



DOI: 10.5862/JPM.225.12

УДК: 532.517

И.В. Стецюк

Крыловский государственный научный центр, г. Санкт-Петербург

РАЗВИТИЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ТЕЧЕНИЯ ЗА СФЕРОЙ, ОБТЕКАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННЕГО ИЛИ ПОВЕРХНОСТНОГО ВОЛНЕНИЯ

В работе исследованы взаимодействие течения за сферой с фоновыми внутренними волнами и развитие стратифицированного течения за этой сферой при наличии поверхностного волнения. Установлено, что результаты расчетов с помощью метода крупных вихрей (LES) позволяют получить дополнительную информацию о характеристиках течения, возникающего за сферой, обтекаемой потоком жидкости. Жидкость характеризуется неоднородным распределением плотности по вертикали, изменяющимся во времени. Использование численных экспериментов дало возможность определить влияние фоновых внутренних и поверхностных волн на характеристики течения за сферой.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СТРАТИФИКАЦИЯ, МЕТОД КРУПНЫХ ВИХРЕЙ, ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ, ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ.

Введение

В настоящее время проблема расчета характеристик стратифицированных потоков, относящаяся к задачам гидродинамики погруженных тел, требует решения в части учета изменения фоновых характеристик потока. В качестве таких характеристик можно рассматривать внутренние и поверхностные волны, а также турбулентность.

Взаимодействие погруженных тел со стратифицированной жидкостью исследовалось многими авторами как теоретически [1, 2], так и экспериментально [3]. Особенностью стратифицированных потоков является возможность распространения в них внутренних волн. При обрушении последних происходит генерация турбулентности, масштаб которой зависит от характеристик исходной внутренней волны [4]. Внутренние волны, которые генерируются телом, движущимся в неоднородной по плотности жидкости, являются в общем случае нелинейными и взаимодействуют с турбулентностью в следе за телом. Расчет характеристик неоднородного по плотности течения в следе за телом, который бы учитывал изменчивость фоновых условий среды и их взаимодействие с турбулентностью в следе

за этим телом, возможен с помощью метода крупных вихрей. Данный метод позволяет также учесть анизотропию турбулентности, свойственную стратифицированным течениям.

Внешняя сила, действующая в вертикальном направлении в стратифицированной жидкости, оказывает анизотропное влияние на структуру потока. Характер спектра турбулентных пульсаций стратифицированного потока отличается от такового для однородной жидкости. В связи с этим моделирование турбулентного обтекания тела стратифицированным потоком жидкости должно существенно отличаться от соответствующего моделирования течения, однородного по полю плотности. В частности, модель турбулентности должна учитывать эффекты анизотропии, обусловленные плавучестью [5].

Применение же современных методов вычислительной гидродинамики к исследованию взаимодействия погруженного объекта с вязкой стратифицированной жидкостью и внутренними волнами открывает новые возможности для развития теории гидродинамики тел на внутренних волнах.

**Постановка задачи
и численная аппроксимация**

Для описания течения вязкой стратифицированной жидкости, ограниченной свободной поверхностью, используются следующие осредненные по пространству уравнения:

уравнение неразрывности вида [6]

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

уравнение Навье – Стокса

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial t} + \langle u_j \rangle_\Delta \frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle_\Delta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{SGS}}{\partial x_j} + g_i + F_\sigma, \quad (2)$$

уравнение переноса безразмерной плотности морской среды

$$\frac{\partial \langle f \rangle_\Delta}{\partial t} + \langle u_j \rangle_\Delta \frac{\partial \langle f \rangle_\Delta}{\partial x_j} = D_s \frac{\partial^2 \langle f \rangle_\Delta}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial J_j^{SGS}}{\partial x_j} \quad (3)$$

