

DOI: 10.5862/JPM.218.16

УДК 530.12:517.988.38(075.8)

Н.Н. Горобей, А.С. Лукьяненко

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

О НАЧАЛЬНОМ СОСТОЯНИИ ВСЕЛЕННОЙ В КВАНТОВОЙ КОСМОЛОГИИ

Предложен принцип минимального возбуждения физических степеней свободы для определения начального состояния квантовой Вселенной. Рассмотрена однородная анизотропная модель Вселенной, согласно которой ее размер и параметры являются квантовыми динамическими переменными. В предположении, что размер Вселенной является радиальной переменной в конфигурационном пространстве теории, уточнено определение оператора Гамильтона Вселенной. Предложена простая экспоненциальная форма начального состояния Вселенной, для которой получена оценка ее начального размера.

МИНИМАЛЬНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ, КВАНТОВАЯ ВСЕЛЕННАЯ, НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ, АНИЗОТРОПНАЯ МОДЕЛЬ.

Введение

Согласно современным представлениям, Вселенная родилась из геометрической точки, по сути – из «ничего», и затем расширилась до огромных размеров. Эта идея возникла в классической релятивистской космологии, основанной на общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна, как следствие решения уравнений этой теории, полученного А.А. Фридманом. Следует сразу заметить, что для классической ОТО само это решение представляет проблему, поскольку в исходной точке плотность материи оказывается бесконечной. Фридмановская модель Вселенной является сингулярной. Часто эту космологическую сингулярность сравнивают с той, которая возникает в планетарной модели атома Резерфорда, где электрон, двигаясь по круговой орбите вокруг ядра, теряет энергию на излучение электромагнитных волн и неизбежно падает на ядро. Там его энергия становится бесконечной (со знаком минус).

Как известно, эта сингулярность классической планетарной модели была преодо-

лена с помощью квантовой теории. Сейчас такие же надежды возлагаются на квантовую теорию и в связи с проблемой космологической сингулярности. И хотя квантовый вариант ОТО (квантовая космология) еще не сформулирован в окончательном виде, предложены убедительные сценарии эволюции ранней Вселенной. При этом выделяется квантовая эпоха ее рождения из «ничего», например, в форме квантового туннелирования А. Виленкина [1], или похожим образом задается неограниченная (no-boundary) волновая функция Вселенной Хартля и Хоукинга [2].

Во втором варианте квантовая эпоха присутствует в виде границы для квазиклассического приближения волновой функции при его продолжении назад во времени [3, 4]. Однако оба варианта предсказывают вероятность начальных значений для некоторого космического скалярного поля ϕ , которое «управляет» последующим расширением Вселенной. Если взять скалярное поле с потенциалом $V(\phi)$, то указанная вероятность, предсказываемая, например,

туннельным механизмом А. Виленкина, следует выражению [5]:

$$P(\varphi) = \exp\left(-\frac{3}{8\hbar G^2 V(\varphi_0)}\right), \quad (1)$$

где G – ньютоновская гравитационная постоянная.

При этом радиус Вселенной «на выходе из туннеля» выражается как

$$a_0(\varphi_0) = \sqrt{\frac{3}{4\pi G V(\varphi_0)}} \cong \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{G V(\varphi_0)}}. \quad (2)$$

Следующая за этим стадия эволюции Вселенной характеризуется ее экспоненциальным расширением при медленном «скаtywании» скалярного поля к его минимальному значению $\varphi = 0$. Такое расширение описывается обычно классически в рамках различных инфляционных сценариев (см., например, работу А. Линде [6]). При этом в качестве начального радиуса Вселенной берется обычно не его «туннельное» значение (2), а планковский радиус $a_0 = l_{\text{пл}}$. Впрочем, для конечного состояния Вселенной после экспоненциального расширения ее начальный размер не имеет значения.

Однако практический интерес представляет вычисление квантовых флуктуаций того же скалярного поля, которые, как считается, ответственны за наблюдаемые неоднородности крупномасштабной структуры Вселенной. Так или иначе, актуальной представляется квантовая формулировка инфляционной стадии эволюции Вселенной, особенно на начальном ее этапе, когда инфлатонное скалярное поле φ велико, а радиус Вселенной мал. Здесь мы сталкиваемся с фундаментальной проблемой квантовой космологии – отсутствием параметра времени и невозможностью вообще говорить о квантовой динамике Вселенной [7]. Для этого случая даже придуман термин «замороженная динамика» [8]. Чтобы «разморозить» динамику, следует либо модифицировать квантовую ОТО, либо воспользоваться каким-либо физически обоснованным приближением для введения космического параметра времени.

