УДК 303.733.33

О.И. Заяц

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУГАЧЁВА – СВЕШНИКОВА К ИССЛЕДОВАНИЮ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ЛИНЕЙНЫХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ

O.I. Zayats

St. Petersburg State Polytechnical University,
29 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

ANALYSIS OF PIECEWISE LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS IN HALF-SPACES BY MEANS OF THE PUGACHEV–SVESHNIKOV EQUATION

Предлагается аналитический метод получения распределения фазовых координат кусочно-линейных стохастических систем, линейных в полупространствах. Метод основан на решении уравнения Пугачёва – Свешникова для характеристической функции. Его решение сводится к решению параметрической краевой задачи Римана. В качестве примера решена задача Кренделла о вычислении вероятностных характеристик перемещения незакрепленного тела, помещенного на подвижное основание, совершающее случайные колебания. Рассматривается случай анизотропного вязкого трения. Исследуется асимптотика моментов перемещения.

НЕПРЕРЫВНЫЙ МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС, УРАВНЕНИЕ ПУГАЧЁВА –СВЕШНИКОВА, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА, СТОХАСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, ЗАДАЧА КРЕНДЕЛЛА, АНИЗОТРОПНОЕ ВЯЗКОЕ ТРЕНИЕ.

An analytic approach is presented to obtain a probability distribution function of the state-vector of piecewise linear systems which have two domains (half-spaces) of linearity. The approach is based on the use of the Pugachev – Sveshnikov equation for the characteristic function and its reduction to the parametric Riemann boundary value problem for half-planes. Crandall's problem for anisotropic viscosity friction is solved as an example of application of the derived theory. The displacement of a body, placed on a randomly oscillating foundation, is explored. And the asymptotical behaviour of the mathematical expectation of this body's displacement is obtained.

CONTINUOUS MARKOV PROCESS, PUGACHEV – SVESHNIKOV EQUATION, RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM, STOCHASTIC MECHANICS, CRANDALL'S PROBLEM, ANISOTROPIC VISCOUS FRICTION.

В реальных условиях динамические системы часто подвергаются воздействию нерегулярных, хаотически меняющихся, случайных возмущений. Стохастическими свойствами обладает, например, ряд типовых, широко распространенных механических воздействий естественного, природного происхождения: морское волнение, ветровая нагрузка, сейсмические воздействия, турбулентные пульсации атмосферы, микропрофиль автодорог. Случайные шумы и флуктуации появляются и во многих других прикладных задачах самого различного физического содержания.

Статистическое рассмотрение динамических систем вынуждает применять методы теории случайных функций. Ее математический аппарат хорошо разработан для линейных систем и включает такие классические разделы, как корреляционную и спектральную теорию, теорию выбросов, а также оптимальной фильтрации [1]. Между тем, реальные динамические системы, как правило, содержат те или иные нелинейности. Например, в механике характеристики упругих и диссипативных элементов (пружин и демпферов) можно считать линейными только в достаточно узком диапазоне входных воздействий. В экстремальных режимах эксплуатации (высокая загруженность, увеличение скоростей, передаваемой мощности и т. п.) гипотеза линейности нарушается.

Важным источником появления нелинейностей являются так называемые начальные несовершенства, которые возникают на этапе изготовления или сборки системы, причем даже в том случае, когда ее отдельно взятые элементы линейны. Примером могут служить предварительные натяжения или поджатия, зазоры, люфты, трещины, гистерезисность и подобные им явления.

Основной аналитический метод исследования статистической динамики нелинейных систем основан на применении теории марковских процессов [2 – 4]. Этот метод приводит к некоторой задаче математической физики для уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК), задающего закон распределения фазовых координат динамической системы.

Для сколько-нибудь сложных нелинейных динамических систем найти точное решение уравнения ФПК обычно не удается, а вычислительные трудности при компьютерном решении порой сравнимы с аналитическими [2]. На практике инженеры и исследователи часто вынуждены довольствоваться приближенными методами. Наиболее употребителен из них метод статистической линеаризации (МСЛ) [3], основанный на линейной аппроксимации всех имеющихся в системе нелинейностей. МСЛ часто дает качественно верный результат, однако строгие оценки его точности отсутствуют. Кроме того, встречаются задачи, в которых статистическая линеаризация приводит к аномально большой погрешности. Полной ясности в этом вопросе пока не достигнуто.

Начало применению уравнения ФПК к решению нелинейных стохастических задач было положено в середине прошлого века. Стимулом к этому послужило бурное развитие авиации, ракетной техники и космонавтики. Сразу же стало понятно, что построить точное аналитическое решение уравнения ФПК для нелинейных систем самого общего вида крайне затруднительно. Во-первых, не удавалось найти решение при произвольной форме нелинейностей (за исключением особых единичных случаев). Во-вторых, приходилось ограничиваться рассмотрением систем самой простой структуры, преимущественно младших порядков (не выше второго).

В связи с возникшими затруднениями появилась идея отказаться от рассмотрения наиболее общей формы нелинейностей и ограничиться таким более узким их классом, для которого уравнение ФПК стало бы аналитически разрешимым при произвольной структуре системы. Вместе с тем этот класс нелинейностей должен быть достаточно широким для удовлетворительной аппроксимации реальных нелинейностей с помощью функций, принадлежащих к данному классу. Такое упрощение задачи относится к вынужденным мерам и представляет определенный компромисс между общностью модели и возможностью ее детального аналитического изучения.

В 1950 – 1960-х гг. предпринимались попытки построения аналитического решения уравнения ФПК в классе кусочно-линейных систем. Этой задачей, в частности, активно занимался А.Н. Колмогоров и его ученики. По свидетельству Р.Л. Стратоновича [5], в многомерных кусочно-линейных стохастических задачах Колмогоров предложил переходить к уравнению для характеристической функции, причем высказал гипотезу, что это уравнение будет аналитически разрешимым. Стратонович пытался применить этот метод к решению ряда стационарных задач диффузии, однако довести вычисления до конца ему не удалось.

В конце 1950-х гг. Колмогоров вернулся к данной проблематике и поставил задачу построения решения уравнения ФПК для кусочно-линейных систем перед своей аспиранткой Э.М. Хазен. Она опубликовала цикл статей [6 – 8], в которых использовался метод, аналогичный описанному Стратоновичем [5]. Найти аналитическое решение ей также не удалось, но был разработан приближенный метод, основанный на численном решении некоторой системы многомерных интегральных уравнений.

Точным решением уравнения ФПК в классе кусочно-линейных систем много занимался Т. Кохи. Совместно со своим аспирантом Дж. Динзом он построил первое известное аналитическое решение подобного рода задач [9], которое относится к простейшей системе первого порядка, включающей релейную нелинейность sign x. Впоследствии тем же методом, основанным на применении преобразования Лапласа, была решена аналогичная задача для произвольной кусочно-линейной системы первого порядка [10]. Обобщение метода [9, 10] на системы более высокого порядка затруднительно, так как он существенно использует тот факт, что получаемые изображения по Лапласу определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Метод перехода от уравнения ФПК к уравнению для характеристической функции, который, как считал Колмогоров, способен дать даже аналитическое решение рассматриваемого класса задач, систематически разрабатывал В.С. Пугачёв. Еще в конце 1930-х гг. он получил общее уравнение для характеристической функции непрерывного марковского процесса, часто называемое уравнением Пугачёва, и пытался применять его в существенно нелинейных задачах, в том числе кусочно-линейных. Однако решить свое уравнение аналитически в классе кусочно-линейных систем Пугачёву не удалось [5]; более того, он высказал мнение, что такое решение вряд ли вообще возможно из-за сложного аналитического вида самого уравнения. Поэтому Пугачёв и его ученики сосредоточили свое внимание на разработке приближенных методов решения уравнения Пугачёва. Результаты обширных многолетних исследований в этом направлении подытожены в монографиях [11, 12].

Уравнением Пугачёва заинтересовался А.А. Свешников. Он внимательно изучил его особенности для случая, когда нелинейность системы относится к так называемому релейному типу. Функция $\varphi(x)$ называется нелинейностью релейного типа, если существует такое $a \geq 0$, что при $|x| > a$ эта функция совпадает с релейной нелинейностью sign x, а при $|x| \leq a$ может быть произвольной. Свешников показал, что для систем релейного типа уравнение Пугачёва принимает вид сингулярного интегро-дифференциального уравнения и применил эту форму уравнения для его приближенного решения.

