



DOI: 10.5862/JPM.213.12

УДК 537.533:621

Н.К. Краснова, В.В. Павлов, К.В. Соловьев

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИДЕАЛЬНО ФОКУСИРУЮЩИХ СИСТЕМ  
ДЛЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ**

Обсуждается одна из реализаций метода физических аналогий, при которой силовые линии пары линейных зарядов ассоциируются с траекториями заряженных частиц в некоторой механической системе, а эквипотенциали – с линиями постоянного действия. Метод служит основой синтеза энергоанализаторов заряженных частиц с идеальной фокусировкой.

ЭНЕРГОАНАЛИЗ, ОПТИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ИДЕАЛЬНАЯ ФОКУСИРОВКА.

Разработка современных средств энергетического анализа пучков заряженных частиц идет по пути увеличения чувствительности энергоанализаторов [1] наряду с улучшением их разрешения. Чрезвычайно перспективным для этой цели представляется использование систем с идеальной фокусировкой (осуществляемой хотя бы в одной из плоскостей движения) потоков заряженных частиц. Одним из подходов, предложенных профессором Ю.К. Голиковым для синтеза такого рода систем, является метод физических аналогий [2]. Суть подхода в том, что некоторая двумерная физическая система (например, система зарядов или гидродинамическая структура), которая обладает характеризующими ее ортогональными линиями (эквипотенциали и силовые линии, линии тока и линии постоянного потенциала и т. п.), ассоциируется с механической системой, имеющей соответствующую ортогональную систему траекторий (линий постоянного действия  $S$ ). Потенциал  $f(x, y)$ , реализующий указанную механическую систему (с учетом имеющейся свободы задания функции действия  $S(x, y)$ ), может быть записан в виде

$$f(x, y) = h - K(S)(S_x^2 + S_y^2), \quad (1)$$

где  $h$  – энергия частицы;  $K(S)$  – функция, связанная с произволом задания  $S$ .

Взяв в качестве физической системы пару разноименных единичных линейных зарядов [3], расположенных в точках  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ , получим действие

$$S(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{q}{p}, \quad (2)$$

где введены вспомогательные переменные  $p = (x-1)^2 + y^2$ ,  $q = (x+1)^2 + y^2$ .

Тогда

$$S_x^2 + S_y^2 = \frac{4}{pq} = 4 / [((x-1)^2 + y^2) \times ((x+1)^2 + y^2)]. \quad (3)$$

Для обеспечения физической состоятельности модели функция  $K(S)$  должна компенсировать особенности, расположенные в точках старта (финиша) частиц, и, следовательно, содержать в своей структуре множитель  $pq$ . Поскольку

$$e^{-S} + e^S = \frac{p+q}{\sqrt{pq}}; \quad e^{-2S} + e^{2S} = \frac{p^2+q^2}{pq},$$

функциями, решающими данную задачу, являются, в частности, комбинации

$$K(S) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{4 \operatorname{ch} 2k S} = \sum_{k=1}^n \frac{4^{k-1} a_k}{(e^{-S} + e^S)^{2k}} = \sum_{k=1}^n \frac{4^{k-1} a_k p^k q^k}{(p+q)^{2k}}; \quad (4)$$

$$K(S) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{4 \operatorname{ch} 2k S} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2(e^{-2kS} + e^{2kS})} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} \frac{p^k q^k}{p^{2k} + q^{2k}}. \quad (5)$$

В этих случаях двумерный потенциал, согласно выражению (1), может быть записан, соответственно, в виде

$$f = h - \sum_{k=1}^n \frac{4^k a_k p^{k-1} q^{k-1}}{(p+q)^{2k}}; \quad (6)$$

$$f = h - \sum_{k=1}^n \frac{2a_k p^{k-1} q^{k-1}}{p^{2k} + q^{2k}}. \quad (7)$$

Симметрия  $K(S)$  относительно  $x, y$  в формулах (4), (5) приводит к симметрии  $f$  в выражениях (6), (7). Теоретически ничто не мешает конструировать и асимметричные функции  $K(S)$  вида

$$K(S) = \sum_{k=1}^n \frac{4^{k-1} a_k}{(A_k e^{-S} + B_k e^S)^{2k}} = \sum_{k=1}^n \frac{4^{k-1} a_k p^k q^k}{(A_k p + B_k q)^{2k}}, \quad (8)$$

$$K(S) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2(A_k e^{-2kS} + B_k e^{2kS})} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} \frac{p^k q^k}{A_k p^{2k} + B_k q^{2k}}, \quad (9)$$

соблюдая условия  $A_k p + B_k q \neq 0$  и  $A_k p^{2k} + B_k q^{2k} \neq 0$  соответственно.

