

## **ТРЕЩИНА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА, УПИРАЮЩАЯСЯ В КЛИНОВИДНОЕ УПРУГОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ**

В статье рассматривается взаимодействие полубесконечной трещины моды III с клиновидным упругим включением. Изучена сингулярность напряжений в вершине трещины. Показано, что, в отличие от классического случая, при некоторых значениях параметров композита асимптотика напряжений может иметь два сингулярных члена. Исследовано отклонение трещины границей раздела материалов.

ТРЕЩИНА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА, УПРУГОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ, СИНГУЛЯРНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ, ОТКЛОНЕНИЕ ТРЕЩИНЫ.

### **Введение**

Проблема взаимодействия трещин с границей раздела материалов уже давно вызывает большой интерес у механиков. Первой работой в этом направлении стала статья А.Р. Зака и М.Л. Вильямса [1], вышедшая в 1963 году. Далее изучение данной проблемы в рамках плоской и антиплоской задач проводилось как отечественными, так и зарубежными исследователями [2 – 8].

В отличие от классического случая, когда трещина распространяется в однородной среде и поле напряжений в ее вершине имеет корневую особенность, для трещины, которая упирается в границу раздела материалов, особенность также имеет степенной характер, однако показатель сингулярности  $\gamma$  отличен от 0,5. При этом данный показатель является корнем некоторого трансцендентного характеристического уравнения. В работе [2] показано на примере плоской задачи о трещине, перпендикулярной к интерфейсу, что  $0 < \gamma < 0,5$ , когда первая среда, в которой расположена трещина, является более жесткой по сравнению со второй, и  $0,5 < \gamma < 1,0$  в противном случае. Дж. Чанг и Дж. Ху [3] установили, что для наклонной к интерфейсу трещины харак-

теристическое уравнение может иметь не только вещественные, но и комплексные корни.

Следует заметить, что задача о трещине конечной длины на ортогональной границе раздела рассмотрена в плоской постановке в работах А.А. Храпкива [4], а также Т.С. Кука и Ф. Эрдогана [5]. Однако, если в статье [4] проблема сведена к функциональному уравнению Винера – Хопфа и построено его точное решение, то авторы работы [5] получили сингулярное интегральное уравнение, решение которого осуществлено с помощью численной процедуры.

Взаимодействие антиплоской полубесконечной трещины, а также трещины конечной длины, направленной перпендикулярно к прямолинейному интерфейсу, исследовано Ф. Эрдоганом и Т.С. Куком с помощью интегрального преобразования Меллина и сведения задачи к решению сингулярного интегрального уравнения [6]. Изучение наклонной антиплоской трещины было также проведено Д.Н. Феннером [7]. В этих случаях установлено, что показатель сингулярности напряжений может быть только вещественным.



Еще одной характерной чертой задач рассматриваемого направления является возможность преломления трещины границей раздела материалов или расслоения этой границы. Отмеченные эффекты для трещины нормального отрыва, направленной ортогонально интерфейсу, рассмотрены в работах [9, 10]. Преломление полубесконечной трещины продольного сдвига исследовалось и в работах [11, 12], где задача сведена к решению уравнения Винера – Хопфа.

Важно отметить, что для трещины, упирающейся в границу раздела сред, основополагающие величины в механике разрушения, такие как коэффициент интенсивности напряжений и скорость высвобождения энергии в вершине трещины, стремятся либо к нулю, либо к бесконечности [10, 13]. По этой причине классические критерии разрушения Гриффитса – Ирвина в рассматриваемой ситуации становятся неприменимыми. В связи с этим в книге [8] для определения предельной нагрузки предложено использовать критерий разрушения Новожилова.

Анализ случаев, когда антиплоская трещина упирается в точку излома интерфей-

са, проводился в статьях [14, 15].

В настоящей работе исследуется взаимодействие прямолинейной трещины продольного сдвига с границей раздела материалов, имеющей угловую точку. При этом в отличие от случаев, рассмотренных в статьях [14, 15], изучается несимметричная задача, когда линия трещины-разреза не совпадает с осью симметрии бездефектного материала (включения). Детально проанализировано характеристическое уравнение задачи. Показано, что при определенных значениях параметров задачи асимптотика напряжений вблизи вершины трещины определяется двумя сингулярными слагаемыми. На основе критерия максимального сдвигающего напряжения проанализировано направление дальнейшего распространения трещины.

#### Постановка задачи

Рассмотрим полубесконечную трещину продольного сдвига, расположенную в матрице  $\Omega_2 \cup \Omega_3$  и упирающуюся в вершину клиновидного включения  $\Omega_1$  (рис. 1). К берегам трещины приложены на расстоянии  $r_0$  от вершины самоуравновешенные сосредоточенные силы величиной  $T_0$ . Ма-

