интерфейсных трещин, к одной из которых приложена точечная нагрузка. В этом случае

$$K_{III}^{(1)} = T_0 \sqrt{2r_0/[\pi(r_0 - 1)]}.$$

В задаче 2 при  $\alpha = \pi$  имеем случай взаимодействия полубесконечной интерфейсной трещины с полубесконечным жестким включением. Для КИН в вершине трещины согласно (30) получаем

$$K_{III}^{(2)} = T_0 \sqrt{2/[\pi(r_0 - 1)]}.$$

Возвращаясь к общему случаю  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , найдем асимптотики КИН для предельных значений относительной жесткости композита. Устремляя  $\mu$  к бесконечности, используя формулы (21), (27) и (28), а также обозначения (29), получаем:

$$K_{III}^{(1)} \rightarrow K_{III^*}^{(1)}(\alpha_1), \quad K_{III}^{(2)} \rightarrow K_{III^*}^{(2)}(\alpha_1), \quad (31)$$

$$K_{III}^{(3)} \rightarrow K_{III^*}^{(1)}(\alpha_1) \quad (\mu \rightarrow \infty).$$

Таким образом, в каждой из задач асимптотики КИН определяются соответствующими выражениями для случая геометри-



чески симметричного однородного клина с углом раствора, равным  $2\alpha_1$ . При этом для больших значений относительной жесткости предельные значения КИН в задачах 1 и 3 совпадают.

Когда параметр  $\mu$  близок к нулю, будем иметь:

$$\begin{aligned} K_{III}^{(1)} &\rightarrow K_{III*}^{(1)}(\alpha_2), \quad K_{III}^{(2)} \rightarrow K_{III*}^{(2)}(\alpha_2), \\ K_{III}^{(3)} &\rightarrow K_{III*}^{(2)}(\alpha_2) \quad (\mu \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда вытекает, что и в случае малой относительной жесткости композита предельные значения КИН выражаются формулами (29) для однородного клина при  $\alpha = \alpha_2$ . Заметим, что асимптотики (31) и (32) также могут быть получены путем решения предельных для (9) задач, возникающих при  $\mu \rightarrow \infty$  и  $\mu \rightarrow 0$ .

Введем в рассмотрение нормализованные КИН:

$$N^{(n)} = K_{III}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \mu) / K_{III}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, 1),$$

отражающие влияние на КИН неоднородности композиционной структуры.

На рис. 2 представлены зависимости нормализованных КИН в вершине трещины, нагруженной сосредоточенными силами, для  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = 3\pi/2$  и  $r_0 = 4$  от параметра относительной жесткости клина. При таком выборе углов задача 1 соответствует случаю взаимодействия двух ортогональных трещин, задача 2 – трещины и жесткого включения, а задача 3 – трещины и отслоившегося жесткого включения. Приведенные данные показывают, что неоднородность композита может вызывать как эффект увеличения КИН по сравнению со случаем однородной среды, так и эффект его уменьшения. Наиболее сильно эти эффекты проявляются при малых и больших значениях относительной жесткости в задаче 3.

#### Поля напряжений вблизи вершины клина

Исследуем поля напряжений в вершине клина при  $r \rightarrow 0$ . На линии  $\theta = 0$  касательные напряжения на основании формул (7) и условий (3) имеют вид