Выбор  $K(S)$  не влияет на геометрию траекторий в плоскости  $XOY$ , но меняет временные параметры движения, а также траектории и распределение потенциала вне плоскости  $z = 0$ . Этот факт можно использовать для подбора полей, реализующих, в том числе, и поперечную (по  $z$ ) фокусировку пучка. Интересно отметить, что, положив

$$K(S) = \frac{1}{(e^{-S} + e^S)^2}$$

(формула (4),  $a_0 = 1, a_k = 0, k > 0$ ), немедленно получаем известный по работе [4]

вариант полукруговой идеальной фокусировки в трансаксиальной системе.

Вид траекторий в плоскости симметрии показан на рис. 1. Энергетическая дисперсия по направлению  $x$  в точке идеальной фокусировки  $x = 1$ , определяемая как  $D = w_0 dx / dw$ , представлена на рис. 2. Видно, что  $D \rightarrow \infty$  при  $\theta \rightarrow \pi$ .

Основной проблемой построения энергоанализатора на основе полей, полученных по приведенной схеме, является получение достаточно «правильного» пространственного распределения поля, связанное с решением некорректной задачи Коши для уравнения Лапласа. В общем случае поле  $f(x, y)$  является двумерным, что не позволяет воспользоваться специальными приемами его распространения в пространство трех измерений. Поэтому остается применить хорошо известное разложение в ряд по степеням малой величины  $z$ :

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \Delta_{xy}^k f(x, y) z^{2k}; \quad (10)$$

$$\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Хотя традиционно при исследованиях подобного рода рассмотрение ведется с точностью до квадратичных по  $z$  членов (10), интересно провести численный эксперимент для оценки реально необходимого

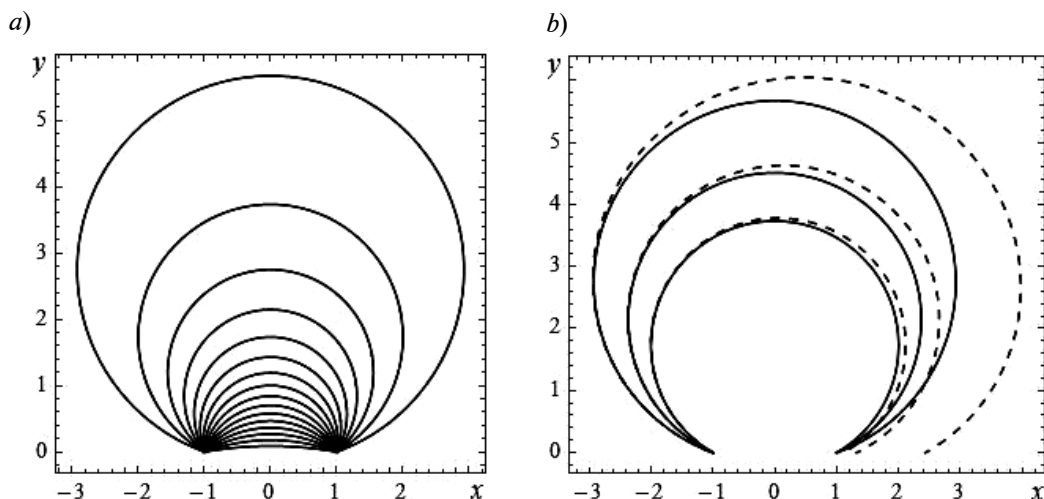


Рис. 1. Траектории заряженных частиц в плоскости  $XOY$ ; углы вылета  $\theta$ : 10 – 160° (шаг 10°) (а), 150 – 160° (шаг 5°) (б); пунктир – расстройка энергии на 0,2 %