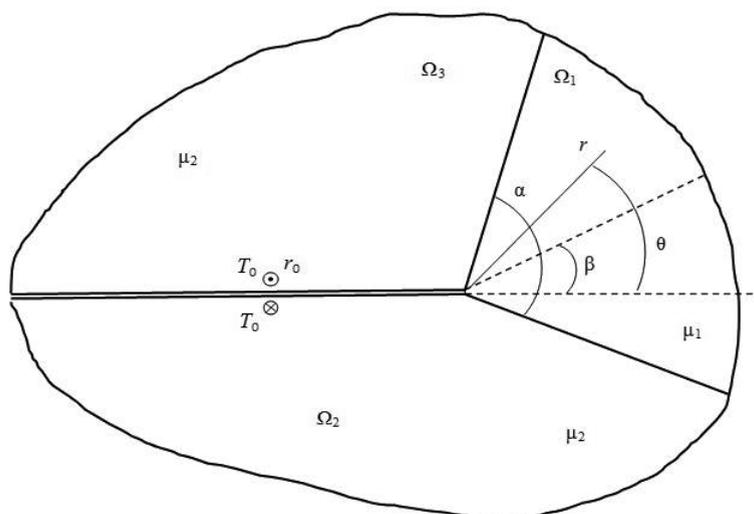


Рис. 1. Схема к постановке задачи: полубесконечная трещина, которая упирается в вершину клиновидного включения;  $\mu_1, \mu_2$  – модули сдвига материалов включения и матрицы;  $\Omega_1$  – область включения;  $\Omega_2, \Omega_3$  – области матрицы;  $r_0$  – расстояние от вершины до точки приложения нагрузки  $T_0$ ;  $\alpha$  – угол раствора включения,  $\beta$  – угол подхода трещины к включению;  $r, \theta$  – полярные координаты

териалы включения и матрицы считаются однородными и изотропными с модулями сдвига  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , соответственно. Контакт на границах раздела материалов предполагается идеальным.

Геометрию рассматриваемой упругой композиции удобно определять двумя параметрами: углом раствора включения  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 2\pi$ ) и углом подхода трещины к включению  $\beta$ , т. е. углом между направлением исходной трещины и осью симметрии включения. Очевидно, что  $|\beta| \leq \pi - \alpha/2$ . Изменение угла  $\beta$  при фиксированном значении  $\alpha$  приводит к повороту включения вокруг вершины трещины. Таким образом, угол  $\beta$  характеризует взаимную ориентацию трещины и включения. Например, при  $\beta = 0$  задача будет симметричной. Значениям  $\beta = \pm(\pi - \alpha/2)$  соответствуют ситуации, когда межфазная трещина выходит в матрицу, а  $\beta = \pm\alpha/2$  – ситуации, когда трещина подходит к включению вдоль границы раздела фаз.

С математической точки зрения задача сводится к решению уравнений равновесия в каждой из областей  $\Omega_k$ :

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_k}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

(где  $k = 1, 2, 3$ ;  $r, \theta$  – полярные координаты;  $w_k$  – перемещения вдоль оси  $z$ ), при условиях идеального контакта фаз, т. е.

$$w_1 = w_2, \quad \tau_{\theta z 1} = \tau_{\theta z 2} \quad \text{при } \theta = \beta - \alpha/2; \quad (2)$$

$$w_1 = w_3, \quad \tau_{\theta z 2} = \tau_{\theta z 3} \quad \text{при } \theta = \beta + \alpha/2$$

( $\tau_{\theta z k} = \mu_k r^{-1} \partial w_k / \partial \theta$  – касательные напряжения), и условиях на берегах трещины, выраженных как

$$\tau_{\theta z 3} = T_0 \delta(r - r_0) \quad \text{при } \theta = \pi, \quad (3)$$

$$\tau_{\theta z 2} = T_0 \delta(r - r_0) \quad \text{при } \theta = -\pi.$$

Здесь  $\delta(r)$  – дельта-функция Дирака.

Подвергая уравнения (1) интегральному преобразованию Меллина, для трансформант перемещений

$$W_k(p, \theta) = \int_0^\infty w_k(r, \theta) r^{p-1} dr$$

получаем уравнения

$$\frac{d^2 W_k}{d\theta^2} + p^2 W_k = 0. \quad (4)$$

Общие решения уравнений (4) имеют вид

$$W_k(p, \theta) = A_k \sin p\theta + B_k \cos p\theta. \quad (5)$$

Подчиняя функции (5) преобразованным по Меллину граничным условиям (2) и (3), приходим к системе шести линейных алгебраических уравнений относительно величин  $A_k$  и  $B_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). После осуществления обратного преобразования

$$w_k(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L W_k(p, \theta) r^{-p} dp,$$

где  $L$  – контур интегрирования, находим поля перемещений в каждой области среды.

Данная процедура приводит к следующим представлениям напряжений в областях  $\Omega_k$ :

$$\tau_{\theta z k}(r, \theta) = \frac{T_0 \lambda_k}{\pi i r} \int_L \left(\frac{r_0}{r}\right)^p S_k(p, \theta) dp, \quad (6)$$

