

СИНГУЛЯРНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНЕ КОМПОЗИТНОГО КЛИНА С ВНУТРЕННИМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМ МАТЕРИАЛОМ

Исследуется антиплоская задача для композиционного клина, состоящего из двух однородных внешних клиновидных областей и промежуточной зоны интерфазы. Материал интерфазы предполагается функционально-градиентным. Показано, что при квадратичном законе неоднородности этого материала в трансверсальном направлении, задача в каждой области является гармонической. Проанализировано влияние интерфазы на напряженное состояние в вершине клина. По сравнению с идеальным контактом внешних материалов, наличие интерфазы приводит как к уменьшению, так и увеличению показателя сингулярности. Кроме того, в этом случае при некоторых значениях параметров композита асимптотика напряжений может иметь два сингулярных члена.

АНТИПЛОСКАЯ ТРЕЩИНА, ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫЙ МАТЕРИАЛ, ИНТЕРФАЗА, СИНГУЛЯРНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ.

Введение

Начиная с классической работы Вильямса 1952 года [1] сингулярность напряжений в особых точках упругих тел привлекает внимание исследователей. Такими точками могут быть угловые точки, а также места смены граничных условий и разрыва упругих модулей материалов. Исчерпывающую библиографию по сингулярным решениям в задачах линейной механики разрушения можно найти в обзоре [2].

В отличие от однородной среды, где у напряжений в вершине трещины возникает особенность типа $r^{-\lambda}$ ($\lambda = 1/2$, r – расстояние от ее вершины), в неоднородной среде порядок особенности может быть иным. Например, для интерфейсной трещины моды I и II при идеальном контакте фаз с постоянными упругими модулями особенность имеет осциллирующий характер. В то же время, у межфазной трещины продольного сдвига порядок особенности остается клас-

сическим. Однако если контакт материалов является несовершенным, то особенность будет отличаться от классической, причем она может быть как сильной ($1/2 < \lambda < 1$), так и слабой ($0 < \lambda < 1/2$) [3]. Более того, при некоторых типах несовершенства контакта асимптотика напряжений будет иметь два сингулярных члена.

Наличие сильной и слабой сингулярности для трещины, находящейся в двух- или трехфазной среде в условиях антиплоской задачи, вытекает также из результатов статей [4, 5].

Анализ полей напряжений вблизи вершины составного клина с кусочно-постоянными упругими характеристиками при идеальном контакте фаз рассматривался во многих работах, например [4 – 9].

В случае функционально-градиентных материалов (ФГМ), у которых упругие модули изменяются непрерывным образом, на основе выводов работы [10] некоторое время считалось, что показатель особенно-

сти в вершине трещины всегда будет таким же, как и в однородной среде. Однако в 2005 году А. Карпинтери и М. Пагги показали [11], что для трещины, развивающейся в градиентном материале, с модулем Юнга, изменяющимся в трансверсальном направлении, порядок особенности отличается от классического значения $\lambda = 1/2$. При этом для обеспечения разделения переменных в дифференциальном уравнении использовалась экспоненциальная зависимость упругого модуля от полярного угла.

Аналогичный закон изменения модуля сдвига в антиплоской задаче для системы клиньев, сочлененных идеальным образом, применялся при построении сингулярных решений в статье [12]. Кроме того, в этой статье предложен приближенный метод определения порядка сингулярности в клиновидных областях, основанный на кусочно-постоянной аппроксимации модуля сдвига ФГМ. Однако анализ корней характеристического уравнения в работах [11, 12] при этом не проводился.

В настоящей работе в рамках антиплоской задачи исследуется напряженное состояние в вершине композиционного клина, состоящего из двух однородных материалов. Вместо традиционной прямой границы раздела фаз рассматривается клиновидная область, заполненная ФГМ. Основанием для моделирования интерфейса подобным образом является физическое соображение о диффузии материалов в процессе их технологического соединения [11, 13, 14]. Это приводит к непрерывному изменению упругого модуля, который, в отличие от работ [11, 12], предполагался зависящим в переходной области от полярного угла квадратичным образом. Такая функциональная зависимость модуля сдвига позволяет получить характеристическое уравнение задачи в явном виде и провести анализ его корней, порождающих сингулярности, в зависимости от параметров композиции.

Постановка задачи

Анализируется напряженное состояние композитного клина, составленного из трех клиновидных областей Ω_k ($k = 1, 2, 3$). Ма-

териалы двух областей (рис. 1):

$$\Omega_1 = \{(r, \theta): 0 < r < \infty, \beta < \theta < \alpha_1\},$$

$$\Omega_2 = \{(r, \theta): 0 < r < \infty, -\beta < \theta < -\alpha_2\},$$

(r, θ – полярные координаты) считаются однородными и изотропными с модулями сдвига μ_1 и μ_2 , соответственно.

Геометрические параметры, определяющие границы этих областей, должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$0 < \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \min(\alpha_1, \alpha_2).$$

Третья (промежуточная) область

$$\Omega_3 = \{(r, \theta): 0 < r < \infty, -\beta < \theta < \beta\}$$

состоит из функционально-градиентного материала, который моделируется неоднородным материалом, а его микроструктура не учитывается. Модуль сдвига функционально-градиентной интерфазы μ_3 предполагается зависящим только от полярного угла. При этом функциональная зависимость $\mu_3(\theta)$ такова, что модуль упругости композита на границах $\theta = \pm\beta$ является непрерывным, а его производные по углу θ на этих границах имеют разрывы.