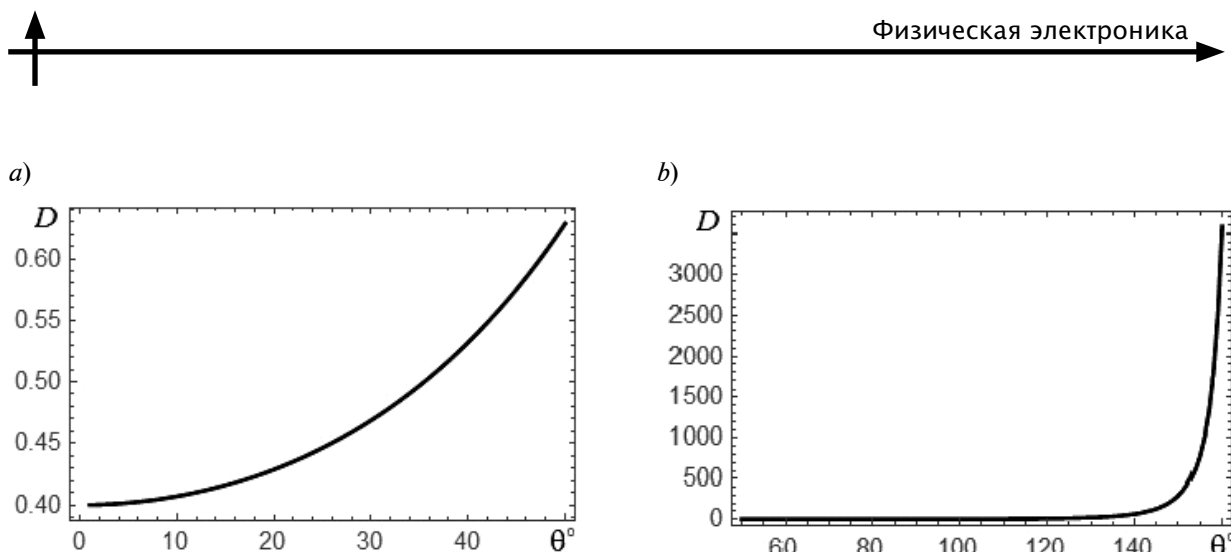


Рис. 2. Энергетическая дисперсия вдоль оси  $x$  в плоскости  $XOY$  в двух диапазонах изменения углов

числа слагаемых. Достаточно громоздкие аналитические вычисления, требующиеся в этом случае, легко реализуются посредством системы Mathematica [5].

Рассмотрим тестовую задачу следующего вида. Пусть дано модельное поле двух одноименных точечных зарядов [3]:

$$\varphi_m(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \quad (11)$$

Поле (11) симметрично по  $z$  и имеет особенности в точках  $(x, y, z) = (0, 0, \pm a)$ . Отметим, что вид рядов в выражениях (6), (7) для потенциала свидетельствует о наличии особенностей при  $z > 0$  и у функций  $f$ , что делает равенство (11) приемлемой моделью анализа поведения ошибок (10) в нашей идеально фокусирующей системе. Задав