и уравнения переноса объемной фракции морской среды, используемые в методе объема жидкости, вида

$$\frac{\partial \langle \alpha_w \rangle_\Delta}{\partial t} + \langle u_j \rangle_\Delta \frac{\partial \langle \alpha_w \rangle_\Delta}{\partial x_j} = 0, \quad (4)$$

$$\rho = \rho_a + \alpha_w(\rho_l - \rho_a) + \alpha_w(\rho_h - \rho_l)f, \quad (5)$$

$$\nu = \nu_a + \alpha_w(\nu_l - \nu_a),$$

где u_i – компонента вектора скорости потока жидкости, p – давление в потоке, ν – кинематическая вязкость жидкости, D_s – коэффициент диффузии вещества, g_i – компонента вектора ускорения свободного падения,

$$\tau_{ij}^{SGS} = \widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j}$$

– тензор подсеточных напряжений,

$$F_\sigma = -\sigma \delta(\alpha_w) kn$$

– объемная сила поверхностного натяжения стратифицированной жидкости (σ – коэффициент поверхностного натяжения; δ – дельта-функция, определенная на границе раздела морская среда – воздух; k , n – кривизна и нормаль к поверхности раздела),

ρ_a – плотность воздуха, ρ_l , ρ_h – величины плотности легкой и тяжелой жидкостей,

$$f = (\rho - \rho_l) / (\rho_h - \rho_l)$$

– безразмерная плотность морской среды; скобки $\langle \rangle$ означают осреднение.

Параметризация подсеточных напряжений и потоков скаляра осуществляется на основе моделей добавочной вязкости Смагоринского [7]:

$$\tau_{ij}^{SGS} = -2\nu_{SGS} \langle S_{ij} \rangle_\Delta, \quad (6)$$

$$J_j^{SGS} = -\frac{\nu_{SGS}}{Sc_{SGS}} \frac{\partial \langle f \rangle_\Delta}{\partial x_j},$$

где ν_{SGS} – подсеточная вязкость, Sc_{SGS} – подсеточное число Прандтля – Шмидта, которое в общем случае зависит от числа Ричардсона Ri .

Для нахождения величины ν_{SGS} используется модифицированная гипотеза длины пути смешения, учитывающая эффекты анизотропии за счет сил плавучести:

$$\nu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 |S| f_s(Ri). \quad (7)$$

Здесь C_s – константа Смагоринского, Δ – ширина фильтра, $f_s(Ri)$ – функция плавучести, зависящая от числа Ричардсона [8]:

$$f_s(Ri) = \left(1 - \frac{Ri}{C_B}\right)^{3/2} (1 - Ri / Sc_{SGS})^{-1}, \quad (8)$$

где C_B – константа ($C_B \approx 0,273$).

Распространение волн можно реализовать численно путем постановки граничных условий. Для решения краевой задачи энергия волны должна быть сгенерирована именно на границах жидкости.

Систему уравнений (1) – (5) следует дополнить начальными и краевыми условиями (приведены ниже).

В начальный момент времени известны компоненты скорости

$$u_i(x_i, 0) = u_0, \quad (9)$$

поле давления

$$p = p_0 = \text{const} \quad (10)$$

(где постоянная определяется из закона гидростатики $\text{const} = \rho gh$), поле плотности и объемная фракция воды.

На твердой стенке должно выполняться условие прилипания

$$u_i = 0. \quad (11)$$

На входной границе должен быть определен вектор скорости:

$$u_1(t) = u_{1in}, \quad u_2(t) = u_{2in}, \quad u_3(t) = u_{3in}. \quad (12)$$

На выходной границе для выполнения условия постоянства расхода должна быть определена нормальная компонента скорости:

$$u_1(t) = u_{1out}. \quad (13)$$

В случае неоднородной жидкости на входной границе заданы законы изменения поля безразмерной плотности и объемной фракции жидкости, отсутствие потока скаляра сквозь твердые стенки и ограничение его потока на выходной границе. В случае генерации на входной границе фоновых внутренних или поверхностных волн изменение поля безразмерной плотности или

объемной фракции жидкости задается по синусоидальному закону.

Разрешение потока в пристеночной области при использовании метода крупных вихрей в настоящей работе осуществляется с помощью метода пристеночных функций. В указанном методе пристеночных функций предполагается, что касательные напряжения постоянны между первым расчетным узлом и стенкой. Их значения, равные напряжению на стенке τ_w , можно рассчитать на основе логарифмического профиля скорости по известным значениям средней скорости в первом расчетном узле или на основе степенной зависимости [9]:

$$u^+ = \begin{cases} y^+, & y^+ \leq y_0^+; \\ 8,3(y^+)^{1/7} + B, & y^+ > y_0^+; \end{cases} \quad (14)$$

$$y_0^+ \approx 11,8,$$

которая обеспечивает простое математическое выражение для u^+ .