где

$$S_k(p, \theta) = [\varphi_{k1}(p, \alpha, \beta, m) \cos p\theta - \varphi_{k2}(p, \alpha, \beta, m) \sin p\theta] / \Delta(p, \alpha, \beta, m); \quad (7)$$

$$\varphi_{11}(p, \alpha, \beta, m) = \sin p\pi - m \sin[p(\pi - \alpha)] \cos 2p\beta; \quad (8)$$

$$\varphi_{12}(p, \alpha, \beta, m) = m \sin[p(\pi - \alpha)] \sin 2p\beta;$$

$$\varphi_{k1}(p, \alpha, \beta, m) = \sin p\pi + m \sin p\alpha \times \times \cos\{p[\pi - (-1)^k 2\beta]\} - m^2 \cos p\alpha \sin[p(\pi - \alpha)];$$

$$\varphi_{k2}(p, \alpha, \beta, m) = (-1)^k \sin p\alpha \{\sin\{p[\pi - (-1)^k 2\beta]\} - m \sin[p(\pi - \alpha)]\} (k = 2, 3);$$

$$\lambda_1 = 1 + m, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1;$$

$$\Delta(p, \alpha, \beta, m) = \sin 2p\pi + \quad (9)$$

$$2m \sin p\alpha \cos 2p\beta - m^2 \sin[2p(\pi - \alpha)].$$

Упругие свойства композиции отражены в этих формулах через одну биупругую постоянную

$$m = (\mu_1 - \mu_2) / (\mu_1 + \mu_2).$$

При всех сочетаниях модулей сдвига материалов эта величина удовлетворяет

неравенству  $|m| \leq 1$ . Если материал включения является более жестким, по сравнению с материалом матрицы, то  $0 < m < 1$ ; в противном случае (для мягкого включения) выполняются неравенства  $-1 < m < 0$ . Значение  $m = 0$  отвечает однородной среде, а значения  $m = \pm 1$  определяют абсолютно твердое включение и клиновидный вырез.

Вычисляя напряжения в композиционной среде при  $r < r_0$ , замкнем контур интегрирования  $L$  слева полуокружностью большого радиуса и воспользуемся теоремой Коши о вычетах в полюсах подынтегральной функции (7). Эти полюсы определяются корнями характеристического уравнения

$$\Delta(p, \alpha, \beta, m) = 0. \quad (10)$$

Следует заметить, что это уравнение может быть получено также из более общих соотношений работы [16].

#### Исследование характеристического уравнения

Функция (9) является целой нечетной функцией параметра интегрального преобразования  $p$ , не имеющей нулей на мнимой оси, кроме однократного нуля  $p = 0$ . Однако согласно формулам (8), эта точка является устранимой особой точкой. Поэтому контур интегрирования  $L$  в (6) может быть совмещен с мнимой осью. Можно показать, что комплексных нулей, лежащих в полосе  $|\operatorname{Re} p| < 1$ , функция (9) не имеет.

В силу нечетности функции (9) каждому корню уравнения (10)  $p_- < 0$  соответствует корень  $p_+ > 0$ , причем  $p_- = -p_+$ . Поскольку для исследования сингулярности напряжений (6) в вершине трещины интерес представляют корни, по величине не превосходящие единицы, для удобства будем изучать вещественные корни характеристического уравнения, расположенные в интервале  $(0, 1)$ .

Заметим, что функция (9) является четной функцией угла  $\beta$ . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать значения этого параметра, удовлетворяющие неравенству  $0 \leq \beta \leq \pi - \alpha/2$ .

Обратимся сначала к частным случаям. В симметричной задаче, когда  $\beta = 0$ , функ-

ция (9) представляется в виде

$$\Delta(p, \alpha, 0, m) = 2\varphi_{11}(p, \alpha, 0, m)\Delta_1(p, \alpha, m).$$

Следовательно, в этом случае, согласно формулам (7) и (8), полюсы подынтегральной функции определяются корнями уравнения

$$\Delta_1(p, \alpha, m) = \cos p\pi + m \cos[p(\pi - \alpha)] = 0. \quad (11)$$

Поскольку

$$\Delta_1(0, \alpha, m) = 1 + m > 0,$$

$$\Delta_1(0, 5, \alpha, m) = m \sin \alpha/2,$$

$$\Delta_1(1, \alpha, m) = -1 + m \cos(\pi - \alpha) < 0,$$

уравнение (11) имеет один вещественный корень в интервале  $(0, 1)$ , причем  $p_{1+} > 0,5$  для жесткого включения и  $p_{1+} < 0,5$  для мягкого. В случае, когда  $\alpha = \pi$ , уравнение (11) приобретает особенно простой вид и согласуется с уравнением, полученным в работе [6].

При  $\alpha = \pi$  ( $0 < \beta < \pi/2$ ) включение представляет собой полуплоскость, а характеристическое уравнение (10) записывается следующим образом:

$$\Delta(p, \pi, \beta, m) = 2\Delta_2(p, \beta, m) \sin p\pi = 0;$$

$$\Delta_2(p, \beta, m) = \cos p\pi + m \cos 2p\beta.$$

Уравнение такого вида использовалось в работе [7], а первые его корни обладают такими же свойствами, что и в рассмотренном выше частном случае.

Переходя к общей ситуации, заметим, что вблизи точки  $p = 0$  функция (9) допускает представление

$$\Delta(p, \alpha, \beta, m) = 2p(1 + m) \times \\ \times [\pi(1 - m) + m\alpha] + O(p^3).$$

Отсюда вытекает, что при малых  $p$  для всех комбинаций материалов и геометрических параметров сама функция и ее производная по аргументу  $p$  принимают положительные значения.