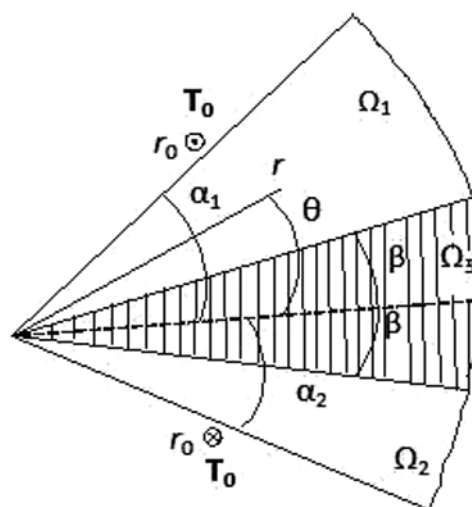


Рис. 1. Схема к постановке задачи о композиционном клине с функционально-градиентной интерфазой (заштрихована): $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – клиновидные области; r, θ – полярные координаты; T_0 – сосредоточенные силы, приложенные на внешних гранях клина, на расстоянии r_0 от его вершины; $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ – геометрические параметры (углы), определяющие границы областей

Рассматриваемая композиция находится в равновесии в условиях антиплоской деформации под действием самоуравновешенных сосредоточенных сил величинной T_0 , приложенных на внешних гранях клина, на расстоянии r_0 от его вершины (см. рис. 1). Контакт на границах раздела материалов предполагается идеальным.

С математической точки зрения задача сводится к решению гармонических уравнений равновесия в каждой из областей Ω_k ($k = 1, 2$):

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_k}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

По перемещениям w_k касательные напряжения определяются формулами

$$\tau_{\theta z k} = \frac{\mu_k}{r} \frac{\partial w_k}{\partial \theta}, \quad \tau_{r z k} = \mu_k \frac{\partial w_k}{\partial r}. \quad (2)$$

В области промежуточного ФГМ с модулем сдвига, изменяющимся в трансверсальном направлении, уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}_3}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}_3}{\partial r} + \frac{1}{\mu_3(\theta)r^2} \frac{d\mu_3}{d\theta} \frac{\partial \tilde{w}_3}{\partial \theta} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим специальный тип функциональной зависимости модуля сдвига интерфейса от полярного угла:

$$\mu_3(\theta) = (a\theta + b)^2. \quad (4)$$

Аналогичный тип неоднородности материала был рассмотрен в декартовой системе координат в работе [14].

Тогда, отыскивая перемещения в области Ω_3 в виде

$$\tilde{w}_3(r, \theta) = \frac{1}{a\theta + b} w_3(r, \theta), \quad (5)$$

получим из уравнения (3), что функция $w_3(r, \theta)$ также удовлетворяет уравнению (1), т. е. является гармонической. Используя формулы (3), приходим к следующим представлениям для напряжений:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{\theta z 3} &= -\frac{a}{r} w_3(r, \theta) + \frac{a\theta + b}{r} \frac{\partial w_3}{\partial \theta}, \quad (6) \\ \tilde{\tau}_{r z 3} &= (a\theta + b) \frac{\partial w_3}{\partial r}. \end{aligned}$$

Постоянные a и b , входящие в выражение (4), находятся из условий непрерывности модуля сдвига на интерфейсах $\theta = \pm\beta$ и имеют вид

$$a = (\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}) / (2\beta), \quad b = (\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}) / 2.$$

При таких константах модуль сдвига $\mu_3(\theta)$ является монотонной функцией, и на оси симметрии интерфейса для него справедлива следующая формула:

$$\mu_3(0) = [(\mu_1 + \mu_2) / 2 + \sqrt{\mu_1 \mu_2}] / 2.$$

Решения уравнений (1) и (3) должны удовлетворять граничным условиям идеального контакта фаз:

$$\begin{aligned} w_1 &= \tilde{w}_3, \quad \tau_{\theta z 1} = \tilde{\tau}_{\theta z 3} \quad \text{при } \theta = \beta, \\ w_2 &= \tilde{w}_3, \quad \tau_{\theta z 2} = \tilde{\tau}_{\theta z 3} \quad \text{при } \theta = -\beta, \end{aligned} \quad (7)$$

и граничным условиям на гранях клина:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z 1} &= T_0 \delta(r - r_0) \quad \text{при } \theta = \beta, \\ \tau_{\theta z 2} &= T_0 \delta(r - r_0) \quad \text{при } \theta = -\beta, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака.

Решение в трансформантах Меллина

Подвергая уравнения (1) интегральному преобразованию Меллина, для трансформант перемещений

$$W_k(p, \theta) = \int_0^\infty w_k(r, \theta) r^{p-1} dr \quad (k = 1, 2, 3)$$

получаем уравнения

$$\frac{d^2 W_k}{d\theta^2} + p^2 W_k = 0.$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$W_k(p, \theta) = A_k \sin p\theta + B_k \cos p\theta. \quad (9)$$

Подчиняем функции (9) преобразованным по Меллину граничным условиям (7) и (8), и тогда с помощью формул (2), (4) – (6) приходим к системе шести линейных алгебраических уравнений относительно величин A_k и B_k ($k = 1, 2, 3$). После осуществления обратного преобразования

$$w_k(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L W_k(p, \theta) r^{-p} dp,$$

где L – контур интегрирования, находим поля перемещений в каждой области композита.

