



## **ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ АНИЗОТРОПИИ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ НА ОСНОВЕ МИКРОМЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

Проведен анализ предсказательной способности квадратичного критерия пластичности Хилла для монокристаллических жаропрочных сплавов на никелевой основе. Исследованы также возможности определения параметров квадратичного критерия из опытов на одноосное растяжение монокристаллических образцов различной кристаллографической ориентации. Экспериментальные результаты сравниваются с прогнозами микромеханической модели, в которой используется критерий Шмида. С целью повышения точности прогноза предложен новый феноменологический критерий пластичности – критерий четвертой степени, позволяющий учесть ряд эффектов, которые не поддаются анализу при использовании квадратичного критерия.

ПЛАСТИЧНОСТЬ, МОНОКРИСТАЛЛ, ПОВЕРХНОСТЬ НАГРУЖЕНИЯ, АНИЗОТРОПИЯ, ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ, МИКРОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.

### **Введение**

Монокристаллические жаропрочные сплавы на никелевой основе [1] получили широкое распространение при изготовлении лопаток газовых турбин современных высокотемпературных авиационных двигателей. Основными достоинствами монокристаллических сплавов, по сравнению с поликристаллическими аналогами, является увеличение сопротивления высокотемпературной ползучести и длительной прочности за счет полного исключения границ между зернами, а также уменьшение величины модуля упругости в осевом направлении лопатки. Указанные особенности приводят к значительному снижению термических напряжений и росту сопротивления малоциклового усталости.

Современные охлаждаемые рабочие и направляющие лопатки высокотемпературных газотурбинных установок имеют весьма сложную геометрию системы внутренних каналов охлаждения, обеспечивающих понижение температуры материала лопаток. Как следствие этого, повышается надежность их работы. Высокие уровни эксплуатационных нагрузок, неоднородность

температурного поля и нетривиальность геометрии системы охлаждения, приводящая к возникновению концентраторов напряжений, создают в материале лопатки сложное многосное неоднородное напряженное состояние, а также появление локальных зон с высокими уровнями напряжений. При анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) лопатки, ее длительной и термоусталостной прочности требуется учитывать эффекты пластичности и использовать модели неупругого деформирования материала с усложненными реологическими свойствами.

Упругое и неупругое поведение монокристаллов демонстрируют ярко выраженную анизотропию механических свойств [1], неучет которой в ряде случаев может приводить к значительным ошибкам в оценке НДС. Одним из простейших вариантов феноменологических критериев пластичности для ортотропного материала, получившим широкое распространение на практике [2 – 6] для монокристаллических жаропрочных сплавов на никелевой основе, является квадратичный критерий Хилла [7]. Более сложные феноменологические критерии пластичности для анизотропного

материала рассмотрены в работах [8 – 10]. В микромеханических моделях (см., например, работы [11, 12]), где учитывается, что неупругое деформирование происходит в соответствии с механизмом скольжения по активным кристаллографическим системам скольжения, в качестве критерия пластичности используется закон Шмида [13]. Для современных монокристаллических жаропрочных сплавов на никелевой основе доминирующими являются октаэдрические системы скольжения  $\{111\}\langle 011\rangle$ . При определенных условиях нагружения начинают также действовать дополнительные кубические  $\{100\}\langle 011\rangle$  и альтернативные октаэдрические  $\{111\}\langle 112\rangle$  системы.

В настоящее время на практике монокристаллические лопатки кристаллизуются как система однородно направленных дендритов, а не единого дендрита. Несмотря на это, монокристаллические сплавы на основе никеля обнаруживают на макроуровне ярко выраженные свойства кубической симметрии, при которой механические свойства оказываются практически одинаковыми на трех взаимно перпендикулярных направлениях. Поэтому при разработке феноменологических моделей деформирования такие материалы можно условно рассматривать как монокристаллы с идеальной гранецентрированной кубической (ГЦК) структурой. На микроскопическом уровне структура монокристаллических жаропрочных никелевых сплавов является двухфазной: частицы  $\gamma'$ -фазы рассеяны в матрице из второй фазы –  $\gamma$ -твердого раствора легирующих элементов в никеле с неупорядоченной ГЦК-структурой. Первая из указанных фаз формируется на основе интерметаллического соединения  $Ni_3Al$ , которое представляет собой упорядоченную ГЦК-структуру типа  $L_2$ .

Указанные неидеальности кристаллического строения приводят при определенных условиях к некоторому отклонению от закона Шмида [14] и различию пределов текучести при растяжении и сжатии.

Цель настоящего исследования – рассмотрение различных методов идентификации параметров квадратичного критерия пластичности Хилла как на основе экс-

периментальных данных, так и на основе сравнения результатов эксперимента с прогнозами микромеханической модели, полученными с использованием критерия Шмида.

Систематический анализ влияния кристаллографической ориентации на предел текучести, проведенный с целью улучшения предсказательной способности феноменологического критерия, позволил предложить новую модификацию квадратичного критерия пластичности.

### Критерии пластичности монокристаллического материала

При выборе определяющих уравнений неупругого деформирования монокристаллического материала центральную роль играет условие перехода в пластическое состояние. Данное условие формулируется, как правило, в пространстве тензора напряжений и допускает зависимости как от внутренних переменных тензорной или скалярной природы, так и от характеристик материала, количество которых определяется группой симметрии и видом критерия.

Критерии пластичности можно условно разделить на микромеханические и феноменологические. Первые основаны на учете кристаллографии процессов скольжения; к их числу можно отнести закон Шмида и его модификации. Вторые не учитывают реальных механизмов неупругого деформирования кристаллов и принимают в рассмотрение только анизотропию механических свойств материала на макроуровне.

**Кристаллографический критерий Шмида.** Предполагается, что процесс пластического деформирования монокристалла осуществляется в результате возможного скольжения в  $N$  (октаэдрических и/или кубических) системах скольжения; последние характеризуются нормалью  $\mathbf{n}^\alpha$  к  $\alpha$ -й плоскости скольжения (с наибольшей ретикулярной плотностью) и направлением скольжения  $\mathbf{l}^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ) (с наиболее плотной упаковкой атомов). Данные характеристики полностью определяются геометрией кристаллической решетки. В соответствии с законом Шмида, система скольжения становится активной и в ней начинается

пластическое деформирование при достижении приведенных касательных напряжений  $\tau^\alpha$  критического значения  $\tau_0$ , которое принимается не зависящим от ориентации монокристалла и рассматривается в качестве характеристики материала. Приведенные касательные напряжения  $\tau^\alpha$  действуют на плоскости скольжения с нормалью  $\mathbf{n}^\alpha$  в направлении скольжения  $\mathbf{l}^\alpha$  и связаны с тензором напряжений Коши  $\boldsymbol{\sigma}$  линейным соотношением

$$\tau^\alpha = \mathbf{n}^\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^\alpha.$$

С введением обозначения для тензора Шмида как

$$\mathbf{P}^\alpha = (1/2)(\mathbf{n}^\alpha \mathbf{l}^\alpha + \mathbf{l}^\alpha \mathbf{n}^\alpha),$$

условие начального перехода монокристалла в пластичность, в соответствии с законом Шмида, принимает следующий вид:

$$\min_{\alpha} \frac{1}{\tau_0} \mathbf{P}^\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} - 1 = 0, \quad (1)$$

где символом из двух точек обозначена операция свертки (двойного скалярного произведения), т. е.