Автору настоящей статьи удалось показать, что уравнение Пугачёва – Свешникова в определенном классе систем, включающих нелинейности вида sign x, допускает не только приближенное, но и точное аналитическое решение [13]. Впоследствии этот результат был распространен и на некоторые системы, включающие нелинейности вида $|x|$ [14, 15]. В настоящей статье доказывается, что разработанная ранее теория сохраняет свою силу и для произвольных кусочно-линейных систем, линейных в двух полупространствах, дополняющих друг друга до полного пространства.

Постановка задачи для уравнения Пугачёва – Свешникова

Рассмотрим динамическую систему произвольного порядка n, фазовое пространство которой разделено заданной гиперплоскостью Г на два полупространства, в каждом из которых уравнения движения линейны. Без ущерба для общности будем считать, что особая гиперплоскость Г совпадает с одной из координатных гиперплоскостей, например той, на которой первая фазовая координата обращается в нуль. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$\frac{d}{dx}\overline{U}=\vec{\varphi}(t,\overline{U})+\Psi(t,\overline{U})\vec{\xi}, \qquad (1)$$

$$\overline{U}(0)=\overline{U}_0, \qquad (2)$$

где $\overline{U}$ – фазовый вектор, $\overline{U}_0$ – его начальное значение, $\vec{\xi}$ – стандартный (центрированный с единичной интенсивностью) гауссовский белый шум.

Вектор-функция $\vec{\varphi}$ является кусочно-линейной:

$$\vec{\varphi}(\tau,\vec{y})=\begin{cases}-C^{+}(\tau)\vec{y}+\vec{d}^{+}(\tau), y_1>0;\\ -C^{-}(\tau)\vec{y}+\vec{d}^{-}(\tau), y_1<0,\end{cases} \qquad (3)$$

а матрица интенсивностей шумов Ψ – кусочно-постоянной:

$$\Psi(\tau,\vec{y})=\sqrt{2}\begin{cases}H^{+}(\tau), y_1>0;\\ H^{-}(\tau), y_1<0.\end{cases} \qquad (4)$$

Здесь $C^{\pm}$, $H^{\pm}$ – произвольные матрицы, $\vec{d}^{\pm}$ – произвольные векторы (допускается их зависимость от времени).

На особой гиперповерхности $y_1=0$ функции $\vec{\varphi}$ и Ψ доопределяются полусуммой своих предельных значений при $y_1\to\pm0$.

В частном случае, когда

$$C^{+}=C^{-}=C, \vec{d}^{+}=\vec{d}^{-}=\vec{d}, H^{+}=H^{-}=H, \qquad (5)$$

уравнения движения (1) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\overline{U}+C\overline{U}+\vec{d}\ \mathrm{sign}\ U_1=\sqrt{2}H\vec{\xi}, \qquad (6)$$

а описываемая ими динамическая система представляет собой частный случай релейных систем, разобранный в работе [13]. В настоящей статье мы откажемся от ограничений (5) и будем считать уравнения линейных подсистем совершенно произвольными.

Введем индикаторные функции числовых полуосей:

$$\chi^{\pm}(y)=\frac{1}{2}(1\pm\mathrm{sign}\ y). \qquad (7)$$

С их помощью выражения (3) и (4) перепишем следующим образом:

$$\vec{\varphi}=-(C^{+}\vec{y}+\vec{d}^{+})\chi^{+}(y_1)+(C^{-}\vec{y}+\vec{d}^{-})\chi^{-}(y_1), \qquad (8)$$

$$\Psi=\sqrt{2}(H^{+}\chi^{+}(y_1)+H^{-}\chi^{-}(y_1)). \qquad (9)$$

Подстановка этих выражений в уравнения движения (1) после несложных алгебраических преобразований дает равенство

$$\frac{d}{dt}\overline{U}+(C_0\overline{U}+\vec{d}_0)+(C_1\overline{U}+\vec{d}_1)\,\mathrm{sign}\ U_1= =\sqrt{2}(H_0+H_1\,\mathrm{sign}\ U_1)\vec{\xi}, \qquad (10)$$

где введены следующие обозначения:

$$C_0=\frac{C^{+}+C^{-}}{2}, C_1=\frac{C^{+}-C^{-}}{2};$$
$$\vec{d}_0=\frac{\vec{d}^{+}+\vec{d}^{-}}{2}, \vec{d}_1=\frac{\vec{d}^{+}-\vec{d}^{-}}{2}; \qquad (11)$$
$$H_0=\frac{H^{+}+H^{-}}{2}, H_1=\frac{H^{+}-H^{-}}{2}.$$

Стохастическое дифференциальное уравнение (10) задает непрерывный марковский процесс. Согласно общей теории [16], его вектор сноса $\vec{\boldsymbol{a}}$ и матрица диффузии $\mathbf{B}$ находятся по формулам

$$\vec{\boldsymbol{a}}(\tau,\vec{y})=-(C_0\vec{y}+\vec{d}_0)-(C_1\vec{y}+\vec{d}_1)\ \mathrm{sign}\ y_1; \qquad (12)$$

$$\mathbf{B}(\tau,\vec{y})=B_0+B_1\ \mathrm{sign}\ y_1, \qquad (13)$$

$$B_0=H^{+}H^{+T}+H^{-}H^{-T},$$
$$B_1=H^{+}H^{+T}-H^{-}H^{-T}, \qquad (14)$$

причем символ T означает транспонирование матрицы.

Если исследуемая кусочно-линейная система не сводится к линейной, т. е. уравнения линейных подсистем не совпадают, то на поверхности переключения $y_1=0$ компоненты вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ и элементы матрицы $\mathbf{B}$ будут иметь разрывы. Из-за этого уравнение ФПК, в которое входят эти негладкие коэффициенты, теряет силу при $y_1=0$ и должно быть дополнено соответствующими условиями сопряжения [16]. В результате приходится одновременно решать две задачи для полупространств $y_1>0$ и $y_1<0$, связанные друг с другом через условия сопряжения. Решить такую задачу аналитически чрезвычайно сложно.

Вместо уравнения ФПК гораздо удобнее использовать уравнение Пугачёва. Оно задает характеристическую функцию процесса

$$E(\vec{z};\tau)=M[e^{i\vec{z}^T\overline{U}(\tau)}]=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\vec{z}^T\vec{y}}f(\vec{y};\tau)dV_y, \qquad (15)$$

где $f(\vec{y};\tau)$ – плотность вероятности, определяемая уравнением ФПК; $dV_y = dy_1 \cdot \ldots \cdot dy_n$ – элемент объема n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$..

В исходной форме, предложенной самим Пугачёвым [11, 12], его уравнение выглядело так:

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\vec{z}^T\vec{y}}\, \Phi(\vec{z} \mid \vec{y}, \tau) f(\vec{y}; \tau) dV_y, \quad (16)$$

где Φ обозначает функцию Пугачёва и имеет вид

$$\Phi(\vec{z} \mid \vec{y}, \tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau} M[e^{i\vec{z}^T \Delta\vec{U}} - 1 \mid \vec{U}(\tau) = \vec{y}]. \quad (17)$$

Последняя, как показал Пугачёв, выражается в виде суммы линейной и квадратичной форм относительно компонент вектора $\vec{z}$:

$$\Phi(\vec{z} \mid \vec{y}, \tau) = i\vec{z}^T \vec{\boldsymbol{a}}(\tau, \vec{y}) - \frac{1}{2} \vec{z}^T \mathbf{B}(\tau, \vec{y}) \vec{z}, \quad (18)$$

причем коэффициенты линейной формы являются компонентами вектора сноса $\vec{\boldsymbol{a}}$, а квадратичной – элементами матрицы диффузии $\mathbf{B}$.

При подстановке выражений (12) и (13) в (18), после интегрирования по формуле (16), в правой части формулы (16) появляются интегралы четырех типов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\vec{z}^T\vec{y}}\, f(\vec{y}; \tau) dV_y, \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\vec{z}^T\vec{y}}\, \mathrm{sign}\ y_1\ f(\vec{y}; \tau) dV_y, \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\vec{z}^T\vec{y}} y_j\ f(\vec{y}; \tau) dV_y, \\ I_4 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\vec{z}^T\vec{y}}\, y_j\ \mathrm{sign}\ y_1\ f(\vec{y}; \tau) dV_y. \end{aligned} \quad (19)$$

Интеграл I_1 непосредственно совпадает с характеристической функцией (15), интегралы I_3, I_4 выражаются через производные по z_j от I_1 и I_2, соответственно. Интеграл же I_2 преобразуется по методу А.А. Свешникова, обратившего внимание на связь I_2 и сингулярного интеграла с ядром Коши:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\vec{z}^T\vec{y}}\ i\ \mathrm{sign}\ y_1\ f(\vec{y}; \tau) dV_y = \\ &= \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E(\vec{z}; \tau)\big|_{z_1 = s}}{s - z_1} ds, \end{aligned} \quad (20)$$

где $v.p.$ обозначает символ главного значения интеграла по Коши. Более подробное обоснование формулы (20) можно найти в [13].

