

УДК 530.145

А.Л. Санин, Е.А. Семёнов

**КВАНТОВЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ
С ПОТЕНЦИАЛОМ СВЯЗИ ПАЛЛЕНА – ЭДМОНДСА**

A.L. Sanin, E.A. Semyonov

St. Petersburg State Polytechnical University,
29 Politekhnikeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

**QUANTUM TWO-DIMENSIONAL OSCILLATORS
WITH PALLEN – EDMONDS COUPLING POTENTIAL**

Проведено численное интегрирование нестационарного двумерного уравнения Шрёдингера. В рамках анализа квантовых волновых пакетов, динамических средних, частотных спектров, произведений неопределенностей и автокорреляторов изучены динамические закономерности в системе двух квантовых осцилляторов с потенциалом связи Паллена – Эдмондса. В режиме слабой связи генерируются многочастотные колебания, число спектральных компонент возрастает с увеличением параметра связи.

СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ, ПОТЕНЦИАЛ ПАЛЛЕНА – ЭДМОНДСА, ЧАСТОТНЫЙ ОТКЛИК, ДВУМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА.

The numerical integration of the non-stationary two-dimensional Schrodinger equation was carried out. In the context of quantum wave-packets, dynamical means, frequency spectra, uncertainty relations, autocorrelators there were studied the dynamical properties for two quantum oscillators coupled by the Pallen – Edmonds potential. In the regime of the weak coupling the many-frequency oscillations are generated, the spectral component number is increased at amplification of coupling.

COUPLED OSCILLATORS, PALLEN – EDMONDS POTENTIAL, FREQUENCY RESPONSE, TWO-DIMENSIONAL SCHRODINGER EQUATION.

Квантовые осцилляторы с двумя степенями свободы и связью между ними являются предметом многих исследований. В настоящее время достаточно хорошо изучены квантовые гармонические осцилляторы с потенциалом связи Паллена – Эдмондса [1]. Указанный потенциал представляет собой произведение квадратов координат с постоянным множителем, который характеризует величину взаимодействия осцилляторов и называется параметром связи. В зависимости от величины коэффициента

возможны различные режимы колебаний, которые могут быть обусловлены поведением классического аналога такого осциллятора. В этом случае говорят о квантово-классическом соответствии.

Еще больший интерес для развития теории квантовых информационных процессов представляют исследования связанных ангармонических осцилляторов. Поэтому изучение динамических закономерностей в таких системах является насущной задачей. Простым примером ангармонических

осцилляторов может служить осциллятор с единственным потенциальным слагаемым, пропорциональным четвертой степени координаты. В классическом пределе ему соответствует нелинейный одномерный осциллятор. В этом случае решения для одномерного ангармонического осциллятора описываются эллиптическими функциями, а частота нелинейных колебаний является функцией от энергии системы, а именно — пропорциональна корню четвертой степени от ее величины.

Энергетический спектр квантового одномерного осциллятора с потенциалом четвертой степени обсуждается в ряде работ: например, в статье [2] он является неэквидистантным и характеризуется парами близлежащих уровней с малыми зазорами между ними. Как и для квантового гармонического осциллятора, рассматриваемая система является неограниченной по координате. В этой же статье вводится дополнительное квадратичное слагаемое и обсуждаются изменения в спектре энергий теперь уже двухъямного осциллятора.

Более ранние исследования осцилляторов с двумя степенями свободы и потенциалами четвертой степени, включая потенциал Паллена — Эдмондса, были выполнены в классическом, полуклассическом и квантовом описаниях. Отметим некоторые из работ, в частности [3, 4]. Здесь особое внимание обращается на динамику квантовых систем, классический аналог которых находится в хаотическом состоянии. В последние годы в этом направлении выполнены работы [5 — 8]. В одной из них исследуются два квантовых ангармонических осциллятора с потенциалами четвертой степени, коэффициенты при которой равны трем и единице, а параметр потенциала связи Паллена — Эдмондса варьируется в определенном диапазоне [8]. Для классического аналога данной системы изучен динамический хаос и его возможное влияние на генерацию квантового хаоса в соответствующей квантовой системе. Этой проблеме уделяется достаточно много внимания.