$$f_m(x, y) = \varphi_m(x, y, 0),$$

используем ограниченное число членов ряда (10) для приближения поля (11). Рис. 3

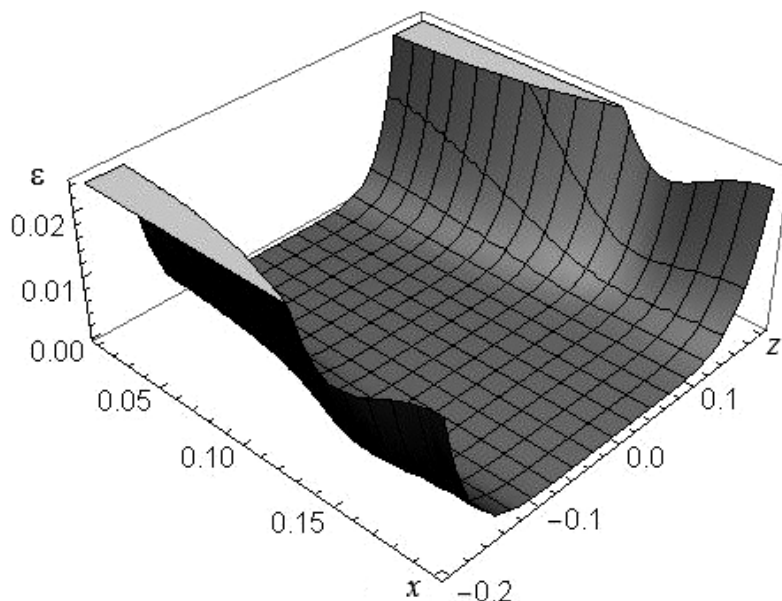


Рис. 3. Ошибка  $\varepsilon = \|\text{grad}(\varphi_m - \varphi_0)\|$  расчета поля при использовании приближения, содержащего члены до 6-й степени  $z$  включительно

демонстрирует поведение ошибки  $\varepsilon$  — нормы градиента разности точного (11) и приближенного (10) полей при использовании четырех слагаемых разложения (10) и  $a = 1/2$ . В области движения частицы ошибка мала, но она стремительно нарастает уже при  $z > 1/10$  и, например, в точке  $(x, y, z) = (0, 1, 0, 02, 0, 1)$  составляет примерно  $\varepsilon \approx 3 \cdot 10^{-4}$ .

Вычислим координаты точек возврата на плоскость  $y = 0$  частиц, стартовавших из источника в  $(x, y, z) = (-1, 0, 0)$  с единичной энергией, углом  $\alpha = 10^\circ$  вектора скорости к плоскости симметрии и углом  $\theta$ , меняющимся в диапазоне  $1 - 70^\circ$ , между проекцией скорости на плоскость симметрии и осью  $OX$ . Приближение, сохраняющее слагаемые вплоть до  $z^6$ , обеспечивает уровень абсолютной ошибки точек возврата на плоскость  $y = 0$  порядка  $10^{-3}$ . Вопрос о приемлемости данной точности с учетом максимального смещения траектории по  $z$  на расстояние  $0,3 - 0,6$  и поперечной угловой апертуры в  $0,17$  должен решаться для каждого случая отдельно.

Вернемся к изучению исходной идеально фокусирующей системы. Сначала возьмем для примера поле, определяемое функцией (4), при  $a_0 = 1, a_k = 0, k > 0$ . Качество восстановления потенциала в пространстве показано на рис. 4, дающем вид сечений функций  $\varphi(x, y, z)$  в плоскости  $y = 0,02$  при различном количестве чле-

нов ряда (10). Важно, что практическая реализация системы возможна путем задания требуемого распределения потенциала в плоскостях  $z = \pm a$ . Последнее можно осуществить путем подачи рассчитанных значений напряжения на краевые вставки. При этом необходим анализ влияния неточности распределения поля в плоскостях  $z = \pm a$  на сохранение идеальности фокусировки в плоскости  $z = 0$ .

Приведем первые слагаемые ряда (10) для рассматриваемой, простейшей в данном классе, функции

$$f = -\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{(1+r^2)^2}. \quad (12)$$

Итак, с точностью до  $z^6$  пространственное распределение поля имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & -\frac{1}{(1+r^2)^2} + \\ & + 4 \frac{-1+2r^2}{(1+r^2)^4} z^2 - 8 \frac{1-6r^2+3r^4}{(1+r^2)^6} z^4 + \\ & + \frac{64}{5} \frac{-1+12r^2-18r^4+4r^6}{(1+r^2)^8} z^6 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Численный анализ указывает на достаточность удержания четырех первых членов ряда (13) для обеспечения удовлетворительной точности расчетов траекторий частиц вне плоскости  $z = 0$  при старте частиц под углом  $\alpha$  до  $15^\circ$  к плоскости симметрии.