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = X_{ij} Y_{ji}.$$

**Квадратичный критерий Хилла.** Феноменологические модели пластичности не учитывают реальных механизмов неупругого деформирования кристаллов и особенностей эволюции его микроструктуры. В этих моделях монокристалл идеализируется и рассматривается как анизотропная однородная сплошная среда; при этом учитываются как исходный, так и деформационно-индуцированный виды анизотропии.

Простейшим вариантом феноменологического критерия пластичности, получившим широкое распространение при анализе поведения монокристаллических материалов [2 – 6], является квадратичный критерий Хилла [7]:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{s} - 1 = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{s}$  – девиатор тензора напряжений;

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - (1/3)\mathbf{1}\text{tr}\boldsymbol{\sigma},$$

$\mathbf{1}$  – единичный тензор;  $\mathbf{M}$  – тензор четвертого ранга, характеризующий анизотропию поверхности нагружения.

Для кубической группы симметрии кристалла тензор  $\mathbf{M}$  (так же, как и тензор упругих модулей) в системе координат, связанной с кристаллографическим базисом, имеет следующую структуру, которая характеризуется тремя константами:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{12} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{12} & M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{44} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Подстановка выражения (3) в уравнение (2) приводит к равенству

$$(M_{11} - M_{12})(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) + M_{44}(s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2) - 1 = 0, \quad (4)$$

которое характеризуется только двумя независимыми константами материала ( $M_{44}$  и комбинацией  $M_{11} - M_{12}$ ) и может быть переписано с заменой компонент девиатора на компоненты тензора напряжений в виде

$$\{(1/2)[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + K_p(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)\}^{1/2} = \sigma_T, \quad (5)$$

где введены обозначения

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{3}{2(M_{11} - M_{12})}}; \quad (6)$$

$$K_p = \sqrt{\frac{3M_{44}}{2(M_{11} - M_{12})}}. \quad (7)$$

Следует отметить, что при использовании соотношений (4) и (5) компоненты девиатора и тензора напряжений задаются в системе координат, связанной с кристаллографическим базисом [100], [010], [001].

### Идентификация параметров квадратичного критерия

Для определения двух констант  $\sigma_T$  и  $K_p$  достаточно определить условия перехода материала в пластическое состояние при двух произвольных различных напряженных состояниях. Таковыми могут являться, например, опыты на одноосное растяжение двух цилиндрических образцов различной кристаллографической ориентации (КГО)

или опыты на растяжение и кручение для двух образцов одинаковой КГО. Первый вариант получил большее распространение на практике, благодаря простоте реализации и возможности обеспечения однородного напряженного состояния в образцах.

Одноосное растяжение вдоль одной из кристаллографических осей кристалла (для определенности примем, что вдоль оси [001]) приводит к реализации однокомпонентного (одноосного) напряженного состояния

$$\sigma_{33} \neq 0, \sigma_{22} = \sigma_{11} = \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31}$$

позволяет непосредственно определить  $\sigma_T$  по значению  $\sigma_{33}$  в момент перехода в пластичность.

Напряженное состояние образца, который нагружается вдоль оси, отклоненной от кристаллографических осей кристалла (например, вдоль оси  $Z$ ), будет многокомпонентным (многоосным) и зависящим от ориентации  $Z$  в кристаллографической системе координат. Последняя определяется двумя углами Эйлера:  $\theta$  и  $\varphi$  (рис. 1). Матрица преобразования при переходе от глобальной системы координат  $X, Y, Z$  к кристаллографической [100], [010], [001] имеет вид:

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Компоненты тензора напряжений в кристаллографическом базисе

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$$

можно вычислить на основе компонент тензора напряжений в глобальном базисе

$$\sigma_{zz} \neq 0, \sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx}$$

с использованием соотношения

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jm} \sigma_{ij}$$

Подстановка полученных значений компонент тензора напряжений в кристаллографическом базисе в выражение (5)

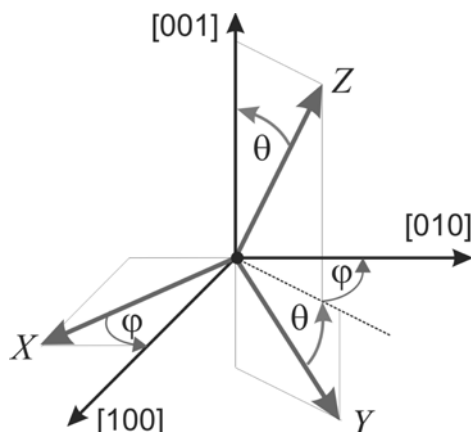


Рис. 1. Ориентация глобальной системы координат  $X, Y, Z$  (связана с образцом и внешним воздействием) по отношению к кристаллографической системе координат [100], [010], [001];  $\theta, \varphi$  – углы Эйлера

приводит к связи пределов текучести материала в направлении оси  $Z$   $\sigma_T(\theta, \varphi) = \sigma_{zz}$  и вдоль оси [001]  $\sigma_{T_{[001]}} = \sigma_T$ :

$$\sigma_T(\theta, \varphi) \left[ 1 + \frac{K_p - 3}{4} (\sin^2 2\theta + \sin^4 \theta \cdot \sin^2 2\varphi) \right]^{1/2} = \sigma_{T_{[001]}} \quad (9)$$

откуда может быть получено выражение для определения константы  $K_p$ :

$$K_p = 3 + 4(\sin^2 2\theta + \sin^4 \theta \cdot \sin^2 2\varphi)^{-1} \times \left[ \left( \frac{\sigma_{T_{[001]}}}{\sigma_T(\theta, \varphi)} \right)^2 - 1 \right]. \quad (10)$$

Таким образом, из опыта на одноосное растяжение вдоль одной из кристаллографических осей кристалла определяется величина  $\sigma_{T_{[001]}}$ , а из второго опыта на растяжение вдоль направления, не совпадающего с кристаллографическими осями, определяется величина  $K_p$  (см. выражение (10)).

Для характерных частных случаев выбора ориентации образца во втором опыте справедливы выражения, представленные в табл. 1.