Данная процедура приводит к следующим представлениям напряжений в областях Ω_k :

$$\tau_{\theta zk}(r, \theta) = \frac{T_0}{2\pi ir} \int_L \left(\frac{r_0}{r}\right)^p \frac{S_k(p, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \mu, \theta)}{\Delta(p, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \mu)} dp \quad (10)$$

$(k = 1, 2, 3),$

где $S_k(p, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \mu, \theta)$ – функции, не имеющие особенностей, а

$$\begin{aligned} \Delta(p, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \mu) = & C_1 \cos p(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ & + C_2 \cos p(\alpha_1 - \alpha_2) + C_3 \sin p(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ & + C_4 \sin p(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (11) \\ C_1 = & \sin 2p\beta \cos 2p\beta - 2p\beta, \\ C_2 = & \sin 2p\beta - 2p\beta \cos 2p\beta, \\ C_3 = & 8p^2\beta^2\mu(\mu - 1)^{-2} + \sin^2 2p\beta, \\ C_4 = & 2p\beta(\mu + 1)(\mu - 1)^{-1} \sin 2p\beta. \end{aligned}$$

Упругие свойства структуры отражены в этих формулах через одну постоянную $\mu = \sqrt{\mu_1/\mu_2}$ – относительную жесткость композита. Если параметр $0 < \mu < 1$, композит будем называть мягким, если же $1 < \mu < \infty$, то жестким. Значение $\mu = 1$ отвечает однородному клину.

Для вычисления напряжений в композиционной среде при $r < r_0$ замкнем контур интегрирования L слева полуокружностью большого радиуса и воспользуемся теоремой Коши о вычетах в полюсах подынтегральной функции (10). Эти полюсы определяются корнями характеристического уравнения

$$\Delta(p, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \mu) = 0. \quad (12)$$

Исследование характеристического уравнения

Функция (11) является целой нечетной функцией параметра интегрального преобразования p , не имеющей нулей на мнимой оси, кроме трехкратного нуля $p = 0$. Однако нетрудно показать, что эта точка является устранимой. Поэтому контур интегрирования L в (10) может быть совмещен с мнимой осью. Комплексных нулей, лежащих в полосе $|\operatorname{Re} p| < 1$, функция (11) не имеет.

В силу нечетности функции (11) каждо-

му корню уравнения (12) $p_- < 0$ соответствует корень $p_+ > 0$, причем $p_- = -p_+$. Поскольку для исследования сингулярности напряжений (10) в вершине клина интерес представляют корни, по величине не превосходящие единицы, для удобства будем изучать вещественные корни характеристического уравнения, расположенные в интервале $(0, 1)$. Тогда из (10) вытекает, что при $r \rightarrow 0$ напряжения будут иметь степенную сингулярность вида $r^{-\lambda}$, где показатель сингулярности $\lambda = 1 - p_+$.

Заметим, что при замене α_1 на α_2 , а α_2 на α_1 и μ на $1/\mu$ уравнение (12) сохраняет свой вид. Это обстоятельство позволяет рассматривать корни характеристического уравнения только, например, для углов $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Корни при $\alpha_1 < \alpha_2$ могут быть получены из найденных при $\alpha_1 > \alpha_2$ путем указанной замены параметров.

В случае геометрически симметричной структуры, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, уравнение (12) редуцируется и принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta(p, \alpha, \alpha, \beta, \mu) = & 2\psi(p, \alpha, \beta) \cos p(\alpha - \beta) + \\ & + \frac{8p^2\beta^2\mu}{(\mu - 1)^2} \sin 2p\alpha, \\ \psi(p, \alpha, \beta) = & \sin 2p\beta \cos p(\alpha - \beta) - \\ & - 2p\beta \cos p(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Характеристическая функция (11) допускает еще две другие формы представления, удобные для исследования ее нулей при $\mu > 1$ и $\mu < 1$:

$$\begin{aligned} \Delta(p, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \mu) = \\ = 2\psi(p, \alpha_1, \beta) \cos p(\alpha_2 - \beta) + D_1(p), \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(p, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \mu) = \\ = 2\psi(p, \alpha_2, \beta) \cos p(\alpha_1 - \beta) + D_2(p), \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_1(p) = & \frac{4p\beta}{(\mu - 1)^2} [2p\beta\mu \sin p(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ & + (\mu - 1) \sin 2p\beta \sin p(\alpha_1 - \alpha_2)], \\ D_2(p) = & \frac{4p\beta\mu}{(\mu - 1)^2} [2p\beta \sin p(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ & + (\mu - 1) \sin 2p\beta \sin p(\alpha_1 - \alpha_2)]. \end{aligned}$$

Рассмотрим предельные случаи.

Случай однородного клина. При $\mu \rightarrow 1$

функция (11) принимает вид

$$\Delta(p) = \frac{8p^2\beta^2\mu}{(\mu-1)^2} \sin p(\alpha_1 + \alpha_2) + O\left(\frac{1}{\mu-1}\right).$$

Отсюда $p_{1+} = \pi/(\alpha_1 + \alpha_2)$, как и должно быть в этом случае. Следовательно, если угол раствора однородного клина не превышает π , то особенности в его вершине не возникает. Если же $\pi < \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2\pi$, то напряжения имеют степенную сингулярность вида $r^{-\lambda}$, где $\lambda = 1 - p_{1+}$. В частности, для трещины в однородной среде, когда $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$, получаем классический результат: $\lambda = 0,5$.