Отметим, что правая часть равенства (20), а именно

$$\widehat{E}(\vec{z}; \tau) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E(\vec{z}; \tau)\big|_{z_1 = s}}{s - z_1} ds, \quad (21)$$

носит название интегрального преобразования Гильберта от функции E по аргументу z_1 [17].

Опуская несложные, но громоздкие алгебраические преобразования, приходим к следующему результирующему уравнению:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial \tau} + (\vec{z}^T C_0\ \mathrm{grad}\ E + (i\vec{z}^T \vec{d}_0 + \vec{z}^T B_0 \vec{z}) E) - \\ &- i(\vec{z}^T C_1\ \mathrm{grad}\ \widehat{E} + (i\vec{z}^T \vec{d}_1 + \vec{z}^T B_1 \vec{z}) \widehat{E}) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где grad E обозначает вектор градиента E по аргументам $z_1, \ldots, z_n$.

Уравнение (22) носит название уравнения Пугачёва – Свешникова (далее в тексте – уравнение ПС). Ранее оно рассматривалось в работе [13] при дополнительных предположениях (5), отвечающих случаю релейной системы. В частном случае выполнения условий (5), согласно формулам (11) и (14), получаем $C_1 = 0$ и $B_1 = 0$, так что в уравнении отсутствовал grad $\widehat{E}$, а коэффициент при $\widehat{E}$ являлся линейной, а не квадратичной функцией компонент вектора $\vec{z}$. Как будет показано далее, это отличие не влияет сколько-нибудь существенно на метод решения уравнения (22), который совершенно аналогичен использованному в работе [13]. В заключение данного раздела заметим, что уравнение (22) должно решаться при начальном условии

$$E\big|_{\tau=0} = E_0(\vec{z}), \quad (23)$$

где E_0 обозначает характеристическую функцию $\vec{U}_0$.

Метод решения уравнения Пугачёва – Свешникова

Метод решения уравнения ПС для кусочно-линейных систем в своих главных и основных чертах повторяет таковой для случая нелинейности вида sign x, подробно изложенный в работе [13]; данный метод затем нашел применение в целом ряде прикладных исследований (см., например, работы [14, 15]). Поэтому остановимся далее лишь на основных моментах, а внимание сконцентрируем на тех изменениях, которые появляются из-за обобщения формы нелинейностей. Суть предлагаемого метода заключается в сведении поставленной задачи к краевой задаче Римана теории функции комплексного переменного. Этот прием хорошо известен и подробно описан в литературе [17].

Введем интеграл типа Коши:

$$F(\zeta;\vec{z}',\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E(\vec{z};\tau)}{z_1-\zeta}dz_1(\mathrm{Im}\ \zeta\neq 0), \quad (24)$$

где вектор $\vec{z}'=(z_2,\dots,z_n)^T$ включает все компоненты вектора $\vec{z}$, начиная со второй, а ζ – комплексная переменная.

Предельные значения F при $\zeta\to z_1\pm 0i$ обозначим, соответственно, через $F^+(z_1;\vec{z}',\tau)$ и $F^-(z_1;\vec{z}',\tau)$. Они удовлетворяют формулам Ю.В. Сохоцкого [17]:

$$\begin{gathered}F^+(z_1;\vec{z}',\tau)-F^+(z_1;\vec{z}',\tau)=E(\vec{z};\tau),\\ F^+(z_1;\vec{z}',\tau)+F^-(z_1;\vec{z}',\tau)=-i\widehat{E}(\vec{z};\tau),\end{gathered} \quad (25)$$

где $\widehat{E}$ – преобразование Гильберта (21).

Выражая в уравнении ПС (22) неизвестное E и его преобразование Гильберта $\widehat{E}$ по формулам Сохоцкого, после перегруппировки слагаемых получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F^+}{\partial\tau}+\vec{z}^T(C_0+C_1)\ \mathrm{grad}\ F^+ +\\ +(i\vec{z}^T(\vec{d}_0+\vec{d}_1)+\vec{z}^T(B_0+B_1)\vec{z})F^+ =\\ =\frac{\partial F^-}{\partial\tau}+\vec{z}^T(C_0-C_1)\ \mathrm{grad}\ F^- +\\ +(i\vec{z}^T(\vec{d}_0-\vec{d}_1)+\vec{z}^T(B_0-B_1)\vec{z})F^-,\end{gathered} \quad (26)$$

или, учитывая выражения (11) и (14),

$$\begin{gathered}\frac{\partial F^+}{\partial\tau}+\vec{z}^TC^+\ \mathrm{grad}\ F^+ +\\ +(i\vec{z}^T\vec{d}^+ +\vec{z}^TH^+H^{+T}\vec{z})F^+ =\\ =\frac{\partial F^-}{\partial\tau}+\vec{z}^TC^-\ \mathrm{grad}\ F^- +\\ +(i\vec{z}^T\vec{d}^- +\vec{z}^TH^-H^{-T}\vec{z})F^-.\end{gathered} \quad (27)$$

Функция F^+ аналитична в верхней, а F^- – в нижней полуплоскости комплексного переменного z_1, причем на границе этих полуплоскостей при $-\infty<z_1<+\infty$ выполняются условия (27). Полученная краевая задача относится к классу задач Римана и отличается от типовых задач Римана [17] только наличием параметров $\vec{z}',\tau$ и присутствием в краевом условии (27) производных по этим параметрам.

При кажущейся сложности уравнения ПС (22), представляющего собой сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, структура краевого условия (27) очень проста и наглядна: вторые слагаемые в обеих частях являются билинейными формами с матрицей $C^{\pm}$ относительно компонент $\vec{z}$ и grad $F^{\pm}$, а третьи слагаемые – суммой линейной формы (скалярного произведения $\vec{z}$ на $\vec{d}^{\pm}$) и квадратичной формы с матрицей $H^{\pm}H^{\pm T}$. При этом в каждую часть краевого условия входят только коэффициенты соответствующей подсистемы. Краевая задача (27) сразу же легко записывается непосредственно по уравнениям движения.

Порядок интеграла типа Коши (24) относительно ζ при $\zeta\to\infty$ есть не выше минус первого. Поэтому применяя аналогично [13] обобщенную теорему Лиувилля [17], приходим к основному уравнению:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F^{\pm}}{\partial\tau}+\vec{z}^TC^{\pm}\ \mathrm{grad}\ F^{\pm}+(i\vec{z}^T\vec{d}^{\pm}+\\ +\vec{z}^TH^{\pm}H^{\pm T}\vec{z})F^{\pm}=G_0(\vec{z}',\tau)+z_1G_1(\vec{z}',\tau),\end{gathered} \quad (28)$$

где G_0, G_1 – неизвестные функции, подлежащие определению.

Уравнение (28) фактически задает два уравнения (для F^+ и F^-). В коэффициентах берется индекс, совпадающий с индексом при F.

Правая часть уравнений (28) представляет линейную функцию от z_1. Коэффициенты этой линейной зависимости выбираются так, чтобы F^+ была аналитична в верхней, а F^- – в нижней полуплоскости. Отметим, что функции G_0, G_1 – целые относительно компонент $\vec{z}'$ [13].

Основное уравнение (28) нужно дополнить начальными условиями

$$F^{\pm}|_{\tau=0}=F_0^{\pm}(\vec{z}), \quad (29)$$

где $F_0^{\pm}$ выражается либо через характеристическую функцию начального вектора по формулам Сохоцкого

$$F_0^{\pm}(\bar{z}) = \pm\frac{1}{2}E_0(\bar{z}) + \\ +\frac{1}{\pi i}v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{E_0(\bar{z};\tau)\,|_{z_1=s}}{s-z_1}ds, \tag{30}$$

либо через его плотность вероятности $f_0(\bar{y})$:

$$F_0^{\pm}(\bar{z}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\bar{z}^T\bar{y}}\frac{\operatorname{sign}\ y_1 \pm 1}{2}f_0(\bar{y})dV_y. \tag{31}$$

Решение уравнения ПС (22) осуществляется в три этапа: определение неизвестных функций G_0 и G_1; решение основного уравнения (28); вычисление характеристической функции по первой формуле Сохоцкого.