Вместе с тем существует другая, не менее важная, проблема квантовых связанных осцилляторов с широкополосным спек-

тром, классические аналоги которых характеризуются регулярным поведением, то есть без динамического хаоса. Этой проблеме посвящена данная статья. В ней обсуждается влияние параметра связи в потенциале Паллена — Эдмондса на эволюцию частотных спектров, а также показано, что с увеличением параметра связи возрастает число спектральных компонент, происходит смещение спектра в сторону более высоких частот и перераспределение энергии по спектру. Настоящее исследование представляет не только общетеоретический интерес, но и может быть использовано для описания мезоскопических систем и других квантовых объектов. Данная статья продолжает серию наших предыдущих работ [9 — 14] и составляет часть в изучении более сложных и конкретных моделей.

Основные уравнения и допущения

Уравнение Шрёдингера в безразмерной форме имеет вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi + U_{\Sigma} \psi; \quad (1)$$

оно определяет временную эволюцию волновой функции

$$\psi = \psi(x, y, t),$$

где x, y, t — координаты и время, соответственно.

Уравнение (1) является инвариантным относительно выбора единиц измерения: может быть выбрана боровская длина, но с учетом эффективной массы электрона. Проведенное исследование рассматривается как модель, позволяющая исследовать общие квантовые волновые закономерности, которые могут наблюдаться в разных квантовых системах. Полный потенциал U_{Σ} определяется как сумма

$$U_{\Sigma} = U(x, y) + U_c(x, y), \quad (2)$$

где для слагаемых потенциалов вводятся выражения

$$\begin{aligned} U(x, y) &= a_x x^4 + a_y y^4, \\ U_c(x, y) &= \gamma x^2 y^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты a_x, a_y и параметр γ являются варьируемыми. Ниже мы обсудим

задачу для $a_x = a_y$; потенциал Паллена – Эдмондса U_c будет рассматриваться при малых значениях параметра γ . Исследуемая квантовая система находится между стенками бесконечной потенциальной ямы и является пространственно-ограниченной. Координаты стенок ямы $\pm x_\alpha, \pm y_\alpha$, причем $x_\alpha = y_\alpha$. Потенциалы U, U_c в этих точках конечны. Влияние стенок на колебания зависит от размеров системы x_α, y_α и энергии квантового волнового пакета в начальный момент времени. Данными параметрами в ходе вычислительных экспериментов можно управлять. В целом мы имеем модель плоской ячейки. Если $U_c = 0$, то динамическая система может рассматриваться как состоящая из двух независимых осцилляторов. Если $U_c \neq 0$, то система становится связанной.

Граничные условия на внешних стенках квантовой системы и начальная волновая функция определяются как

$$\begin{aligned} \psi(\pm x_\alpha, \pm y_\alpha, t) &= 0, \\ \psi(x, y, t = 0) &= \psi_0(x, y). \end{aligned} \quad (4)$$

Начальное условие задается гауссовым волновым пакетом:

$$\psi_0(x, y) = C \exp \left[-\alpha_x (x - x_0)^2 - \alpha_y (y - y_0)^2 \right], \quad (5)$$

где x_0, y_0 – средние значения координат пакета в начальный момент времени. Постоянная C определяется из условия нормировки.

Динамические свойства квантовых волновых пакетов изучались при помощи вычислений средних значений координат $\langle x \rangle, \langle y \rangle$, средних скоростей $\langle V_x \rangle, \langle V_y \rangle$, а также нормальных отклонений $\langle \Delta x \rangle, \langle \Delta y \rangle, \langle \Delta V_x \rangle, \langle \Delta V_y \rangle$. Все эти величины определяются по стандартным формулам квантовой механики. Произведения $g_x = \Delta x \Delta V_x, g_y = \Delta y \Delta V_y$ удовлетворяют соотношениям неопределенностей:

$$g_x \geq \frac{1}{2}, \quad g_y \geq \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Знак равенства описывает минимизированное значение произведения неопределенностей. Отклонение от этого значения соответствует росту квантовых флуктуаций.