В двух других характерных точках  $p = 0,5$  и  $p = 1,0$  функция (9) имеет вид

$$\Delta(0, 5, \alpha, \beta, m) = 2mf_1(\alpha, \beta, m) \sin \alpha/2, \quad (12)$$

$$\Delta(1, \alpha, \beta, m) = 2mf_2(\alpha, \beta, m) \sin \alpha, \quad (13)$$

где

$$f_1(\alpha, \beta, m) = \cos \beta - m \cos \alpha / 2; \quad (14)$$

$$f_2(\alpha, \beta, m) = \cos 2\beta + m \cos \alpha. \quad (15)$$

Отметим, что уравнение (10) будет иметь корень  $p = 0,5$  и, следовательно, поле напряжений будет иметь классическую особенность, если параметры системы удовлетворяют уравнению

$$f_1(\alpha, \beta, m) = 0. \quad (16)$$

При таких параметрах функция (15) представляется в виде

$$f_2(\alpha, \beta, m) = (1 + m)(-1 + m + m \cos \alpha).$$

Отсюда можно утверждать, что в случае жестких включений с углом раствора  $0 < \alpha < \pi/2$  при  $m \leq 0,5$  ( $\mu_1/\mu_2 \leq 3$ ) и угле  $\beta$ , определяемом равенством (16), характеристическое уравнение задачи будет

иметь в интервале  $(0, 1)$  единственный корень  $p_{1+} = 0,5$ , а при  $m > 0,5$  — два корня:  $p_{1+} = 0,5$  и  $0,5 < p_{2+} < 1,0$ . Для углов раствора включения  $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$  и любом  $0 < m < 1$  существует только один корень  $p_{1+} = 0,5$ . Если же  $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ , то классической особенности поле напряжений не имеет.

Пусть параметры системы таковы, что условие (16) не выполняется. Тогда, как показывает рассмотрение представлений (12) — (15), возможны различные случаи расположения вещественных корней уравнения (10) в интервале  $(0, 1)$ .

Треугольная область изменения геометрических параметров

$$D = \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi - \alpha/2\}$$

линиями нулевого уровня функций (14) и

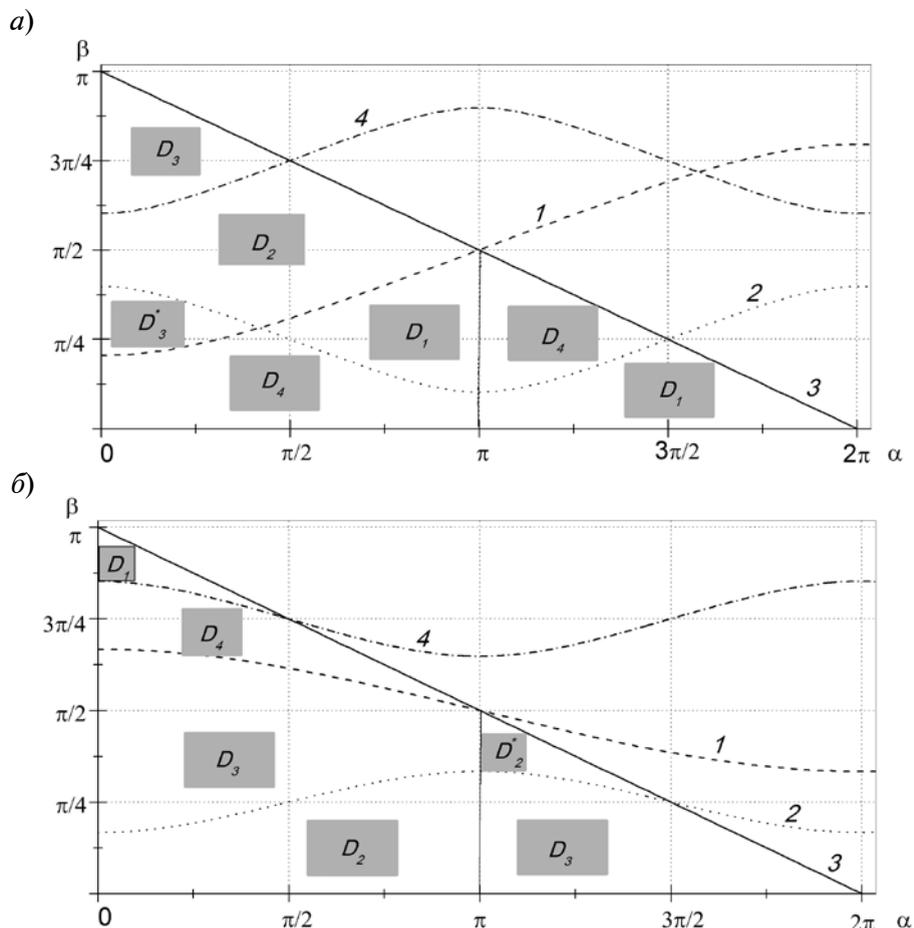


Рис. 2. Расположение областей  $D_k$  изменения углов  $\alpha$  и  $\beta$  для жесткого (а) и мягкого (б) включений, когда  $m > 0,5$  (а);  $-1 < m < 0$  (б); представлены следующие функции  $\beta(\alpha, m)$ :  $\arccos[m \cos(0,5\alpha)]$  (1);  $0,5 \arccos(-m \cos \alpha)$  (2);  $\pi - 0,5\alpha$  (3);  $\pi - 0,5 \arccos(-m \cos \alpha)$  (4)