Из этих трех этапов решения нестандартным является только первый. Он заключается в решении некоторой обратной задачи для уравнения (28). Нужно так подобрать правую часть этого уравнения, чтобы его решение обладало заданными свойствами аналитичности. Для случая кусочно-линейных систем решение этой задачи принципиально не отличается от случая, разобранного в [13]. В настоящее время известны несколько типов таких задач, допускающих аналитическое решение.

Допустим, что $C^{\pm}$, $H^{\pm}$ и $\vec{d}^{\pm}$ не зависят от времени. В работе [13] изучены три типа систем, допускающих аналитическое нахождение G_0 и G_1. Системы нулевого типа характеризуются нулевой матрицей C, то есть уравнения движения не содержат членов, линейных относительно фазовых координат, а нелинейности являются кусочно-постоянными.

Для систем первого типа все ненулевые элементы C находятся в первом столбце, а уравнения движения содержат только члены, пропорциональные U_1, и кусочно-постоянные нелинейности.

Второй тип означает, что все ненулевые элементы C сосредоточены в произвольном k-м столбце, причем $k \neq 1$. Ясно, что здесь в уравнения движения входит только фазовая координата U_k, а все остальные слагаемые кусочно-постоянны. Системы, не сводящиеся ни к одному из перечисленных трех типов, относят к общему типу. Здесь матрица C содержит ненулевые элементы в двух и более столбцах.

В работе [13] изучались системы, для которых $C^{+} = C^{-}$, то есть обе линейные подсистемы относились к одному типу. Для общих кусочно-линейных систем каждая подсистема может иметь свой тип, который будет определять конкретный вид уравнений, задающих функции G_0 и G_1.

Пусть $C^{\pm}$, $H^{\pm}$ и $\vec{d}^{\pm}$ постоянны. Тогда удобно воспользоваться преобразованием Лапласа по τ. Обозначим аргумент преобразования через p, а изображение – той же буквой, что и оригиналы, но с волной сверху. Можно показать, что все эти преобразования существуют, по крайней мере, при $\operatorname{Re} p > 0$.

Для систем нулевого типа непосредственно из основного уравнения (28) находим изображения $\tilde{F}^{+}$ и $\tilde{F}^{-}$, каждое из которых имеет по одному полюсу в обеих полуплоскостях. Приравнивая к нулю вычеты в полюсах, «запрещенных» условиями аналитичности $\tilde{F}^{\pm}$, получаем систему двух линейных уравнений для определения изображений $\tilde{G}_0$ и $\tilde{G}_1$ искомых функций.

В случае первого типа $\tilde{F}^{+}$ и $\tilde{F}^{-}$ удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям первого порядка. Их решение аналитично в любой конечной части плоскости, но обе эти функции будут иметь особенности в бесконечно удаленной точке. Требуя, чтобы $\tilde{F}^{+}$ и $\tilde{F}^{-}$ были аналитичны по z_1 в соответствующих расширенных полуплоскостях, вновь получаем линейную систему для определения изображений $\tilde{G}_0$ и $\tilde{G}_1$.

Второй тип систем отличается более сложным методом определения G_j. Здесь оказывается, что $\tilde{F}^{+}$ и $\tilde{F}^{-}$ мероморфны по z_1 и имеют бесконечное множество простых полюсов. Приравнивая к нулю вычеты $\tilde{F}^{\pm}$ в «запрещенных» полюсах, приходим к некоторой интерполяционной задаче относительно аргументов $\bar{z}'$ для функций G_0 и G_1, являющихся, как отмечалось выше, целыми функциями этих аргументов. Пример решения такой задачи можно найти в работе [13].

Что касается систем общего типа, то для них основное уравнение (28) приводит уже не к обыкновенному дифференциальному уравнению (как при первом и втором типах системы), а к уравнению в частных производных первого порядка. Задача подбора правой части этого уравнения из условий аналитичности его решения в настоящее время изучена мало. Имеются лишь отдельные частные примеры, когда ее удается решить в замкнутом виде.

Выше шла речь о решении нестационарного уравнения ПС (22). Если в системе существует установившийся режим, то финальная характеристическая функция $E_\infty(\bar{z})$, отвечающая $\tau \to +\infty$, должна удовлетворять стационарному уравнению ПС, которое отличается от (22) отсутствием производной по τ. Это уравнение следует решать при условии нормировки $E_\infty(\vec{0}) = 1$. Метод решения стационарного уравнения аналогичен описанному выше. Основное уравнение здесь отличается от (28) только отсутствием производной по τ и отсутствием зависимости решения от этого аргумента.

Далее рассмотрим конкретный пример исследования кусочно-линейной стохастической системы с помощью решения уравнения ПС.

Задача Кренделла для случая анизотропного вязкого трения

Рассмотрим в качестве примера нелинейную стохастическую задачу механики твердого тела, поставленную С. Кренделлом и подробно описанную нами в статье [15]. Имеется плоское горизонтальное основание; сверху на него помещено тело, способное скользить с трением вдоль основания. Сила трения зависит от скорости тела относительно основания, причем нелинейная характеристика силы трения задается. Основание приходит в движение, совершая продольные колебания по известному случайному закону. Требуется найти закон распределения относительного перемещения тела или хотя бы его моменты.

Сам С. Кренделл приближенно решил сформулированную задачу с помощью МСЛ для случая сухого трения, когда ускорение основания является процессом белого шума. В работах [15, 14] построено точное решение уравнения ПС для случаев соответственно сухого и комбинированного трения. Найдем теперь аналогичное решение для анизотропного вязкого трения, когда сила сопротивления пропорциональна скорости, но коэффициент пропорциональности скачкообразно меняется при изменении направления движения.

Такая характеристика сил сопротивления реализуется, например, если тело закреплено на основании с помощью амортизатора, обладающего технологическим дефектом (неуравновешенностью, играющей роль начального несовершенства системы).

Уравнения относительного движения тела по отношению к основанию таковы:

$$\dot{V} = -\frac{\alpha}{m} V\varphi(V) + h\xi,\ U = V, \qquad (32)$$

где $V(t)$, $U(t)$ обозначают, соответственно, скорость и перемещение тела вдоль основания в момент t; $\xi(t)$ – стандартный гауссовский белый шум; α – коэффициент вязкого трения, m – масса тела, h – интенсивность качания основания.

Кусочно-постоянная функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1-\varepsilon, x > 0, \\ 1, \quad x \le 0 \end{cases} \qquad (33)$$

задает ослабление сопротивления амортизатора при его прямом ходе по сравнению с обратным. Безразмерный параметр $0 < \varepsilon < 1$ определяет относительное уменьшение силы сопротивления. Значение $\varepsilon = 0$ отвечает идеально симметричному, полностью уравновешенному демпферу, а $\varepsilon = 1$ – одностороннему демпферу, не сопротивляющемуся выдвижению штока вперед.

В безразмерных переменных

$$U_1 = \frac{\sqrt{2}}{h}\left(\frac{\alpha}{m}\right)^{1/2} V,$$
$$U_2 = \frac{\sqrt{2}}{h}\left(\frac{\alpha}{m}\right)^{3/2} U,\ \tau = \frac{\alpha}{m} t \qquad (34)$$

исходная система уравнений преобразуется к виду

$$\dot{U}_1 = -U_1\varphi(U_1) + \sqrt{2}\xi,\ \dot{U}_2 = U_1. \qquad (35)$$

Далее введем векторный процесс

$$\overline{U}(\tau) = (U_1(\tau), U_2(\tau))^T$$

и поставим однородные начальные условия:

$$\overline{U}(0) = \vec{0}. \qquad (36)$$

Система (35) имеет порядок $n = 2$ и линейна в полуплоскостях $U_1 > 0$ и $U_1 < 0$. Для нее $\vec{d}^+ = \vec{d}^- = \vec{0}, \overline{U}_0 = \vec{0}$, а матрицы линейной части и интенсивностей даются равенствами

$$C^+ = \begin{pmatrix} -(1+\varepsilon) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$H^+ = H^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (37)$$

Уравнение ПС (22) и начальное условие к нему (23) здесь выглядят так:

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} + z_1^2 E + \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) z_1 - z_2\right] \frac{\partial E}{\partial z_1} -$$
$$-\frac{\varepsilon z_1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E(\vec{z};\tau)\,|_{z_1 = s}}{s - z_1} ds = 0, \qquad (38)$$

$$E\,|_{\tau=0} = 1. \qquad (39)$$

Применяя описанный выше метод решения уравнения (38), введем интеграл типа Коши (24). Его краевые значения при $\tau > 0$ удовлетворяют основному уравнению:

$$\frac{\partial F^\pm}{\partial \tau} + z_1^2 F^\pm + \left[\left(1 - \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\varepsilon\right) z_1 - z_2\right] \frac{\partial F^\pm}{\partial z_1} =$$
$$= G_0(z_2;\tau) + z_1 G_1(z_2;\tau), \qquad (40)$$

а при $\tau = 0$ – начальному условию

$$F^\pm\,|_{\tau=0} = \pm\frac{1}{2}. \qquad (41)$$

По классификации [13] система (35) относится к первому типу. Метод нахождения неизвестных функций G_0 и G_1 из условий аналитичности $F^\pm$ для систем такого типа детально изложен в работе [14] и основан на применении преобразования Лапласа по τ. Обозначим аргумент преобразования через p, а сами изображения – той же буквой, что и оригиналы, но с волной сверху. Умножая обе части уравнения (40) на $e^{-p\tau}$ и интегрируя по всем $\tau > 0$, получим основное уравнение в изображениях:

$$\left[\left(1 - \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\varepsilon\right) z_1 - z_2\right] \frac{\partial \tilde{F}^\pm}{\partial z_1} + (z_1^2 + p)\tilde{F}^\pm =$$
$$= \tilde{G}_0(z_2;p) + z_1\tilde{G}_1(z_2;p) \pm \frac{1}{2}. \qquad (42)$$

Все фигурирующие в нем изображения существуют при $\mathrm{Re}\, p > 0$ и являются целыми функциями z_2, причем свойства аналитичности $\tilde{F}^\pm$ по z_1 – такие же, как у $F^\pm$.

Упростим задачу, довольствуясь только получением моментов перемещения U_2, а не его закона распределения. В такой ситуации можно ограничиться получением лишь конечного числа коэффициентов разложения неизвестных $\tilde{G}_j$ в ряд по степеням z_2:

$$\tilde{G}_j(z_2;p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{G}_{j,k}(p) z_2^k}{k!}, \ (j = 0,1). \qquad (43)$$

Положим

$$\tilde{F}^\pm(z_1; z_2, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{F}_k^\pm(z_1;p) z_2^k}{k!} \qquad (44)$$

и подставим разложения (43) и (44) в уравнение (42). Приравнивая коэффициенты при равных степенях z_2 слева и справа, приходим к бесконечной системе уравнений:

$$\left[1 - \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\varepsilon\right] z_1 \frac{\partial \tilde{F}_k^\pm}{\partial z_1} + (z_1^2 + p)\tilde{F}_k^\pm =$$
$$= \tilde{G}_{0,k} + z_1\tilde{G}_{1,k} \pm \frac{1}{2}\delta_{k,0} + k\frac{\partial \tilde{F}_{k-1}^\pm}{\partial z_1}, \qquad (45)$$

где $k \ge 0$; $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера; $\tilde{F}_k^\pm = 0$ при $k < 0$ по определению; неизвестные $\tilde{G}_{0,k}$, $\tilde{G}_{1,k}$ определяются условиями аналитичности $\tilde{F}_k^\pm$ по аргументу z_1.

Введем начальные моменты перемещения U_2:

$$m_k(\tau) = M[U_2^k(\tau)] \ (k \ge 1) \qquad (46)$$

и их изображения по Лапласу $\tilde{m}_k(p)$. Ясно, что последние выражаются через изображение искомой характеристической функции путем дифференцирования:

$$\tilde{m}_k(p) = \frac{1}{i^k} \frac{\partial \tilde{E}(\vec{z};p)}{\partial z^k}\Big|_{\vec{z}=0} \ (k \ge 1). \qquad (47)$$

Переходя в формулах Сохоцкого (25) к

изображениям по Лапласу и подставляя в первую из них степенное разложение (44), находим, согласно выражению (47):

$$\tilde{m}_k(p) = \frac{1}{i^k}\left[\tilde{F}_k^+(0;p) - \tilde{F}_k^-(0;p)\right] \; (k \ge 1). \quad (48)$$

Метод вычисления моментов, опирающийся на основное уравнение для коэффициентов степенных разложений, был подробно описан ранее в работах [14, 15] применительно к системам, содержащим нелинейность sign x. Он сохраняет силу и для произвольных кусочно-линейных систем, линейных в полупространствах, в том числе и для системы (32). Суть этого метода состоит в том, чтобы выразить искомые моменты через неизвестные $\tilde{G}_{j,k}$, появляющиеся в правой части основных уравнений (45).

Вначале получим это выражение для изображения математического ожидания $\tilde{m}_1(p)$. Полагая в системе уравнений (45) $k = 1$ и $z_1 = 0$, имеем:

$$\tilde{F}_1^{\pm}(0;p) = \frac{1}{p}\left[\tilde{G}_{0,1}(p) + \frac{\partial \tilde{F}_0^{\pm}(0;p)}{\partial z_1}\right], \quad (49)$$

что с учетом формулы (47) дает выражение

$$\tilde{m}_1(p) = \frac{1}{ip}\left[\frac{\partial \tilde{F}_0^+(0;p)}{\partial z_1} - \frac{\partial \tilde{F}_0^-(0;p)}{\partial z_1}\right]. \quad (50)$$

Исключим из последнего равенства производные от $\tilde{F}_0^{\pm}$. Для этого запишем формулу (45) при $k = 0$, продифференцируем обе его части по z_1, а затем положим $z_1 = 0$. После очевидных алгебраических преобразований приходим к выражению

$$\frac{\partial \tilde{F}_0^{\pm}(0;p)}{\partial z_1} = \frac{\tilde{G}_{1,0}}{p + 1 - (1/2 \pm 1/2)\varepsilon}, \quad (51)$$

подстановка которого в формулу (48) позволяет получить выражение

$$\tilde{m}_1(p) = -\frac{i\varepsilon}{p(p+1)(p+1-\varepsilon)}\tilde{G}_{1,0}(p). \quad (52)$$

Несколько сложнее находится $\tilde{m}_2(p)$. Совершенно аналогично равенству (49) из второго уравнения системы (45) выводим формулу

$$\tilde{F}_2^{\pm}(0;p) = \frac{1}{p}\left[\tilde{G}_{0,2}(p) + 2\frac{\partial \tilde{F}^{\pm}(0;p)}{\partial z_1}\right], \quad (53)$$

поэтому

$$\tilde{m}_2(p) = -\frac{2}{p}\left[\frac{\partial \tilde{F}_1^+(0;p)}{\partial z_1} - \frac{\partial \tilde{F}_1^-(0;p)}{\partial z_1}\right]. \quad (54)$$

Фигурирующие в последнем равенстве производные находим, полагая в формуле (45) $k = 1$, дифференцируя обе части по z_1, приравнивая z_1 к нулю и разрешая полученное равенство относительно нужных нам производных:

$$\frac{\partial \tilde{F}_1^{\pm}(0;p)}{\partial z_1} = \frac{1}{p + 1 - (1/2 \pm 1/2)\varepsilon} \times \left[\tilde{G}_{1,1}(p) + \frac{\partial^2 \tilde{F}_0^{\pm}(0;p)}{\partial z_1^2}\right]. \quad (55)$$

Подставляя их в равенство (55), получаем промежуточное выражение $\tilde{m}_2$ через вторые производные $\tilde{F}_0^{\pm}$:

$$\tilde{m}_2 = -\frac{2}{p}\left[\frac{\varepsilon}{(p+1)(p+1-\varepsilon)}\tilde{G}_{1,1}(p) + \frac{1}{p+1-\varepsilon}\frac{\partial^2 \tilde{F}_0^+(0;p)}{\partial z_1^2} - \frac{1}{p+1}\frac{\partial^2 \tilde{F}_0^-(0;p)}{\partial z_1^2}\right]. \quad (56)$$

Исключим из последнего выражения $\tilde{F}_0^{\pm}$. Для этого продифференцируем обе части формулы (45) при $k = 0$ по z_1 два раза и положим $z_1 = 0$. После этого аналогично (55) получаем:

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}_0^{\pm}(0;p)}{\partial z_1^2} = -\frac{2}{p + 2(1 - (1/2 \pm 1/2)\varepsilon)}\tilde{F}_0^{\pm}(0;p). \quad (57)$$