В общем случае при произвольной ориентации  $[hkl]$  как следствие формулы (10) получаем:

Таблица 1

 Частные случаи выбора ориентации образца для нахождения константы  $K_p$ 

Ориентация образца	Угол Эйлера		Константа $K_p$	Номер формулы
	$\theta$	$\varphi$		
[011]	$\pi/4$	0	$4 \left( \frac{\sigma_{T_{[001]}}}{\sigma_{T_{[011]}}} \right)^2 - 1$	(11)
[111]	$\arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54,7^\circ$	$\pi/4$	$3 \left( \frac{\sigma_{T_{[001]}}}{\sigma_{T_{[111]}}} \right)^2$	(12)
[012]	$\arccos(2/\sqrt{5}) \approx 26,6^\circ$	0	$\frac{25}{4} \left( \frac{\sigma_{T_{[001]}}}{\sigma_{T_{[012]}}} \right)^2 - \frac{13}{4}$	(13)
[112]	$\arccos(2/\sqrt{6}) \approx 35,3^\circ$	$\pi/4$	$4 \left( \frac{\sigma_{T_{[001]}}}{\sigma_{T_{[112]}}} \right)^2 - 1$	(14)

$$K_p = 3 + \frac{(h^2 + k^2 + l^2)^2}{(h^2 + k^2)l^2 + h^2k^2} \left[ \left( \frac{\sigma_{T_{[001]}}}{\sigma_{T_{[hkl]}}} \right)^2 - 1 \right]. \quad (15)$$

Идентификация констант  $\sigma_T$  и  $K_p$  квадратичного критерия (5) в самом общем случае, когда направление нагружения ни в одном из двух опытов не совпадает с кристаллографическими осями, осуществляется по пределам текучести  $\sigma_{T_1}$  и  $\sigma_{T_2}$  для двух произвольных несовпадающих ориентаций, характеризуемых углами  $(\theta_1, \varphi_1)$  и  $(\theta_2, \varphi_2)$ ; при этом используются равенства

$$K_p = 3 + 4(\sigma_{T_2}^2 - \sigma_{T_1}^2) \times [\sigma_{T_1}^2 A(\theta_1, \varphi_1) - \sigma_{T_2}^2 A(\theta_2, \varphi_2)]^{-1}; \quad (16)$$

$$\sigma_T = \sigma_{T_1} \sigma_{T_2} [A(\theta_1, \varphi_1) - A(\theta_2, \varphi_2)]^{\frac{1}{2}} \times [\sigma_{T_1}^2 A(\theta_1, \varphi_1) - \sigma_{T_2}^2 A(\theta_2, \varphi_2)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

где

$$A(\theta, \varphi) = \sin^2 2\theta + \sin^4 \theta \cdot \sin^2 2\varphi.$$

Для изотропного материала при равенстве пределов текучести по всем направлениям, в силу любого из равенств (10) – (16), находим, что  $K_p = 3$ . В этом случае квадратичный критерий Хилла вырождается в критерий Мизеса [8]. При  $K_p < 3$  на переход в пластичность большее влияние оказывают диагональные компоненты тен-

зора напряжений (в собственных осях анизотропии), а при  $K_p > 3$  – недиагональные (сдвиговые).

На рис. 2 показаны зависимости  $K_p$  от температуры для различных отечественных (ЖС32, ЖС36, ВЖМ4, ВКНА-1В) и зарубежных (PW1480, MD2) сплавов, полученные на основе опубликованных данных [1, 15–18] и обработанные нами с использованием соотношения (12). Несмотря на широкий разброс представленных результатов, просматривается ряд общих

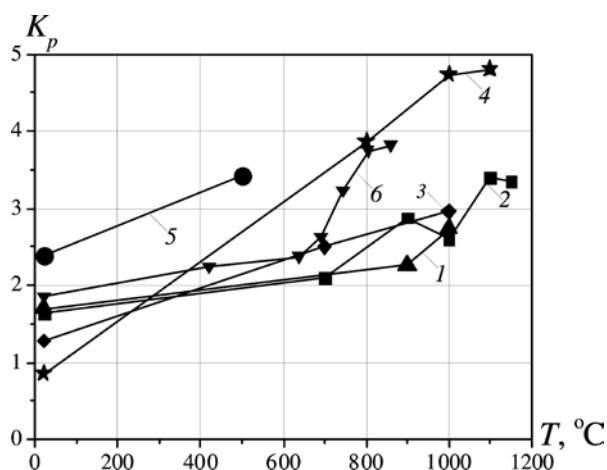


Рис. 2. Температурные зависимости  $K_p$  для различных сплавов: 1 – ЖС32 [1], 2 – ЖС36 [1], 3 – ВЖМ4 [15], 4 – ВКНА-1В [16], 5 – MD2 [17], 6 – PW1480 [18]

закономерностей: графики зависимостей монотонно возрастают от минимальных значений  $K_p$  из диапазона 1 – 2 при комнатной температуре до максимальных значений 3 и выше в области высоких температур. Кроме того, на начальном участке все зависимости близки к линейным, а далее наблюдается резкое возрастание  $K_p$  с последующей стабилизацией значений в области температур, соответствующих пиковым значениям пределов текучести (для углеродистых сплавов). Следует отметить, что при повышенных температурах (выше пиковых) анизотропия пределов текучести практически вырождается ( $K_p \rightarrow 3$ ).

Критерий Хилла реализован в современных конечно-элементных программных комплексах. Для расчета НДС элементов конструкций из монокристаллических материалов необходимо задать  $\sigma_{T_{001}}$  и один из двух наборов: либо коэффициентов  $F = G = H = 0,5$ ,  $L = M = N = 0,5K_p$ , либо безразмерных пределов текучести  $R_{11} = R_{22} = R_{33} = 1$ ,  $R_{12} = R_{23} = R_{31} = \sqrt{3} / K_p$ .

Выбор ориентации образца при проведении второго опыта для определения  $K_p$  может осуществляться различными способами (см. формулы (11) – (15)). В связи с этим возникает проблема выбора оптимальной ориентации, приводящей к наименьшей погрешности, а также вопрос о наличии чувствительности  $K_p$  как таковой к изменению ориентации. Последний вопрос непосредственно связан с точностью и достоверностью квадратичного критерия Хилла в отношении монокристаллических сплавов. Для решения данных проблем нами проведено сравнение рассматриваемого феноменологического критерия с кристаллографическим критерием Шмида и с экспериментальными результатами для различных КГО.

#### Сравнение прогнозов квадратичного критерия Хилла с прогнозами по критерию Шмида

Рассмотрим в качестве примера различные направления нагружения только в пределах плоскости (100), которая включает характерные направления [001] и [011]. Изменение предела текучести в зависимо-

сти от угла отклонения оси нагружения  $Z$  от оси [001] (см. рис. 1) определяется в соответствии с квадратичным критерием на основе соотношения (9) при условии  $\varphi = 0$ :

$$\sigma_T(\theta) = \frac{\sigma_{T_{001}}}{\sqrt{1 + \frac{K_p - 3}{4} \sin^2 2\theta}}. \quad (18)$$

Анализ соотношения (18) показывает, что при  $K_p < 3$  предел текучести  $\sigma_{T_{001}}$  будет минимальным по сравнению с таковыми для других направлений  $\sigma_T(\theta)$ , а при  $K_p > 3$  величина  $\sigma_{T_{001}}$  будет максимальной. При изменении угла  $\theta$  от 0 до 360° наблюдается четыре полуволны и, соответственно, четыре максимума и четыре минимума. Это объясняется наличием в подкоренном выражении в (18) функции

$$\sin^2(2\theta) = \frac{1 - \cos 4\theta}{2}.$$

В соответствии с критерием Шмида (1), при варьировании направления нагружения в пределах плоскости (100) при различных значениях угла  $\theta$  включаются различные системы скольжения. При изменении угла  $\theta$  от 0 до 360° можно выделить восемь секторов по 45°. Активные системы скольжения при изменении угла  $\theta$  представлены в табл. 2.