В качестве космического времени на инфляционной стадии в режиме медленно-го «скаtywания» инфлатонного скалярного

поля φ с потенциалом

$$V(\varphi) = \mu\varphi^4/4$$

в работе [9] предложено рассматривать само это поле (точнее, логарифм от него, $t \sim \ln(\varphi/\varphi_0)$, где φ_0 – его начальное значение).

В этом режиме волновое уравнение квантовой космологии – уравнение Уиллера – Де Витта (УДВ) [7, 8] (рассматривается однородная модель Вселенной) принимает вид уравнения Шредингера с указанным космическим параметром времени, а радиус Вселенной a является квантовой динамической переменной, которая описывается волновой функцией $\psi(t, a)$.

Теперь возникает необходимость задания начального состояния Вселенной при $t = 0$ ($\varphi = \varphi_0$). В работе [9] областью определения масштабного параметра a считается вся вещественная ось (включая отрицательные значения). Соответственно этому выбран способ упорядочения некомутирующих операторных множителей в уравнении УДВ, а в качестве начального состояния Вселенной выбирается гауссов волновой пакет. Именно в этом месте, на границе между квантовой эрой рождения Вселенной и инфляционной стадией ее экспоненциального расширения, мы считаем необходимым уточнить определение начального состояния Вселенной.

Прежде всего, мы ограничим область определения масштабного фактора: $a \in [0, \infty)$, считая его радиальной переменной в геометрическом секторе конфигурационного пространства Вселенной (суперпространства). Сообразно этому должно выбираться упорядочение в уравнении УДВ. В выборе этого упорядочения и соответствующей меры интегрирования на суперпространстве мы будем ориентироваться на гиперболическую структуру уравнения УДВ для несколько расширенной анизотропной модели Вселенной (модель «перемешанного мира») [8]. Начальное состояние Вселенной в данной работе определим как состояние минимального возбуждения всех ее физических степеней свободы, к которым относим и параметры анизотропии. Для этого используем принцип минимума

энергии этих возбуждений.

Обобщение понятия энергии в ОТО, которое было представлено Эдвардом Витеном в виде положительно определенного функционала для случая островного распределения масс с асимптотически плоской геометрией пространства-времени [10, 11], для случая замкнутой Вселенной дано в работе [12].

В данной работе также рассматривается однородная модель Вселенной, но максимально упрощенная, которая вообще не учитывает других физических степеней свободы, кроме инфлатонного скалярного поля. В этом случае принцип минимума сводится к таковому для ее начального объема. Взяв в качестве дополнительных условий средние значения квантовых уравнений связей общей теории относительности, мы приходим к условному принципу экстремума для определения начального состояния Вселенной.

Каноническое квантование однородной анизотропной модели Вселенной

Мы начнем рассмотрение с однородной анизотропной модели Вселенной (модель «перемешанного мира» [8]), в которой 3D-метрика пространственного сечения параметризуется следующим образом:

$$dl^2 = a^2 e^{\beta_k} (\sigma^k)^2, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= \cos \psi d\theta + \sin \psi \sin \theta d\varphi, \\ \sigma^2 &= \sin \psi d\theta - \cos \psi \sin \theta d\varphi, \\ \sigma^3 &= d\psi + \cos \theta d\varphi \end{aligned} \quad (4)$$

— это дуальные 1-формы группы вращений SO (3);

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \\ \beta_2 &= \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, \\ \beta_3 &= -2\beta_+. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, пространственная 3D-геометрия Вселенной в выделенной системе сферических координат с угловыми переменными (ψ, θ, φ) описывается двумя независимыми динамическими переменными: (β_+, β_-) , ровно столько независимых степеней свободы 3D-геометрии (в расчете

на одну точку пространства) насчитывается в общем случае [8].

Единственная остающаяся в этой модели гамильтонова связь H (супергамильтониан), определяющая ее динамику, имеет вид:

$$H = H_a - H_{\beta\varphi}, \quad (6)$$

$$2H_a \equiv \frac{gp_a^2}{a} + \frac{a}{g}, \quad (7)$$

$$2H_{\beta\varphi} \equiv \frac{p_+^2 + p_-^2}{a^3} + aV(\beta_+, \beta_-) + 2a^3V(\varphi). \quad (8)$$