Временные реализации $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ будут обсуждаться в рамках Фурье-преобразований. Соответствующие амплитуды Фурье были обозначены как $F_{(x)}(\Omega), F_{(y)}(\Omega)$, а величина Ω есть частота. В качестве дополнительного средства в изучении волнопакетной динамики использовался автокоррелятор, вычисленный по формуле

$$R = \left| \int_{-x_\alpha}^{x_\alpha} dx \int_{-y_\alpha}^{y_\alpha} dy \psi^*(x, y, t) \psi_0(x, y) \right|^2. \quad (7)$$

Численное интегрирование уравнения Шрёдингера (1) было проведено в замкнутой области

$$\begin{aligned} \bar{R} = \{ (x, y, t) : -7 \leq x \leq 7, \\ -7 \leq y \leq 7, 0 \leq t \leq 1500 \}. \end{aligned}$$

В некоторых вариантах расчета длина временного промежутка $T > 1500$, и таким образом минимальная наблюдаемая частота $\Omega_{\min} = 2\pi / T$ становилась меньше и увеличивалось разрешение по частотам Ω в спектре.

Временная эволюция и частотный отклик при малой связи

В отличие от систем, изученных в статьях [3, 5], мы рассматриваем квантовую систему с одинаковыми параметрами $a_x = a_y = 0,002$ и малым параметром связи $\gamma \in [0; 0,05]$.

Начальный гауссов пакет характеризуется параметрами $\alpha_x = \alpha_y = 0,5$, а величины отклонений x_0, y_0 удовлетворяют равенству $x_0 = y_0 = 0,5$. При этом значения отклонения много меньше полуширины ямы, ко-

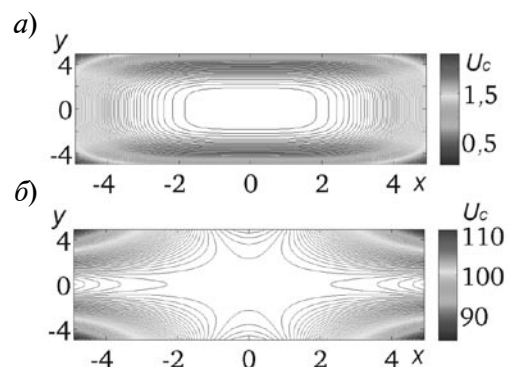


Рис. 1. Карты линий равного потенциала Паллена – Эдмондса при разных значениях параметра связи γ : 0 (а) и 0,05 (б)

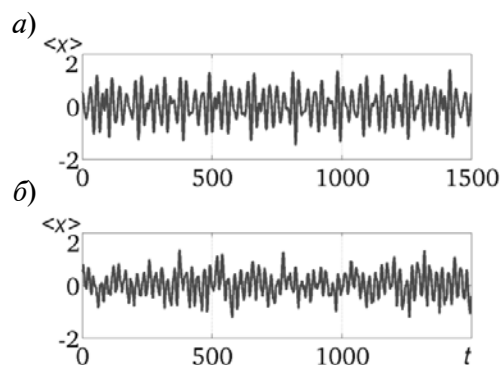


Рис. 2. Временные реализации величины $\langle x \rangle$ при разных значениях параметра связи γ : 0 (а) и 0,05 (б)

торая равна 7. Карты изолиний потенциала при разных значениях γ даны на рис. 1. При $\gamma = 0$ линии равного потенциала имеют простой рельеф. Расчеты режимов колебаний проводились при $\gamma = 0, 0,001, 0,005$ и $0,05$. При малом изменении величины γ рельеф деформируется слабо, но уже при $\gamma = 0,05$ отличия от рельефа при $\gamma = 0$ становятся визуально заметными.

Соответствующие этим картам временные реализации $\langle x \rangle$ даны на рис. 2. Аналогичные решения имеют место для зависимости $\langle y \rangle$ от времени, эволюционные картины $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$ совпадают. Различие во временной эволюции волнового пакета при $\gamma = 0$ и $0,05$ удобно обсуждать на основании изменений, происходящих с величинами g_x и частотными спектрами.