Предел текучести для различных КГО определяется на основе критерия (1), с использованием значений компонент тензора Шмида (см. Приложение) и тензора напряжений в кристаллографическом базисе. Например, в диапазоне  $0 \leq \theta \leq 45^\circ$  для системы скольжения  $A_3$  получаем следующее соотношение:

$$\sigma_T(\theta) = \frac{2\sigma_{T_{001}}}{\sin 2\theta + \cos 2\theta + 1}. \quad (19)$$

Сравнение зависимостей пределов текучести для квадратичного критерия (18) и критерия Шмида (19) при  $0 \leq \theta \leq 45^\circ$  и аналогичных выражений для других систем скольжения во всем диапазоне изменения угла  $\theta$  представлено на рис. 3. Наблюдается существенное различие в прогнозах двух рассматриваемых критериев. При варьиро-

Таблица 2

Активные системы скольжения при варьировании направления нагружения (угол  $\theta$ ) образца в пределах плоскости (100) по закону Шмида

Диапазон изменения угла $\theta$ , град	Активная система скольжения
0 – 45 180 – 225	$A_3, B_4$
45 – 90 225 – 270	$A_6, B_5$
90 – 135 270 – 315	$C_5, D_6$
135 – 180 315 – 360	$C_3, D_4$

Примечание. Плоскости и направления скольжения, соответствующие системам скольжения, см. в Приложении в конце статьи

вании константы  $K_p$  в пределах от 1 до 10 ни одно из этих ее значений не позволяет найти приемлемой аппроксимации для кривой, соответствующей критерию Шмида.

Принципиальное несоответствие критериев проявляется также в различном прогнозируемом числе полуовал при изменении угла  $\theta$  от 0 до 360°: согласно критерию Хилла их должно быть четыре, тогда как по Шмиду наблюдается восемь полуовал.

Сравнение результатов применения критериев Хилла (18) и Шмида (19) с экспери-

ментальными данными показано на рис. 4. При достаточно сильном разбросе опытных данных, вызванном различием как сплавов, так и режимов испытаний (PWA1480 при 593°C [18], АМЗ и CMSX2 при 650°C [19], IC10 при 20°C [20]), а также различием направлений нагружения (растяжение или сжатие), наблюдается удовлетворительное согласие критерия Шмида с экспериментальными данными, в то время как соответствие квадратичного критерия Хилла данным опыта оставляет желать лучшего.

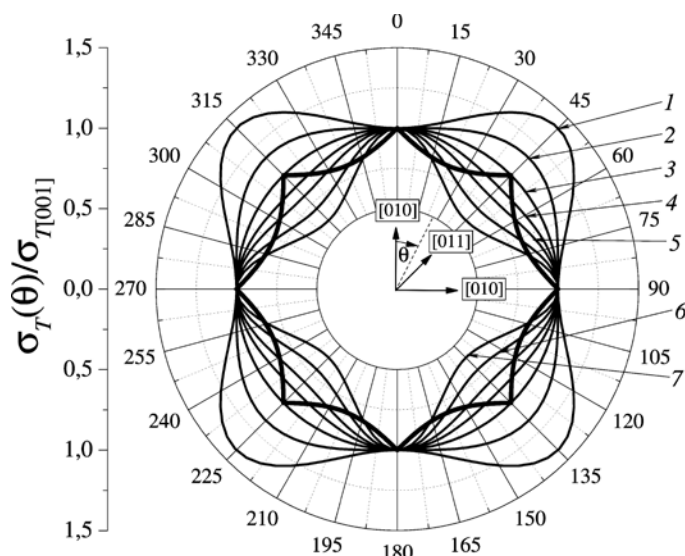


Рис. 3. Сравнение зависимостей предела текучести от угла отклонения от направления [001] в плоскости (100) для критериев Шмида (жирная линия) и Хилла (тонкие линии) при одноосном растяжении монокристалла. Значения  $K_p$ : 1 (кривая 1); 2 (2); 3 (3); 4 (4); 5 (5); 7 (6); 10 (кривая 7)

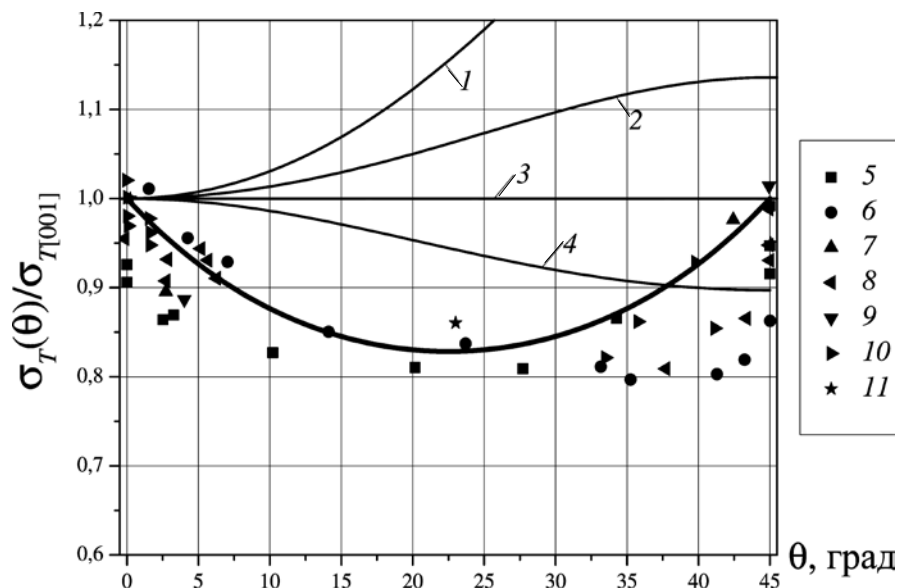


Рис. 4. Сравнение угловых зависимостей предела текучести согласно критериям Шмида (жирная линия) и Хилла (тонкие линии) с экспериментальными данными (символы) для разных сплавов при одноосном растяжении (6, 8, 10, 11) и сжатии (5, 7, 9) (варьируются углы отклонения нагрузки от направления [001] в плоскости (100)). Значения  $K_p$ : 1(1), 2(2), 3(3), 4(4); Сплавы: 5, 6 – PWA1480 [18]; 7, 8 – АМЗ[19]; 9, 10 – CMSX2 [19]; 11 – IC10 [20]

Квадратичный критерий оказывается не состоятельным, когда необходимо описать присутствие минимума в середине интервала при  $\theta = \pi / 8$ ; однако этот минимум прогнозируется при использовании критерия Шмида и наблюдается в экспериментах.