(15) делится на ряд областей  $D_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). На рис. 2 указаны области  $D_j$  для жесткого и мягкого включений, соответственно. В каждой такой области величины (12) и (13) имеют определенные знаки. Анализ показывает, что

- $\Delta(0,5) > 0$ , а  $\Delta(1,0) < 0$ , если  $(\alpha, \beta) \in D_1$ ;
- $\Delta(0,5) < 0$ , и  $\Delta(1,0) < 0$ , если  $(\alpha, \beta) \in D_2$ ;
- $\Delta(0,5) < 0$ , а  $\Delta(1,0) > 0$ , если  $(\alpha, \beta) \in D_3$ ;
- $\Delta(0,5) > 0$ , а  $\Delta(1,0) > 0$ , если  $(\alpha, \beta) \in D_4$ .

Отсюда вытекает, что для значений угловых параметров в областях  $D_1$  и  $D_2$  характеристическое уравнение (10) в интервале (0, 1) имеет один корень, причем области  $D_1$  отвечает корень  $p_{1+} > 0,5$ , а области  $D_2$  – корень  $p_{1+} < 0,5$ . Если же точка  $(\alpha, \beta) \in D_j$

( $j = 3, 4$ ) то уравнение (10) будет иметь уже два корня в рассматриваемом интервале. При этом для углов, принадлежащих области  $D_3$ , эти корни удовлетворяют неравенствам

$$0 < p_{1+} < 0,5 < p_{2+} < 1,0,$$

а для углов из области  $D_4$  – неравенствам

$$0,5 < p_{1+} < p_{2+} < 1,0.$$

Следует заметить, что в случае жестких включений область  $D_3^*$  (см. рис. 2, а) существует только при  $m > 0,5$ . Для мягких включений области  $D_1$ ,  $D_4$  и  $D_2^*$  (см. рис. 2, б) при  $m \rightarrow -1$  вырождаются в отрезки прямых.

Зависимость первых корней уравнения (10) от жесткости включения приведена на рис. 3, а при фиксированном угле раствора клина  $\alpha$  и варьировании угла подхода

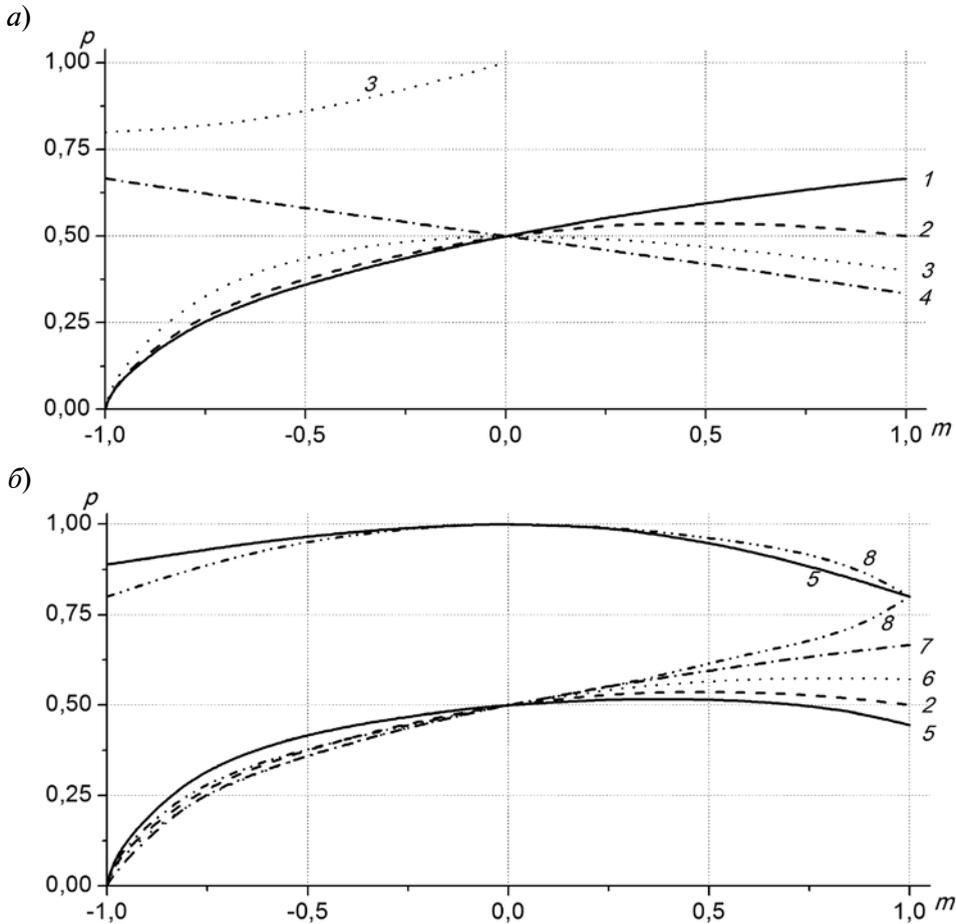


Рис. 3. Зависимости корней  $p$  уравнения (10) от параметра  $m$  при фиксированных значениях углов  $\alpha = \pi/2$  (а) и  $\beta = \pi/4$  (б); а – значения угла  $\beta$ : 0 (1),  $\pi/4$  (2),  $\pi/2$  (3),  $3\pi/4$  (4); б – значения угла  $\alpha$ :  $\pi/4$  (5),  $\pi/2$  (2),  $\pi$  (6)  $3\pi/4$  (7);  $5\pi/4$  (8)