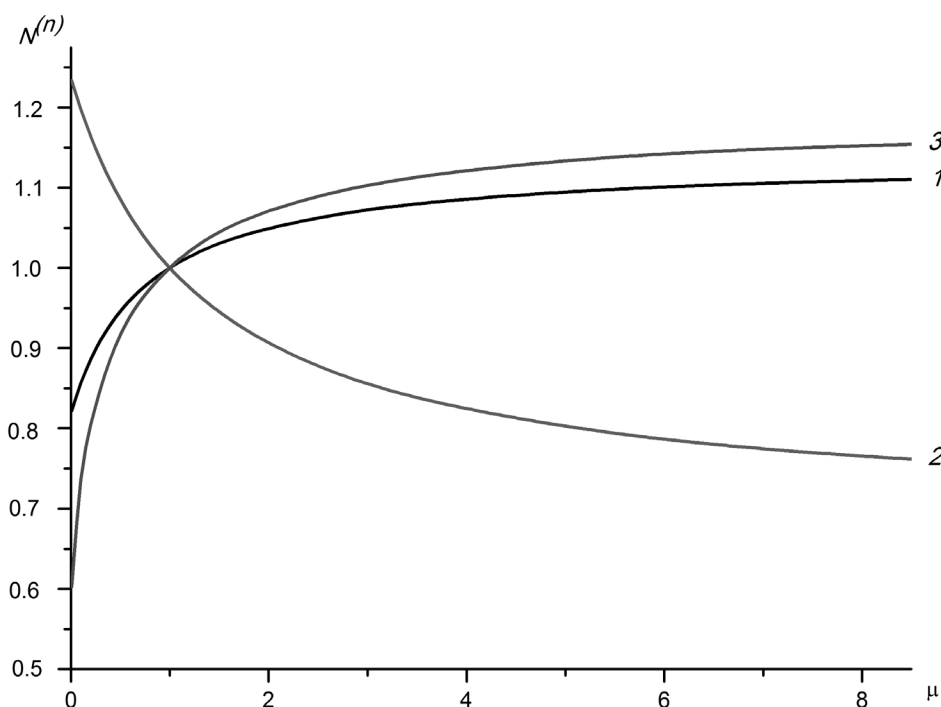


Рис. 2. Зависимости нормализованных КИН от модуля сдвига  $\mu$  в вершине трещины, расположенной в композитной плоскости при  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = 3\pi/2$  и  $r_0 = 4$ ; номера кривых соответствуют номерам задач

$$\tau_{\theta_{zn}}(r, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [T_{n+}(p) + G_-(p)] r^{-p-1} dp. \quad (33)$$

С помощью равенств (15) и (16) выражение для подынтегральной функции можно записать следующим образом:

$$T_{n+}(p) + G_-(p) = (1 + \mu) p^q \frac{C_n + Q_{n-}(p)}{M_{n-}(p) F_n(p)} \\ (n = 1, 2, 3).$$

Тогда с учетом представлений (19) и (24) формула (33) приобретает вид

$$\tau_{\theta_{zn}}(r, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L Y_n(p) \frac{f_n(p)}{\Delta_n(p)} r^{-p-1} dp,$$

где  $Y_n(p) = [C_n + Q_{n-}(p)] p^q M_{n-}^{-1}(p)$ .

В результате применения теоремы о вычетах в полюсах, определяемых отрицательными корнями  $-p_k^{(n)}$  уравнений (см. (20) и (25))

$$\Delta_n(p, \alpha_1, \alpha_2, m) = 0, \quad (34)$$

получаем:

$$\tau_{\theta_{zn}}(r, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_{nk}(\alpha_1, \alpha_2, \mu) r^{-\lambda_k^{(n)}} \\ (\lambda_k^{(n)} = 1 - p_k^{(n)}). \quad (35)$$

Коэффициенты этого ряда находятся по формулам

$$D_{nk}(\alpha_1, \alpha_2, \mu) = Y_n(-p_k^{(n)}) f_n(p_k^{(n)}) / \Delta'_n(p_k^{(n)}),$$

где  $\Delta'_n(p) = d\Delta_n(p)/dp$ .

Из (35) вытекает, что сингулярные поля напряжений в окрестности вершины клина порождаются корнями уравнений (34), расположенными в полосе  $0 < \text{Re } p_k^{(n)} < 1$ . По аналогии с выкладками, представленными в работе [10], можно показать, что все числа  $p_k^{(n)}$  в этой полосе являются вещественными и однократными. Функции (20) и (25) обладают следующими свойствами:

$$\Delta_1(p, \alpha_1, \alpha_2, m) = \Delta_1(p, \alpha_2, \alpha_1, -m); \quad (36)$$

$$\Delta_2(p, \alpha_1, \alpha_2, m) = \Delta_1(p, \alpha_1, \alpha_2, -m); \quad (37)$$

$$\Delta_3(p, \alpha_1, \alpha_2, m) = \Delta_3(p, \alpha_2, \alpha_1, m). \quad (38)$$

Из равенств (36) и (38) следует, что в задачах 1 и 3 достаточно рассмотреть, например, корни уравнений (34) при  $\alpha_1 < \alpha_2$  для  $-1 < m < 1$ . В силу свойства (37) корни в задаче 2 совпадают с корнями в задаче 1

при замене параметра  $m$  на  $-m$ .