Таблица 1

Принятые параметры моделирования обтекания сферы жидкостью при наличии фоновых внутренних волн

Параметр	Обозначение	Единица измерения	Значение
Размеры расчетной области	$L_{cd} \times B_{cd} \times H_{cd}$	м	$7 \times 2 \times 2$
Глубина жидкости	H_w	м	1,5
Диаметр сферы	D	м	0,16
Скорость набегающего потока	U	м/с	1,6
Число Рейнольдса	$Re = \frac{UD}{\nu}$	—	$2 \cdot 10^5$
Корабельное число Фруда	$Fr = \frac{U}{\sqrt{gD}}$	—	1,3
Расстояние от оси сферы до пикноклина	$\frac{h_p}{D}$	—	0,55
Расстояние от оси сферы до свободной поверхности	$\frac{h_s}{D}$	—	3,12
Плотность верхнего слоя жидкости	ρ_l	кг/м ³	1002
Плотность нижнего слоя жидкости	ρ_h	кг/м ³	1004
Амплитуда фоновых внутренних волн	A	м	0,18
Длина волны	λ	м	$40D$
Частота колебания пикноклина на входной границе	ω	рад/с	1,6

Здесь

$$y^+ = \frac{\Delta\sqrt{\tau_w}}{\nu}; \quad u^+ = \frac{|u_r|}{\sqrt{\tau_w}}; \quad B \approx 0,52.$$

Модуль скорости рассчитывается как

$$|u_r| = \sqrt{u_i^2}.$$

Для решения системы дифференциальных уравнений используется полунявный проекционный метод. В пространственной области дискретизация осуществляется методом Петрова – Галёркина с линейным представлением интерполяционного базиса. Система линейных алгебраических уравнений решается методом сопряженных градиентов. Для повышения эффективности расчетов мы использовали алгоритм распределенных вычислений, основанный на декомпозиции по подобластям и декомпозиции аппроксимирующих матриц.

В данной работе для оценки воздействия фоновых внутренних волн на след за сферой и на силовые характеристики сопоставлялись результаты моделирования течения вязкой жидкости для нескольких случаев. Первый из них соответствует расчету

характеристик фоновой внутренней волны в отсутствие сферы в жидкости, а второй соответствует моделированию обтекания сферы однородной жидкостью; третий случай – это моделирование обтекания сферы в поле плотности, постоянном во времени, четвертый случай – моделирование обтекания сферы в поле плотности, изменяющемся во времени. Расчетные параметры, использованные при моделировании, представлены в табл. 1.

Результаты моделирования

Взаимодействие течения за сферой с фоновыми внутренними волнами. На рис. 1 представлено распределение поля безразмерной плотности f в канале при скорости течения потока жидкости $U = 1,6$ м/с в момент времени $t = T$, где T – период внутренней волны.

Анализ результатов моделирования показал, что присутствие сферы вблизи пикноклина не приводит к разрушению фоновой внутренней волны, но трансформируют ее структуру (рис. 2).

На основе выполненных расчетов и

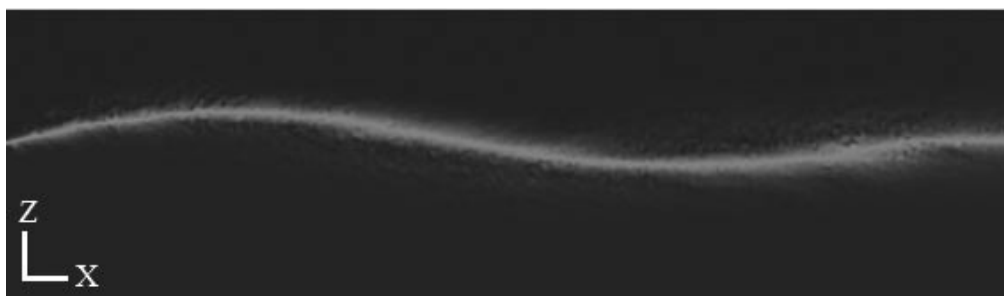


Рис. 1. Распределение безразмерной плотности f в расчетной области (вертикальное сечение); $\omega = 1,6$ рад/с; $t = T$; $U = 1,6$ м/с

