УДК 519,87:62

*В.Н. Козлов*

# ОПЕРАТОРЫ МИНИМИЗАЦИИ НОРМЫ НА КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

*V.N. Kozlov*

St. Petersburg State Polytechnical University,
29 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

# NORM MINIMIZATION OPERATORS FOR COMPACT SETS IN THE EUCLIDEAN SPACE

Сформулированные операторы являются обобщенными проекционными и минимизируют функционал типа нормы евклидова пространства на непустом пересечении линейного многообразия и шара. Определены эквивалентные канонические формы, инварианты, аналитические представления операторов минимизации и допустимых решений. Приложение операторов проиллюстрировано задачей анализа достаточных условий асимптотической устойчивости нелинейных разностных операторов замкнутых, локально оптимальных систем автоматического управления.
ОБОБЩЕННЫЕ ПРОЕКЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ, НОРМА, КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА, ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ.

Operators formulated are projection operators generalized and minimize the Euclidean space norm functional into a non-empty intersection of a linear manifold and a ball. Equivalent canonical forms, invariants and analytic representations of minimization and acceptable solutions operators are determined. The application of operators is illustrated through an objective analysis of sufficient conditions for asymptotic stability of nonlinear differential operators of closed locally optimal automatic control systems.
PROJECTION OPERATORS GENERALIZED, NORM, COMPACT SETS, LINEAR MANIFOLD.

Операторы условной минимизации функционалов типа нормы евклидова пространства представляются обобщенными проекторами на выпуклое пересечение линейного многообразия и шара. Эти проекторы являются операторами конечномерной оптимизации (ОКО). Оператор для неклассических задач является обобщением оператора допустимых решений, заданных на основе операторов для классических задач минимизации и максимизации нормы на пересечении линейного многообразия и сферы [1, 2]. Исследуются эквивалентные формы и инварианты ОКО. Предложено обобщение операторов для задач с функционалами, равномерно возрастающими из точек безусловного минимума. ОКО могут определять также приближенные решения задач квадратичного программирования на основе приведения пары квадратичных форм к диагональному виду для вещественных или унитарных пространств. ОКО применяются для управления в энергетике с регулярной или хаотической динамикой и транспортировкой нефтепродуктов по трубопроводам [3].

### Постановки задач

Оператор минимизации требуется определить для решения неклассической задачи 1: вычислить

$$X_* = \arg\min\{\varphi = \|X - C\|^2,$$
$$C \neq 0_n \,\big|\, X \in D = D^0 \cap D^1, \tag{1}$$
$$D^0 = D^0(A, b) = \{X \,\big|\, AX = B,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$\operatorname{rang} A = m\} \neq \varnothing,$$
$$\tilde{D}^0 = D^0(A, 0_m),\ D^1 = \{X \mid X^T X \le r^2\}\} \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $\|X - C\|^2 = (X - C)^T (X - C)$ – евклидова норма, а множество $D$ определено непустым пересечением линейного многообразия $D^0$ и шара $D^1$, аппроксимирующего параллелепипед [1–4].

Таким образом, норма в задаче (1) минимизируется оператором конечномерной минимизации (ОКМ) на непустом компактном множестве – пересечении линейного многообразия и шара. Основой ОКМ для задачи (1) являются операторы конечномерной оптимизации для классических задач типа 2: вычислить векторы

$$X_* = \arg\min\{\varphi = \|X - C\|^2,\ C \neq 0_n \,|\, X \in D\}, \quad (2а)$$

$$X_* = \arg\max\{\varphi = \|X - C\|^2,\ C \neq 0_n \,|\, X \in D\}, \quad (2б)$$

где допустимое множество задано ограничениями типа равенств:

$$D = D^0 \cap D^1 = \{X \,|\, AX = B, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, X^T X \le r^2\} \in \mathbb{R}^n.$$

На основе операторов минимизации и максимизации нормы для задачи 2 формулируются операторы минимизации и максимизации нормы на пересечении линейного многообразия и сферы, ограничивающей шар в задаче (1). Эти операторы составляют основу оператора допустимых решений (задача 3), отображающего параметры задач типа 2 в отрезок прямой с граничными векторами $X_*$ в (2а) и $X^*$ в (2б). Обобщение операторов допустимых решений определяет операторы решения задачи 1. Для последней традиционно используются необходимые и достаточные условия Куна–Таккера выпуклого программирования.

**Определение.** Проекционный аналитический оператор конечномерной оптимизации (минимизации или максимизации)

$$x_* = \Phi(p_\varphi, p_D) = \arg\operatorname{extr}\{\varphi(x) \,|\, x \in D \subset \mathbb{R}^m\} \in \mathbb{R}^n$$

отображает параметры $p_\varphi$-функционала $\varphi(x)$ и $p_D$-выпуклого множества $D$ в оптимальное решение $x_* \in D$.

## Операторы оптимизации для классических задач

ОКО для задач 1 и 2 используют свойства проекторов.

**Лемма** [1, 2]. *Свойства проекторов на линейное подпространство*

$$\tilde{P}^0 C = (E_{n\times n} - P_A A)C$$

*и на линейное многообразие*

$$P^0(C) = \tilde{P}^0 C + P_A b,\ P_A = A^T (AA^T)^{-1}$$

*определяются следующими соотношениями:*

1) $P_A^T P^0(C) = (AA^T)^{-1} b,\ P_A^T \tilde{P}^0 = 0_{m\times n},\ P_A \neq P_A^T,\ \tilde{P}^0 P_A = 0_{n\times m}.$

2) $P^{0T}(C) P^0(C) = C^T \tilde{P}^0 C + b^T (AA^T)^{-1} b.$

3) $P_A^T P_A = (AA^T)^{-1}.$

4) $b^T P_A^T P^0(C) = b^T (AA^T)^{-1} b.$

Эквивалентные формы операторов оптимизации следуют из необходимых условий оптимальности для задач (2а) и (2б).