трещины к включению  $\beta$ . Рис. 3, б иллюстрирует зависимость корней от параметра  $m$  при постоянном угле  $\beta$  и изменении угла раствора  $\alpha$ .

В предельном случае абсолютно твердого включения ( $m = 1$ ) характеристическое уравнение приобретает вид

$$\Delta(p, \alpha, \beta, 1) = 4 \sin p\alpha \cos[p(\pi + \beta - \alpha/2)] \times \cos[p(\pi - \beta - \alpha/2)] = 0.$$

Отсюда вытекает, что при  $m = 1$  рассматриваемое уравнение в точках отрезка прямой  $\beta = \alpha - \pi$  для углов раствора включения, удовлетворяющих неравенству  $\pi < \alpha < 4\pi/3$ , будет иметь двукратные корни. Такая ситуация показана на рис. 3, б для  $\alpha = 5\pi/4$ . При  $m \rightarrow -1$  кратных нулей функция (9) не имеет.

### Направление распространения трещины

В общем случае, когда уравнение (10) имеет два корня в интервале (0, 1), из формул (6) – (9) получаем асимптотику напряжений вблизи вершины трещины в виде

$$\tau_{\theta zk}(r, \theta) = \frac{2T_0 \lambda_k}{r_0} \left[ H_k^{(1)}(\theta) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-1+p_1} + H_k^{(2)}(\theta) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-1+p_2} \right], \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} H_k^{(n)}(\theta) &= h_{k1}^{(n)}(\alpha, \beta, m) \cos p_n \theta + h_{k2}^{(n)}(\alpha, \beta, m) \sin p_n \theta; \\ h_{kj}^{(n)}(\alpha, \beta, m) &= (-1)^j \varphi_{kj}(p_n, \alpha, \beta, m) / \Delta'(p_n, \alpha, \beta, m) \\ &(k = 1, 2, 3; j, n = 1, 2). \end{aligned} \quad (18)$$

Штрих означает производную по переменной  $p$ .

Если же уравнение (10) имеет один корень в указанном интервале, то асимптотика при  $r \rightarrow 0$  определяется только одним сингулярным слагаемым (первым членом в выражении (17)). Заметим, что показатели сингулярности напряжений  $-1 + p_1$  и  $-1 + p_2$  будут достаточно близки друг к другу (как это отмечалось ранее) только для очень жестких включений.

Согласно критерию, предложенному в работе [17], трещина продольного сдвига будет распространяться в направлении  $\theta = \theta^*$ , где напряжения  $\tau_{\theta z}$  имеют максимальную величину. Тогда, предполагая, что вязкость разрушения межфазных границ превосходит вязкость разрушения материалов матрицы и включения, а асимптотика (17) имеет одночленный вид, из формул (18) находим значения углов  $\theta_k^*$  в каждой упругой области:

$$\theta_k^* = -p_1^{-1} \arctg[\varphi_{k2}/\varphi_{k1}]. \quad (19)$$

В частности, для области включения имеем выражение

$$\theta_1^* = -p_1^{-1} \arctg \{ \{ m \sin[p_1(\pi - \alpha)] \sin 2p_1 \beta \} \times \{ \sin p_1 \pi - m \sin[p_1(\pi - \alpha)] \cos 2p_1 \beta \}^{-1} \}.$$

Отсюда видно, что  $\theta_1^* = 0$  при  $m = 0$  и  $\beta = 0$ , т. е. в однородном и симметричном случаях. Кроме того, если включение имеет вид полуплоскости ( $\alpha = \pi$ ), то трещина также будет распространяться прямолинейно при любых значениях параметров  $\beta$  и  $m$ , что было отмечено в работе [7].

На лучах  $\theta = \theta_k^*$  безразмерные касательные напряжения имеют вид

$$t_k(\theta_k^*) = \frac{\tau_{\theta zk}(r, \theta_k^*) r_0 \Delta'}{2T_0 (r/r_0)^{-1+p_1}} = \lambda_k \sqrt{\varphi_{k1}^2 + \varphi_{k2}^2}.$$

Если величина угла  $\theta_k^*$ , вычисляемая по формуле (19), выходит за пределы области  $\Omega_k$ , то максимальные напряжения в данной области имеют место на ее границе. Расположение наибольшего из трех максимумов безразмерных касательных напряжений определяет угол отклонения трещины от ее первоначального направления.