Осталось найти значение $\tilde{F}_0^{\pm}$ в нуле. Это можно сделать непосредственно, положив $k = 0$ и $z_1 = 0$ в формуле (45); в результате этого имеем:

$$\tilde{F}_0^{\pm}(0;p) = \frac{1}{p}\left[\tilde{G}_{0,0}(p) \pm \frac{1}{2}\right], \quad (58)$$

и окончательно

$$\tilde{m}_2(p) = \frac{2}{p(p+1)(p+1-\varepsilon)} \times \left[\frac{2\varepsilon(3p+4-2\varepsilon)\tilde{G}_{0,0}(p)}{p(p+2)(p+2-2\varepsilon)} - \varepsilon\tilde{G}_{1,1}(p) + \frac{2(p+1)(p+2) - \varepsilon(3p+4-2\varepsilon)}{p(p+2)(p+2-2\varepsilon)}\right]. \quad (59)$$

Входящие в выражения (52) и (59) неизвестные коэффициенты $\tilde{G}_{0,0}$ и $\tilde{G}_{1,0}$ находятся из условия аналитичности $\tilde{F}_0^{\pm}$, а коэффициент $\tilde{G}_{1,1}$ – из условия аналитичности $\tilde{F}_1^{\pm}$.

Вначале вычислим первые два из перечисленных выше неизвестных коэффициентов. Полагая в уравнениях (45) $k = 0$, имеем:

$$\left[1-\left(\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\right)\varepsilon\right] z_1 \frac{\partial \tilde{F}_0^{\pm}}{\partial z_1} + (z_1^2 + p)\tilde{F}_0^{\pm} = \tilde{G}_{0,0} + z_1 \tilde{G}_{1,0} \pm \frac{1}{2}. \tag{60}$$

Общее решение этих уравнений можно записать в виде

$$\tilde{F}_0^{\pm}(z_1; p) = e^{-\frac{\kappa^{\pm} z_1^2}{2}} z_1^{-p^{\pm}} \left\{ C^{\pm}(p) + \kappa^{\pm} \int_0^{z_1} e^{\frac{\kappa^{\pm} s^2}{2}} s^{p^{\pm}-1} \times \left[\tilde{G}_{0,0}(p) + s\,\tilde{G}_{1,0}(p) \pm \frac{1}{2} \right] ds \right\}, \tag{61}$$

где $C^{\pm}(p)$ – постоянные интегрирования, не зависящие от z_1, а $\kappa^{\pm}$ и $p^{\pm}$ задаются равенствами

$$\kappa^{\pm} = \frac{1}{1-(1/2 \pm 1/2)\varepsilon}, \quad p^{\pm} = \frac{p}{1-(1/2 \pm 1/2)\varepsilon}. \tag{62}$$

Учитывая, что $\operatorname{Re} p > 0$, из условия ограниченности $\tilde{F}_0^{\pm}$ при $z_1 \to 0$ находим $C^{\pm} = 0$, а тогда решение (60) будет представляться интегралом Дюамеля вида

$$\tilde{F}_0^{\pm}(z_1; p) = \kappa^{\pm} e^{-\frac{\kappa^{\pm} z_1^2}{2}} z_1^{-p^{\pm}} \int_0^{z_1} e^{\frac{\kappa^{\pm} s^2}{2}} s^{p^{\pm}-1} \times \left[\tilde{G}_{0,0}(p) + s\,\tilde{G}_{1,0}(p) \pm \frac{1}{2} \right] ds. \tag{63}$$

Его аналитичность по z_1 можно исследовать с помощью специальной леммы, доказанной в работе [13], из которой следует, что обе функции $\tilde{F}_0^{+}$ и $\tilde{F}_0^{-}$ аналитичны в любой конечной части плоскости.

Вместе с тем обе функции $\tilde{F}_0^{\pm}$, как это имеет место для всех систем первого типа, к которому принадлежит система (32), вообще говоря, не являются аналитическими в бесконечно удаленной точке, а имеют в ней существенную особенность. Повторяя рассуждения работы [14], потребуем для устранения указанных особенностей обращения в нуль следующих двух интегралов:

$$\int_0^{\pm i\infty} e^{\frac{\kappa^{\pm} s^2}{2}} s^{p^{\pm}-1} \left[\tilde{G}_{0,0}(p) + s\,\tilde{G}_{1,0}(p) \pm \frac{1}{2} \right] ds = 0. \tag{64}$$

В интегралах (64) удобно проделать замену переменной интегрирования $t = \mp i\sqrt{\kappa^{\pm}}\, s$, после которой они преобразуются к единообразному виду

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{p^{\pm}-1} \left[\tilde{G}_{0,0} \pm \frac{it}{\sqrt{\kappa^{\pm}} G_{1,0}} \pm \frac{1}{2} \right] dt = 0. \tag{65}$$

Фигурирующие в равенстве (65) интегралы легко выражаются через гамма-функцию. Опуская очевидные преобразования, приходим к следующей системе линейных уравнений относительно неизвестных $\tilde{G}_{0,0}$ и $\tilde{G}_{1,0}$:

$$\begin{aligned} &\Gamma\left(\frac{p^+}{2}\right)\tilde{G}_{0,0} + i\sqrt{\frac{2}{\kappa^+}}\,\Gamma\left(\frac{p^+ +1}{2}\right) \times \tilde{G}_{1,0} + \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p^+}{2}\right) = 0; \\ &\Gamma\left(\frac{p^-}{2}\right)\tilde{G}_{0,0} - i\sqrt{\frac{2}{\kappa^-}}\,\Gamma\left(\frac{p^- +1}{2}\right) \times \tilde{G}_{1,0} - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p^-}{2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{66}$$

Решая эту систему, находим:

$$\begin{aligned} &\tilde{G}_{0,0}(p) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,\Lambda_1 - \Lambda_2}{2\left[\sqrt{1-\varepsilon}\,\Lambda_1 + \Lambda_2\right]}; \\ &\tilde{G}_{1,0}(p) = \frac{i\Gamma\left(\frac{p^+}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p^-}{2}\right)}{\sqrt{2}\left[\sqrt{1-\varepsilon}\,\Lambda_1 + \Lambda_2\right]}; \\ &\Lambda_1 = \Gamma\left(\frac{p^+ +1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p^-}{2}\right); \\ &\Lambda_2 = \Gamma\left(\frac{p^- +1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p^+}{2}\right). \end{aligned} \tag{67}$$

Осталось определить $\tilde{G}_{1,1}$. Для этого обратившись вновь к уравнениям (45) и положив $k = 1$, получаем:

$$[1-(1/2\pm 1/2)\varepsilon]z_1\frac{\partial\tilde{F}_1^{\pm}}{\partial z_1}+(z_1^2+p)\tilde{F}_1^{\pm}=$$
$$=\tilde{G}_{0,1}+z_1\tilde{G}_{1,1}+\frac{\partial\tilde{F}_0^{\pm}}{\partial z_1}. \tag{68}$$

Уравнения для $\tilde{F}_1^{\pm}$ совершенно аналогичны уравнениям (60) для $\tilde{F}_0^{\pm}$, поэтому, повторяя приведенные ранее рассуждения, выводим следующее интегральное представление:

$$\tilde{F}_1^{\pm}(z_1;p)=\kappa^{\pm}e^{-\frac{\kappa^{\pm}z_1^2}{2}}z_1^{-p^{\pm}}\int_0^{z_1}e^{\frac{\kappa^{\pm}s^2}{2}}s^{p^{\pm}-1}\times$$
$$\times\left(\tilde{G}_{0,1}(p)+s\,\tilde{G}_{1,1}(p)+\frac{\partial\tilde{F}_0^{\pm}(s;p)}{\partial s}\right)ds. \tag{69}$$

По своим свойствам аналитичности функции (69) ничем не отличаются от функций (63). Требование аналитичности $\tilde{F}_1^{\pm}$ в бесконечно удаленной точке приводит к уравнениям, аналогичным (64):

$$\int_0^{\pm i\infty}e^{\frac{\kappa^{\pm}s^2}{2}}s^{p^{\pm}-1}(\tilde{G}_{0,1}(p)+$$
$$+s\,\tilde{G}_{1,1}(p)\pm\frac{\partial\tilde{F}_0^{\pm}(s;p)}{\partial s})\,ds=0. \tag{70}$$

Первые два слагаемых в подынтегральном выражении здесь в точности повторяют аналогичные члены (64), так что $\tilde{G}_{0,1}$ и $\tilde{G}_{1,1}$ войдут в уравнение с теми же коэффициентами, с которыми $\tilde{G}_{0,0}$ и $\tilde{G}_{1,0}$ входят в систему уравнений (66). Особого рассмотрения требует лишь интеграл

$$I^{\pm}=\int_0^{\pm i\infty}e^{\frac{\kappa^{\pm}s^2}{2}}s^{p^{\pm}-1}\frac{\partial\tilde{F}_0^{\pm}(s;p)}{\partial s}\,ds. \tag{71}$$

Сходные по виду интегралы приходилось вычислять и в статье [14], но интегралы $I^{\pm}$ от них несколько отличаются; кроме того, в указанной статье были опущены выкладки. Поэтому на вычислении этих интегралов следует остановиться подробнее.