Случай идеального контакта однородных материалов. При $\beta \rightarrow 0$ асимптотика функции (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \frac{4(\mu^2 + 1)}{(\mu - 1)^2} p^2 \beta^2 \Delta_0(p) + O(\beta^3), \\ \Delta_0(p) &= \sin p(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ &+ \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} \sin p(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда вытекает, что показатель сингулярности λ двухфазной композиции при совершенном контакте фаз определяется первыми нулями функции $\Delta_0(p)$. Эта функция использовалась в работах [15, 16].

В отличие от однородного клина двухфазный клин, во-первых, может иметь особенность в вершине при углах раствора

$$\pi/2 < \alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi,$$

а во вторых, при

$$\pi < \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2\pi$$

сингулярность может быть не только слабой, но и сильной и порождаться двумя первыми нулями функции (15).

Случай большой относительной жесткости материалов. При $\mu \rightarrow \infty$ характеристическое уравнение согласно (13) можно представить в виде

$$\Delta(p) = 2\psi(p, \alpha_1, \beta) \cos p(\alpha_2 - \beta) = 0.$$

Следовательно, в этом предельном случае собственные числа задачи распадаются на два множества и определяются корнями уравнений

$$\cos p(\alpha_2 - \beta) = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sin 2p\beta \cos p(\alpha_1 - \beta) - \\ - 2p\beta \cos p(\alpha_1 + \beta) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В зависимости от геометрических параметров композита уравнения (16) и (17) в интервале $(0, 1)$ могут иметь один или два корня, а также вовсе не иметь корней.

Случай малой относительной жесткости материалов. При $\mu \rightarrow 0$, аналогично предыдущему предельному случаю, с помощью представления (14) получаем, что нули характеристической функции распадаются на два множества и определяются корнями уравнений вида (16) и (17), в которых α_1 заменяется на α_2 , а α_2 на α_1 .

Переходя к общей ситуации и основываясь на формуле (11), а также очевидных неравенствах для «коэффициентов» C_j ($j = 1 - 4$) для любых $p \in (0, 1)$ и $\beta \in (0, \pi)$, имеющих вид

$$\begin{aligned} C_1 < 0, C_2 > 0 \quad (\text{при } \beta < \pi/2), \\ C_3 > 0 \quad (\text{при } 0 < \mu < \infty), \\ C_4 > 0 \quad (\text{при } \mu > 1), \\ C_4 < 0 \quad (\text{при } 0 < \mu < 1), \end{aligned}$$

можно доказать ряд общих свойств распределения корней исследуемого уравнения:

при углах раствора клина $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi/2$ для любых $0 \leq \beta \leq \alpha_2$ и $0 < \mu < \infty$ характеристическое уравнение в интервале $(0, 1)$ корней не имеет;

при углах $\pi/2 < \alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$ и любых допустимых значениях параметров β и μ уравнение (12) в интервале $(0, 1/2)$ корней не имеет, т. е. при таких углах раствора в вершине клина может быть только слабая особенность;

при значениях $\mu > 1$ и любых $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \beta \geq 0$ уравнение (12) в интервале $(0, 1/2)$ корней не имеет (аналогичный результат, естественно, получается и при $0 < \mu < 1$, когда $\alpha_1 \leq \alpha_2$). Иными словами, поле напряжений в «жестком» композитном клине при любом сочетании геометрических параметров может иметь только слабую сингулярность.

Дальнейший анализ корней характеристического уравнения будем проводить с учетом

значений угла раствора композита. Не имея возможности в данной работе обсуждать все детали, сформулируем лишь основные результаты проведенного анализа.

Если угол раствора клина удовлетворяет неравенству

$$\pi/2 < \alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi \text{ и } \alpha_1 > \alpha_2,$$

то уравнение (12) гарантированно будет иметь единственный корень $1/2 < p < 1$ только в случае «мягкого» композита при выполнении дополнительных условий

$$\alpha_1 - \beta > \pi/2, \quad 0 < \mu < 1 - M, \quad (18)$$

где

$$M(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = 2\beta \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \times [\sin 2\beta \sin(\alpha_1 - \alpha_2)]^{-1}$$

— монотонно возрастающая функция угла β ; в случае трещины она равна нулю.

Отсюда вытекает, что по сравнению со случаем идеального контакта фаз, когда $\beta = 0$, наличие интерфазы приводит к снижению возможности возникновения сингулярности напряжений в вершине клина. Это связано как с нарушением первого из неравенств (18) при больших углах β , так и с сужением интервала изменения относительной жесткости μ при увеличении угла раствора промежуточной области. Кроме того, как показывают числовые расчеты, наличие интерфазы уменьшает показатель сингулярности по сравнению с ситуацией, когда она отсутствует.

При углах, удовлетворяющих неравенствам

$$\pi < \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2\pi, \quad 0 < \alpha_1 - \alpha_2 \leq \pi$$

для «жесткой» структуры, решение характеристического уравнения может включать следующие варианты:

- 1) не иметь корней в интервале (0, 1);
- 2) иметь один корень в интервале (1/2, 1);
- 3) иметь два корня в интервале (1/2, 1).

Отсюда вытекает, что одной из характерных черт композиционного клина по сравнению с однородным клином является отсутствие сингулярности напряжений в его вершине при углах раствора, превышающих 180° (вариант 1). Вторая характерная черта состоит в наличии двух сингулярных

слагаемых в асимптотике напряжений при $r \rightarrow 0$ (вариант 3). Такая ситуация возникает, например, когда

$$\alpha_* \leq \alpha_1 \leq 3\pi/2 \quad (\alpha_* \approx 1,075\pi),$$

$$\alpha_2 - \beta > \pi/2 \text{ и } \mu > (1 - |M|)^{-1}, \text{ если } |M| < 1.$$

Слабая сингулярность, порождаемая единственным корнем в рассматриваемом интервале, будет иметь место, например, для трещины, упирающейся в градиентную полуплоскость.