Не касаясь в данной статье проведенного детального анализа корней уравнений (34), отметим только некоторые свойства корней, расположенных в интервале  $(0, 1)$ . В зависимости от параметров композиционной структуры уравнения (34) могут не иметь корней, иметь один корень или два корня в данном интервале. В вершине клина эти корни могут порождать как слабые ( $0 < \lambda_k^{(n)} < 0,5$ ), так и сильные ( $0,5 < \lambda_1^{(n)} < 1$ ) сингулярности. При наличии двух корней в отмеченном интервале могут быть только две ситуации:  $0,5 < p_1^{(n)} < p_2^{(n)} < 1$  или  $0 < p_1^{(n)} < 0,5 < p_2^{(n)} < 1$ . Иными словами, такие распределения корней внутри интервала определяют либо две слабые сингулярности поля напряжений при  $r \rightarrow 0$ , либо одну сильную и одну слабую сингулярности. Существование двух сильных сингулярностей в асимптотике напряжений невозможно.

В задачах 1 и 2 отсутствие сингулярных членов в представлениях напряжений (35) имеет место, например, при любом  $m \in (-1, 1)$  для углов раствора клина, не превышающих  $\pi/2$ . В задаче 3 подобная ситуация для углов того же диапазона возникает при  $m \leq 0$ .

Для геометрически симметричных композитных клиньев ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ) в задачах 1 и 2 уравнения (34) имеют в интервале  $(0, 1)$  только один корень, если  $\alpha > \pi/2$ . Этот корень не зависит от биупругой постоянной и совпадает с корнем для однородного клина  $p_1^{(n)} = \pi/(2\alpha)$ . В задаче 3 в этом случае возможны три варианта. Во-первых, при углах  $\alpha \leq \alpha_* = 0,5 \arccos m$  корни, меньшие единицы, отсутствуют. Во-вторых, для углов, удовлетворяющих неравенству  $\alpha_* < \alpha \leq \pi - \alpha_*$ , в интересующем нас интервале существует один корень. Наконец, для углов  $\pi - \alpha_* < \alpha \leq \pi$  напряжения в угловой точке клина будут содержать два сингулярных слагаемых, порождаемых корнями

$$p_1^{(3)} = \arccos m/(2\alpha),$$

$$p_2^{(3)} = \pi/\alpha - \arccos m/(2\alpha).$$

На рис. 3, а приведены зависимости первых двух корней уравнения (34) в задаче 1 от угла  $\alpha_1$  при различных значениях относи-

тельной жесткости, когда композитная среда занимает всю плоскость ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$ ) и содержит две интерфейсные трещины. При

$0 < \mu < 1$  (биупругая постоянная  $m > 0$ ) уравнение (34) имеет в интервале  $(0, 1)$  два корня:  $0 < p_1^{(1)} < 0,5 < p_2^{(1)} < 1$ , если