Вторая составляющая гамильтониана (8) отвечает физическим степеням свободы модели (параметрам анизотропии), в нее мы включили также потенциальную энергию инфлатонного скалярного поля. Потенциальная энергия анизотропии $V(\beta_+, \beta_-)$ имеет сложный вид [8], однако, имея в виду задачу определения начального состояния Вселенной, ограничимся для нее гармоническим приближением:

$$V(\beta_+, \beta_-) \cong 8(\beta_+^2 + \beta_-^2). \quad (9)$$

Каноническое квантование модели сводится к замене канонических импульсов в выражениях (7) и (8) соответствующими операторами:

$$p_a \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial a}, \quad p_{\pm} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \beta_{\pm}}. \quad (10)$$

Проблема упорядочения заключается в том, что в выражении (7) эта замена может быть выполнена разными способами. Для того чтобы остановиться на определенном выборе порядка операторных множителей, мы здесь просто реализуем представление о том, что масштабный фактор a является радиальной переменной в конфигурационном пространстве модели $q^i \equiv (a, \beta_+, \beta_-)$, которое оснащено метрической структурой, определяемой квадратичной формой импульсов в супергамильтониане (6):

$$G^{ij} p_i p_j \equiv \frac{1}{a} p_a^2 - \frac{1}{a^3} p_+^2 - \frac{1}{a^3} p_-^2. \quad (11)$$

Ковариантные составляющие метрики Де Витта образуют диагональную матрицу

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

При квантовании квадратичную форму импульсов (11) мы заменим ковариантным оператором Бельтрами – Лапласа:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q^i} \sqrt{G} G^{ij} \frac{\partial}{\partial q^j}, \quad (13)$$

где $G \equiv \det G_{ij}$.

В данном случае этот оператор «кинетической энергии» имеет вид:

$$-a^{-7/2} \frac{\partial}{\partial a} a^{5/2} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{a^3} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_+^2} + \frac{\partial}{\partial \beta_-^2} \right). \quad (14)$$

Первое слагаемое в сумме (14) – «радиальная» часть кинетической энергии – аналогична соответствующей радиальной части для электрона в квантовой механике [13]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}. \quad (15)$$

При этом фиксируется мера интегрирования в конфигурационном пространстве модели:

$$a^{7/2} da d\beta_+ d\beta_-. \quad (16)$$

Начальное состояние минимального возбуждения Вселенной

Если принять квазиклассическое приближение для описания инфляционной стадии экспоненциального расширения Вселенной [9], в котором роль космического параметра времени играет инфлатонное скалярное поле φ , то следующим вопросом будет задание начального состояния Вселенной, соответствующего максимальному начальному значению этого поля φ_0 . В работе [9] часть оператора кинетической энергии, отвечающая масштабному фактору a , определяется следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial a}, \quad (17)$$

а вместо масштабного фактора вводится новая переменная $x = a^{3/2}$ с (произвольно расширенной) областью определения $x \in (-\infty, +\infty)$. Тогда в качестве начального

состояния выбирается гауссов волновой пакет с центром $x = 0$ ($a = 0$). Возбуждения других физических степеней свободы (в рассматриваемой модели это параметры анизотропии β_{\pm}), кроме масштабного фактора a , не учитываются. Такой выбор начального состояния является естественным для подобного рода задач квантовой механики, но все же он произволен. В данной работе будем придерживаться традиционной трактовки масштабного фактора a как радиальной переменной в геометрическом секторе конфигурационного пространства с соответствующим этому выбору упорядочением (14), а для определения начального состояния Вселенной введем принцип его минимального возбуждения. Такое состояние можно назвать основным, или вакуумным.

В динамической структуре ОТО, в случае замкнутой Вселенной, существует мера возбуждения ее физических степеней свободы, аналогичная положительно определенному функционалу энергии [10] в асимптотически плоской геометрии пространства времени. Такой мерой служит минимальное собственное значение некоторого 3D-оператора Дирака, определенного на пространственном сечении Вселенной [12]. В случае однородной анизотропной модели Вселенной, рассматриваемой в данной работе, квадрат этого собственного значения равен положительной части H_a супергамма-милтониана H . После квантования эта величина становится положительно определенным оператором:

$$\hat{H}_a \equiv \frac{1}{2} \left[-\hbar^2 g a^{-7/2} \frac{\partial}{\partial a} a^{5/2} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{a}{g} \right]. \quad (18)$$

В качестве аналога основного состояния электрона в квантовой механике, которое можно найти из условия минимума его средней энергии, определим (в нашем случае) начальное состояние минимального возбуждения Вселенной условием минимума среднего значения оператора (18) на пространстве волновых функций $\psi(a, \beta_+, \beta_-)$. Это начальное состояние действительно будет отвечать минимальному возбуждению физических степеней свободы β_{\pm} , если учесть дополнительное условие