**Утверждение 1** об эквивалентных формах оператора. *Операторы оптимизации с параметром $\lambda \in \mathbb{R}^1$ для решения задачи 2 имеют эквивалентные формы*

$$X_1(\lambda) = [P^0(C) + \lambda P_A b] / (1 + \lambda); \quad (3а)$$

$$X_2(\lambda) = P^0(C) - \lambda \tilde{P}^0 C / (1 + \lambda); \quad (3б)$$

$$X_3(\lambda) = P_A b + \tilde{P}^0 C / (1 + \lambda), \quad (3в)$$

*где $\tilde{P}^0 C$ и $P^0(C)$ определяются в лемме.*

*При этом инварианты операторов следуют из квадратного уравнения для вычисления параметра $\lambda \in \mathbb{R}^1$ как корни этого уравнения, определяемые далее.*

Доказательство. Различные формы операторов следуют из необходимых условий для задачи 2 и функции Лагранжа

$$L = (X - C)^T (X - C) + \lambda_0^T (AX - b) + \lambda (X^T X - r^2).$$

Необходимые условия представляются системой нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \partial L/\partial X &= 2(X - C) + A^T\lambda_0 + 2\lambda X = 0_n; \\ \partial L/\partial \lambda_0 &= AX - b = 0_m; \\ \partial L/\partial \lambda &= X^T X - r^2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Метод исключения для системы (4) с учетом второго уравнения позволяет вычислить из первого уравнения вектор множителей

$$\lambda_0(\lambda) = (AA^T)^{-1}(-2b + 2AC - 2\lambda b). \quad (5)$$

Подстановка равенства (5) в первое уравнение (4) неявно определяет $X(\lambda)$:

$$2X(\lambda) - 2C + A^T(AA^T)^{-1} \times \\ \times(-2b + 2AC - 2\lambda b) + 2\lambda X(\lambda) = 0_n,$$

откуда для вектора $X(\lambda)$ следует преобразованное уравнение

$$\begin{gathered} X(1+\lambda) = C - A^T(AA^T)^{-1}(-b + AC - \lambda b) = \\ = C + A^T(AA^T)^{-1}b - A^T(AA^T)^{-1}AC + \\ +A^T(AA^T)^{-1}\lambda\, b = P^0(C) + \lambda P_A\, b, \\ P_A = A^T(AA^T)^{-1}. \end{gathered} \quad (6)$$

Первая форма операторов следует из уравнения (6) как параметрическое семейство множителя Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}^1$ в виде

$$X_1(\lambda) = [P^0(C) + \lambda P_A b] / (1+\lambda). \quad (7а)$$

Вторая форма оператора, следующая из первой (7а), имеет вид

$$X_2(\lambda) = P^0(C) - \tilde{P}^0 C\lambda / (1+\lambda), \quad (7б)$$

поскольку справедливы равенства

$$\begin{gathered} X_2(\lambda) = [P^0(C) + \lambda P_A b] / (1+\lambda) = \\ = [P^0(C) + \lambda P^0(C) - \lambda P^0(C) + \lambda P_A b] / (1+\lambda) = \\ = P^0(C) + [\lambda P_A b - \lambda P^0(C)] / (1+\lambda) = \\ = P^0(C) - \tilde{P}^0 C\lambda / (1+\lambda). \end{gathered}$$

Третья форма оператора, следующая из второй (7б), имеет вид

$$\begin{gathered} X_3(\lambda) = P^0(C) - \tilde{P}^0 C\lambda / (1+\lambda) = \\ = \tilde{P}^0 C + P_A b - \tilde{P}^0 C\lambda / (1+\lambda) = \\ = P_A b + \tilde{P}^0 C[1 - \lambda / (1+\lambda)] = \\ = P_A b + \tilde{P}^0 C / (1+\lambda). \end{gathered} \quad (7в)$$

Эквивалентные формы операторы оптимизации даны в табл. 1.

Таблица 1

**Эквивалентные формы однопараметрических операторов условной квадратичной оптимизации для классических задач**

| Номер формы | Вид оператора |
|---|---|
| 1 | $X_1(\lambda) = [P^0(C) + \lambda P_A b] / (1+\lambda)$ |
| 2 | $X_2(\lambda) = P^0(C) - \tilde{P}^0 C\lambda / (1+\lambda)$ |
| 3 | $X_3(\lambda) = P_A b + \tilde{P}^0 C / (1+\lambda)$ |

Эквивалентность форм операторов доказывается «по цепочке»:

$$X_1(\lambda) \overset{1)}{\Rightarrow} X_3(\lambda) \overset{2)}{\Rightarrow} X_2(\lambda) \overset{3)}{\Rightarrow} X_1(\lambda):$$

1) $$\begin{aligned} X_1(\lambda) &= [P^0(C) + \lambda P_A b] / (1+\lambda) = \\ &= \tilde{P}^0 C / (1+\lambda) + P_A b(1+\lambda) / (1+\lambda) = \\ &= P_A b + \tilde{P}^0 C / (1+\lambda) = X_3(\lambda). \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} X_3(\lambda) &= P_A b + \tilde{P}^0 C / (1+\lambda) = \\ &= P_a b + \tilde{P}^0 C - \tilde{P}^0 C + \tilde{P}^0 C / (1+\lambda) = \\ &= P^0(C) - \tilde{P}^0 C + \tilde{P}^0 C / (1+\lambda) = \\ &= P^0(C) + \tilde{P}^0 C(-1 - \lambda + 1) / (1+\lambda) = \\ &= P^0(C) - \tilde{P}^0 C\lambda / (1+\lambda) = X_2(\lambda). \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} X_2(\lambda) &= P^0(C) - \tilde{P}^0 C\lambda / (1+\lambda) = \\ &= [(1+\lambda)P^0(C) - \tilde{P}^0 C\lambda] / (1+\lambda) = \\ &= [P^0(C) + \lambda\tilde{P}^0 C + \lambda P_A b - \tilde{P}^0 C\lambda] / (1+\lambda) = \\ &= [P^0(C) + \lambda P_A b] / (1+\lambda) = X_1(\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, эквивалентность форм операторов оптимизации доказана на основе аксиом эквивалентности: рефлексивности

$$X_i(\lambda) \sim X_i(\lambda);$$

симметрии

$$X_i(\lambda) \sim X_j(\lambda) \Leftrightarrow X_j(\lambda) \sim X_i(\lambda);$$

и транзитивности

$$X_i(\lambda) \sim X_k(\lambda), X_k(\lambda) \sim X_j(\lambda) \Rightarrow \\ \Rightarrow X_i(\lambda) \sim X_j(\lambda),\ i \neq j \neq k.$$

Далее для операторов (7а), (7б) и (7в) определены параметры для классических задач типа 2.