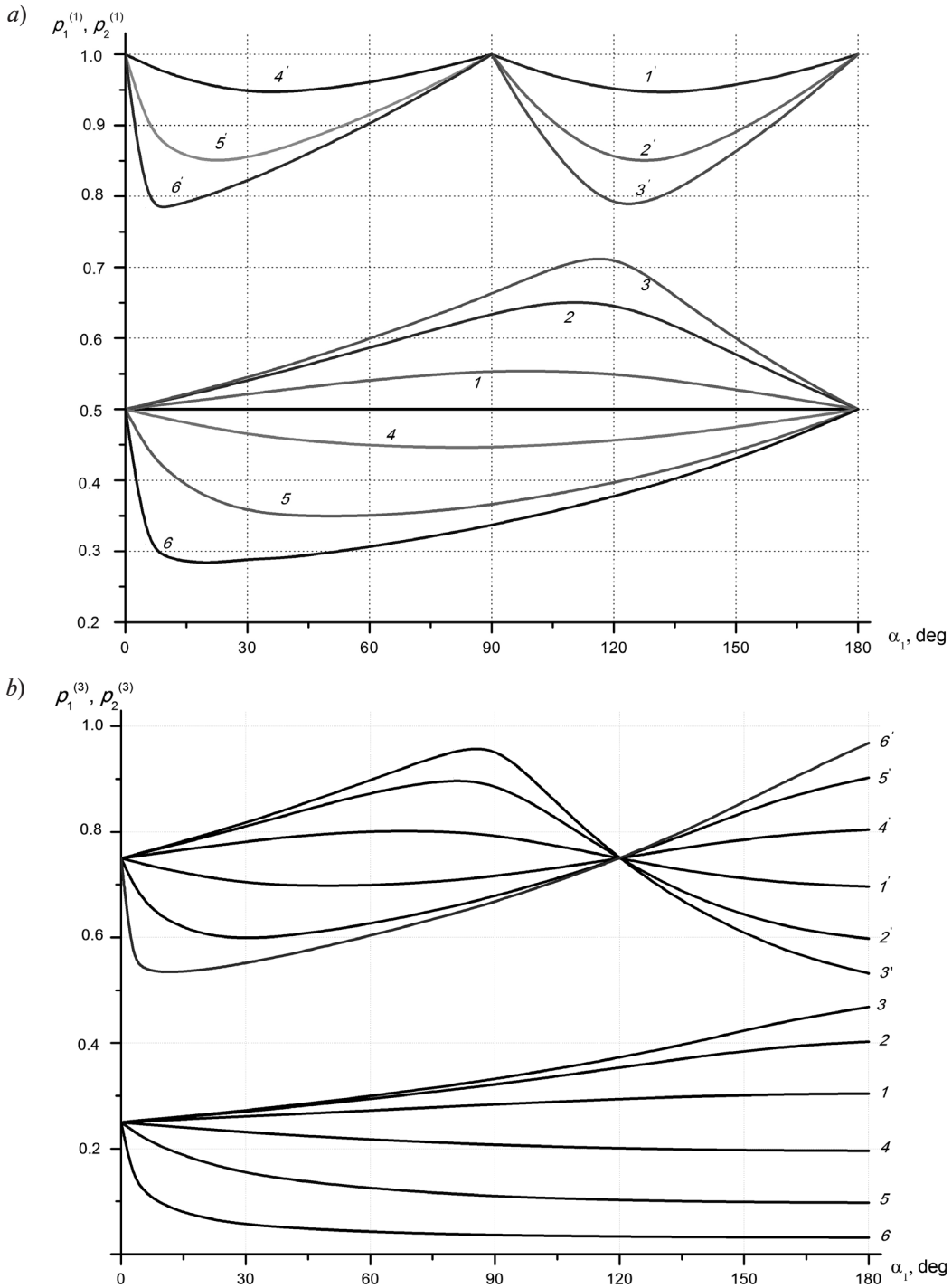


Рис. 3. Зависимости первых двух корней уравнений (34) от угла  $\alpha_1$  при  $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$  в задаче 1 (a) и задаче 3 (b) для различных значений относительной жесткости  $\mu$ : 2 (номера кривых 1 и 1'), 10 (2 и 2'), 100 (3 и 3'), 0,5 (4 и 4'), 0,1 (5 и 5'), 0,01 (6 и 6') (номера кривых, соответствующих второму корню, отмечены штрихом)



$0 < \alpha_1 < \pi/2$ , а при  $\pi/2 < \alpha_1 \leq \pi$  — один корень  $0 < p_1^{(1)} \leq 0,5$ . В случае  $\mu > 1$  ( $m < 0$ ) во всем диапазоне изменения угла  $\alpha_1$  корни превосходят 0,5. Это значит, что асимптотика напряжений в вершине трещины, совпадающей с угловой точкой линии раздела материалов, может содержать один или два сингулярных члена. При этом показатель сингулярности отличен от классического значения, равного 0,5. Для двух коллинеарных трещин ( $\alpha = \pi$ ) классический результат  $\lambda_1^{(1)} = 0,5$  сохраняется.