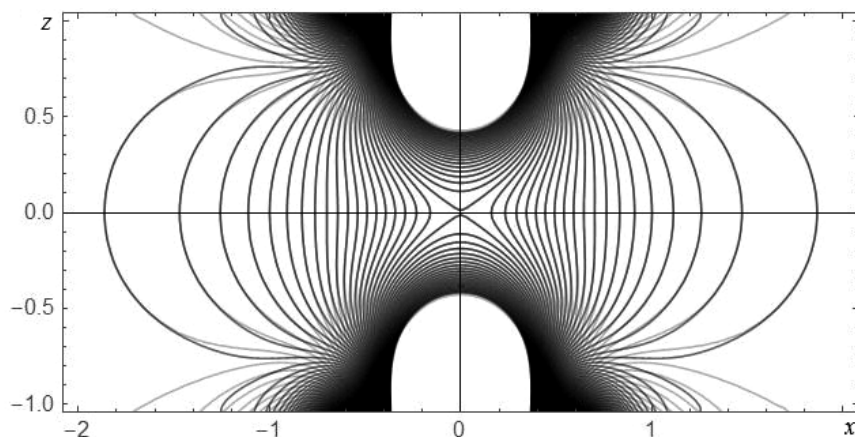


Рис. 4. Распределения потенциала электростатического поля в плоскости  $y = 0,02$  для приближений, содержащих разложения 4-й (линии серого цвета) и 6-й (линии черного цвета) степеней  $z$ , совмещенные на одном графике

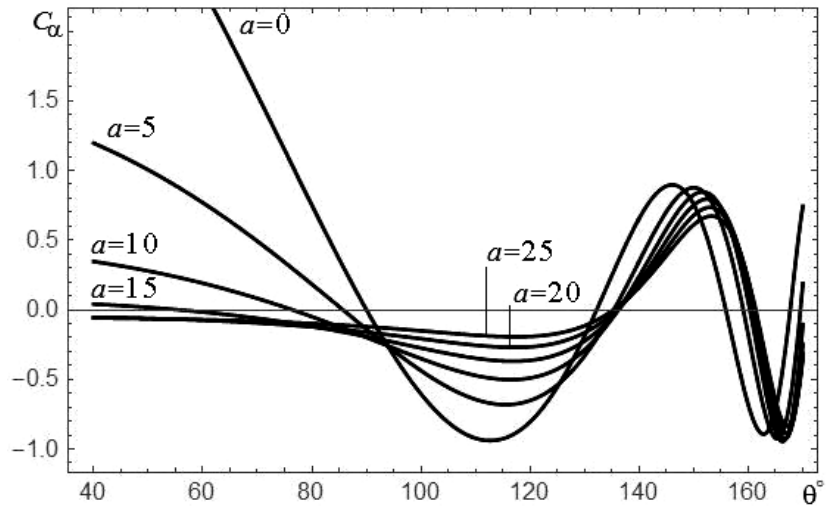


Рис. 5. Абберационный коэффициент  $C_\alpha$  как функция угла вылета частиц  $\theta$  для функций  $K(S)$  в форме (14) при различных значениях параметра  $a$

При построении энергоанализатора заряженных частиц весьма важным является вопрос о наличии в системе пространственной фокусировки. Вычисление абберационного коэффициента

$$C_\alpha(\theta) = \left. \frac{\partial z(\alpha, \theta)}{\partial \alpha} \right|_{y=0} \quad (14)$$

дает ответ на этот вопрос.

Рис. 5 (кривая 1) говорит о наличии, по крайней мере, четырех значений угла  $\theta$ , при которых  $C_\alpha$  обращается в нуль, то есть поперечная фокусировка первого порядка существует. Поскольку углам старта  $\theta \rightarrow \pi$  соответствует бесконечное время движения частицы от источника до детектора и бесконечное удаление по  $y$ , рассматривать углы, близкие к значению  $\pi$ , нет смысла. Поэтому можем ограничиться анализом лишь трех первых корней уравнения  $C_\alpha(\theta) = 0$ . Углы  $\theta$  фокусировки по  $\alpha$  и соответствующие им значения дисперсии таковы:

$$\theta_1 = 90^\circ, D_1 \approx 1,8; \theta_2 = 132,2^\circ, D_2 \approx 30; \\ \theta_3 = 155,9^\circ, D_3 \approx 1000.$$

Оценки размеров абберационных пятен в указанных режимах можно сделать на основе расчета разброса точек прилета частиц на плоскость  $y = 0$ . Пусть частицы стартуют из точки  $(x, y, z) = (-1, 0, 0)$  с углами вылета

$$-15^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ \text{ и } \theta = \theta_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Семейства точек финиша в плоскости детектора даны на рис. 6.