В соответствии с критерием Шмида, предел текучести для ориентации [011] совпадает с пределом текучести для ориентации [001], т. е.  $\sigma_{T[011]} = \sigma_{T[001]}$  (см. также рис. 4); это указывает на неприемлемость определения  $K_p$  по ориентации [011] с использованием уравнения (11). Для ориентации [111] критерий Шмида приводит к равенству  $\sigma_{T[111]} = 3 / 2 \sigma_{T[001]}$ , откуда следует, в соответствии с равенством (12), что  $K_p = 4 / 3$ .

Дальнейшее сравнение прогнозов по двум критериям, выполненное без ограничения на варьирование направления нагружения (только в пределах плоскости (100)), показало также наличие существенных различий в пределах всего стереографического треугольника (рис. 5). Результаты получены с помощью программы CES (Constitutive Equations Studio) [21]. Определение значе-

ния  $K_p$  по закону Шмида на основе метода наименьших квадратов в пределах площади стереографического треугольника, по формуле

$$K_p = \arg \min_{K_p} \iint_S [\sigma_T^{Hill}(\theta, \varphi, K_p) - \sigma_T^{Schmid}(\theta, \varphi)]^2 d\varphi d\theta,$$

приводит к результату  $K_p = 3,1$  (почти изотропное приближение).

В то же время минимизация абсолютной ошибки отклонения, т. е. когда

$$K_p = \arg \min_{K_p} \iint_S |\sigma_T^{Hill}(\theta, \varphi, K_p) - \sigma_T^{Schmid}(\theta, \varphi)| d\varphi d\theta,$$

приводит к существенно иному результату –  $K_p = 2$ , что свидетельствует о наличии качественных различий в сопоставляемых зависимостях.

Полученные в данном разделе результаты указывают на необходимость модификации феноменологического критерия с целью повышения точности прогнозов для монокристаллических материалов.



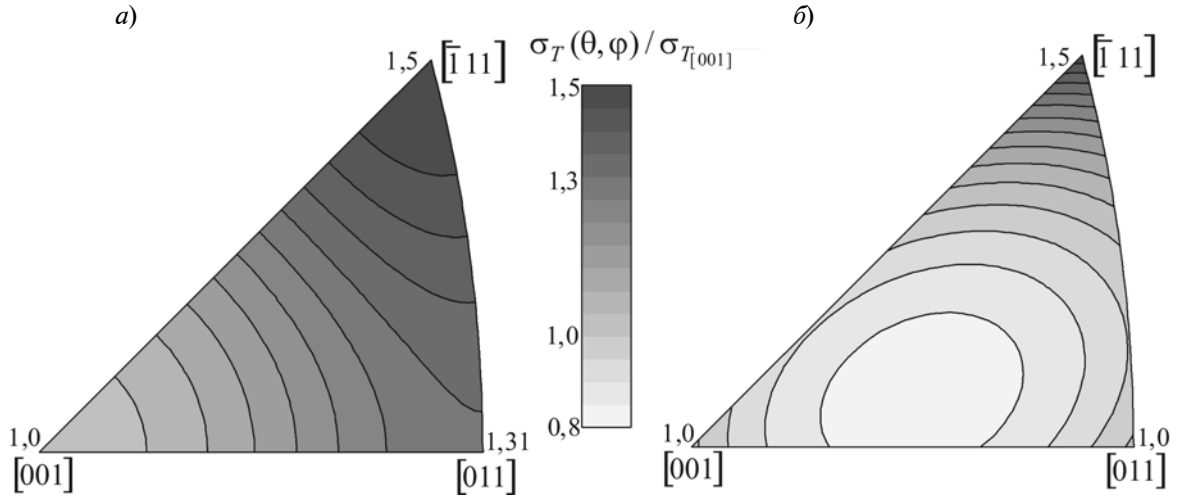


Рис. 5. Сравнение ориентационных зависимостей пределов текучести  $\sigma_T(\theta, \varphi) / \sigma_{T_{[001]}}$  для критериев Хилла при  $K_p = 4/3$  (а) и Шмида (б)

### Модифицированный феноменологический критерий

Анализ установленного нами факта, что период углового изменения предела текучести по закону Шмида в два раза меньше, чем тот же период, но по квадратичному критерию Хилла (см. рис. 3), позволяет предположить, что повышение степени полинома, входящего в формулу для феноменологического критерия, с двух до четырех приведет к повышению точности аппроксимации. Простейшим вариантом обобщения квадратичного критерия (2) является выражение

$$s^2 \cdot \cdot \cdot {}^4N \cdot \cdot s^2 - 1 = 0, \quad (20) \quad (20)$$

в котором  ${}^4N$  – тензор четвертого ранга, имеющий для кубической группы симметрии кристалла структуру, аналогичную (3).

Детальный анализ зависимости предела текучести при варьировании направления нагружения от [001] до [011] в пределах плоскости (100), показал, что для рассматриваемой структуры  ${}^4N$  уменьшения периода не происходит, а именно – при изменении угла  $\theta$  от 0 до  $360^\circ$  наблюдается, как и ранее, четыре полуволны. Однако дальнейшее усложнение выражения (20) при сохранении степени полинома равным четырем, в виде

$$s^2 \cdot \cdot \cdot {}^4N \cdot \cdot s^2 - (s \cdot \cdot \cdot {}^4M \cdot \cdot s)^2 - 1 = 0, \quad (21)$$

позволяет получить желаемый результат (рис. 6).

При использовании критерия (21) наблюдается, как и в случае критерия Шмида, наличие минимума предела текучести в середине интервала  $0 \leq \theta \leq 45^\circ$ . При сравнении результатов применения критерия (21) с данными опытов удастся получить удовлетворительное совпадение (рис. 7).

Критерий (21) содержит пять независимых констант:  $N_{11}, N_{12}, N_{44}, M_{11} - M_{12}, M_{44}$ . Три из них можно выразить через оставшиеся две из трех условий совпадения пределов текучести феноменологического (21) и кристаллографического (1) критериев при  $\theta = 0^\circ$  ( $\sigma_T(0^\circ) = \sigma_{T_{[001]}}$ ),  $\theta = 45^\circ$  ( $\sigma_T(45^\circ) = \sigma_{T_{[011]}}$ ) и  $\theta = 22,5^\circ$  ( $\sigma_T(22,5^\circ) = \sigma_{T_{[-0251]}}$ ) и тем самым обеспечить возникновение минимума предела текучести на интервале  $0 \leq \theta \leq 45^\circ$ . Оставшиеся две константы можно найти из условия совпадения пределов текучести в других направлениях, например, для ориентаций [111] и [112]. Важно отметить, что константы материала могут выбираться как из условия совпадения пределов текучести с экспериментом, так и из условия совпадения с прогнозом по закону Шмида (последнее было показано выше). Результаты, представленные на рис. 6 и 7, получены для следующих значений констант критерия четвертой степени (21):

