УДК 519.632

Е.А. Канунникова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ВНЕШНИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассматривается аналитико-численный метод решения внешних краевых задач для эллиптических уравнений с граничными условиями Дирихле и Неймана в трехмерном полупространстве. Приводится алгоритм решения.

ВНЕШНИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ТРЕХМЕРНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО, ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.

Аналитическое решение внешних краевых задач существует только для узкого круга их постановок [1], что приводит к необходимости использования численных методов. В свою очередь применение численных методов осложняется необходимостью учета граничного условия на бесконечности [2] или задания граничных условий на внешней границе расчетной области, не содержащейся в исходной постановке задачи [3]. Это приводит к необходимости разработки и развития методов численного решения внешних краевых задач в этих условиях. Перспективным является подход [4, 5], позволяющий сводить неограниченное пространство к конечной области (метод инверсии). Граничное условие на бесконечности при этом учитывается следующим образом.

Пусть G — конечная область, ограниченная замкнутой поверхностью Σ, G_e — неограниченная область, границей которой является поверхность Σ, $\mathbb{R}^3 = G \cup \Sigma \cup G_e$ — все пространство. В область G_e добавляется сфера S, причем Σ целиком лежит внутри S, отсюда $G_e = D_S \cup S \cup D_\infty$, D_S — конечная область, ограниченная замкнутыми поверхностями Σ и S, а S является границей неограниченной области D_∞.

Согласно аналитико-численному методу инверсии, неограниченное трехмерное пространство

$$\mathbb{R}^3 = G \cup \Sigma \cup G_e, \; G_e = D_S \cup S \cup D_\infty$$

преобразуется в конечную двусоставную область

$$D_3 = G \cup \Sigma \cup \tilde{D}_3, \;\; \tilde{D}_3 = D_S \cup S \cup D^*,$$

где D^* — конечная область, представляющая собой отображение неограниченной области D_∞.

Аналогично преобразуется трехмерное полупространство

$$\mathbb{R}^3_{1/2} = G \cup \Sigma \cup \Xi^1_3 \cup G^{1/2}_e,$$

$$G^{1/2}_e = D^{1/2}_S \cup S^{1/2} \cup D^{1/2}_\infty$$

в конечную область

$$D^{1/2}_3 = G \cup \Sigma \cup \Xi^1_3 \cup \tilde{D}^{1/2}_3,$$

$$\tilde{D}^{1/2}_3 = D^{1/2}_S \cup S^{1/2} \cup D^*_{1/2}.$$

Граница Ξ^1_3 проходит через геометрический центр двусоставной области D_3, деля ее пополам.

Этот этап предполагает использование аналитических преобразований, реализация которых позволяет в дальнейшем применять стандартные приемы и методы численного анализа на основе сеточных моделей. Таким образом, предполагается применение идеологии аналитико-численных процессов. Эти процедуры будут обладать спецификой в зависимости от типа исходной задачи.

Целью данной работы является развитие аналитико-численного метода для решения эллиптических внешних краевых задач с граничными условиями Дирихле и Неймана в трехмерном полупространстве.

Внешняя краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном пространстве состоит в следующем [1]. Требуется найти функцию u, непрерывную в замкнутой области $G_e \cup \Sigma$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \text{ в } G_e, \tag{1}$$

непрерывно примыкающую к граничному условию

$$u\big|_{\Sigma} = \varphi_1(P), \quad P \in \Sigma \tag{2}$$

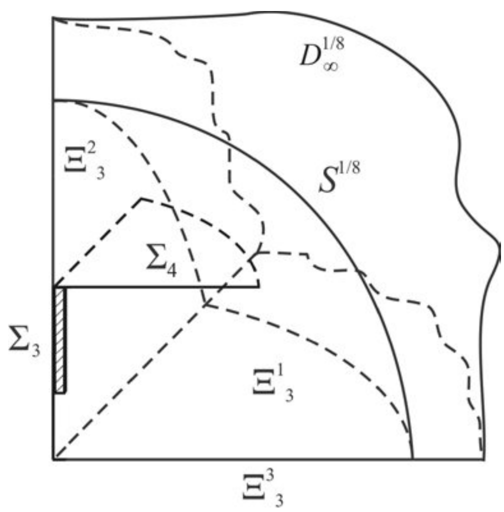
и равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности

$$u(M) \to 0 \text{ при } M \to \infty. \tag{3}$$

Таким образом, первая внешняя краевая задача для случая трех независимых переменных (1) – (3), согласно методу инверсии, принимает вид:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \tilde{D}_3; \\ u\big|_{\Sigma} = \varphi_1(P), P \in \Sigma; \\ u(M) = 0, M \in D^*. \end{cases} \tag{4}$$

Если замкнутых поверхностей несколько и их можно представить с физической точки зрения как систему тел, в которой



Схематическое изображение полупространства $\mathbb{R}^3_{1/8}$

есть граница Ξ_3^1 геометрически правильной формы, проходящая между положительно и отрицательно заряженными телами, то мы имеем задачу в полупространстве, задавая на границе Ξ_3^1 однородное условие первого рода.