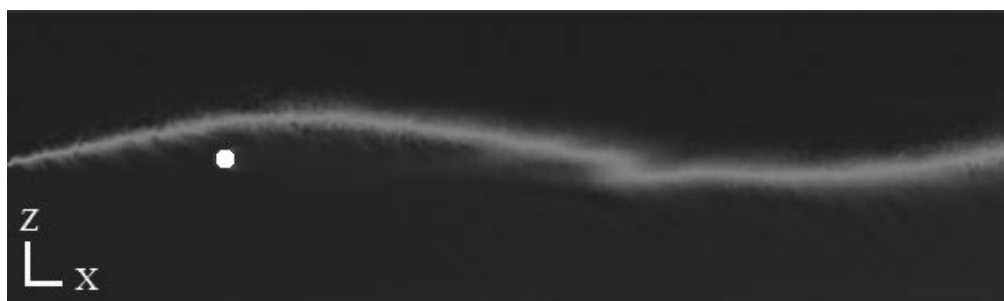


Рис. 2. Распределение безразмерной плотности f при наличии фоновых внутренних волн (вертикальное сечение); обтекаемая сфера показана белым диском; число Фруда $Fr = 1,3$; $t = 2T$

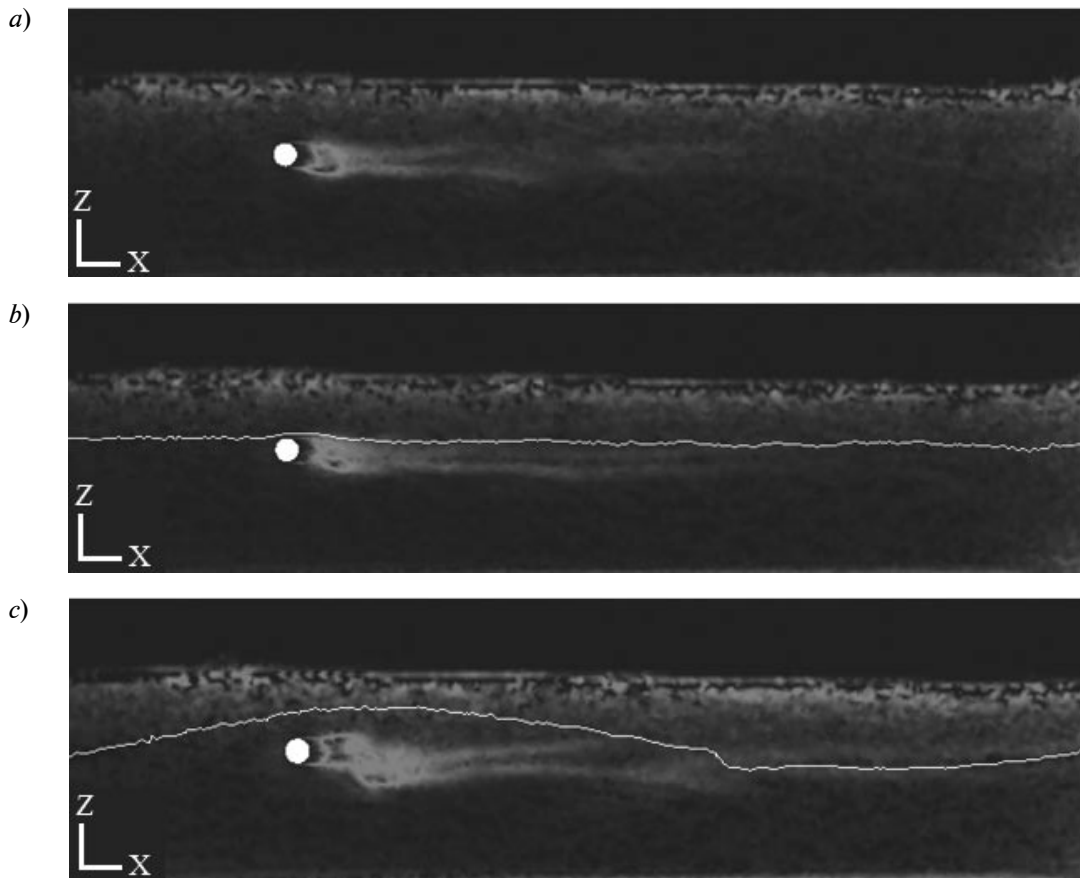


Рис. 3. Результаты моделирования поля подсеточной вязкости ν_t (вертикальное сечение):
a – однородная жидкость; *b* – стационарный профиль плотности;
c – фоновые внутренние волны; $U = 1,6$ м/с, $t = 2T$

сравнительного анализа характеристик течения в следе за сферой было установлено, что в данном случае наличие фоновых внутренних волн в стратифицированной жидкости приводит к изменению структуры течения в следе за сферой.

Поле подсеточной вязкости при наличии в жидкости фоновых волновых возмущений (рис. 3, *c*) характеризуется изменением вертикального размера следа как по сравнению со случаем обтекания сферы однородной жидкостью (рис. 3 *a*), так и в сравнении со стационарным профилем плотности при наличии резкого пикноклина (рис. 3, *b*).

Различие пространственных размеров следа для рассматриваемых случаев можно объяснить волновихревым взаимодействием в следе. При наличии пикноклина вертикальный размер следа за сферой сверху