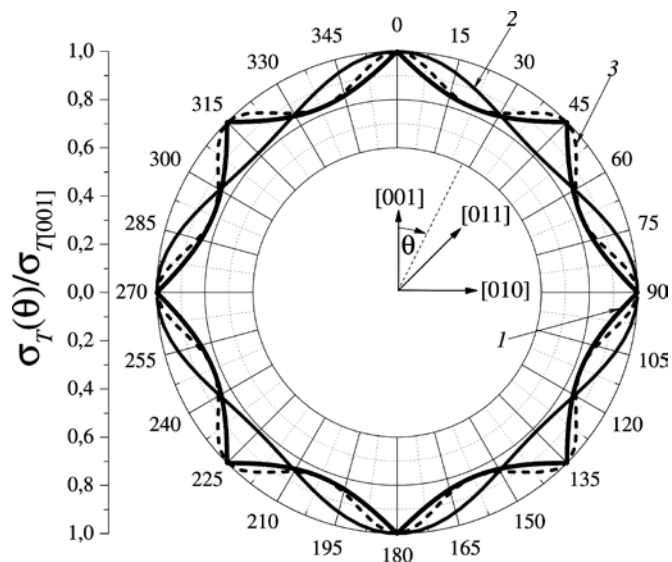


Рис. 6. Сравнение зависимостей предела текучести при одноосном растяжении монокристалла от угла отклонения от направления [001] в плоскости (100). Кривая 1 – использован критерий Шмида; 2 – Хилла при  $K_p = 5$ ; 3 – предложенный критерий четвертой степени (см. формулу (21))

$$N_{11} = 1 / \sigma_{T[001]}^4, \quad N_{12} = 3,5 / \sigma_{T[001]}^4,$$

$$N_{44} = -2,5 / \sigma_{T[001]}^4,$$

$$M_{11} = 1 / \sigma_{T[001]}^2, \quad M_{12} = 0,$$

$$M_{44} = 2,3533 / \sigma_{T[001]}^2.$$

Возможен также и альтернативный путь выбора параметров критерия (21), связанный с анализом условий перехода в пластическое состояние не только на основе опытов на одноосное растяжение, но также и на кручение и комбинированное нагружение. На рис. 8 показаны поверхности

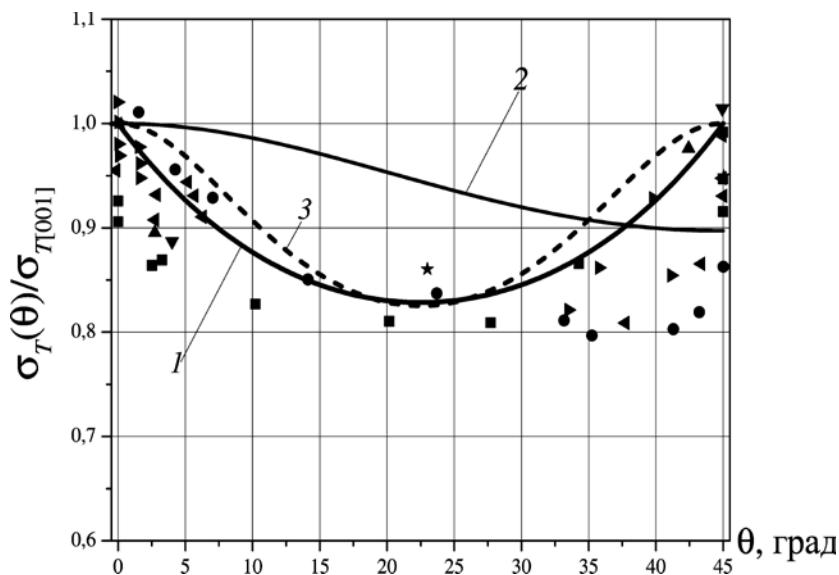


Рис. 7. Сравнение зависимостей предела текучести для критериев Шмида (1), Хилла при  $K_p = 4$  (2) и критерия четвертой степени (21) (3) с экспериментальными данными при различных углах отклонения нагрузки от направления [001] в плоскости (100). Данные экспериментов (символы) соответствуют приведенным на рис. 4

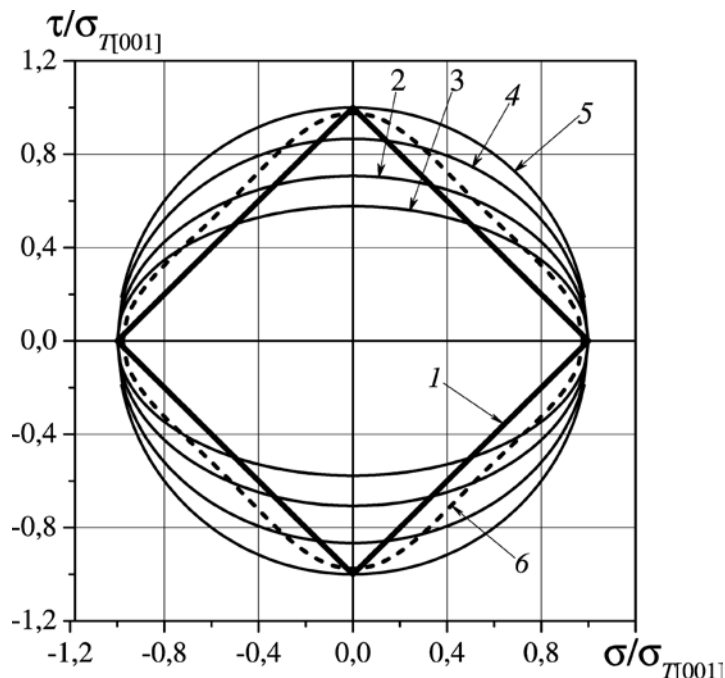


Рис. 8. Поверхности нагружения при совместном растяжении и кручении образца ориентации [001] по трем критериям: Шмида (1), Хилла (2 – 5) и автора данной работы (см. формулу (21)) (6).

Значения  $K_p$  (критерий Хилла): 2 (2), 3 (3), 4/3 (4), 1 (5)

нагружения, полученные с помощью критериев Шмида, Хилла и предложенного нами критерия четвертой степени (см. соответствующие формулы (1), (2) и (21)) для случая комбинированного растяжения с кручением для образца ориентации [001].

Поверхность нагружения, построенная с помощью критерия Шмида (1) с учетом только октаэдрических систем скольжения, для образца ориентации [001] имеет форму квадрата. Критерию Хилла при рассматриваемых условиях нагружения соответствуют кривые в форме эллипса, описываемого уравнением

$$\sigma^2 + K_p \tau^2 = \sigma_{T[001]}^2,$$

с меняющимся размером вертикальной полуоси при изменении  $K_p$ .

Эллипс – это довольно грубая аппроксимация квадрата, он обеспечивает достаточную точность только при малых значениях касательных напряжений. Критерий четвертой степени (21) предлагает более точную гладкую аппроксимацию квадрата. Кривая, соответствующая формуле (21), описывается уравнением вида

$$\sigma^4 + \alpha \sigma^2 \tau^2 + \beta \tau^4 = \sigma_{T[001]}^4.$$

Дальнейшего повышения точности аппроксимации можно добиться путем повышения степени полинома феноменологического критерия пластичности, однако это приводит к значительному увеличению числа характеризующих его констант и усложнению процедур идентификации. При решении конкретных краевых задач поиск компромисса между точностью решения и сложностью модели материала (а также сопряженной с ней трудоемкостью определения необходимых констант материала) может быть найден на основе подходов, используемых в многомодельном анализе [22].