В случае «мягкого» композита ($0 < \mu < 1$) количество корней уравнения (12) и интервалы их существования зависят от параметров структуры, и возможны такие ситуации:

- 1) один корень в интервале (0, 1/2);
- 2) один корень в интервале (1/2, 1);
- 3) два корня $0 < p_{1+} < 1/2 < p_{2+} < 1$, обуславливающие сильную и слабую сингулярности;
- 4) два корня $1/2 < p_{1+} < p_{2+} < 1$, обуславливающие две слабые сингулярности.

Если промежуточный ФГМ отсутствует, то характеристическое уравнение в данном диапазоне изменения углов α_1 и α_2 имеет только один корень (ситуация 1 или 2). При этом в случае трещины реализуется только ситуация 1, когда возникает сильная сингулярность. Таким образом, эффект наличия интерфазы проявляется в возможности существования у напряжений в «мягкой» структуре двух сингулярных слагаемых. Однако, как показывают вычисления, величина

$$\lambda_2 = 1 - p_{2+} \ll 1,$$

т. е. особенность, вносимая вторым слагаемым, является весьма слабой.

Наконец, рассмотрим случай, когда справедлива следующая система неравенств:

$$\pi < \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2\pi, \quad \pi < \alpha_1 - \alpha_2 \leq 2\pi.$$

Для углов α_1 и α_2 , удовлетворяющих этим неравенствам, при $\mu > 1$ поле напряжений в вершине клина будет иметь только слабую особенность, как и в случае идеального контакта материалов ($\beta = 0$).

Если же $0 < \mu < 1$, то количество корней уравнения (12), области их существования

и характер особенностей зависят от угловых параметров структуры; при этом может реализовываться один из трех случаев:

- 1) один корень $0 < p_{1+} < 1/2$, обуславливающий сильную особенность;
- 2) один корень $1/2 < p_{1+} < 1$, обуславливающий слабую особенность;
- 3) два корня $0 < p_{1+} < 1/2 < p_{2+} < 1$, обуславливающие как сильную, так и слабую особенности.

Например, для трещины при любых допустимых значениях угла β может иметь место только случай 1 или 3. Если же трещина расположена так, что

$$3\pi/2 < \alpha_1 - \beta < 2\pi,$$

то при любом $0 < \mu < 1$ характеристическое уравнение имеет два корня, т. е. реализуется случай 3. При этом второй корень близок к единице и, следовательно, отвечающая ему особенность будет весьма слабой.

Численные примеры

В качестве иллюстрации проведенного анализа на рис. 2 представлены зависимости показателя сингулярности от параметра μ в вершине полубесконечной трещины, находящейся в жесткой и мягкой композиционных средах при заданном значении угла $\alpha_1 = 4\pi/3$. В случае «жесткого» композита (рис. 2, а) сингулярность является слабой ($\lambda < 1/2$) и снижается с увеличением относительной жесткости μ . Для достаточно узких областей, занятых градиентным материалом, происходит снижение показателя сингулярности по сравнению с двухкомпонентной средой, у которой $\beta = 0$, при любом $\mu > 1$ (кривая 2, соответствующая $\beta = \pi/6$). Подобное ослабление сингулярности, вызванное наличием ФГМ с модулем сдвига, изменяющимся экспоненциально в трансверсальном направлении, отмечалось в работе [12]. Однако с увеличением угла раствора интерфазы наблюдается обратный эффект, происходящий сначала при не слишком большом различии упругих модулей материалов, а затем и при любом $\mu > 1$. В итоге показатель сингулярности принимает максимальные значения для трещины, находящейся на границе раздела однородной и градиентной сред, т. е. при

$\beta = 2\pi/3$ (кривая 5 на рис. 2, а).

Можно показать, что в случае трещины, находящейся в жесткой композиционной среде, и углов, удовлетворяющих неравенству

$$0 < \alpha_1 - \alpha_2 < \pi,$$

два сингулярных слагаемых в асимптотике напряжений возникают, если

$$\beta < \pi/2 \text{ и } \alpha_2 - \beta \geq \pi/2.$$

В связи с этим на рис. 2, а представлена также зависимость от μ показателя сингулярности, соответствующего второму корню характеристического уравнения (12) при $\beta = \pi/6$ (кривая 2').

При $0 < \mu < 1$ для всех возможных углов раствора переходной зоны наблюдается эффект уменьшения показателя сингулярности (рис. 2, б). Сингулярность будет наиболее сильной в случае двухкомпонентной среды с идеальным контактом фаз ($\beta = 0$). По мере увеличения угла β она ослабевает, что особенно заметно при малых значениях относительной жесткости, а при $\beta > \pi/2$ появляется второй показатель сингулярности, показанный на рис. 2, б для $\beta = 2\pi/3$ (кривая 5').

Второй пример представляет обобщение задачи, исследованной в работах [5, 12], о взаимодействии ортогональной трещины с функционально-градиентной полуплоскостью, модуль сдвига которой является экспоненциальной функцией полярного угла. В данном случае трещина может быть наклонена под любым углом к градиентной полуплоскости. Можно показать, что при $\beta = \pi/2$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$ уравнение (12) в интервале $(0, 1)$ имеет только один корень для любых значений

$$\mu \in (0, \infty) \text{ и } \alpha_1 \in (\pi, 3/2\pi).$$

На рис. 3 представлены зависимости показателя сингулярности от относительной жесткости для «жесткого» и «мягкого» композитов, соответственно, при варьировании угла наклона трещины.