Значит, внешняя задача Дирихле (1) – (3) с учетом выражений

$$\begin{aligned} u\big|_{\Sigma_1} &= \varphi_2(P), \quad P \in \Sigma_1; \\ u\big|_{\Sigma_2} &= -\varphi_2(P), \quad P \in \Sigma_2 \end{aligned} \tag{5}$$

принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } G_e^{1/2}; \\ u\big|_{\Sigma_1} = \varphi_2(P), P \in \Sigma_1; \\ u\big|_{\Xi_3^1} = 0; \\ u(M) \to 0 \text{ при } M \to \infty. \end{cases} \tag{6}$$

Согласно аналитико-численному методу инверсии, получаем внешнюю задачу Дирихле в полупространстве следующего вида:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \tilde{D}_3^{1/2}; \\ u\big|_{\Sigma_1} = \varphi_2(P), P \in \Sigma_1; \\ u\big|_{\Xi_3^1} = 0; \\ u(M) = 0, M \in D^*_{1/2}. \end{cases} \tag{7}$$

При наличии симметрии в задаче рассматривается часть области D_3, и при этом на границе задается однородное условие Неймана. Так, опираясь на систему (7) и с учетом симметрии относительно поверхностей Ξ_3^3 и Ξ_3^2 (см. рисунок), имеем:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \tilde{D}_3^{1/8} = D_S^{1/8} \cup S^{1/8} \cup D^*_{1/8}; \\ u\big|_{\Sigma_3} = \varphi_3(P), P \in \Sigma_3; \\ u\big|_{\Sigma_4} = \varphi_4(W), W \in \Sigma_4; \\ u\big|_{\Xi_3^1} = 0; u_x\big|_{\Xi_3^2} = 0; \\ u_y\big|_{\Xi_3^3} = 0; u(M) = 0; M \in D^*_{1/8}, \end{cases} \tag{8}$$

при этом область $D_S^{1/8}$ и $D^*_{1/8}$ является восьмой частью сферы S.

Итак, на основе аналитического преобразования внешняя краевая задача сводится к внутренней, далее строится разностная задача одним из сеточных методов [6–8].

Рассмотренная процедура реализации аналитико-численного метода при решении внешних краевых задач в трехмерном полупространстве сводит задачу к возможности использования традиционных приемов и методов численного анализа.

Описанный аналитико-численный метод, характеризующийся простотой реализации, позволяет решать принципиально новые задачи, требующие значительных вычислительных затрат и высокой точности решения.

Аналитико-численный метод приводит внешнюю задачу в трехмерном полупространстве к виду, поддающемуся более простому численному решению, чем обеспечивает усовершенствование известных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.

2. **Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В.** Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005. 224 с.

3. **Рябенький В.С.** Метод разностных потенциалов и его приложения. М.: Физматлит, 2002. 420 с.

4. **Канунникова Е.А.** Математическое моделирование электрических полей методом инверсии: монография. Белгород: Изд-во БГТУ, 2010. 92 с.

5. **Канунникова Е.А.** Об эффективном подходе моделирования стационарных физических полей в неограниченном пространстве // Научные ведомости Белгородского государственного университета. История, политология, экономика, информатика. 2013. № 8 (151). Вып. 26/1. С. 108–111.

6. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 312 с.

7. **Калиткин Н.Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

8. **Дедюлин С.К., Канунникова Е.А., Корсунов Н.И.** Анализ возможности сокращения общего времени работы алгоритма решения дифференциальных уравнений методом конечных элементов // Научные ведомости Белгородского государственного университета. История, политология, экономика, информатика. 2012. №13 (132) . Вып. 23/1. С. 160–165.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

КАНУННИКОВА Елена Александровна – *кандидат технических наук, докторант кафедры математического и программного обеспечения информационных систем Белгородского государственного национального исследовательского университета.*

308015, Россия, г. Белгород, ул. Победы, 85

kanunnikova@bsu.edu.ru

Kanunnikova E.A. ANALYTIC-NUMERICAL METHOD TO SOLVE 3D EXTERIOR BOUNDARY PROBLEMS FOR ELLIPTIC EQUATIONS

The paper considers analytic-numerical method to solve 3D exterior problems for elliptic equations under Dirichlet and Neumann boundary conditions in half-space. The solution algorithm is concerned.

EXTERIOR BOUNDARY PROBLEMS, 3-D HALF-SPACE, ELLIPTIC EQUATIONS.

REFERENCES

1. **Tikhonov A.N., Samarsky A.A.** Equations of mathematical physics. Moscow: MSU Publishing House, 1999. 798 p. (rus)

2. **Kalitkin N.N., Alshin A.B., Alshina E.A., Rogov B.V.** Calculus using semi-uniform net. Moscow : Phizmatlit, 2005. 224 p. (rus)

3. **Raybenky V.S.** Method of difference potentials and its sphere of application. Moscow: Phizmatlit, 2002. 420 p. (rus)

4. **Kanunnikova E.A.** Mathematical modelling of electric fields using by inversion method. Monograph. Belgorod: «BSTU» Publishing House, 2010. 92 p. (rus)

5. **Kanunnikova E.A.** On effective approach to simulate stationary physical fields in an infinite domain // Belgorod State University Scientific Bulletin. History, Political Science, Economics, Information Technologies. 2013. No. 8 (151). Iss. 26/1. pp. 108-111. (rus)

6. **Samarsky A.A., Nikolaev E.S.** Methods of net equation solution. Moscow: Nauka, 1978. 312 p. (rus)

7. **Kalitkin N.N.** Numerical methods. Moscow: Nauka, 1978. 512 p. (rus)

8. **Dedyulin S.K., Kanunnikova E.A., Korsunov N.I.** Analysis of reducing algorithm total time possibility to solve differential equations by finite element method // Belgorod State University Scientific Bulletin. History, Political Science, Economics, Information Technologies. 2012. No.13 (132). Iss. 23/1. pp. 160-165. (rus)

THE AUTHOR

KANUNNIKOVA, E A.
Belgorod State National Research University,
308015, Pobeda Str. 85, Belgorod, Russia
kanunnikova@bsu.edu.ru