### Заключение

Результаты проведенных исследований показали, что квадратичный критерий пластичности Хилла, широко используемый на практике для монокристаллических жаропрочных сплавов на никелевой основе, демонстрирует значительные отклонения от

прогнозов, даваемых с помощью кристаллографического критерия Шмида, и от экспериментальных данных при варьировании кристаллографической ориентации в случаях одноосного растяжения и комбинированного нагружения. Двух констант материала, используемых в данном критерии, оказывается недостаточно для описания всего многообразия явлений, которые на-

блюдаются при переходе в пластическое состояние монокристаллов с ГЦК-решеткой при многоосном напряженном состоянии.

Одним из возможных путей повышения точности феноменологических критериев пластичности является увеличение показателей степени в тензорно-полиномиальном критерии. Предложенный в данной работе критерий четвертой степени позволяет

Приложение. Тензоры Шмида для октаэдрических систем скольжения

Обозначение системы скольжения	Плоскость и направление скольжения	Тензор Шмида
$A_3$	$(\bar{1}11) [101]$	$\mathbf{P}^1 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$A_2$	$(\bar{1}11) [01\bar{1}]$	$\mathbf{P}^2 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
$A_6$	$(\bar{1}11) [\bar{1}\bar{1}0]$	$\mathbf{P}^3 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
$B_5$	$(111) [1\bar{1}0]$	$\mathbf{P}^4 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
$B_2$	$(111) [01\bar{1}]$	$\mathbf{P}^5 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
$B_4$	$(111) [\bar{1}01]$	$\mathbf{P}^6 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$C_3$	$(11\bar{1}) [101]$	$\mathbf{P}^7 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
$C_1$	$(11\bar{1}) [0\bar{1}\bar{1}]$	$\mathbf{P}^8 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
$C_5$	$(11\bar{1}) [\bar{1}10]$	$\mathbf{P}^9 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$D_4$	$(1\bar{1}1) [10\bar{1}]$	$\mathbf{P}^{10} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
$D_1$	$(1\bar{1}1) [011]$	$\mathbf{P}^{11} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
$D_6$	$(1\bar{1}1) [\bar{1}\bar{1}0]$	$\mathbf{P}^{12} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$



учесть ряд эффектов, не описываемых квадратичным критерием, и добиться повышения точности аппроксимаций.

Введенный критерий также можно применять для анализа процессов ползучести и оценки длительной прочности монокристаллических материалов на никелевой основе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шалин Р.Е., Светлов И.Л., Качанов Е.Б., Толораия В.Н., Гаврилин О.С. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов. М.: Машиностроение, 1997. 333 с.

2. Nouailhas D., Freed A.D. A viscoplastic theory for anisotropic materials // J. Eng. Mater. Technol. 1992. Vol. 114. No. 1, pp. 97-104.

3. Choi S.H., Krempl E. Viscoplasticity theory based on overstress applied to the modeling of cubic single crystals // European J. of Mechanics-A. Solids. 1989. Vol. 8. No. 2, pp. 219-233.

4. Магеррамова Л.А., Васильев Б.Е. Выбор модели анизотропии сплава для прочностных расчетов монокристаллических лопаток турбин газотурбинного двигателя с помощью современных программных комплексов // Современные методы обеспечения прочностной надежности деталей авиационных двигателей: Труды ЦИАМ. № 1344. М.: Торус пресс, 2010. С. 341-350.

5. Магеррамова Л.А., Васильев Б.Е. Влияние азимутальной ориентации в монокристаллических лопатках высокотемпературных газовых турбин на их напряженно-деформированное состояние и прочность // Вестник УГАТУ. 2011. Т. 15. № 4 (44). С. 54-58.

6. Гецов Л.Б., Михайлов В.Е., Семенов А.С., Кривоносова В.В., Ножницкий Ю.А., Блинник Б.С., Магеррамова Л.А. Расчетное определение ресурса рабочих и направляющих лопаток ГТУ. Ч. 2. Монокристаллические материалы // Газотурбинные технологии. 2011. № 8. С. 18-25.

7. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals // Proc. R. Soc. Lond. A. 1948. Vol. 193. No. 1033, pp. 281-297.

8. Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford: Oxford University Press, 1998. 368 p.

9. Barlat F., Lege D.J., Brem J.C. A six-component yield function for anisotropic materials // International Journal of Plasticity. 1991. Vol. 7. Iss. 7, pp. 693-712.

10. Desmorat R., Marull R. Non-quadratic Kelvin modes based plasticity criteria for anisotropic materials // International Journal of Plasticity. 2011. Vol. 27. Iss. 3, pp. 328-351.

11. Cailletaud G. A micromechanical approach

#### Приложение

В таблице на стр. 26 представлены основные характеристики октаэдрических систем скольжения, которые использовались в расчетах, относящихся к критерию Шмида.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, РФФИ (проект №12-08-00943).

to inelastic behaviour of metals // International Journal of Plasticity. 1992. Vol. 8. Iss. 1, pp. 55-73.

12. Бессон Ж., Каето Ж., Шабош Ж.Л., Форрест С. Нелинейная механика материалов; пер. с франц. А.С. Кравчука. Спб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 397 с.

13. Schmid E., Boas W. Kristallplastizitaet mit besonderer Beruecksichtigung der Metalle. Berlin: Julius Springer, 1935. 373 S.

14. Qin Q., Bassani J.L. Non-Schmid yield behavior in single crystals // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1992. Vol. 40. No. 4, pp. 813-833.

15. Каблов Е.Н., Петрушин Н.В., Светлов И.Л., Демонис И.М. Никелевые литейные жаропрочные сплавы нового поколения // Авиационные материалы и технологии. Научно-техн. сб. 2012. № 5. С. 36-51.

16. Булыгин И.П., Бунтушкин В.П., Базылева О.А. Литейный сплав на основе интерметаллида Ni<sub>3</sub>Al для монокристаллических рабочих лопаток турбин ГТД // Авиационная промышленность. 1997. № 3-4. С. 61-65.

17. Segersäll M. Nickel-based single-crystal superalloys – the crystal orientation influence on high temperature properties. PhD Thesis. Linköping: Linköping University. 2013. 56 p.

18. Shah D.M., Duhl D.N. The effect of orientation, temperature and grain size on the yield strength of a single crystal nickel based superalloy // Superalloys'84. Proc. 5<sup>th</sup> International Symposium on Superalloys. M. Gell [et al.] (eds). The Metallurgical Society of AIME Publication. New York, 1984, pp. 105-114.

19. Hoinard G., Estevez R., Franciosi P. Hardening anisotropy of  $\gamma/\gamma'$  superalloy single crystals. 1. Experimental estimates at 650 °C from a homogeneous analysis // Acta Metall. Mater. 1995. Vol. 43. Iss. 4, pp. 1593-1607.