Наименьший размер пятна, очевидно, соответствует второму нулю кривой  $C_\alpha(\theta)$ .

Теоретически возможно проведение оптимизации разрешения прибора на множестве параметров  $\{a_k\}$  выражений (6) и (7). Однако такая задача требует отдельного исследования. В этой работе пока лишь продемонстрируем, что привлечение хотя бы одного дополнительного слагаемого в выражении (6) может существенно повлиять

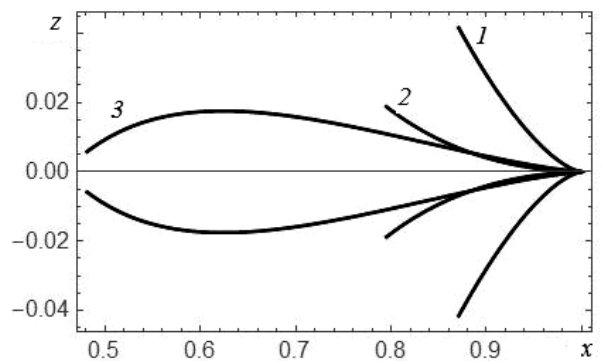


Рис. 6. Следы в плоскости детектора  $y = 0$  семейств заряженных частиц, параметризуемых углами старта  $\alpha$  ( $-15^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ ), для трех различных углов вылета  $\theta$ , соответствующих поперечной фокусировке пучка: ( $\theta_1 = 90^\circ$  (1),  $\theta_2 = 132,2^\circ$  (2),  $\theta_3 = 155,9^\circ$  (3) в поле (13)

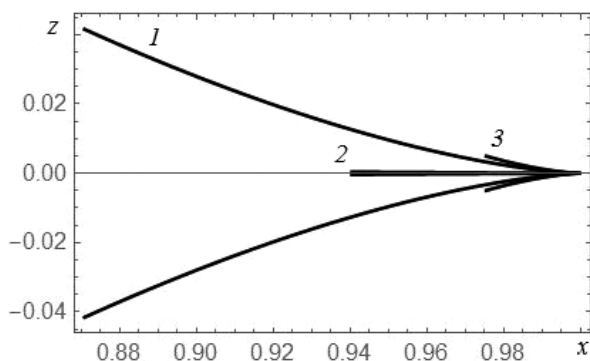


Рис. 7. Следы в плоскости детектора  $y = 0$  семейств заряженных частиц, параметризуемых углами старта  $\alpha (-15^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ)$ , для различных значений константы перемешивания  $a$  поля (15) и углов вылета  $\theta$ , соответствующих поперечной фокусировке пучка:  
 $a = 0, \theta_1 = 90^\circ$  (1),  $a = 5, \theta_2 = 85,68^\circ$  (2),  
 $a = 10, \theta_3 = 76,4^\circ$  (3)

на фокусирующие (диспергирующие) свойства системы.

Рассмотрим функцию  $K(S)$  вида

$$K(S) = \frac{1}{(e^{-S} + e^S)^2} + \frac{a}{(e^{-S} + e^S)^4}, \quad (15)$$

которая следует форме (4) с набором параметров  $a_1 = 1, a_2 = a/4, a_k = 0, k > 2$  и отличается от исследованной ранее наличием второго слагаемого. Зависимости абберационного коэффициента  $C_\alpha$  от  $\theta$  для значений константы перемешивания  $a = 5, 10, 15, 20, 25$  показаны на рис. 5. Построим следы, аналогичные приведенным на рис. 6, но со-

ответствующие первым корням уравнения  $C_\alpha(\theta) = 0$  при  $a = 0, 5, 10$ . Результаты этого построения даны на рис. 7.