ограничивается изоповерхностью скачка плотности. Наличие градиента плотности над сферой препятствует распространению возмущений по вертикали вверх. При распространении фоновой внутренней волны в среде происходит более интенсивный вихревой перенос вследствие взаимодействия вихревых движений от двух различных источников и разрушение крупномасштабных структур, возникающих в результате обтекания сферы вязкой неоднородной жидкостью. Как следствие изменения параметров в вертикальной плоскости, наблюдаются также различия в распределении подсеточной турбулентной вязкости в горизонтальной плоскости.

На рис. 4 представлено распределение подсеточной вязкости по вертикали на расстоянии $x = 3,5D$ от центра сферы диаметром D . При изменении фоновых условий

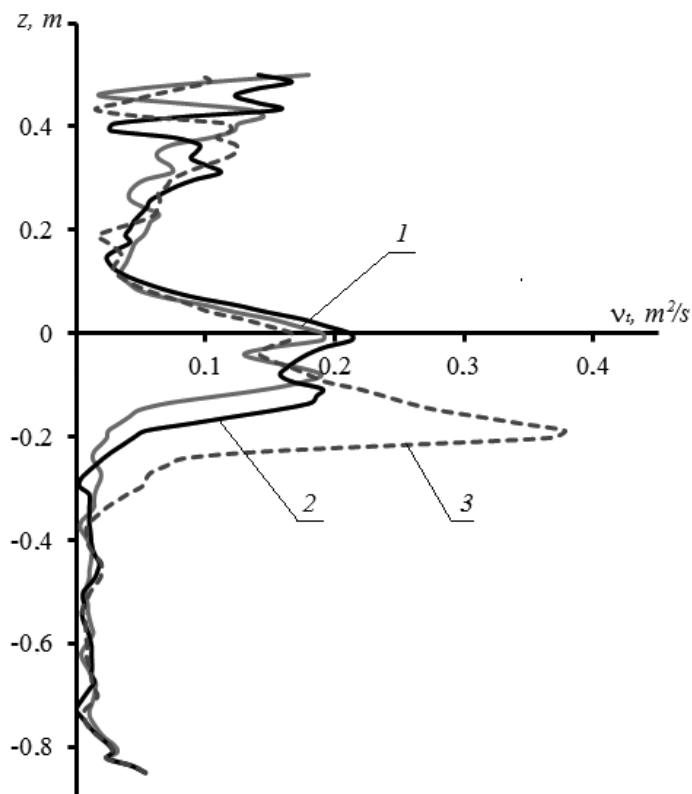


Рис. 4. Результат расчета распределения подсеточной вязкости ν_t по вертикали на расстоянии $x = 3,5D$ от центра сферы: 1 – однородная жидкость; 2 – стационарный профиль плотности; 3 – фоновые внутренние волны; $t = 2T$