В случае «жесткого» композита ($\mu > 1$), при относительно малых значениях параметра μ , для наклонных трещин наблюдается ослабление сингулярности по сравнению

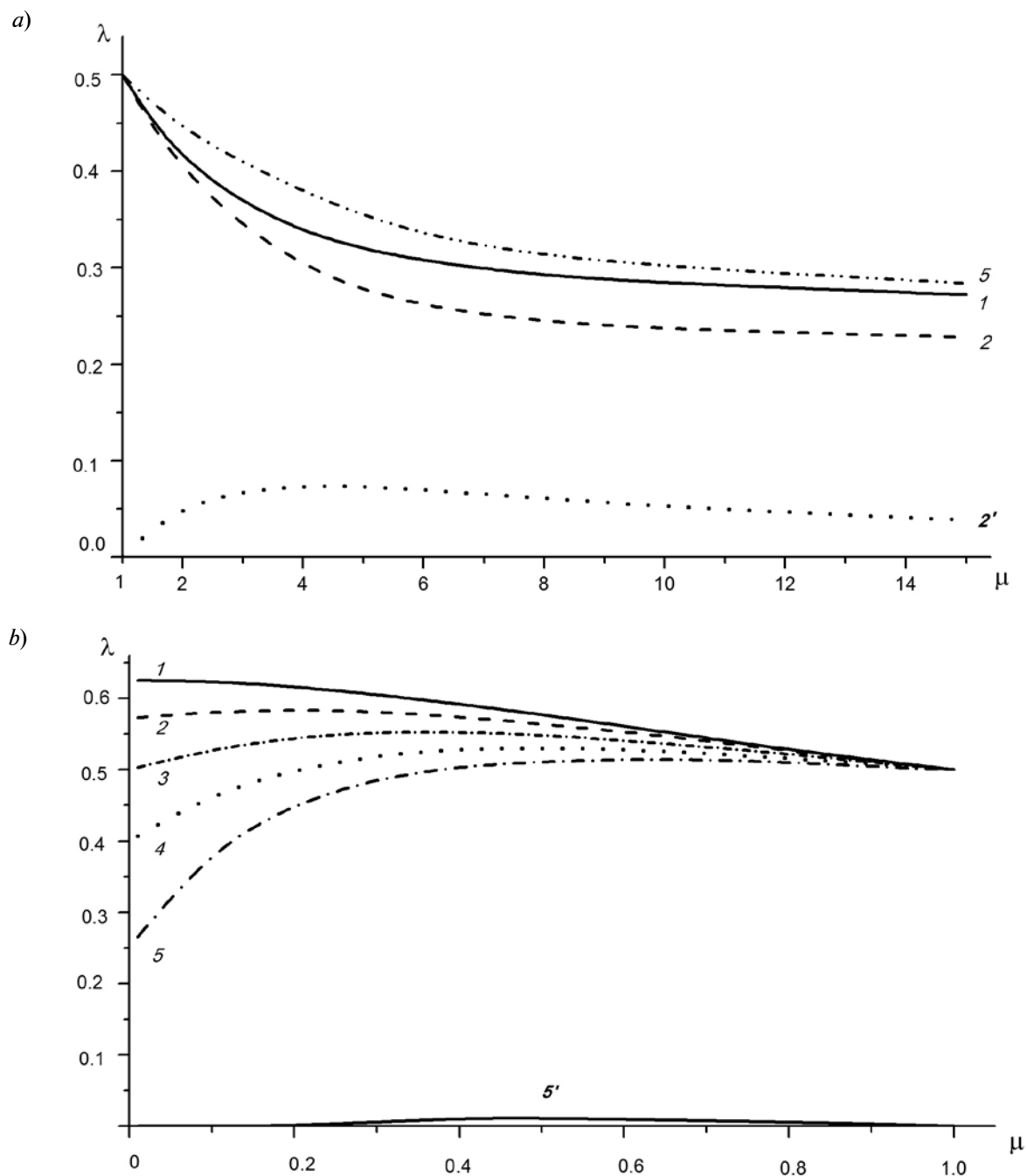


Рис. 2. Зависимости показателя сингулярности напряжений λ в вершине трещины от относительной жесткости композиционной среды μ для значений $\mu > 1$ (a) и $0 < \mu < 1$ (b) при $\alpha = 4\pi/3$ и различных значениях β : 0 (1), $\pi/6$ (2), $\pi/3$ (3), $\pi/2$ (4), $2\pi/3$ (5); представлены случаи для второго (кривые 2', 5') и первого (остальные кривые) корней характеристического уравнения (12)

со случаем трещины, ортогональной ФГМ (рис. 3, a). С возрастанием отношения модулей сдвига однородных фаз происходит обратный эффект усиления сингулярности (в зависимости от угла наклона трещины).

При $\mu \gg 1$ наименьшим по величине будет показатель сингулярности у ортогональной трещины, а наибольшим — у трещины, находящейся на границе раздела однородной и градиентной фаз ($\alpha_1 = 3\pi/2$, $\alpha_2 = \beta = \pi/2$).