Зависимость угла отклонения трещины  $\theta^*$  от угла подхода трещины к включению  $\beta$  для жесткого и мягкого включений при  $\alpha = 2\pi/3$  показаны на рис. 4. Приведенные данные позволяют заключить, что в случае жесткого включения при небольших углах асимметрии разрушение будет происходить во включении. По мере увеличения угла  $\beta$  трещина отклоняется в сторону ближайшей к ней границе раздела фаз, а затем, начиная с некоторого значения этого угла, ее распространение происходит в области  $\Omega_2$

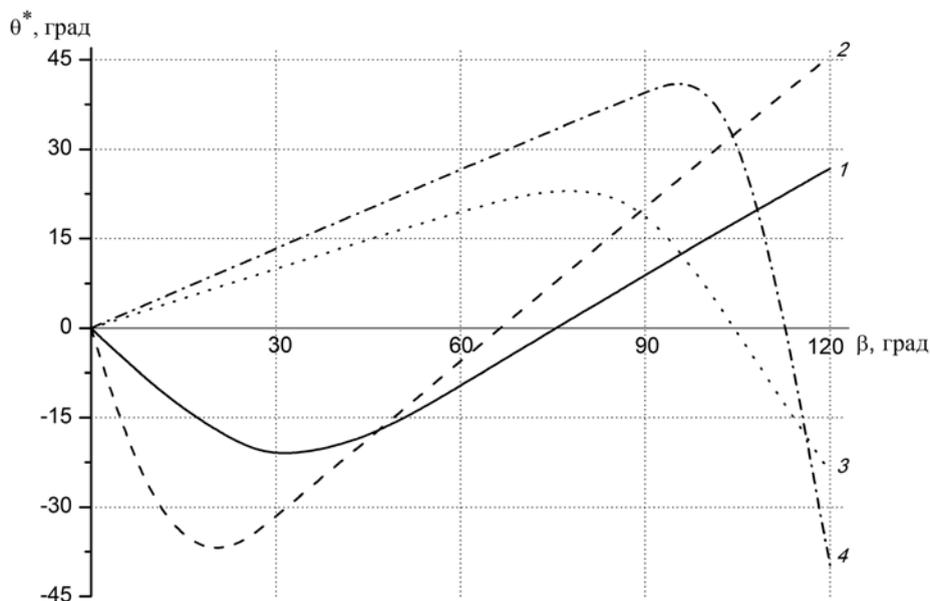


Рис. 4. Зависимости угла отклонения трещины  $\theta^*$  от угла  $\beta$  при значении  $\alpha = 2\pi/3$  для жестких (1, 2) и мягких (3, 4) включений; значения  $m$ : 0,5 (1), 0,8 (2), -0,5 (3), -0,8 (4)

матрицы. С возрастанием жесткости включения растрескивание матрицы начинается при меньших значениях углов  $\beta$ . Для  $\beta > \alpha/2$  направление распространения трещины отклоняется от луча  $\theta = 0$  в сторону включения.

Если  $m < 0$ , то трещина будет подрастать во включении вплоть до углов  $\beta$ , близких к  $\pi - \alpha/2$ . С увеличением параметра  $\beta$  угол отклонения трещины от ее первоначального направления возрастает почти линейно, а отклонение происходит в сторону оси симметрии включения.

### Заключение

Таким образом, результаты данной работы показывают, что для двухфазного композита с границей раздела фаз, имеющей угловую точку, асимптотика напряжений в вершине трещины продольного сдвига может содержать, в отличие от случая гладкой границы, два сингулярных члена. В зависимости от параметров композиции дальнейшее распространение трещины может происходить как в материале включения, так и в материале матрицы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zak A.R., Williams M.L. Crack point singularities at a bimaterial interface // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1963. Vol. 30. No. 1, pp. 142-144.
2. Swenson D.O., Raw C.A. The stress distribution around a crack tip perpendicular to an interface between materials // Int. J. Fract. Mech. 1970. Vol. 6. No. 4, pp. 357-365.
3. Chang J., Xu J.Q. The singular stress field and stress intensity factors of a crack terminating at a bimaterial interface // Int. J. Mech. Sci. 2007. Vol. 49. No. 7, pp. 888-897.
4. Храпков А.А. Первая основная задача для кусочно-однородной плоскости с разрезом, перпендикулярным прямой раздела // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 647 - 659.
5. Cook T.S., Erdogan F. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface // Int. J. Eng. Sci. 1972. Vol. 10. No. 8, pp. 677-696.
6. Erdogan F., Cook T.S. Antiplane shear crack terminating at and going through a bimaterial interface // Int. J. Fracture. 1974. Vol. 10. No. 2, pp. 227-240.
7. Fenner D.N. Stress singularities in composite materials with an arbitrary oriented crack meeting interface // Int. J. Fracture. 1976. Vol. 12. No. 5, pp. 705-721.
8. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин М.: Наука, 1984. 256 с.
9. Кулиев В.Д., Работнов Ю.Н., Черепанов Г.П. О торможении трещины на границе раздела различных упругих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 4. С. 120 - 128.

10. He M.Y., Hutchinson J.W. Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials // *Int. J. Solids Structures*. 1989. Vol. 25. No. 9, pp. 1053-1067.

11. Кулиев В.Д. Преломление трещины продольного сдвига // *ДАН СССР*. 1979. Т. 249. № 2. С. 315 – 318.