распределения плотности наблюдается изменение значения и характера распределения турбулентной вязкости, которая характеризу-

ет пульсационный перенос жидкости вихрями в течении за сферой. Наличие фоновых возмущений плотности приводит к усиле-

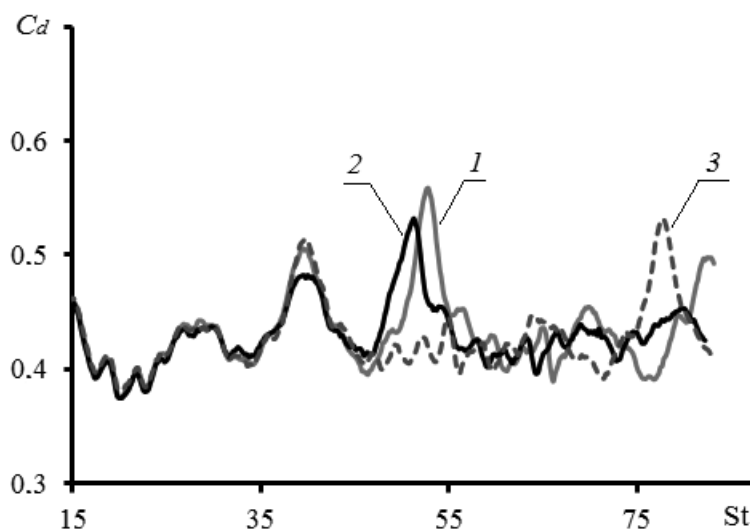


Рис. 5. Эволюция во времени коэффициента сопротивления C_d : 1 – однородная жидкость; 2 – стационарный профиль плотности; 3 – фоновые внутренние волны; $Re = 2 \cdot 10^3$; $Fr = 1,3$

Таблица 2

Принятые параметры моделирования обтекания сферы жидкостью при наличии поверхностных волн

Параметр	Обозначение	Единица измерения	Значение
Расстояние от оси сферы до свободной поверхности	$\frac{h_s}{D}$	—	3,1
Минимальная плотность жидкости	ρ_{\min}	кг/м ³	1000
Максимальная плотность жидкости	ρ_{\max}	кг/м ³	1025
Частота Вайселя – Брента	N	с ⁻¹	0,4
Внутреннее число Фруда	$Fr_i = \frac{U}{ND}$	—	25
Амплитуда поверхностного волнения на входной границе	A	м	0,05
Частота поверхностного волнения на входной границе	ω	рад/с	9

нию турбулентной вязкости и смещению ее максимального значения по вертикали.

Изменение во времени коэффициента сопротивления

$$C_d = \frac{2R_d}{\rho U^2 S}$$

как функции числа Струхаля $St = Ut/D$ представлено на рис. 5.

Фоновые внутренние волны приводят к изменению поведения коэффициента сопротивления во времени и формированию низкочастотного колебания в соответствии с основной модой указанной волны. Такая