Задача 3 при  $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$  представляет задачу для составной упругой плоскости, содержащей полубесконечную трещину и отслоившееся полубесконечное жесткое включение. В этом случае при любых значениях относительной жесткости композита  $\mu \in (0, \infty)$  во всем диапазоне изменения угла  $\alpha_1$  уравнение (34) имеет два корня (см. рис. 3, б), порождающие сильную и слабую особенности у напряжений в вершине клина.

### Заключение

В данной работе с помощью метода Винера — Хопфа получено точное решение задачи о равновесии биматериального клина, ослабленного полубесконечной межфазной трещиной продольного сдвига, при трех типах граничных условий на его сторонах. В случае композита геометрически симметричной структуры и приложения к берегам трещины сосредоточенных сил, найдены простые алгебраические представления функций Грина для коэффициентов интенсивности напряжений. Исследована сингулярность напряжений в вершине клина. В отличие от однородного клина, асимптотика напряжений в вершине клина при некоторых значениях параметров неоднородной структуры может содержать два сингулярных члена.

Данный подход позволяет получить точные решения как для случая приложения нагрузки на сторонах клина, так и случая клина с надрезом, исходящим из его вершины.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Erdogan F., Gupta G.D.** Bonded wedges with an interface crack under anti-plane shear loading // *Int. J. Fract.* 1975. Vol. 11, No. 4. Pp. 583–593.
- [2] **Mkhitarjan S.M., Melkounian N., Lin B.B.** Stress-strain state of a cracked elastic wedge under anti-plane deformation with mixed boundary conditions on its faces // *Int. J. Fract.* 2001. Vol. 108. No. 4. Pp. 291–315.
- [3] **Shahani A.R.** Mode III stress intensity factors for edge-cracked circular shafts, bonded wedges, bonded half planes and DCB's // *Int. J. Solids Struct.* 2003. Vol. 40. No. 24. Pp. 6567–6576.
- [4] **Faal R.T., Fotuhi A.R., Fariborz S.J., Daghyani H.R.** Antiplane stress analysis of an isotropic wedge with multiple cracks // *Int. J. Solids Struct.* 2004. Vol. 41. No. 16–17. Pp. 4535–4550.
- [5] **Wu X., Dzenis Y., Zou W.** Screw dislocation interacting with an interfacial edge crack between two bonded piezoelectric wedges // *Int. J. Fract.* 2002. Vol. 117. No. 3. Pp. 9–14.
- [6] **Beom H.G., Lee J.W., Cui C.B.** Analysis of a kinked crack in an anisotropic material under antiplane deformation // *J. Mech. Sci. Technol.* 2012. Vol. 26. No. 2. Pp. 411–416.
- [7] **Beom H.G., Jang H.S.** Interfacial wedge cracks in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear // *Int. J. Eng. Sci.* 2012. Vol. 56. No. 1. Pp. 49–62.
- [8] **Beom H.G., Jang H.S.** A crack emanating from a wedge in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear // *Int. J. Fract.* 2012. Vol. 177. No. 2. Pp. 191–198.
- [9] **Gakhov F.D.** *Boundary Value Problems.* London: Pergamon Press, 1966.
- [10] **Nuller B., Ryvkin M., Chudnovsky A.A.** Closed form solution for a crack approaching an interface // *J. Mech. Mat. Struct.* 2006. Vol. 1. No. 8. Pp. 1405–1423.
- [11] **Ma C.C., Hour B.L.** Analysis of dissimilar anisotropic wedges subjected to antiplane shear deformation // *Int. J. Solids Struct.* 1989. Vol. 25. No. 11. Pp. 1295–1309.
- [12] **Shahani A.R.** Mode III stress intensity factors in an interfacial crack in dissimilar bounded materials // *Arch. Appl. Mech.* 2006. Vol. 75. No. 6–7. Pp. 405–411.
- [13] **Noble B.** *Method based on the Wiener-Hopf technique for solution of partial differential equations.* Oxford: Pergamon Press, 1958.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич** — кандидат физико-математических наук, заместитель директора по образовательной деятельности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
victikh@mail.ru