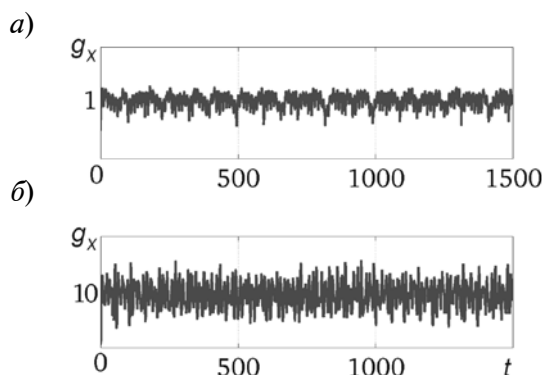


Рис. 3. Влияние параметра связи на произведение неопределенностей g_x : $\gamma = 0$ (а) и 0,05 (б)

В связи с тем, что все расчеты при заданных параметрах приводят к одинаковым результатам для обеих степеней свободы: $g_x = g_y$, $F_{\langle x \rangle}(\Omega) = F_{\langle y \rangle}(\Omega)$, на рисунках будут представлены только параметры, характеризующие колебания вдоль оси x .

При $\gamma = 0$ произведение неопределенностей g_x осциллирует относительно $g_x \approx 1$, при $\gamma = 0,001$ — относительно g_x , которое чуть выше $g_x \approx 1$. Однако при значении $\gamma = 0,005$ ситуация уже существенно меняется: значение, вокруг которого осциллирует g_x , равно 2. Наконец, при $\gamma = 0,05$ произведение g_x осциллирует относительно значения $g_x \approx 10$ (рис. 3). Если ввести фазовый объем, равный $g_x \times g_y = g_x^2$ и характеризующий меру флуктуаций, то он будет составлять значение около 100. Такую характеристику часто

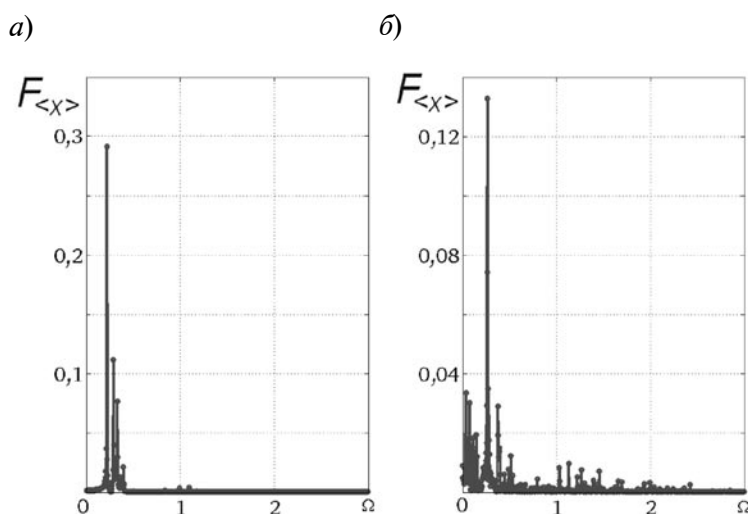


Рис. 4. Частотные спектры при разных значениях параметра связи γ : 0 (а) и 0,05 (б)

Характеристика наиболее интенсивных компонент в частотном спектре при разных значениях параметра связи

γ	Ω	$F_{\langle x \rangle}(\Omega)$
0	0,2178	0,2912
	0,2898	0,1117
0,001	0,2094	0,2010
	0,1968	0,0661
0,005	0,1424	0,1777
	0,2053	0,1555
0,05	0,2681	0,1328
	0,2765	0,0350

вводят для анализа динамических процессов. Еще более драматические изменения происходят с частотными спектрами колебаний при увеличении параметра связи γ . На рис. 4 представлены частотные спектры для разных значений параметра связи.

С увеличением значения параметра γ , даже при его малом изменении, например при $\gamma = 0,005$, происходят заметные изменения в частотных спектрах. Прежде всего уменьшается амплитуда наиболее интенсивной Фурье-компоненты, и постепенно появляются новые компоненты. С последующим увеличением γ число новых компонент быстро возрастает и происходит перераспределение энергии по спектру. В отдельных случаях мы увеличивали время расчетов, с тем, чтобы уменьшить значение Ω_{\min} и учесть соседние дискретные компоненты $F_{\langle x \rangle}(\Omega)$ с $\Delta\Omega > \Omega_{\min}$. Подсчет спектральных компонент при одном и том же временном промежутке T , но при разных значениях γ был выполнен с $\Delta\Omega > \Omega_{\min}$. Число спектральных компонент, выбранных так, чтобы их амплитуда была выше некоторой пороговой величины, возрастает с увеличением значения γ . Представление об изменениях в полученных спектрах можно получить на примере двух наиболее интенсивных компонент (см. таблицу).