20. Lei C., Weidong W., Haitao C., Hongjian Z., Ying X. Yield anisotropy and tension/compression asymmetry of a Ni<sub>3</sub>Al based intermetallic alloy // Chinese Journal of Aeronautics. 2013. Vol. 26. No. 3, pp. 801-806.

21. Семенов А.С. Вычислительные методы в

теории пластичности. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 211 с.

22. Мельников Б.Е., Семенов А.С., Семенов С.Г. Многомодельный анализ упругопластиче-

ского деформирования материалов и конструкций. Современное состояние // Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова. 2010. № 53. С. 85–92.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**СЕМЕНОВ Артем Семенович** – кандидат физико-математических наук, доцент Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

Semenov.Artem@googlemail.com

### *Semenov A.S.* THE IDENTIFICATION OF ANISOTROPY PARAMETERS OF PHENOMENOLOGICAL PLASTICITY CRITERION FOR SINGLE CRYSTALS WORKED OUT ON THE MICROMECHANICAL MODEL BASIS.

The analysis of the predictive ability of the Hill quadratic criterion of plasticity has been carried out for monocrystalline nickel based superalloys. The possibilities of determining the parameters of the quadratic criterion on uniaxial tensile tests for single-crystal samples of different crystallographic orientation were investigated. The experimental results and predictions of micromechanical model with the Schmid criterion were compared. In order to improve the prediction accuracy the phenomenological fourth degree criterion of plasticity was proposed, that allowed taking into account a number of effects that could not be described by a quadratic criterion.

PLASTICITY, SINGLE CRYSTAL, YIELD SURFACE, ANISOTROPY, PHENOMENOLOGICAL CRITERION, MICROMECHANICAL MODEL.

#### REFERENCES

1. **Shalin R.E., Svetlov I.L., Kachanov E.B. [et al].** *Monokristally nikelovykh zharoprochnykh splavov.* Moscow, Mashinostroenie, 1997, 333 p. (rus)
2. **Nouailhas D., Freed A.D.** A Viscoplastic Theory for Anisotropic Materials. *J. Eng. Mater. Technol.* 1992, No. 1 (114), pp. 97-104.
3. **Choi S.H., Krempl E.** Viscoplasticity theory based on overstress applied to the modeling of cubic single crystals. *European J. of Mechanism and Solid*, 1989, Vol. 8, pp. 219-233.
4. **Magerramova L.A., Vasil'ev B.E.** Vybor modeli anizotropii splava dlya prochnostnykh raschetov monokristallicheskiy lopatok turbin gazoturbinnogo dvigatelya s pomoshch'yu sovremennykh programmnykh kompleksov. *Sovremennye metody obespecheniya prochnostnoy nadezhnosti detaley aviatsionnykh dvigateley: Trudy TsIAM*, No. 1344. Moscow, TORUS PRESS, 2010, pp. 341-350. (rus)
5. **Magerramova L.A., Vasil'ev B.E.** Vliyaniye azimutal'noy orientatsii v monokristallicheskiy lopatkakh vysokotemperaturnykh gazovykh turbin na ikh napryazhenno-deformirovannoe sostoyaniye i prochnost'. *Vestnik UGATU*, 2011, Vol. 15, No.4 (44), pp. 54-58. (rus)
6. **Getsov L.B., Mikhaylov V.E., Semenov A.S., Krivonosova V.V., Nozhnitskiy Yu.A., Blinnik B.S., Magerramova L.A.** Raschetnoye opredeleniye resursa rabochikh i napravlyayushchikh lopatok GTU. *Chast' 2. Monokristallicheskie materialy. Gazoturbinnyye tekhnologii*, 2011, No. 8, pp. 18-25. (rus)
7. **Hill R.** A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. R. Soc. London*, 1948, No. 193 (1033), pp. 281-297.
8. **Hill R.** *The mathematical theory of plasticity.* Clarendon Press, 1950, 355 p.
9. **Barlat F., Lege D.J., Brem J.C.** A six-component yield function for anisotropic materials. *Int. J. Plasticity*, 1991, Vol. 7, pp. 693-712.
10. **Desmorat R., Marull R.** Non-quadratic Kelvin modes based plasticity criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 2011, Vol. 27, pp. 328-351.
11. **Cailletaud G.** A micromechanical Approach to Inelastic Behaviour of Metals. *International Journal of Plasticity*, 1991, Vol. 8, pp. 55-73.
12. **Besson Zh., Kaeto Zh., Shabosh Zh.L., Forest S.** *Nelineynaya mekhanika materialov (perevod s frantsuzskogo).* St. Petersburg, 2010, 398 p.
13. **Schmid E., Boas W.** *Kristallplastizitaet mit besonderer Beruecksichtigung der Metalle*, 1935, Springer. 373 p.
14. **Qin Q., Bassani J.L.** Non-Schmid yield behavior in single crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1992, Vol. 40, No.4, pp. 813-833.
15. **Kablov E.N., Petrushin N.V., Svetlov I.L.,**



**Demonis I.M.** Nikelevye liteynye zharoprochnye splavy novogo pokoleniya. *Trudy VIAM*, 2012, pp. 36-52.

16. **Bulygin I.P., Buntushkin V.P., Bazyleva O.A.** Liteynyy splav na osnove intermetallida Ni<sub>3</sub>Al dlya monokristallicheskikh rabochikh lopatok turbin GTD. *Aviatsionnaya promyshlennost'*, 1997, No.3-4, pp. 61-65. (rus)

17. **Segersäll M.** Nickel-based single-crystal superalloys – the crystal orientation influence on high temperature properties. PhD Thesis. Linköping University, 2013, 56 p.

18. **Shah D.M., Duhl D.N.** The effect of orientation, temperature and gamma prime size on the yield strength of a single crystal nickel base superalloy. Super alloys. *The Metallurgical Society of AIME*, 1984, pp. 105-114.

19. **Hoinard G., Estevez R., Franciosi P.** Hardening anisotropy of  $\gamma/\gamma'$  superalloy single crystals. 1. Experimental estimates at 650 °C from a homogeneous analysis. *Acta Metall. Mater.*, 1995, Vol. 43, pp. 1593-1607.

20. **Lei C., Weidong W., Haitao C., Hongjian Z., Ying X.** Yield anisotropy and tension/compression asymmetry of a Ni<sub>3</sub>Al based intermetallic alloy. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2013, Vol. 26(3), pp. 801-806.

21. **Semenov A.S.** Vychislitel'nye metody v teorii plastichnosti. Izd-vo SPbGPU, 2008, 211 p. (rus)

22. **Melnikov B.E., Semenov A.S., Semenov S.G.** Mnogomodelnii analiz uprugoplasticheskogo deformirovaniya materialov I konstrukcii. Sovremennoe sostoyanie. *Trudy CNII im. akad. A.N.Krylova*, 2010, № 53, pp. 85-92. (rus)

#### THE AUTHOR

**SEMENOV Artem S.**

*St. Petersburg State Polytechnical University,*  
29 Politekhnikeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia  
Semenov.Artem@gmail.com