### *Tikhomirov V.V.* A SEMI-INFINITE CRACK OF MODE III IN THE BIMATERIAL WEDGE.

An exact solution of the antiplane problem for a semi-infinite interface crack in a piecewise-homogeneous wedge under a self-balanced load on its sides has been obtained. Three types of boundary conditions on the wedge sides were examined: the both sides being stress-free; both sides being clamped, and one side being stress-free with the second one clamped. As a result of using the Wiener-Hopf method, the solution was represented in quadratures. The Green's functions were obtained for stress intensity factors; in the case of a geometrically symmetrical wedge structure simple formulae were found for these functions. The stress singularity in the apex of the wedge was studied. In contrast to the homogeneous wedge structure the asymptotic of the stresses near the apex was established to have sometimes two singular terms for some values of the composite parameters.

INTERFACIAL MODE III CRACK, BIMATERIAL WEDGE, STRESS INTENSITY FACTOR, STRESS SINGULARITY.

## REFERENCES

- [1] **F. Erdogan, G.D. Gupta**, Bonded wedges with an interface crack under anti-plane shear loading, *Int. J. Fract.* 11 (4) (1975) 583–593.
- [2] **S.M. Mkhitarian, N. Melkounian, B.B. Lin**, Stress-strain state of a cracked elastic wedge under anti-plane deformation with mixed boundary conditions on its faces, *Int. J. Fract.* 108 (4) (2001) 291–315.
- [3] **A.R. Shahani**, Mode III stress intensity factors for edge-cracked circular shafts, bonded wedges, bonded half planes and DCB's, *Int. J. Solids Struct.* 40 (24) (2003) 6567–6576.
- [4] **R.T. Faal, A.R. Fotuhi, S.J. Fariborz, H.R. Daghyani**, Antiplane stress analysis of an isotropic wedge with multiple cracks, *Int. J. Solids Struct.* 41(16-17) (2004) 4535–4550.
- [5] **X. Wu, Y. Dzenis, W. Zou**, Screw dislocation interacting with an interfacial edge crack between two bonded piezoelectric wedges, *Int. J. Fract.* 117(3) (2002) 9–14.
- [6] **H.G. Beom, J.W. Lee, C.B. Cui**, Analysis of a kinked crack in an anisotropic material under antiplane deformation, *J. Mech. Sci. Technol.* 26(2) (2012) 411–416.
- [7] **H.G. Beom, H.S. Jang**, Interfacial wedge cracks in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear, *Int. J. Eng. Sci.* 56 (1) (2012) 49–62.
- [8] **H.G. Beom, H.S. Jang**, A crack emanating from a wedge in dissimilar anisotropic materials under antiplane shear, *Int. J. Fract.* 177 (2) (2012) 191–198.
- [9] **F.D. Gakhov**, *Boundary Value Problems*, London, Pergamon Press, 1966.
- [10] **B. Nuller, M. Ryvkin, A.A. Chudnovsky**, Closed form solution for a crack approaching an interface, *J. Mech. Mat. Struct.* 1(8) (2006) 1405–1423.
- [11] **C.C. Ma, B.L. Hour**, Analysis of dissimilar anisotropic wedges subjected to antiplane shear deformation, *Int. J. Solids Struct.* 25(11) (1989) 1295–1309.
- [12] **A.R. Shahani**, Mode III stress intensity factors in an interfacial crack in dissimilar bounded materials, *Arch. Appl. Mech.* 75 (6-7) (2006) 405–411.
- [13] **B. Noble**, *Method based on the Wiener-Hopf technique for solution of partial differential equations*, Oxford, Pergamon Press, 1958.

## THE AUTHOR

**TIKHOMIROV Victor V.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

victikh@mail.ru