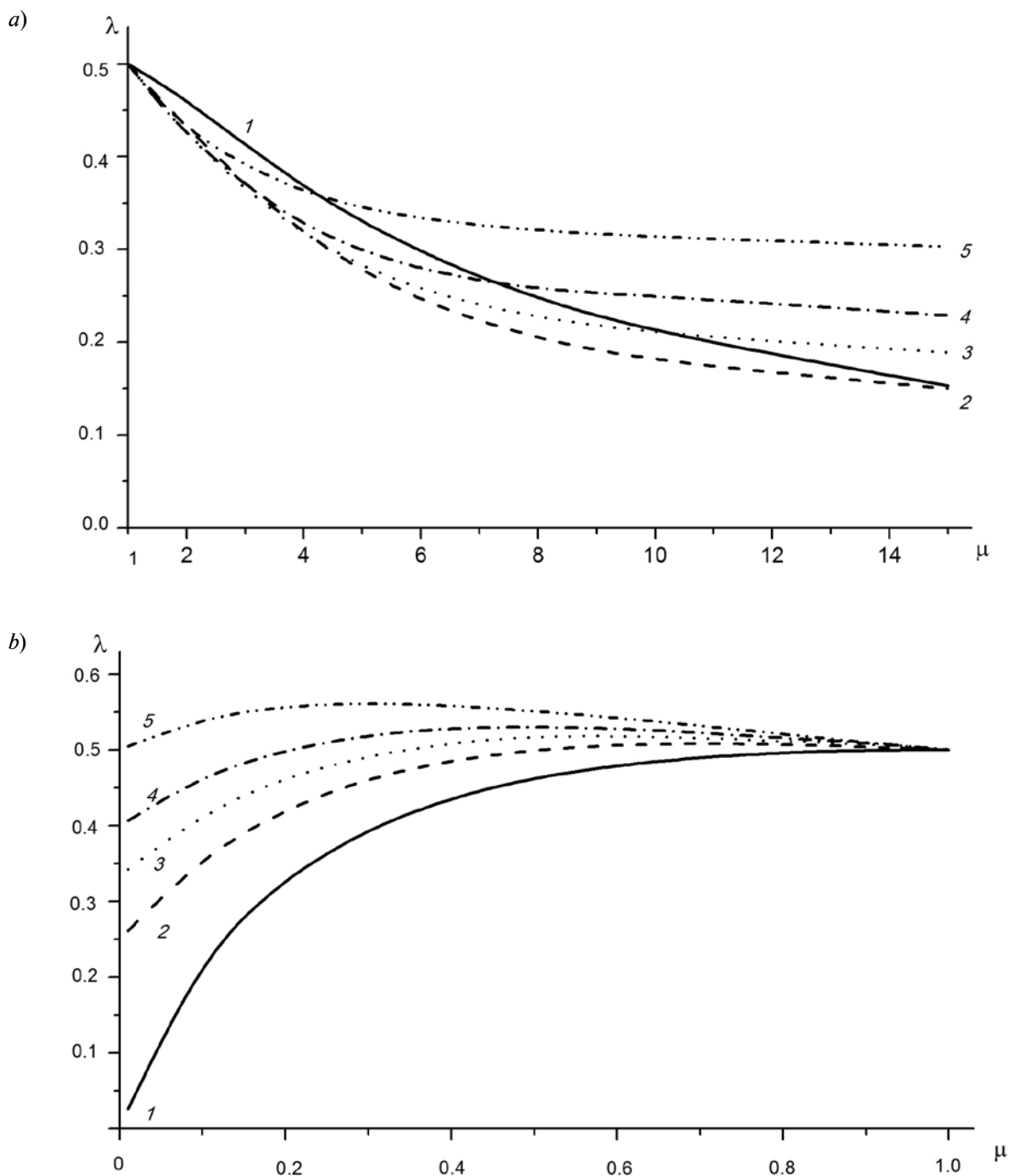


Рис. 3. Зависимости показателя сингулярности напряжений для трещины, упирающейся в полуплоскость из функционально-градиентного материала ($\beta = \pi/2$), от относительной жесткости композиционной среды для значений $\mu > 1$ (a) и $0 < \mu < 1$ (b) при различных значениях α_1 : π (1), $7\pi/6$ (2), $5\pi/4$ (3), $4\pi/3$ (4), $3\pi/2$ (5)

При увеличении угла наклона трещины «мягкая» структура композита ($0 < \mu < 1$) приводит к возрастанию показателя сингу-

лярности (рис. 3, b). Поэтому величина λ минимальна для ортогональной трещины и максимальна при $\alpha_1 = 3\pi/2$.



Таким образом, проведенный анализ показывает, что функционально-градиентная интерфаза оказывает существенное влияние на напряженное состояние вблизи вершины композиционной клиновидной области. Наличие градиентной промежуточной зоны