Преобразуя систему линейных уравнений (70), так же, как была преобразована система (63), получим новую систему линейных уравнений относительно $\tilde{G}_{j,1}$, отличающуюся от системы (66) только свободными членами:

$$\Gamma\left(\frac{p^{\pm}}{2}\right)\tilde{G}_{0,1}\pm i\sqrt{\frac{2}{\kappa^{\pm}}}\Gamma\left(\frac{p^{\pm}+1}{2}\right)\tilde{G}_{1,1}+$$
$$+\,2\left(\mp i\sqrt{\frac{\kappa^{\pm}}{2}}\right)^{p^{\pm}}I^{\pm}=0. \tag{72}$$

Решая систему (72), находим искомое выражение для $\tilde{G}_{1,1}$, которое запишем в виде, аналогичном виду выражений (67):

$$\tilde{G}_{1,1}(p)=\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{1-\varepsilon\Lambda_1+\Lambda_2}}\times$$
$$\times\left[\Gamma\left(\frac{p^-}{2}\right)\left(-i\sqrt{\frac{\kappa^+}{2}}\right)^{p^+}I^+-\right.$$
$$\left.-\Gamma\left(\frac{p^+}{2}\right)\left(i\sqrt{\frac{\kappa^-}{2}}\right)^{p^-}I^-\right], \tag{73}$$
$$\Lambda_1=\Gamma\left(\frac{p^++1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p^-}{2}\right),$$
$$\Lambda_2=\Gamma\left(\frac{p^-+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p^+}{2}\right).$$

Согласно равенствам (63) функции $\tilde{F}_0^{\pm}$ линейным образом выражаются через коэффициенты $\tilde{G}_{0,0}$ и $\tilde{G}_{1,0}$, полученные ранее. Ясно, что интегралы (71) также будут являться некоторой линейной комбинацией величин $\tilde{G}_{0,0}$ и $\tilde{G}_{1,0}$. Получить эти коэффициенты непосредственной подстановкой (63) в (71) не удается, так как не при всех $\operatorname{Re} p>0$ можно пользоваться формулой интегрирования по частям. Предварительно следует преобразовать интегралы (71) с помощью приема, описанного ранее в работе [14].

Введем разность

$$\Delta\tilde{F}_0^{\pm}(z_1;p)=\tilde{F}_0^{\pm}(z_1;p)-\tilde{F}_0^{\pm}(0;p). \tag{74}$$

Основываясь на уравнении (60), получаем для $\Delta\tilde{F}_0^{\pm}$ линейное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\Delta\tilde{F}_0^{\pm}+\left(\kappa^{\pm}z_1+\frac{p^{\pm}}{z_1}\right)\Delta\tilde{F}_0^{\pm}=$$
$$=\kappa^{\pm}(\tilde{G}_{1,0}-z_1\tilde{F}_0^{\pm}(0;p)), \tag{75}$$

причем $\Delta\tilde{F}_0^{\pm}\big|_{z_1=0}=0$, что следует из определения (74).

Решая уравнение (75) при указанном однородном начальном условии, находим:

$$\Delta\tilde{F}_0^{\pm}(z_1;p) = \kappa^{\pm} e^{-\frac{\kappa^{\pm} z_1^2}{2}} z_1^{-p^{\pm}} \times \\ \times \int_0^{z_1} e^{\frac{\kappa^{\pm} s^2}{2}} s^{p^{\pm}} \left[\tilde{G}_{1,0} - \frac{s}{p}\left(\tilde{G}_{0,0} \pm \frac{1}{2}\right)\right] ds. \quad (76)$$

Выразим производную $\tilde{F}_0^{\pm}$ по z_1 с помощью уравнения (60), причем воспользовавшись равенством (58), заменим $\tilde{G}_{0,0} \pm 1/2$ на $p\tilde{F}_0^{\pm}(0;p)$. В результате получим, что

$$\frac{\partial \tilde{F}_0^{\pm}}{\partial z_1} = -\kappa^{\pm} z_1 \tilde{F}_0^{\pm} - \frac{p^{\pm}}{z_1}\Delta\tilde{F}_0^{\pm} + \kappa^{\pm}\tilde{G}_{1,0}. \quad (77)$$

Подставляя это выражение производной в определение (71) интегралов $I^{\pm}$, находим:

$$I^{\pm} = \int_0^{\pm i\infty} e^{\frac{\kappa^{\pm} s^2}{2}} s^{p^{\pm}-1} \left[-\kappa^{\pm} s \tilde{F}_0^{\pm}(s;p) - \right. \\ \left. - \frac{p^{\pm}}{s}\Delta\tilde{F}_0^{\pm}(s;p) + \kappa^{\pm}\tilde{G}_{1,0}\right] ds. \quad (78)$$

Подынтегральная функция (78) содержит три слагаемых. Интеграл от третьего из них уже вычислялся, а интегралы от $\tilde{F}_0^{\pm}$ и $\Delta F_0^{\pm}$ можно найти интегрированием по частям, если выразить $\tilde{F}_0^{\pm}$ и $\Delta F_0^{\pm}$, соответственно, с помощью формул (63) и (76). Имеем следующие равенства:

$$\int_0^{\pm i\infty} e^{\frac{\kappa^{\pm} s^2}{2}} s^{p^{\pm}} \tilde{F}_0^{\pm}(s;p) ds = \\ = -\kappa^{\pm} \int_0^{\pm i\infty} e^{\frac{\kappa^{\pm} s^2}{2}} s^{p^{\pm}} \left(\tilde{G}_{0,0} + s\tilde{G}_{1,0} \pm \frac{1}{2}\right) ds, \quad (79)$$

$$\int_0^{\pm i\infty} e^{\frac{\kappa^{\pm} s^2}{2}} s^{p^{\pm}-2} \Delta\tilde{F}_0^{\pm}(s;p) ds = \\ = \kappa^{\pm} \int_0^{\pm i\infty} e^{\frac{\kappa^{\pm} s^2}{2}} s^{p^{\pm}-1} \left[\tilde{G}_{1,0} - \frac{s}{p}\left(\tilde{G}_{0,0} \pm \frac{1}{2}\right)\right] ds, \quad (80)$$

причем внеинтегральные члены, получающиеся в результате интегрирования по частям, в обоих случаях обращаются в нуль.

После ряда алгебраических преобразований выражение (78) приводится к виду

$$I^{\pm} = \kappa^{\pm} \left(\pm i\sqrt{\frac{2}{\kappa^{\pm}}}\right)^{p^{\pm}} \left[\left(\pm i\sqrt{\frac{2}{\kappa^{\pm}}}\right)\Gamma\left(\frac{p^{\pm}+1}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\tilde{G}_{0,0} \pm \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\kappa^{\pm}}{2} - p^{\pm}\right)\Gamma\left(\frac{p^{\pm}}{2}\right)\tilde{G}_{1,0}\right]. \quad (81)$$

Подставляя найденные значения $I^{\pm}$ в равенство (73), получаем явное выражение $\tilde{G}_{1,1}$ через ранее вычисленные коэффициенты $\tilde{G}_{0,0}$ и $\tilde{G}_{1,0}$, после чего по формулам (52) и (59) определяем изображения моментов перемещения незакрепленного тела.

Результирующие изображения моментов являются достаточно громоздкими, а их обращение представляет собой самостоятельную и притом весьма трудоемкую задачу. В данной статье ограничимся получением асимптотики моментов при $\tau \to \infty$. Эта задача представляет несомненный практический интерес, так как в реальных приложениях безразмерное время τ, определяемое формулой (34), может достигать, как это имело место, например, в оригинальной постановке Кренделла (см. статью [15]), сотен и даже тысячи единиц.