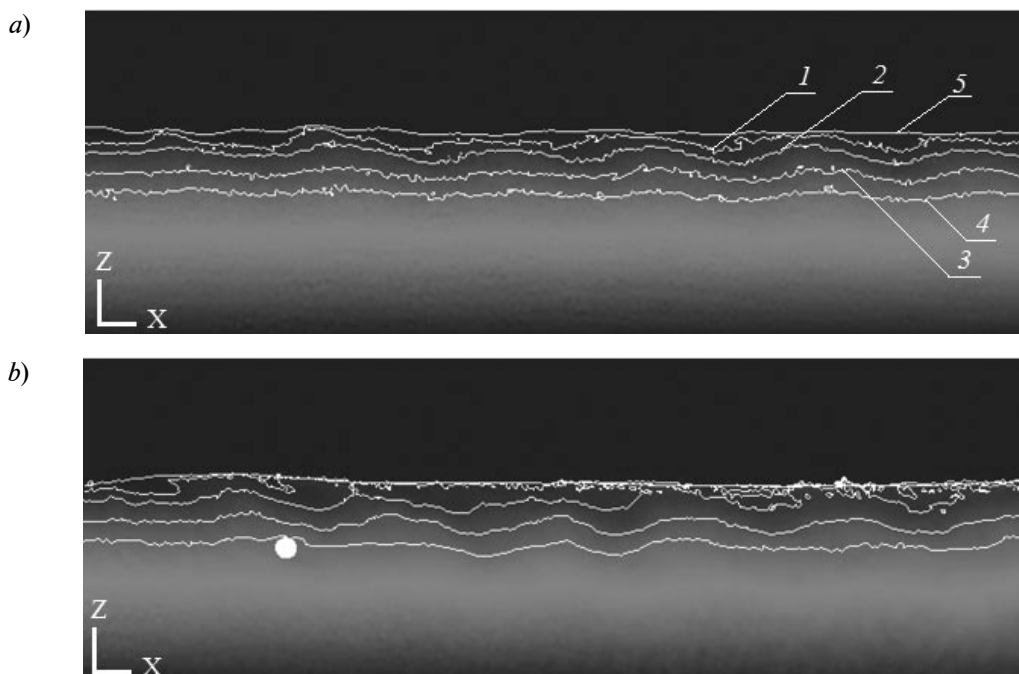


Рис. 6. Результат моделирования поля безразмерной плотности f в отсутствие (а) и в присутствии (б) сферы. Показаны контуры поля величины f , равной 0,05 (1), 0,10 (2), 0,20 (3), 0,30 (4), и величины объемной фракции α_{np} , равной 0,5 (5). $U = 1,6$ м/с; $t = 6,45$ с

волна сглаживает максимум коэффициента сопротивления, который наблюдается при стационарном распределении плотности и в однородной среде; среднее же значение коэффициента сопротивления при стационарном профиле плотности $\overline{C_{d\ st}}$ и при наличии фоновой внутренней волны $\overline{C_{d\ iw}}$ остается неизменным: $\overline{C_{d\ st}} = \overline{C_{d\ iw}} = 0,43$.

Развитие стратифицированного течения за сферой при наличии поверхностного волнения. Воздействие поверхностных волн на характеристики неоднородного по плотности течения за сферой исследовалось для случая линейного распределения плотности по вертикали. Принятые параметры расчета представлены в табл. 2.

В расчетах принималось, что амплитуда волн не меньше размеров ячеек, прилегающих к свободной поверхности. Расчетная сетка состояла из 3,9 млн. элементов.

Поверхностное волнение приводит к генерации внутренних волн в линейно-стратифицированной жидкости (рис. 6, а). Наличие в потоке плохо обтекаемого тела

сферической формы приводит к изменению характера распределения поля плотности за сферой: в районе горизонта расположения сферы амплитуда колебаний безразмерной плотности ($f = 0,30$) увеличивается вниз по течению, а в приповерхностном слое происходит разрушение изопикнической поверхности ($f = 0,05$) (рис. 6, б).

Заключение

Таким образом, в результате проведенного исследования установлено, что в неоднородной по плотности жидкости при наличии поверхностного волнения происходит генерация внутренних волн. Поле плотности в следе за сферой приводит к изменению распределения плотности в приповерхностных слоях жидкости: обрушению внутренних волн и их смешению.

Автор выражает благодарность доктору технических наук, профессору И.В. Ткаченко за организацию исследований и высококвалифицированные консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Гущин В.А., Матюшин П.В.** Математическое моделирование и визуализация трансформации вихревой структуры течения около сферы при увеличении степени стратификации жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 2. С. 268–281.

[2] **Васильева В.В.** Гидродинамика тел на внутренних волнах: дис. ... доктора техн. наук. СПб., 1999. 323 с.

[3] **Bonnier M., Eiff O., Bonneton Ph.** On the density structure of far-wake vortices in a stratified fluid // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 2000. No. 31. Pp. 117–137.

[4] **Монин А.С., Озмидов Р.В.** Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 376 с.