**Утверждение 2** об операторах для классических задач. *Пусть справедливо утверждение 1 и операторы оптимизации (табл. 1). Тогда справедливы утверждения*:

1. Векторы условной минимизации $X_{i*}$ и максимизации $X_i^*$ нормы для классических задач на компактном множестве в виде пересечения линейного многообразия и сферы (2а) и (2б) определяются операторами оптимизации с параметрами $\sigma = |\rho/\alpha|^{1/2}$ в трех канонических формах, имеющих вид

$$\begin{aligned} 1)\ & X_{1*}(-1+\sigma) = P^0(C)\sigma + P_A b(1-\sigma);\\ & X_1^*(-1-\sigma) = -P^0(C)\sigma + P_A b(1-\sigma). \end{aligned} \qquad (8а)$$

$$\begin{aligned} 2)\ & X_{2*}(-1+\sigma) = P^0(C) + \tilde{P}^0 C(-1+\sigma);\\ & X_2^*(-1-\sigma) = P^0(C) + \tilde{P}^0 C(-1-\sigma). \end{aligned} \qquad (8б)$$

$$\begin{aligned} 3)\ & X_{3*}(-1+\sigma) = P_A b + \tilde{P}^0 C\sigma,\\ & X_3^*(-1-\sigma) = P_A b - \tilde{P}^0 C\sigma. \end{aligned} \qquad (8в)$$

2. Квадратное уравнение относительно параметров

$$\alpha\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha_0 = 0, \qquad (9а)$$

где

$$\alpha = r^2 - b^T(AA^T)^{-1}b,\ \ \alpha_0 = \alpha - \rho,\ \ \rho = C^T\tilde{P}^0 C,$$

определяет параметры

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \left[-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\alpha(\alpha-\rho)}\ \right]\Big/2\alpha = \\ &= -1 \pm \sigma,\ \sigma = |\rho/\alpha|^{1/2}. \end{aligned} \qquad (9б)$$

При этом уравнение (9а) и корни (9б) являются инвариантами трех форм операторов (8а), (8б) и (8в).

3. Условие совместности ограничений задач (2 а) и (2 б) (не пустоты пересечения линейного многообразия и сферы) представляется неравенством

$$\alpha = r^2 - b^T(AA^T)^{-1}b \geq 0. \qquad (9в)$$

4. Операторы оптимизации в формах (8а), (8б), (8в) определяют операторы минимизации и максимизации нормы с параметрами $\lambda_* = -1+\sigma$ и $\lambda^* = -1-\sigma$, соответственно, как решения задач (2а) и (2б) (табл. 2).

Доказательство. Утверждения п. 1 и п. 2 об инвариантности квадратных уравне-

Таблица 2

**Эквивалентные представления операторов минимизации и максимизации нормы на пересечении линейного многообразия и сферы**

| Номер канонической формы | Вид оператора |
|---|---|
| 1 | $X_{1*} = X_{1*}(-1+\eta) = P^0(C)\eta + P_A b(1-\eta)$, $X_1^* = X_1^*(-1-\eta) = -P^0(C)\eta + P_A b(1+\eta)$ |
| 2 | $X_{2*} = X_{2*}(-1+\eta) = P^0(C) + \tilde{P}^0 C(-1+\eta)$, $X_2^* = X_2^*(-1-\eta) = P^0(C) + \tilde{P}^0 C(-1-\eta)$ |
| 3 | $X_{3*} = X_{3*}(-1+\eta) = P_A b + \tilde{P}^0 C\eta$, $X_3^* = X_3^*(-1-\eta) = P_A b - \tilde{P}^0 C\eta$ |

Обозначения: $X_{i*}(\cdot)$ $X_i^*(\cdot)$– соответственно операторы минимизации и максимизации соответсивенно, $i = 1, 2, 3$;

$$\eta = \sigma^{-1},\ \sigma = |\rho/\alpha|^{1/2},\ \ \alpha = r^2 - b^T(AA^T)^{-1}b > 0,\ \rho = C^T\tilde{P}^0 C.$$

ний и их корней как параметров операторов, равных для трех эквивалентных форм, справедливы в силу системы необходимых условий, а также доказываются непосредственными вычислениями.

Параметры первой формы оператора вычисляются подстановкой (7а) в третье уравнение (4). Тогда можно получить эквивалентные представления операторов в трех канонических формах (табл. 2). Итак:

$$X_1^T(\lambda)X_1(\lambda) = [P^0(C) + \lambda P_A b]^T \times$$
$$\times [P^0(C) + \lambda P_A b] / (1+\lambda)^2 =$$
$$= [P^{0T}(C) + \lambda b^T P_A^T] \cdot [P^0(C) + \lambda P_A b] / (1+\lambda)^2 =$$
$$= [P^{0T}(C)P^0(C) + 2\lambda b^T P_A^T P^0(C) +$$
$$+\lambda^2 b^T P_A^T P_A b] / (1+\lambda)^2 = r^2.$$

Преобразуя это равенство в силу леммы, можно получить

$$C^T \tilde{P}^0 C + b^T (AA^T)^{-1} b[1 + 2\lambda + \lambda^2] =$$
$$= r^2(1 + 2\lambda + \lambda^2).$$

Из последнего соотношения следует квадратное уравнение

$$\alpha\lambda^2 r^2 + 2\alpha\lambda - C^T \tilde{P}^0 C - b^T (AA^T)^{-1} b = 0;$$
$$\alpha = r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b,$$

которое совпадает с уравнением (9а). Тогда первая форма (7а) примет вид

$$X_1(\lambda_{1,2}) = [P^0(C) + \lambda_{1,2} P_A b] / (1 + \lambda_{1,2}). \quad (10а)$$

Из (10а) следует условие вещественности корней $\alpha = r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b \geq 0$, соответствующее условию совместности ограничений задачи 1 и задач 2, доказывающее п. 2 утверждения 2.