12. Choi S.R., Lee K.S., Earmme Y.Y. Analysis of kinked interfacial crack under out-of-plane shear // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1994. Vol. 61. No. 1, pp. 38-44.

13. Romeo A., Ballarini R. A cohesive zone model for cracks terminating at a biomaterial interface // *Int. J. Solids Structures*. 1997. Vol. 34. No. 11, pp. 1307-1326.

14. Schovanec L. A mode III crack problem in a bonded composite material // *Eng. Fract. Mech.* 1988. Vol. 31. No. 3, pp. 437-449.

15. Misuris G., Kuhn G. Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models // *Archive Appl. Mech.* 2001. Vol. 71. No. 11, pp. 764-780.

16. Тихомиров В.В. Трещина продольного сдвига в трехкомпонентной среде // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2010. № 4 (109). С. 72 – 75.

17. Баренблатт Г.И., Черепанов Г.П. О хрупких трещинах продольного сдвига // *ПММ*. 1961. Т. 25. Вып 6. С. 1110 – 1119.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
victikh@mail.ru

#### *Tikhomirov V.V.* LONGITUDINAL SHEAR CRACK TERMINATING AT A WEDGE-SHAPED ELASTIC INCLUSION.

The interaction between a semi-infinite crack of mode III and a wedge-shaped elastic inclusion has been considered. The stress singularity at the crack tip was investigated. It was shown that the stress asymptotics was able, unlike the classical case, to have two singular terms at some parameter values for composite material. A crack deflection by the interface was analyzed.

LONGITUDINAL SHEAR CRACK, ELASTIC INCLUSION, STRESS SINGULARITY, CRACK DEFLECTION.

#### REFERENCES

1. Zak A.R., Williams M.L. Crack point singularities at a bimaterial interface. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1963, Vol. 30, No. 1, pp. 142-144.

2. Swenson D.O., Raw C.A. The stress distribution around a crack tip perpendicular to an interface between materials. *Int. J. Fract. Mech.*, 1970, Vol. 6, No. 4, pp. 357-365.

3. Chang J., Xu J.Q. The singular stress field and stress intensity factors of a crack terminating at a bimaterial interface. *Int. J. Mech. Sci.*, 2007, Vol. 49, No. 7, pp. 888-897.

4. Khrapkov A.A. Pervaya osnovnaya zadacha dlya kusochno-odnorodnoy ploskosti s razrezom, perpendikulyarnym pryamoy razdela. *PMM*, 1968, Vol. 32, Iss. 4, pp. 647-659. (rus)

5. Cook T.S., Erdogan F. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface. *Int. J. Eng. Sci.*, 1972, Vol. 10, No. 8, pp. 677-696.

6. Erdogan F., Cook T.S. Antiplane shear crack terminating at and going through a bimaterial interface. *Int. J. Fracture*, 1974, Vol. 10, No. 2, pp. 227-240.

7. Fenner D.N. Stress singularities in composite materials with an arbitrary oriented crack meeting interface. *Int. J. Fracture*, 1976, Vol. 12. No. 5, pp. 705-721.

8. Morozov N.F. *Matematicheskie voprosy teorii treshchin*. Moscow, Nauka, 1984, 256 p. (rus)

9. Kuliev V.D., Rabotnov Yu.N., Cherepanov G.P. O tormozhenii treshchiny na granitse razdela razlichnykh uprugikh tel. *Izv. AN SSSR MTT*, 1978, No. 4, pp. 120-128. (rus)

10. He M.Y., Hutchinson J.W. Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials. *Int. J. Solids Structures*, 1989, Vol. 25. No. 9, pp. 1053-1067.

11. Kuliev V.D. Prelomlenie treshchiny prodol'nogo sdviga. *DAN SSSR*, 1979, Vol. 249, No. 2, pp. 315-318. (rus)

12. Choi S.R., Lee K.S., Earmme Y.Y. Analysis of kinked interfacial crack under out-of-plane shear. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1994, Vol. 61, No. 1, pp. 38-44.

13. Romeo A., Ballarini R. A cohesive zone model for cracks terminating at a biomaterial



interface. *Int. J. Solids Structures*, 1997, Vol. 34. No. 11, pp. 1307-1326.

14. **Schovanec L.** A mode III crack problem in a bonded composite material. *Eng. Fract. Mech.*, 1988, Vol. 31, No. 3, pp. 437-449.

15. **Misuris G., Kuhn G.** Comparative study of an interface crack for different wedge-interface models. *Archive Appl. Mech.*, 2001, Vol. 71, No. 11,

pp. 764-780.

16. **Tikhomirov V.V.** Treshchina prodol'nogo sdviga v trekhkomponentnoy srede. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*, 2010, No. 4(109), pp. 72-75. (rus)

17. **Barenblatt G.I., Cherepanov G.P.** O khrupkikh treshchinakh prodol'nogo sdviga. *PMM*, 1961, Vol. 25, Iss. 6, pp. 1110-1119. (rus)

#### THE AUTHOR

**TIKHOMIROV Victor V.**

*St. Petersburg State Polytechnical University*

29, Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.

victikh@mail.ru