связи (равенство нулю супергамильтониана в классической ОТО, т. е. $H = 0$). В предлагаемой нами квантовой теории начального состояния Вселенной это дополнительное условие выразим в виде равенства нулю среднего значения оператора супергамильтониана. Таким образом, мы приходим к определению начального состояния Вселенной с помощью условного принципа экстремума:

$$\frac{\langle \psi | \hat{H}_a | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} + \lambda \langle \psi | (\hat{H}_a - \hat{H}_{\beta\phi}) | \psi \rangle, \quad (19)$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Если еще больше упростить модель, исключив из рассмотрения физические степени свободы анизотропии β_{\pm} в выражении (8), искомое начальное состояние будет состоянием минимального среднего объема.

Оценим этот минимальный объем Вселенной в начальном состоянии, взяв простую пробную функцию вида

$$\psi_0(a) = e^{-\sqrt{\mu}a}, \quad (20)$$

с единственным вариационным параметром $\mu = a_0^{-1}$, где a_0 — искомый минимальный радиус.

Для определения единственного параметра μ в данном случае достаточно решить слабое операторное уравнение связи:

$$\langle \psi_0 | (\hat{H}_a - \hat{H}_{\beta\phi}) | \psi_0 \rangle = 0. \quad (21)$$

Функция (20) подобрана таким образом, что все интегралы, возникающие в среднем значении (21), могут быть вычислены точно. Например, среднее значение объема Вселенной в этом состоянии равно

$$\langle a^3 \rangle = \int_0^{\infty} a^3 e^{-2\sqrt{\mu}a} a^{7/2} da = \frac{2 \cdot 14!}{\mu^{15/2} 2^{15}}, \quad (22)$$

а уравнение (21) сводится к степенному уравнению для μ :

$$\frac{\hbar^2 g 4!}{\mu^{3/2} 2^6} + \frac{2 \cdot 10!}{g \mu^{11/2} 2^{10}} - \frac{8V(\phi_0) \cdot 14!}{\mu^{15/2} 2^{15}} = 0. \quad (23)$$

Корень этого уравнения найдем приближенно, считая $a_0 \gg l_{Pl}$. В этом случае можно отбросить первое слагаемое в уравнении (23) и найти корень:

$$a_0 \cong \frac{1}{40} \frac{1}{\sqrt{GV(\phi_0)}}. \quad (24)$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (2), видим, что радиус Вселенной в предлагаемой здесь модели начального состояния примерно в 20 раз меньше, чем «туннельный» в теории А. Виленкина.

Пробная функция начального состояния (20) так же, как и соответствующий ей начальный радиус Вселенной (24), являются приближенными решениями вариационной задачи (19). В этом начальном состоянии мы не учли также энергию нулевых колебаний полей материи и параметров анизотропии.

Заключение

Таким образом, если мы принимаем инфляционный сценарий расширения Вселенной, который начинается с ее микроскопически малых размеров, отвечающих большим начальным значениям инфлатонного скалярного поля, то последнее можно рассматривать в качестве классического параметра времени в последующей квантовой динамике Вселенной. Геометрический размер Вселенной в этой динамике описывается квантовомеханически с помощью волнового уравнения Шредингера. В данной работе уточнена структура этого волнового уравнения в предположении, что радиус Вселенной является радиальной переменной в конфигурационном пространстве теории.

Сформулирован также вариационный принцип минимального возбуждения физических степеней свободы для определения начального состояния Вселенной. В основу вариационной теории начального состояния Вселенной положено понятие энергии замкнутой Вселенной, предложенное ранее по аналогии с виттеновским определением энергии для островной Вселенной с асимптотически плоской геометрией пространства-времени.