[5] **Гурьев Ю.В., Ткаченко И.В.** Моделирование обтекания тела вращением потоком стратифицированной жидкости на основе метода

крупных вихрей (LES) // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2008. № 1. С. 80–87.

[6] **Сафрай А.С., Ткаченко И.В.** Трехмерная негидростатическая модель вода-воздух. Численный эксперимент // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6. № 1. С. 14–22.

[7] **Smagorinsky J.** General circulation experiment with primitive equations. 1. The basic experiment // Mon. Weather Rev. 1963. Vol. 91. Pp. 99 – 164.

[8] **Сафрай А.С., Ткаченко И.В.** Численное моделирование гравитационных течений жидкости в наклонном канале // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 1. С. 21–30.

[9] **Werner H., Wengle H.** Large-eddy simulation of turbulent flow over and around a cube in a plate channel // 8th Symposium on Turbulent Shear Flows. 1991. Pp. 155–168.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

СТЕЦЮК Ирина Васильевна — младший научный сотрудник Федерального государственного университета «Крыловский государственный научный центр».

196158, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44
irene_stetsuok@yahoo.com



Stetsyuk I.V. THE DEVELOPMENT OF A STRATIFIED FLOW FOLLOWING OVER A SPHERE INSIDE THE VISCOUS FLUID IN THE PRESENCE OF INTERNAL OR SURFACE WAVES.

This study has used the Large Eddy Simulation (LES) for numerical simulation of internal or surface waves. The viscous stratified flow over a sphere was investigated at the Reynolds and the Froude numbers $Re = 2 \cdot 10^5$, $Fr = 1.3$ for simulation of the flow over the sphere in the presence of the internal waves, and at the internal Froude number $Fr_i = 25$ for that in the presence of the surface ones. The presence of background internal waves was found to result in an increase in the turbulent viscosity in the flow behind the sphere and in the vertical shift of the turbulent viscosity's maximum value. Moreover, their presence in the linearly stratified flow leads to a change in the density distribution of the near-surface layers of liquid. In this case the internal-wave breaking and wave mixing occur. The last one is caused by interaction between the internal waves generated by the surface waves and the sphere.

NUMERICAL SIMULATION, STRATIFICATION, LARGE EDDY SIMULATION, FLOW OVER SPHERE, VISCOUS FLUID.

REFERENCES

- [1] **V.A. Gushchin, P.V. Matyushin**, Numerical simulation and visualization of vortical structure transformation in the flow past a sphere at an increasing degree of stratification, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2(51) (2011) 268–281.
- [2] **V.V. Vasilyeva**, Hydrodynamics of bodies on internal waves: Ph.D. Thesis. St. Petersburg, 1999.
- [3] **M. Bonnier, O. Eiff, Ph. Bonneton**, On the density structure of far-wake vortices in a stratified fluid, *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 31 (2000) 117–137.
- [4] **A.S. Monin, R.V. Ozmidov**, *Ocean turbulence*. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1981.
- [5] **Yu.V. Guryev, I.V. Tkachenko**, Large eddy simulation (LES) of the stratified fluid flow around a prolate spheroid, *Fundamental and applied hydrophysics*. 1 (2008) 80–87.
- [6] **A.S. Safray, I.V. Tkachenko**, Non-hydrostatic three-dimensional model of water-air. Numerical experiment, *Fundamental and applied hydrophysics*. 1(6) (2013) 14–22.
- [7] **Smagorinsky J.** General circulation experiment with primitive equations. 1. The basic experiment, *Mon. Weather Rev.* 91 (1963) 99–164.
- [8] **A.S. Safray, I.V. Tkachenko**, Numerical simulation gravitational fluid flows in sloping channel, *Fluid Dynamics, A Journal of Russian Academy of Sciences*. 1 (2009) 21–30.
- [9] **H. Werner, H. Wengle**, Large-eddy simulation of turbulent flow over and around a cube in a plate channel, In: 8th Symposium on turbulent shear flows. (1991) 155–168.

THE AUTHOR

STETSYUK Irina V.

Krylov State Research Centre

44, Moskovskoe shosse, St. Petersburg, 196158, Russian Federation

irene_stetsuok@yahoo.com