Уравнение (9а) и корни $\lambda_{1,2}$ совпадают для трех форм операторов, что следует из эквивалентности данных форм. Тогда

$$X_3(\lambda_{1,2}) = \Phi_3(C, A, b, r^2, \lambda_{1,2}) =$$
$$= P_A b + \tilde{P}^0 C / (1 + \lambda_{1,2}) = \quad (10б)$$
$$= P_A b + \tilde{P}^0 C(\pm\eta), \ \eta = \sigma^{-1}.$$

Подстановка (7в) в третье уравнение (4) определяет равенства

$$X_3^T(\lambda) X_3(\lambda) =$$
$$= [P_A b + \tilde{P}^0 C / (1+\lambda)]^T \cdot [P_A b + \tilde{P}^0 C / (1+\lambda)] =$$
$$= b^T P_A^T P_A b + 2b^T P_A^T \tilde{P}^0 C / (1+\lambda) +$$
$$+C^T \tilde{P}^0 C / (1+\lambda)^2 = r^2(1 + 2\lambda + \lambda^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^T P_A^T P_A b(1+\lambda)^2 + 2\lambda b^T P_A^T \tilde{P}^0 C / (1+\lambda) +$$
$$+C^T \tilde{P}^0 C = r^2(1 + 2\lambda + \lambda^2).$$

Из последних равенств и леммы следуют соотношения

$$[r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b](1+\lambda)^2 - C^T \tilde{P}^0 C = 0,$$
$$P_A^T \tilde{P}^0 = 0_{m\times n};$$
$$\alpha(1 + 2\lambda + \lambda^2) - \rho = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha\lambda^2 + 2\alpha\lambda + (\alpha - \rho) = 0,$$

что подтверждает равенство параметров трех форм операторов.

Вторая форма оператора (7б) (см. табл. 1), имеющая вид

$$X(\lambda_{1,2}) = X_2(-1 \pm \eta), \ \eta = \sigma^{-1}, \quad (11)$$

связывает структуру и параметры оператора так, что

$$X_2(\lambda_{1,2}) = P^0(C) - \tilde{P}^0 C\lambda_{1,2} / (\lambda_{1,2} + 1) =$$
$$= P^0(C) + \tilde{P}^0 C(-1 \pm \eta);$$
$$\lambda_{1,2} / (1 + \lambda_{1,2}) = \frac{-1 \pm \sigma}{\pm\sigma} =$$
$$= 1 - [\pm(\sigma)^{-1}] = 1 - (\pm\eta), \ \eta = \sigma^{-1}.$$

Третья форма оператора (7в) имеет представление

$$X_3(\lambda_{1,2}) = X_3(-1 \pm \sigma) = \quad (12)$$
$$= P_A b - \tilde{P}^0 C(\pm\eta), \ \eta = \sigma^{-1},$$

поскольку справедливы соотношения

$$X_3(\lambda_{1,2}) = P_A b + \tilde{P}^0 C / (1 + \lambda_{1,2}) =$$
$$= P_A b + \tilde{P}^0 C(\pm\eta);$$
$$1 / (1 + \lambda_{1,2}) = \pm\sigma^{-1} = \pm\eta, \ \lambda_{1,2} = -1 \pm |\sigma|^{1/2}.$$

Доказательство п. 3 следует из условия вещественности корней (9б) уравнения (9а), что является очевидным.

Для доказательства п. 4 утверждения 2 надо показать, что положительный корень определяет оператор условной минимизации нормы на сфере, а отрицательный корень – оператор максимизации. Операторы определяют решения задач (2а) и (2б), что доказывается «методом от противного».

Пусть

$$\varphi[X_3(-\sigma)] \le \varphi[X_3(+\sigma)],\ \sigma = |\rho/\alpha|^{1/2}. \quad (13)$$

Однако неравенство (13) для нормы и оператора $X_{3*}$ (см. табл. 2) не выполнено, так как справедливо неравенство для двух значений функционала (нормы). Первое значение нормы определяется равенством

$$\begin{aligned}\varphi[X_3(-\sigma)] &= [X_3(-\sigma) - C]^T[X_3(-\sigma) - C] = \\ &= [P_A b - \tilde{P}^0 C\sigma - C]^T [P_A b - \tilde{P}^0 C\sigma - C] = \\ &= b^T P_A^T P_A b - C^T \tilde{P}^0 P_A b\sigma - C^T P_A b - \\ &- b^T P_A^T \tilde{P}^0 C\sigma + C^T \tilde{P}^0 \tilde{P}^0 C\sigma^2 + C^T \tilde{P}^0 C\sigma - \\ &- b^T P_A^T C + C^T \tilde{P}^0 C\sigma + C^T C = \\ &= b^T (AA^T)^{-1} b - 2C^T P_A b + \\ &+ C^T \tilde{P}^0 C(\sigma^2 + 2\sigma) + C^T C,\end{aligned}$$

где использованы свойства проекторов, приведенные в лемме:

$$P_A^T P_A = 0_{m\times n};\ \tilde{P}^0 P_A = 0_{n\times m};\ \tilde{P}^0 \tilde{P}^0 = \tilde{P}^0.$$

Второе значение функционала определяется равенствами

$$\begin{aligned}\varphi[X_3(+\sigma)] &= [X_3(+\sigma) - C]^T[X_3(+\sigma) - C] = \\ &= [P_A b + \tilde{P}^0 C\sigma - C]^T [P_A b + \tilde{P}^0 C\sigma - C] = \\ &= b^T P_A^T P_A b + C^T \tilde{P}^0 P_A b\sigma - C^T P_A b + \\ &+ b^T P_A^T \tilde{P}^0 C\sigma + C^T \tilde{P}^0 \tilde{P}^0 C\sigma^2 - C^T \tilde{P}^0 C\sigma - \\ &- b^T P_A^T C - C^T \tilde{P}^0 C\sigma + C^T C = \\ &= b^T (AA^T)^{-1} b - 2C^T P_A b + C^T \tilde{P}^0 C\sigma^2 - \\ &- 2C^T \tilde{P}^0 C\sigma + C^T C,\end{aligned}$$

полученными с учетом леммы.