Существенным является возрастание числа спектральных компонент на более высоких частотах (при $\Omega > 1$).

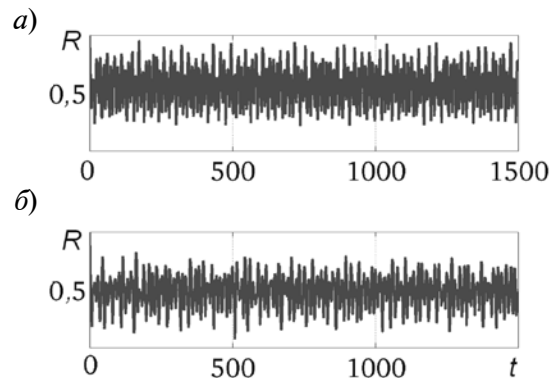


Рис. 5. Временные зависимости автокоррелятора при разных значениях параметра связи γ : 0 (а) и 0,05 (б)

Расчеты автокорреляторов при разных γ , которые представлены на рис. 5, также характеризуют многочастотные процессы, соответствующие дискретному спектру.

Для подтверждения синхронности колебаний по обеим координатам была рассчитана зависимость $\langle y \rangle = f(\langle x \rangle)$, которая, как оказалось, во всех случаях представляла собой отрезок прямой, лежащей на биссектрисе прямого угла; это свидетельствовало о том, что колебания являются совпадающими.

Итак, в отличие от работ, цитируемых нами выше, где основное внимание уделялось энергетическим спектрам стационарных задач, статистике межуровневых расстояний и их влиянию на возникновение хаоса, мы делаем акцент на изучение частотных спектров динамических задач, которые обусловлены переходами между соседними уровнями. При малом параметре, характеризующем слабую связь, и отсутствии хаоса в классических двойниках, в квантовых системах реализуется многочастотные широкополосные режимы колебаний.

Эти режимы требуют дальнейших исчерпывающих исследований. Настоящую статью следует рассматривать как дополнение к существующим исследованиям, основанную на других подходах и методиках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Елютин, П.В.** Проблемы квантового хаоса [Текст] / П.В. Елютин // Успехи физических наук. — 1988. — Т. 155. — № 3. — С. 398–437.
2. **Novaes, M.** Generalized coherent states for the double-well potential [Text] / M. Novaes, M. de Angular, J. Harrison // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2003. — Vol. 36. — P. 5773 (14 p).
3. **Atkins, K.M.** Quantum-classical correspondence and the transition to chaos in coupled quartic oscillators [Text] / K.M. Atkins, G.S. Ezra // *Phys. Rev. E.* — 1995. — Vol. 51. — № 3. — P. 1822 (16 p).
4. **Pathak, A.** Classical and quantum oscillators of quartic anharmonic second-order solution [Text] / A. Pathak, S. Mandal // *Phys. Lett. A.* — 2001. — Vol. 286. — P. 261 (16 p).
5. **Chung, N.N.** Energy eigenvalues and squeezing properties of general systems of coupled quantum anharmonic oscillators [Text] / N.N. Chung, L.Y. Chew // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 76. — P. 032113 (9 p).
6. **Chung, N.N.** Two-step approach to the dynamics of coupled anharmonic oscillators [Text] / N.N. Chung, L.Y. Chew // *Phys. Rev. A.* — 2009. — Vol. 80. — P. 02103 (10 p).
7. **Joshi, C.** Quantum entanglement of anharmonic oscillators [Электронный ресурс] / C. Joshi, M. Jonson, E. Anderson, P. Oberg // arXiv:1105.2256v2 [quantum-ph] 13 Mar 2012.
8. **Chew, L.Y.** Quantum-classical correspondence through entanglement dynamics [Text] / L.Y. Chew, N.N. Chung // *Chaotic Modeling and Simulations.* — 2012. — Vol. 3. — P. 451 (9 p).
9. **Санин, А.Л.** Динамика квантовых волновых пакетов в системе с потенциальными ямами и барьером [Текст] / А.Л. Санин, А.Т. Багманов, А.А. Смирновский // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. — 2006. — № 6(1). — С. 124–139.
10. **Санин, А.Л.** Свободные и связанные колебания электрона в двумерной квантовой системе с распределенным потенциалом и лазерным импульсом [Текст] / А.Л. Санин, Е.А. Семенов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. — 2010. — № 3(104). — С. 156–163.
11. **Санин, А.Л.** Свободные и связанные квантовые осцилляторы Дуффинга, влияние шума [Текст] / А.Л. Санин, Е.А. Семенов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. — 2012. — № 3 (153). — С. 171–181.
12. **Sanin, A.L.** Quantum Duffing oscillators [Text] / A.L. Sanin, E.A. Semyonov // *Nonlinear phenomena in complex systems.* — 2012. — Vol. 15. — P. 274 (9 p).
13. **Санин, А.Л.** Квантовые связанные осцилляторы в двумерной системе с полиномиальным потенциалом [Текст] / А.Л. Санин, Е.А. Семёнов // *Электромагнитные волны и электронные системы.* — 2012. — Т. 17. — С. 8–13.
14. **Sanin, A.L.** Quantum coupled oscillators in two-dimensional systems [Text] / A.L. Sanin, E.A. Semyonov // *Optical memory and neural networks.* — 2013. — Vol. 22. — Iss. 1. — P. 28 (9 p.).