приводит как к ослаблению, так и усилению сингулярности напряжений, а также к появлению в асимптотике упругих напряжений при некоторых значениях параметров структуры дополнительного сингулярного слагаемого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Williams M.** Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *Trans. ASME. Ser.E. J. Appl. Mech.* 1952. Vol. 74. No. 4. Pp. 526–528.
- [2] **Paggi M., Carpinteri A.** On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Appl. Mech. Rev.* 2008. Vol. 61. No. 2. P. 020801, 22 p.
- [3] **Misuris G., Kuhn G.** Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models // *Archive Appl. Mech.* 2001. Vol. 71. No. 11. Pp. 764–780.
- [4] **Тихомиров В.В.** Трещина продольного сдвига, упирающаяся в клиновидное упругое включение // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.* 2014. № 2(194). С. 110–119.
- [5] **Pageau S.S., Joseph P.F., Biggers S.B.** Singular antiplane stress fields for bonded and disbanded three-material junctions // *Eng. Fract. Mech.* 1995. Vol. 52. No. 5. Pp. 821–832.
- [6] **Bogy D.B.** Two edge-bonded elastic wedges of different materials wedge angles under surface tractions // *Trans. ASME. Ser.E. J. Appl. Mech.* 1971. Vol. 38. No. 2. Pp. 377–386.
- [7] **Dempsey J.P., Sinclair G.B.** On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge // *J. Elast.* 1979. Vol. 9. No. 4. Pp. 373–391.
- [8] **Dempsey J.P., Sinclair G.B.** On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge // *J. Elast.* 1981. Vol. 11. No. 3. Pp. 317–327.
- [9] **Блинова В.Г., Линьков А.М.** Метод определения асимптотик в общей вершине упругих клиньев // *Прикладная математика и механика.* 1995. Т. 59. № 2. С. 199–208.
- [10] **Eischen, J.W.** Fracture of nonhomogeneous materials // *Int. J. Fract.* 1987. Vol. 34. No. 1. Pp. 3–22.
- [11] **Carpinteri A., Paggi M.** On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials // *Int. J. Fract.* 2005. Vol. 135. No. 1–4. Pp. 267–283.
- [12] **Linkov A., Rybarska-Rusinek L.** Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges // *Int. J. Eng. Sci.* 2012. Vol. 61. No. 1. Pp. 87–93.
- [13] **Marur P.R., Tippur H.V.** Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient // *Int. J. Solids Struct.* 2000. Vol. 37. No. 38. Pp. 5353–5370.
- [14] **Atkinson C.** On stress singularities and interfaces in linear elastic fracture mechanics // *Int. J. Fract.* 1977. Vol. 13. No. 6. Pp. 807–820.
- [15] **Erdogan F., Gupta G.D.** Bonded wedges with an interface crack under anti-plane shear loading // *Int. J. Fract.* 1975. Vol. 11. No. 4. Pp. 583–593.
- [16] **Shahani A.R.** Mode III stress intensity factors in an interfacial crack in dissimilar bonded materials // *Arch. Appl. Mech.* 2006. Vol. 75. No. 4. Pp. 405–411.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. 195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
victikh@mail

Tikhomirov V.V. STRESS SINGULARITY IN A TOP OF THE COMPOSITE WEDGE WITH INTERNAL FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL.

The antiplane problem of the composite wedge consisting of two homogeneous external wedge-shaped areas and an intermediate zone of the interphase is studied. The interphase material is assumed functionally graded. It is shown that the problem in each area is harmonic within the quadratic law of inhomogeneity of the material in the transverse direction. The influence of the interphase on the stress state at the top of the wedge is analyzed. As compared to the ideal contact of external materials, the presence of the interphase

leads both to decrease and increase in the singularity exponent. Moreover, the stress asymptotic may have two singular terms for some values of the composite parameters.

ANTIPLANE CRACK, FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL, INTERPHASE, STRESS SINGULARITY.

REFERENCES

- [1] **M. Williams**, Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.* 74 (1952) 526–528.
- [2] **M. Paggi, A. Carpinteri**, On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion, *Appl. Mech. Rev.*, 61 (2008) 020801.
- [3] **G. Misuris, G. Kuhn**, Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models, *Archive Appl. Mech.* 71 (2001) 764–780.
- [4] **V.V. Tikhomirov**, Longitudinal shear crack terminating at a wedge-shaped elastic inclusion, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics.* 2(194) (2014) 110–119.
- [5] **S.S. Pageau, P.F. Joseph, S.B. Biggers**, Singular antiplane stress fields for bonded and disbanded three-material junctions, *Eng. Fract. Mech.* 52 (1995) 821–832.
- [6] **D.B. Bogy**, Two edge-bonded elastic wedges of different materials wedge angles under surface tractions, *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.* 38 (1971) 377–386.
- [7] **J.P. Dempsey, G.B. Sinclair**, On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge, *J. Elast.* 9 (1979) 373–391.
- [8] **J.P. Dempsey, G.B. Sinclair**, On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge, *J. Elast.* 11 (1981) 317–327.
- [9] **V. Blinova, A. Linkov**, A method of finding asymptotic forms at the common apex of elastic wedges, *J. Appl. Math. Mech.* 59 (1995) 187–195.
- [10] **J.W. Eischen**, Fracture of nonhomogeneous materials, *Int. J. Fract.* 34 (1987) 3–22.
- [11] **A. Carpinteri, M. Paggi**, On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials, *Int. J. Fract.* 135 (2005) 267–283.
- [12] **A. Linkov, L. Rybarska-Rusinek**, Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges, *Int. J. Eng. Sci.* 61 (2012) 87–93.
- [13] **P.R. Marur, H.V. Tippur**, Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient, *Int. J. Solids Struct.* 37 (2000) 5353–5370.
- [14] **C. Atkinson**, On stress singularities and interfaces in linear elastic fracture mechanics, *Int. J. Fract.* 13 (1977) 807–820.
- [15] **F. Erdogan, G.D. Gupta**, Bonded wedges with an interface crack under anti-plane shear loading, *Int. J. Fract.* 11 (1975) 583–593.
- [16] **A.R. Shahani**, Mode III stress intensity factors in an interfacial crack in dissimilar bonded materials, *Arch. Appl. Mech.* 75 (2006) 405–411.

THE AUTHOR

TIKHOMIROV Victor V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation.

victikh@mail.ru