В результате можно вычислить:

$$\begin{aligned}\varphi[X_3(+\sigma)] &\le b^T (AA^T)^{-1} b - 2C^T P_A b + \\ &+ C^T \tilde{P}^0 C(\sigma^2 - 2\sigma) + C^T C \le \\ \le \varphi[X_3(-\sigma)] &= b^T (AA^T)^{-1} b - 2C^T P_A b + \\ &+ C^T \tilde{P}^0 C(\sigma^2 + 2\sigma) + C^T C,\ \sigma \ge 0.\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует неравенство для функционалов

$$\begin{aligned}\varphi[X_3(+\sigma)] - 2C^T \tilde{P}^0 C\sigma &= \\ = \varphi[X_3(-\sigma)] + 2C^T \tilde{P}^0 C\sigma,&\ \sigma \ge 0,\end{aligned}$$

определяющее наименьшее и наибольшие значения функционала типа нормы на допустимом множестве задач (2а) и (2б).

Таким образом, операторы оптимизации (см. табл. 2), с параметрами

$$\eta_* = +\sigma^{-1};\ \eta^* = -\sigma^{-1};\ \sigma = |\rho/\alpha|^{1/2}$$

задают граничные точки условных минимума и максимума нормы задач (2а) и (2б), а также определяют операторы допустимых решений задачи (1).

### Операторы допустимых и оптимальных решений для неклассических задач

Эти операторы для задачи 1 имеют вид, представленный в дальнейших утверждениях.

**Утверждение 3.** *Пусть справедливы утверждения 1 и 2. Тогда для задачи (1) оператор допустимых решений имеет вид*

$$\begin{aligned}X_{\text{доп}} &= \Phi(C, A, b, r^2, \vartheta, \eta) = \\ &= (1-\vartheta)X_{3*} + \vartheta X_3^*,\ \vartheta \in [0,\ 1],\end{aligned} \quad (15)$$

*где операторы минимизации и максимизации нормы в силу утверждения 2 имеют вид*

$$X_{3*} = P_A b + \tilde{P}^0 C\eta,\ X_3^* = P_A b - \tilde{P}^0 C\eta,$$

$$\eta = \sigma^{-1},\ \sigma = |\alpha/\rho|^{1/2}.$$

Доказательство вида оператора (15) следует из выпуклости допустимого множества в задаче (1), допустимости представления (12) и их выпуклой комбинации.

**Утверждение 4** об операторе решения неклассической задачи. *Пусть представление (1) – корректная задача и справедливы утверждения 1 – 3. Тогда оператор минимизации нормы для задачи (1) имеет вид*

$$\begin{aligned}X_* &= \Phi(C, A, b, r^2, \vartheta_*, \eta_*, \eta^*) = \\ &= (1-\vartheta)X_{3*} + \vartheta_* X_3^*;\\ X_{3*} &= P_A b + \tilde{P}^0 C\eta_*,\ \ \eta_* = +\sigma^{-1} = +|\alpha/\rho|^{1/2};\\ X_3^* &= P_A b + \tilde{P}^0 C\eta^*,\ \ \eta^* = -\sigma^{-1} = -|\alpha/\rho|^{1/2};\\ \vartheta_* &= P(\vartheta_0) = (|\vartheta_0| - |\vartheta_0 - 1| + 1)/2 \in [0,\ 1];\\ \vartheta_0 &= (1-\sigma)/2;\ \eta = \sigma^{-1} = |\alpha/\rho|^{1/2};\\ \alpha &= r^2 - b^T (AA^T)^{1/2} b;\ \rho = C^T \tilde{P}^0 C.\end{aligned} \quad (16)$$

Доказательство. Оператор минимизации как обобщенный проектор с учетом возможной принадлежности точки минимума нормы границе или внутренней части допустимого множества определяется равенством (15). Проектор (16) следует из оператора (15) с оптимальным параметром $\vartheta_* \in [0,1] \in \mathbb{R}^1$ оператора (16).

Параметр $\vartheta_*$ должен доставлять минимум нормы на отрезке $[X_{3*}, X_3^*]$, принадлежащем одномерному многообразию, которое определено векторами $X_{3*}$ и $X_3^*$ — решениями классической задачи 2. Параметр $\vartheta_*$ определяется проекцией $\vartheta_* = P(\vartheta_0)$ параметра $\vartheta_0 \in \mathbb{R}^1$ на [0,1] который является точкой минимума нормы на одномерном многообразии. В результате оператор (16) с параметром $\vartheta_*$ является решением задачи (1).

Это решение обеспечивает допустимость (16) в силу допустимости «граничных» образов, заданных операторами $X_{3*}$ и $X_3^*$. Внутренняя часть этой области в силу выпуклости соответствует параметру $\vartheta \in (0, 1)$ в (16). Параметр $\vartheta_0$ вычисляется на основе параметрического уравнения многообразия

$$\begin{aligned} X(\vartheta) &= (1-\vartheta)X_{3*} + \vartheta X_3^* = \\ &= X_{3*} + \vartheta(X_3^* - X_{3*}),\ \vartheta \in [0, 1] \end{aligned} \tag{17}$$

и необходимых условий минимума нормы на этом многообразии:

$$\begin{aligned} &d\varphi[X(\vartheta)]/d\vartheta = d\left\|X(\vartheta) - C\right\|^2 / d\vartheta = \\ &= 2(X_3^* - X_{3*})^T [X_{3*} + \vartheta(X_3^* - X_{3*}) - C] = \\ &= 2(X_3^* - X_{3*})^T X_{3*} + \vartheta(X_3^* - X_{3*})^T \times \\ &\times (X_3^* - X_{3*}) - (X_3^* - X_{3*})^T C = 0_1. \end{aligned}$$

В результате параметр

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= \frac{-(X_3^* - X_{3*})^T X_{3*} + (X_3^* - X_{3*})^T C}{\left\|X_3^* - X_{3*}\right\|^2} = \\ &= \frac{(X_3^* - X_{3*})^T (C - X_{3*})}{\left\|X_3^* - X_{3*}\right\|^2}, \end{aligned}$$