REFERENCES

1. **Eliutin P.V.** Problemy kvantovogo khaosa. *Physics-USpekhi*, 1988, Vol. 155, № 3, pp. 398–437. (rus)
2. **Novaes M., de Angular M., Harrison J.** Generalized coherent states for the double-well potential. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, Vol. 36, p. 5773 (14 p).
3. **Atkins K.M., Ezra G.S.** Quantum-classical correspondence and the transition to chaos in coupled quartic oscillators. *Phys. Rev. E*, 1995, Vol. 51, № 3, p. 1822 (16 p).
4. **Pathak A., Mandal S.** Classical and quantum oscillators of quartic anharmonic second-order solution. *Phys. Lett. A*, 2001, Vol. 286, p. 261 (16 p).
5. **Chung N.N., Chew L.Y.** Energy eigenvalues and squeezing properties of general systems of coupled quantum anharmonic oscillators. *Phys. Rev. A*, 2007, Vol. 76, p. 032113 (9 p).
6. **Chung N.N., Chew L.Y.** Two-step approach to the dynamics of coupled anharmonic oscillators. *Phys. Rev. A*, 2009, Vol. 80, p. 02103 (10 p).
7. **Joshi C., Jonson M., Anderson E., Oberg P.** Quantum entanglement of anharmonic oscillators. Available at: arXiv:1105.2256v2 [quantum-ph].
8. **Chew L.Y., Chung N.N.** Quantum-classical correspondence through entanglement dynamics. *Chaotic Modeling and Simulations*, 2012, Vol. 3, p. 451 (9 p).
9. **Sanin A.L., Bagmanov A.T., Smirnovskii A.A.** Dinamika kvantovykh volnovykh paketov v sisteme s potentsial'nymi iamami i bar'erom. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal*, 2006, No. 6(1), pp. 124–139. (rus)
10. **Sanin A.L., Semenov E.A.** Free and coupled oscillations of electron in 2D quantum system in distributed potential and laser impulse. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and mathematics*, 2010, № 3(104), pp. 156–163. (rus)

11. **Sanin A.L., Semenov E.A.** Quantum Duffing oscillators: free and coupled, noise action. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and mathematics*, 2012, № 3(153), pp. 171–181. (rus)

12. **Sanin A.L., Semenov E.A.** Quantum Duffing oscillators. *Nonlinear phenomena in complex systems*, 2012, Vol. 15, p. 274 (9 p).

13. **Sanin A.L., Semenov E.A.** Kvantovye svyazannye ostsillatory v dvumernoi sisteme s polinomial'nym potentsialom. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy*, 2012, Vol. 17, pp. 8–13. (rus)

14. **Sanin A.L., Semenov E.A.** Quantum coupled oscillators in two-dimensional systems. *Optical memory and neural networks*, 2013, Vol. 22, Iss. 1, p. 28 (9 p.).

САНИН Андрей Леонардович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
andreylsanin@yandex.ru

СЕМЁНОВ Евгений Александрович – аспирант кафедры теоретической физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
seaman2003@tut.by