Интересно, что небольшое усложнение  $K(S)$  привело к существенному (на 1 – 2 порядка) уменьшению абберационного размытия пучка в плоскости детектора в режиме первого нуля поперечной абберации. Однако понижение угла  $\theta_1$ , по сравнению с вариантом  $a = 0$ , в этом случае понижает и энергетическую дисперсию. Для углов  $\theta_2$ , гарантирующих большую величину дисперсии, к сожалению, выигрыша в размере пятна фокусировки введение второго слагаемого (15) не дает.

Таким образом, в статье подробно исследован алгоритм построения полевой структуры, идеально фокусирующей в плоскости  $z = 0$ . В связи с этим введен дополнительный вариант функции регуляризации  $K(S)$ , в одном из частных случаев, приводящих систему к известной трансаксиальной. Проведено изучение возможности решения задачи Коши для уравнения Лапласа посредством ряда (10) с целью получения пространственного распределения поля, пригодного для последующего траекторного анализа корпускулярно-оптической системы.

Изучены диспергирующие свойства поля в плоскости его симметрии. Для ряда примеров исследованы фокусирующие свойства системы в поперечном направлении и указано наличие режимов поперечной фокусировки пучка.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Афанасьев В.П., Явор С.Я. Электростатические энергоанализаторы для пучков заряженных частиц. М.: Наука, 1978. 224 с.
- [2] Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.
- [3] Говорков В.А. Электрические и магнитные поля. М.: Энергия, 1968. 243 с.
- [4] Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В. Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Л.: Изд-во ЛПИ, 1984. 80 с.
- [5] Wolfram Mathematica 9 [Электронный ресурс]. Режим доступа: [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com).

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**КРАСНОВА Надежда Константиновна** – доктор физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
 n.k.krasnova@mail.ru



**ПАВЛОВ Владимир Владимирович** — аспирант кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

**СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

k-solovyev@mail.ru

---

## *Krasnova N.K., Pavlov V.V., Solovyev K.V.* ON A CLASS OF IDEAL FOCUSING SYSTEMS FOR ENERGY ANALYSIS.

A method of physical analogies, when field lines of two line charges are associated with the trajectories of some two-dimensional mechanical system and equipotentials of the field are associated with the system action, is discussed. Both action and its arbitrary function are orthogonal to particle trajectories simultaneously. This fact can be used to regularize result two-dimensional potential function and to optimize three-dimensional charged particle motion. The method is applied to create charged particle energy analyzer with an ideal focusing in the symmetry plane. The system useful property is that its energy dispersion tends to infinity when the angle between direction to detector and initial velocity tends to  $\pi$ . Also, through some simple examples it was shown that together with the ideal focusing in a plane of symmetry the system has transversal first order focusing for some initial angles.

ENERGY ANALYSIS, CHARGED PARTICLE OPTICS, IDEAL FOCUSING.

### REFERENCES

[1] **V.P. Afanasiev, S.Ya. Yavor**, Electrostatic energy analyzers for charged particle beams, Nauka, Moscow, 1978.

[2] **Yu.K. Golikov, N.K. Krasnova**, Teoriya sinteza elektrostatičeskikh energoanalizatorov [Theory of Synthesis of Electrostatic Energy Analyzers]. Polytechnical University Publishing House, St. Petersburg, 2010.

[3] **V.A. Govorkov**, Elektricheskie i magnit-

nye polya [Electric and magnetic fields], Energiya, Moscow, 1968.

[4] **Yu.K. Golikov, K.G. Utkin, V.V. Čeparukhin**, Rasčet elementov elektrostatičeskikh elektronno-optičeskikh sistem [Calculation of the elements of electrostatic electron optical systems], Izd-vo LPI, Leningrad, 1984.

[5] Wolfram Mathematica 9. Available at: [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com).

### THE AUTHORS

**KRASNOVA Nadezhda K.**

*St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politekhničeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

[n.k.krasnova@mail.ru](mailto:n.k.krasnova@mail.ru)

**PAVLOV Vladimir V.**

*St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politekhničeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

**SOLOVYEV Konstantin V.**

*St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politekhničeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

[k-solovyev@mail.ru](mailto:k-solovyev@mail.ru)