Опуская промежуточные выкладки, приведем асимптотику изображений моментов при $p \to 0$:

$$\tilde{m}_1(p) = \frac{1}{p^2}(m_{1\infty} + O(p)); \\ \tilde{m}_2(p) = \frac{2}{p^3}(m_{2\infty} + O(p)), \quad (82)$$

где

$$m_{1\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}(\sqrt{1-\varepsilon}+1)}; \\ m_{2\infty} = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon^2(2-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2(\sqrt{1-\varepsilon}+1)^2}. \quad (83)$$

Следовательно, при больших значениях τ

$$m_1(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon\tau(1+O(\tau^{-1}))}{\sqrt{1-\varepsilon}(\sqrt{1-\varepsilon}+1)}; \\ m_2(\tau) = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon^2(2-\varepsilon)\tau^2(1+O(\tau^{-1}))}{(1-\varepsilon)^2(\sqrt{1-\varepsilon}+1)^2}. \quad (84)$$

Таким образом, за счет анизотропии сил сопротивления наблюдается систематический уход тела в сторону более слабого сопротивления амортизатора, причем асимптотически средняя скорость ухода постоянна и определяется степенью неуравновешенности амортизатора. Дисперсия и коэффициент вариации перемещения при больших τ даются равенствами

$$D(U_2(\tau)) = \frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon^2\tau^2(1+O(\tau^{-1}))}{(1-\varepsilon)^2(\sqrt{1-\varepsilon}+1)^2};$$
$$\gamma(\tau) = \frac{\sqrt{D(U_2(\tau))}}{m_1(\tau)} = \frac{1+O(\tau^{-1})}{\sqrt{1-\varepsilon}}. \qquad (85)$$

В заключение следует отметить, что разобранный пример представляет самостоятельный интерес для нелинейной статистической динамики. Вместе с тем, описанный в статье метод позволяет существенно расширить класс нелинейностей, допускающих применения аппарата уравнения Пугачёва – Свешникова. Ранее этот класс ограничивался лишь простейшими типовыми нелинейностями вида sign x и $|x|$.

Автор считает своим долгом поблагодарить аспиранта СПбГПУ С.В. Берёзина за внимательное изучение текста статьи и полезное обсуждение ее содержания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Свешников А.А.** Прикладные методы теории случайных функций. 3-е, стереотип. изд. СПб.: Лань, 2011. 464 с.

2. **Тертычный-Даури В.Ю.** Стохастическая механика. М.: Факториал Пресс, 2001. 462 с.

3. **Маланин В.В., Полосков И.Е.** Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 296 с.

4. **Маланин В.В., Полосков И.Е.** Случайные процессы в нелинейных динамических системах. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 160 с.

5. **Пугачёв В.С., Стратонович Р.Л.** Выступления в дискуссии по докладу Дж. Ф. Баррета // Труды I Международного конгресса ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 3. С. 103–105.

6. **Хазен Э.М.** Определение одномерной плотности распределения и моментов существенно нелинейной системы // Теория вероятностей и ее применения. 1961. Т. 6. № 1. С. 130–137.

7. **Хазен Э.М.** Определение плотности распределения вероятностей для случайных процессов в системах с нелинейностями кусочно-линейного типа // Известия АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика. 1961. № 3. С. 58–72.

8. **Хазен Э.М.** Определение плотности распределения вероятностей для случайных процессов в системах с нелинейностями кусочно-линейного типа // Теория вероятностей и ее применения. 1961. Т. 6. № 1. С. 234–241.

9. **Caughey T.K., Dienes J.K.** Analysis of non-linear first order system with a white noise input // Journal of Applied Physics. 1961. Vol. 32. No. 11. P. 2476–2479.

10. **Atkinson J.D., Caughey T.K.** Spectral density of piecewise linear first order systems excited by white noise // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1968. Vol. 3. No. 2. P. 137–156.

11. **Пугачёв В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука,1990. 642 с.

12. **Пугачёв В.С., Синицын И.Н.** Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004. 1000 с.

13. **Заяц О.И.** Статистическая динамика систем релейного типа и уравнение Пугачёва – Свешникова // Известия вузов. Приборостроение. 1992. № 1-2. С. 8–16.

14. **Заяц О.И., Ильин И.Ю.** Об одной нелинейной стохастической задаче механики твердого тела // Труды СПбГТУ. Прикладная математика. 1999. № 477. С. 72–74.

15. **Заяц О.И.** Решение задачи Кренделла о фрикционном торможении // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2007. № 1. С. 244–252.

16. **Свешников А.А.** Прикладные методы теории марковских процессов. СПб: Лань, 2007. 192 с.

17. **Титчмарш Э.** Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Эдиториал УРСС, 2005. 480 с.

REFERENCES

1. **Sveshnikov A.A.** Prikladnye metody teorii sluchainykh funktsii. 3-e stereotip. izd. St. Petersburg, Lan', 2011. 464 p. (rus)

2. **Tertychnyi-Dauri V.Yu.** Stokhasticheskaia mekhanika. Moscow, Faktorial Press, 2001. 462 p. (rus)

3. **Malanin V.V., Poloskov I.E.** Metody i praktika analiza sluchainykh protsessov v dinamicheskikh sistemakh. Moscow, Izhevsk, NITs «Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika», 2005. 296 p. (rus)

4. **Malanin V.V., Poloskov I.E.** Sluchainye protsessy v nelineinykh dinamicheskikh sistemakh.

Moscow, Izhevsk: NITs «Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika», 2001. 160 p. (rus)

5. **Pugachev V.S., Stratonovich R.L.** Vystupleniia v diskussii po dokladu Dzh. F. Barreta//Trudy I Mezhdunarodnogo kongressa IFAK. T. 3. Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1961, pp. 103–105. (rus)

6. **Khazen E.M.** Opredelenie odnomernoi plotnosti raspredeleniia i momentov sushchestvenno nelineinoi sistemy. Teoriia veroiatnostei i ee primeneniia, 1961, T. 6, No. 1, pp. 130–137. (rus)

7. **Khazen E.M.** Opredelenie plotnosti raspredeleniia veroiatnostei dlia sluchainykh protsessov v sistemakh s nelineinostiami kusochno-lineinogo tipa. Izvestiia AN SSSR. OTN. Energetika i avtomatika. 1961, No. 3, pp. 58–72. (rus)

8. **Khazen E.M.** Opredelenie plotnosti raspredeleniia veroiatnostei dlia sluchainykh protsessov v sistemakh s nelineinostiami kusochno-lineinogo tipa. Teoriia veroiatnostei i ee primeneniia, 1961, T. 6, No. 1, pp. 234–241. (rus)

9. **Caughey T.K., Dienes J.K.** Analysis of non-linear first order system with a white noise input. Journal of Applied Physics. 1961, Vol. 32, No. 11, pp. 2476–2479.

10. **Atkinson J.D., Caughey T.K.** Spectral density of piecewise linear first order systems excited by white noise. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1968, Vol. 3, No. 2, pp. 137–156.

11. **Pugachev V.S., Sinitsyn I.N.** Stokhasticheskie differentsial'nye sistemy. Analiz i fil'tratsiia. Moscow, Nauka,1990, 642 p. (rus)

12. **Pugachev V.S., Sinitsyn I.N.** Teoriia stokhasticheskikh sistem. Moscow, Logos, 2004, 1000 p. (rus)

13. **Zaiats O.I.** Statisticheskaia dinamika sistem releinogo tipa i uravnenie Pugacheva – Sveshnikova. Izvestiia vuzov. Priborostroenie, 1992, No. 1-2, pp. 8–16. (rus)

14. **Zaiats O.I., Il'in I.Yu.** Ob odnoi nelineinoi stokhasticheskoi zadache mekhaniki tverdogo tela. Trudy SPbGTU. Prikladnaia matematika, 1999, No. 477, pp. 72–74. (rus)

15. **Zaiats O.I.** Reshenie zadachi Krendella o friktsionnom tormozhenii. St. Petersburg Polytechnical University Journal, 2007, No. 1, pp. 244–252. (rus)

16. **Sveshnikov A.A.** Prikladnye metody teorii markovskikh protsessov. St. Petersburg, Lan', 2007, 192 p. (rus)

17. **Titchmarsh E.** Vvedenie v teoriiu integralov Fur'e. Moscow, Editorial URSS, 2005, 480 p. (rus)

ЗАЯЦ Олег Иванович – *кандидат физико-математических наук, доцент Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

zay.oleg@gmail.com