где с учетом леммы вычислены вектор и скалярное произведение:

$$\begin{aligned} &X_3^* - X_{3*} = \\ &= P_A b - \tilde{P}^0 C\eta - P_A b - \tilde{P}^0 C\eta = -2\tau \tilde{P}^0 C\tau, \\ &(X_3^* - X_{3*})^T (C - X_{3*}) = \\ &= -2\eta C^T \tilde{P}^0 (C - P_A b - \tilde{P}^0 C\eta) = \\ &= -2\eta C^T \tilde{P}^0 C + 2\eta C^T \tilde{P}^0 P_A b + 2\eta^2 C^T \tilde{P}^0 \tilde{P}^0 C = \\ &= -2\eta C^T \tilde{P}^0 C + 2\eta^2 C^T \tilde{P}^0 \tilde{P}^0 C = 2\rho(\eta^2 - \eta), \end{aligned}$$

а также использованы равенства

$$\begin{aligned} &\tilde{P}^0 \tilde{P}^0 = \tilde{P}^0_{n\times n},\ \tilde{P}^0 P_A = 0_{n\times m},\ C^T \tilde{P}^0 C = \rho; \\ &\left\|X_3^* - X_{3*}\right\|^2 = 4\eta^2 C^T \tilde{P}^{0T} \tilde{P}^0 C = \\ &= 4\eta^2 C^T \tilde{P}^0 C = 4\eta^2 \rho. \end{aligned}$$

Тогда окончательное значение параметра будет равно

$$\begin{aligned} &\vartheta_0 = 2\rho(\tau^2 - \tau)/4\tau^2\rho = (1 - \tau^{-1})/2, \\ &\tau = \left|\alpha/\rho\right|^{1/2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Принадлежность решения к шару в ограничениях (1) позволяет утверждать, что точка безусловного минимума $\vartheta_0$ проектируется на [0,1] проектором [1]:

$$\vartheta_* = P(\vartheta_0) = (\left|\vartheta_0\right| - \left|\vartheta_0 - 1\right| + 1) / 2 \in [0,\ 1]. \tag{19}$$

Равенство (19) определяет оптимальный и допустимый параметр оператора (16), который является проекцией элемента (18) на отрезок [0, 1] в пространстве параметров и отрезком одномерного многообразия с границами в виде векторов $X_{3*}$ и $X_3^*$.

Обобщенный проектор как оператор минимизации для задачи (1) примет вид (16). Таким образом, утверждение 4 доказано.

**Следствие 1.** *Преобразованный оператор (16) имеет вид*

$$\begin{aligned} &X_* = P_A b + (1 - 2\vartheta_*)\tilde{P}^0 C\eta, \\ &\eta = \sigma^{-1} = \left|\alpha/\rho\right|^{1/2}, \end{aligned} \tag{20}$$

*где параметры определены равенствами (18) и (19).*

Доказательство следует из вида оператора (16) в силу соотношений

$$\begin{aligned} &X_* = (1 - \vartheta_*)X_{3*} + \vartheta_* X_3^* = \\ &= (1 - \vartheta_*)(P_A b + \tilde{P}^0 C\eta) + \vartheta_*(P_A b - \tilde{P}^0 C\eta) = \\ &= P_A b + \tilde{P}^0 C\eta - \vartheta_* P_A b - \vartheta_* \tilde{P}^0 C\eta + \\ &+ \vartheta_* P_A b - \vartheta_* \tilde{P}^0 C\eta = P_A b + \tilde{P}^0 C\eta - 2\vartheta_* \tilde{P}^0 C\eta = \\ &= P_A b + (1 - 2\vartheta_*)\eta \tilde{P}^0 C. \end{aligned} \tag{21}$$

Представление оператора (21) в двух формах дано в табл. 3.

**Следствие 2.** *При условии $C \neq 0_n \in \mathbb{R}^n$ задача (1) имеет единственное решение, а в случае $C = 0_n \in \mathbb{R}^n$ — бесчисленное множество решений.*

Оператор минимизации в форме (20) (табл. 3) является суперпозицией двух операторов, определенных соответствующими составляющими. Первая составляющая оператора (20) формирует ортогональную проекцию начала координат на линейное многообразие в задаче (1), а вторая (нелинейный оператор) задает проекцию вектора $C \in \mathbb{R}^n$ на линейное многообразие, масштабируемую параметром, определенным в (20) и (19).

Обобщенный оператор проектирования (21) имеет геометрическую интерпретацию, вытекающую из факторизации конечномерного евклидова пространства на линейное многообразие (подпространство) и ортогональное дополнение к нему. Первая составляющая (21) – оператор проектирования нулевого элемента $0_n \in \mathbb{R}^n$ на линейное многообразие в (1). Второй оператор преобразует образ первого оператора суммирования с образом второго так, чтобы сумма векторов принадлежала пересечению линейного многообразия и шара. В результате обеспечивается выполнение ограничения задачи типа неравенства и достигается минимум нормы задачи (1).

Вычисления оптимальных решений иллюстрируется на рисунке, где показано преобразование операторами параметров

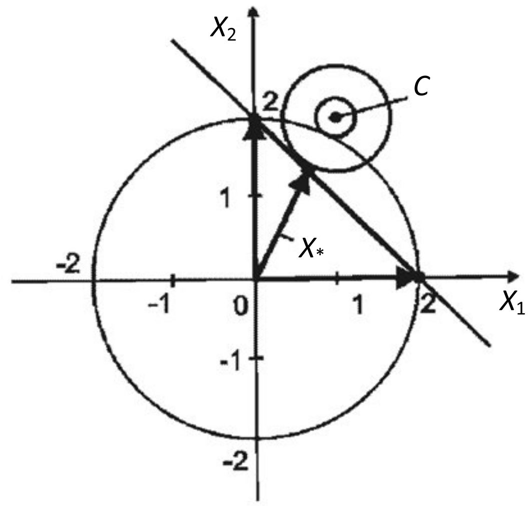


Иллюстрация условий задачи и образа оператора минимизации нормы

задачи (15).