Для простейшей однородной модели Вселенной в пренебрежении энергией нулевых колебаний физических степеней свободы получена оценка радиуса Вселенной в начальном состоянии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Vilenkin A.** Creation of Universe from nothing // Phys. Lett. 1982. Vol. B117. No. 1-2. Pp. 25–28.
- [2] **Hartle J.B., Hawking S.W.** Wave function the Universe // Phys. Rev. 1983. Vol. D28. P. 2960.
- [3] **Hartle J.B., Hawking S.W., Hertog T.** The no-boundary measure of the Universe. arXiv: 0711.4630v4 [hep-th], 8 June 2008.
- [4] **Hartle J.B., Hawking S.W., Hertog T.** The classical Universe of the no-boundary quantum state. Available at: arXiv: 0803.1663v1 [hep-th]. March 11, 2008.
- [5] **Vilenkin A.** Quantum creation of Universe // Phys. Rev. 1984. Vol. D30. Pp. 509–511.
- [6] **Linde A.D.** Eternal chaotic inflation // Lett. Nuovo Cimento. 1984. Vol. 39. Pp. 401.
- [7] **Halliwel J.J.** The interpretation of quantum cosmological models. Available at: arXiv: gr-qc/9208001v1, 5 Aug. 1992.
- [8] **Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.** Гравитация. Т. 2. М.: Мир, 1977, 525 с.
- [9] **Hosoya A.** Cosmic time gauge in quantum cosmology and chaotic inflation model. FERMI-LAB-Conf-86/101-T.
- [10] **Witten E.A.** A mechanism of supersymmetric. Preprint Princeton University, 1981.
- [11] **Фаддеев Л.Д.** Проблема энергии в теории Эйнштейна // УФН. 1982. Т. 136. Вып. 3. С. 435–457.
- [12] **Лукьяненко А.С.** Продольные гравитационные поля в ОТО // Доклады АН. 1986. Т. 289. Вып. 3. С. 579–583.
- [13] **Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.** Квантовая механика. 1974. М.: Наука, 752 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ГОРОБЕЙ Наталья Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. 195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
n.gorobey@mail.ru

ЛУКЬЯНЕНКО Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. 195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
alex.lukyan@rambler.ru

Gorobey N.N., Lukyanenko A.S. ON THE UNIVERSE INITIAL STATE IN QUANTUM COSMOLOGY.

The article deals with the problem of an initial state of quantum inflationary Universe. Considering the dynamics of the inflation scalar field at the beginning of the inflation stage in the context of semi-classical approximation, we have identified this field with a cosmic time parameter. The early Universe state was defined as an initial value of the inflation field. Other degrees of the Universe freedom, including the scale factor, are treated within the scope of the quantum theory. Then, the initial state of quantum degrees of freedom at the beginning of the inflation must be defined, as well. A principle of the least excitation of physical degrees of freedom for the Universe has been proposed to determine the initial state of the quantum Universe. A uniform anisotropic model of the Universe was considered where its size and the anisotropic parameters were quantum dynamical variables. On the assumption that the Universe size is a radial variable in the configuration space of the theory the definition of the Hamiltonian of the Universe is rendered more precise. A simple exponential form of the Universe initial state is suggested and the Universe initial size being estimated for this form.

MINIMAL EXCITATION, QUANTUM UNIVERSE, INITIAL STATE, ANISOTROPIC MODEL.

REFERENCES

- [1] **A. Vilenkin.** Creation of Universe from nothing, Phys. Lett., B117 (1-2) (1982) 25–28.
- [2] **J.B. Hartle, S.W. Hawking.** Wave function the Universe, Phys. Rev. D28 (1983) 2960.
- [3] **J.B. Hartle, S.W. Hawking, T. Hertog,** The no-boundary measure of the Universe. arXiv: 0711.4630v4 [hep-th], 8 June 2008.
- [4] **J.B. Hartle, S.W. Hawking, T. Hertog,** The classical Universe of the no-boundary quantum state. arXiv: 0803.1663v1 [hep-th], 11 March 2008.

[5] **A. Vilenkin**, Quantum creation of Universe, Phys. Rev., D30 (1984) 509–511.

[6] **A.D. Linde**, Eternal chaotic inflation, Lett. Nuovo Cimento, 39 (1984) 401.

[7] **J.J. Halliwell**, The interpretation of quantum cosmological models. arXiv: gr-qc/9208001v1, 5 Aug. 1992.

[8] **Ch.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler**, Gravitation, San Francisco, 1973.

[9] **A. Hosoya**, Cosmic time gauge in quantum cosmology and chaotic inflation model, FERMILAB-Conf-86/101-T.

[10] **E.A. Witten**, A mechanism of supersymmetric, Preprint Princeton University, 1981.

[11] **L.D. Faddeev**, The energy problem in Einstein's theory of gravitation, Physics-Uspekhi, 25 (3) (1982) 130–142.

[12] **A.S. Lukyanenko**, Lengthwise gravitation fields in general relativity theory, Doklady Physics (Doklady Akademii Nauk) 289 (3) (1986) 579–583.

[13] **L.D. Landau, E.M. Lifshitz**, Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory (3rd ed.), 1977, Pergamon Press.

THE AUTHORS

GOROBEY Natalia N.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politekhnikeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

n.gorobey@mail.ru

LUKYANENKO Alexander S.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politekhnikeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

alex.lukyan@rambler.ru