Таким образом, обобщенный проектор, заданный равенством (16), определяет точки минимума и максимума нормы с учетом знаков и величин множителя Лагранжа для ограничений-неравенств на основе преобразований условий (4). Это дополняет известные формы оптимальных решений, поскольку определяет точные значения множителей Лагранжа для ограничений-неравенств вместо требований только к знакам этих мно-

Таблица 3

**Формы оператора условной квадратичной минимизации для неклассической конечномерной задачи (1)**

| Форма представления оператора (16) | Вид оператора |
|---|---|
| Структурная | $X_* = \Phi(C, A, b, r^2, \vartheta_*) = [1 - P(\vartheta_*)]X_{3*} + P(\vartheta_*)X_3^*$,<br>$X_{3*} = P_A b + \tilde{P}^0 C\eta_*,\ X_3^* = P_A b - \tilde{P}^0 C\eta^*,\ \eta_* = +\lvert\sigma\rvert^{1/2},\ \eta^* = -\lvert\sigma\rvert^{1/2}$,<br>$\vartheta_* = P(\vartheta_0) = (\lvert\vartheta_0 - 1\rvert - \lvert\vartheta_0\rvert + 1)/2 \in [0,\ 1],\ \vartheta_0 = (1 - \eta^{-1})/2$,<br>$\eta = \lvert\sigma\rvert^{1/2} = \lvert\alpha/\rho\rvert^{1/2},\ \alpha = r^2 - b^T(AA^T)^{-1}b \ge 0, \rho = C^T\tilde{P}^0 C > 0$ |
| Преобразованная | $X_3 = P_A b + (1 - 2\vartheta_*)\tilde{P}^0 C\eta$,<br>$\vartheta_* = P(\vartheta_0) = (\lvert\vartheta_0 - 1\rvert - \lvert\vartheta_0\rvert + 1) / 2 \in [0,\ 1],\ \vartheta_0 = (1 - \eta^{-1}) / 2$,<br>$\eta = \lvert\sigma\rvert^{1/2} = \lvert\alpha/\rho\rvert^{1/2},\ \alpha = r^2 - b^T(AA^T)^{-1}b \ge 0,\ \rho = C^T\tilde{P}^0 C > 0$ |

жителей. Требования к знакам следуют из свойства параметров нормали гиперплоскости, разделяющей множества функционалов и ограничений в доказательстве теоремы Куна – Таккера. Точные значения множителей Лагранжа в выпуклых задачах позволяют получить операторные решения, которые используются в управлении [4].

**Пример.** Рассмотрим задачу: вычислить

$$X_* = \arg\min\{\varphi(X) = (X - C)^T (X - C),$$
$$C = (1 \quad 2)^T,$$
$$AX = [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2 = b,$$
$$\left.\|X\|^2 = X^T X = [x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le 4 = r^2 \right\},$$

для вектора $C = [1 \quad 2]^T$.

Решение. На основе оператора (20), проектора (19) и параметра (18) решение имеет вид:

$$X_* = P_A b + (1 - 2\vartheta_*)\tilde{P}^0 C \eta_* =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1 - 2\vartheta_*) \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 2 =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0,5 \begin{bmatrix} -0,5 \\ +0,5 \end{bmatrix} \cdot 2 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix};$$
$$\vartheta_* = P(\vartheta_0) = (|\vartheta_0| - |\vartheta_0 - 1| + 1)/2, \ \vartheta_0 =$$
$$= (1 - \eta^{-1})/2, \ \eta = |\alpha/\rho|^{1/2},$$

где параметры и переменные задачи равны

$$\eta_* = +\left|\sqrt{\alpha/\rho}\right| =$$
$$= \left|\sqrt{[r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b] / C^T \tilde{P}^0 C}\right| =$$
$$= \left|\sqrt{2/0,5}\right| = +2,$$
$$r^2 = 2^2 = 4, \ r^2 - b^T (AA^T)^{-1} b =$$
$$= 4 - 2 \cdot (2)^{-1} \cdot 2 = 2;$$
$$C^T \tilde{P}^0 C = [1 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$
$$= [1 \quad 2] \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} = 0,5;$$
$$\vartheta_0 = (1 - \tau^{-1}) / 2 = (1 - 0,5) / 2 =$$
$$= 0,25; \eta = |\alpha/\rho|^{1/2};$$
$$\vartheta_* = P(\vartheta_0) = (|\vartheta_0| - |\vartheta_0 - 1| + 1) / 2 =$$
$$= 0,25 \in [0, 1], \ (1 - 2\vartheta_*) = 0,5.$$

Минимальное значение функционала равно

$$\varphi = \{X_3[P(\vartheta_*)] - C\}^T \{X_3[P(\vartheta_*)] - C\} =$$
$$= [0,5 - 1 \quad | \, 1,5 - 2] \cdot \begin{bmatrix} 0,5 - 1 \\ 1,5 - 2 \end{bmatrix} = 0,25.$$

Ограничения-неравенства выполнены, решение принадлежит линейному многообразию и шару, так как выполнено условие типа неравенств:

$$\|X_{3*}\|^2 = 2,5 \le 4 = r^2.$$

Таким образом, операторы минимизации нормы и допустимых решений отображают все пространство в элементы, которые минимизируют нормы, и в допустимые элементы.

### Устойчивость разностных нелинейных операторов систем локально оптимального управления

Условия асимптотической устойчивости разностных уравнений системы следуют из принципа сжимающих отображений. Приведенные далее достаточные условия асимптотической устойчивости обобщают условия, полученные в работах [1, 3, 4].

**Утверждение.** *Пусть выполнены следующие условия*:

1. Уравнения динамики замкнутой системы локально оптимального управления (ЛОУ), соответствующие счетной последовательности нелинейных разностных операторов, имеют вид

$$\begin{gathered} x_{k+1} = F_k(x_k, p) = H\Phi_x(x_k) + \\ + F_u \Phi_u \{\Gamma T [P_A c H \Phi_x(x_k) + \\ + \tilde{P}^0 C(|\alpha_k/\rho|^{1/2})]\} + F_\mu \mu; \\ x_{k_0} = x_0, y_k = c x_k, \end{gathered} \tag{22}$$

где матрица $H$ определяет устойчивый (сходящийся) матричный линейный ограниченный оператор объекта с нормой: $\|H\| < 1$, а линейная часть удовлетворяет ранговому критерию управляемости Калмана и критерию управляемости для системы с ограниченными управлениями.

2. Монотонные кусочно-линейные операторы

$$\Phi_x(x_k), \Phi_u(u_k) \in K_M(Z_1, Z_2)$$

объекта управления принадлежат подпространствам монотонных КЛО, имеют нулевые образы начала координат: $\Phi(0_n) = 0_n, \Phi(0_m) = 0_m$, ограничены в шаре $T$ радиуса $R$ с центром в начале координат так, что

$$\|\Phi(x_k)\| \le M\|x_k\|, \ \|\Phi(x_*)\| \le M\|x_*\|$$

и удовлетворяют в этом шаре условиям Липшица по векторам состояний $x_k$ и управлений $u_k$:

$$\|\Phi_x(x_k^1) - \Phi_x(x_k^2)\| \le L_x\|x_k^1 - x_k^2\|,$$

$$\|\Phi_u(u_k^1) - \Phi_u(u_k^2)\| \le L_u\Phi\|u_k^1 - u_k^2\|.$$

с постоянными $L_x$ и $L_u$.

3. Оператор (22) системы ЛОУ формирует управления на основе задач конечномерной минимизации:

$$\begin{gathered} u_{k,*} = Tz_{k,*} = T\arg\min\{\varphi(z_k) = \\ = \| z_k - C\|^2 \mid Az_k = b_k^i, A = [E_s|-cF_u], \\ b_k^1 = c\,H\,x_k,\ b_k^2 = cH\Phi_x(x_k), \qquad (23) \\ z^- = Z^- - Z_* \le z_k \le Z^+ - Z_* = z^+, \\ z_k = (s_{k+1} \mid u_k)^T\}. \end{gathered}$$

Задачи управления типа (23) разрешаются оператором оптимизации в третьей канонической форме для системы (2), поскольку

$$u_{k,*} = \Gamma T[P_A cH\Phi_x(x_k) + \tilde{P}^0 C(|\alpha_k/\rho|^{1/2})]. \quad (24)$$

Оператор управления как оператор конечномерной минимизации (ОКМ) типа (24) определен суммой линейного оператора и нелинейного аналитического оператора с компактной областью задания.

4. Ограниченная область задания нелинейной аналитической части оператора ЛОУ (24) соответствует условию совместности ограничений задач в (23), представленных счетным семейством неравенств, следующих из структуры ОКМ:

$$\alpha_k = r - (b_k^i)^T (AA^T)^{-1} b_k^i \ge 0,$$

$$b_k^1 = cHx_k, b_k^2 = cH\Phi(x_k).$$

5. Счетное семейство нелинейных разностных операторов

$$u_{k,*} = \Gamma T[P_{\bar{A}} cH\Phi(x_k) + \tilde{P}^0 C(|\alpha_k/\rho|^{1/2})] \quad (25)$$

типа оператора (22) с параметрами $p$ аппроксимировано счетной последовательностью линейных непрерывных операторов

$$x_{k+1} = \tilde{F}_k(x_k, p), \ x_{k_0} = x^0 \in T,$$

формируемых с помощью производных Фреше, вычисленных в точках $x_k$. При этом выполнены условия теоремы Банаха – Штейнхауса, т. е. нормы операторов $\tilde{F}_k(x_k, p)$ ограничены в совокупности:

$$\|\tilde{F}_k(x_k, p)\| < \infty, \ k = 1, 2, \dots .$$

Тогда достаточные условия асимптотической устойчивости системы (22) – (25) имеют вид

$$\begin{gathered} \|\Gamma\| < (1 - \alpha_1) / (\alpha_2 + \alpha_3), \\ \alpha_1 = \|H\| L_x, \\ \alpha_2 = \|F_u\| L_u \|T\| \|P_A\| \cdot \|c\| \cdot \|H\| L_x, \qquad (26) \\ \alpha_3 = \|\tilde{P}^0 C\| (\|c\| \cdot \|H\|)^2 \times \\ \times L_x M \|P_A^T P_A\| (\delta + \|C\|) / 2r\rho. \end{gathered}$$

При доказательстве использованы аппроксимация нелинейного оператора в (22) рядом Тейлора в окрестности нулевого решения, теорема Банаха – Штейнхауса, а также операторные нормы матриц [3].

Таким образом, представленные операторы минимизации могут использоваться для вычисления локально оптимальных управлений и исследования устойчивости замкнутых систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Козлов В.Н.** Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 150 с.

2. **Козлов В.Н.** Операторы минимизации линейных и негладких функционалов на пересечении линейного многообразия и шара // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, 2013. № 1(165). С. 164–170.

3. **Козлов В.Н.** Функциональный анализ (с приложениями в энергетике). СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2011. 450 с.

4. **Козлов В.Н.** Синтез управлений крупномасштабными объектами на основе операторов оптимизации // Шестая Всероссийская мультиконференция по проблемам управления. Материалы мультиконференции в 4 тт. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального ун-та, 2013. Т. 3. С. 195–197.

## REFERENCES

1. **Kozlov V.N.** Negladkie sistemy, operatory optimizatsii i ustoichivost'. St. Petersburg, Polytechnical University Publishing House, 2012, 150 p. (rus)

2. **Kozlov V.N.** Operatory minimizatsii lineinykh i negladkikh funktsionalov na peresechenii lineinogo mnogoobraziia i shara. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*, 2013, No. 1(165), pp. 164–170. (rus)

3. **Kozlov V.N.** Funktsional'nyi analiz (s prilozheniiami v energetike). St. Petersburg, Polytechnical University Publishing House, 2011, 450 p. (rus)

4. **Kozlov V.N.** Sintez upravlenii krupnomasshtabnymi ob"ektami na osnove operatorov optimizatsii. Shestaia Vserossiiskaia mul'tikonferentsiia po problemam upravleniia. Materialy mul'tikonferentsii: v 4 t. Rostov-na-Donu: Izd-vo Iuzhnogo federal'nogo un-ta, 2013, Vol. 3, pp. 195–197. (rus)

---

**КОЗЛОВ Владимир Николаевич** – *доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой системного анализа и управления Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
umo@spbstu.ru