УДК 517.9

С.Н. Алексеенко, Т.А. Шемякина, М.В. Донцова

УСЛОВИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

S.N. Alekseenko [1], T.A. Shemyakina [2], M.V. Dontsowa [1]

[1] Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev
24 Minina St., Nizhny Novgorod, 603950, Russia.
[2] St. Petersburg State Polytechnical University,
29 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.

NONLOCAL RESOLVABILITY CONDITIONS FOR SYSTEMS OF THE FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Получены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Исследование рассмотренной задачи основано на методе дополнительного аргумента.
КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ЗАДАЧА КОШИ, МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА.

Conditions of a nonlocal resolvability of the Cauchy problem for a system of two quasilinear first order partial differential equations are received. The investigation of the considered problem is based on the method of an additional argument.
QUASILINEAR FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, CAUCHY PROBLEM, METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT.

Системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных описывают различные задачи из физики и механики, например, при описании распределения электронов в электрическом поле спрайта, при описании нестационарного течения идеального газа и т. п. [1]. Поэтому изучение общих свойств нелинейных уравнений и методов их решения актуальны в современной математике.

Наиболее изучены системы линейных и квазилинейных уравнений. Однако даже для систем квазилинейных уравнений нет достаточно полной теории, нет общих теорем существования и единственности решения задачи Коши, а также универсальных методов решения любых дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Каждый из известных методов хорошо применим к определенному классу уравнений. Если обратиться к методу характеристик, то условием разрешимости исходной задачи является условие существования обратной функции для характеристического уравнения. Нахождение обратной функции в общем случае представляет собой, как правило, более сложную проблему, чем исходная задача. Поэтому ее не решают, а принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия [1]. Многие известные теоремы говорят о существовании и единственности решения для очень короткого промежутка времени, то есть имеют локальный характер и не дают ответа на явное определение границ интервала существования гладкого ограниченного решения и нахождение вида решения в исходных переменных.

Для преодоления отмеченных трудностей был предложен метод дополнительного аргумента (МДА). В работах М.И. Иманалиева, С.Н. Алексеенко [2, 3] метод дополнительного аргумента позволил исследовать вопросы разрешимости начальной задачи для одного уравнения и систем уравнений типа Уизема. В работе [4] исследовано уравнение в частных производных первого порядка. Во всех этих работах исследовались системы уравнений с одним характеристическим направлением.

В статье [5] разработан способ применения метода дополнительного аргумента к системам дифференциальных уравнений первого порядка с разными характеристическими направлениями. В работе [6] описано, как можно применять метод дополнительного аргумента, если система уравнений произвольного вида с двумя независимыми переменными приводится к системе, называемой характеристической формой (когда в каждое уравнение входят производные только от одной неизвестной функции) с помощью инвариантов Римана.

В работах [7 – 15] разработан принципиально новый способ применения метода дополнительного аргумента к изучению системы Франкля в гиперболическом и эллиптическом случаях. В работах [9 – 12] построены новые расширенные характеристические системы для изучения системы Франкля. В статьях [11, 12] была доказана теорема локального существования гладкого ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа с новой расширенной характеристической системой. В статьях [13, 14] были построены примеры некоторых вариантов системы Франкля в гиперболическом и эллиптическом случаях, когда решение было найдено в явном аналитическом виде через W-функцию Ламберта.

Численные эксперименты проводились для модельных примеров, а также для частного случая системы Франкля, когда она имела явное физическое содержание [15].

Во всех вышеперечисленных работах не были определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с разными характеристическими направлениями. Поэтому в настоящей работе исследуется эта проблема.

Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (au(t,x) + bv(t,x))\partial_x u(t,x) = 0; \\ \partial_t v(t,x) + (cu(t,x) + gv(t,x))\partial_x v(t,x) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$(t,x) \in \Omega := [0,T] \times (-\infty, \infty);$$

a, b, c, g, T – известные положительные константы; $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции.

Система уравнений (1) представляет собой результат первого этапа преобразования системы Франкля для применения метода дополнительного аргумента.

Поставим для системы уравнений (1) задачу Коши:

$$u(0,x) = \varphi(x),\ v(0,x) = \psi(x),\ x \in (-\infty, \infty), \quad (2)$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ – известные функции, удовлетворяющие условию:

$$\varphi'(x) \geq 0, \psi'(x) \geq 0. \quad (3)$$

Согласно методу дополнительного аргумента, запишем расширенную характеристическую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta_1(s,t,x)}{ds} = aw_1(s,t,x) + bw_3(s,t,x); \\ \dfrac{d\eta_2(s,t,x)}{ds} = cw_4(s,t,x) + gw_2(s,t,x); \\ \dfrac{dw_1(s,t,x)}{ds} = 0; \\ \dfrac{dw_2(s,t,x)}{ds} = 0; \end{cases}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi(\eta_1(0,t,x));$$

$$w_2(0,t,x) = \psi(\eta_2(0,t,x));$$
$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1);$$
$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2).$$

В результате преобразований система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \eta_1(s,t,x) = x - a(t-s)u - b\int\limits_s^t w_3(\tau,t,x)d\tau; \\ \eta_2(s,t,x) = x - c\int\limits_s^t w_4(\tau,t,x)d\tau - g(t-s)v; \\ w_1(s,t,x) = \varphi(\eta_1(0,t,x)) := u(t,x); \\ w_2(s,t,x) = \psi(\eta_2(0,t,x)) := v(t,x); \end{cases} \quad (4)$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1(s,t,x));$$
$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2(s,t,x)).$$

В работах [5, 11, 12] доказано локальное существование гладкого ограниченного решения системы уравнений (4), которая эквивалентна задаче Коши (1), (2) согласно методу дополнительного аргумента. На основании проведенных в этих работах исследованиях, сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi, \psi \in \bar{C}^2(R^1)$ *и выполнены условия*:

1) $a > 0, b > 0, g > 0, c > 0;$

2) $\varphi'(x) \geq 0, \psi'(x) \geq 0.$

Тогда для любого $0 \leq t \leq T$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение*

$$u(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}([0,\,T]\times R^1);$$
$$v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}([0,\,T]\times R^1),$$

которое определяется из системы интегральных уравнений (4).

Замечания.

1. $\bar{C}^2(R^1)$ – пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со своими производными на всей оси; $\bar{C}^{1,2,2}([0,T]\times R^1)$ – пространство функций, один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x. Они имеют смешанные производные второго порядка и ограничены вместе со своими производными на всей оси.

2. Доказательство теоремы 1 основано на рассмотрении последовательных приближений к решению системы уравнений (4), определяемых из системы рекуррентных уравнений:

$$\begin{cases} u^n(t,x) = \varphi(x - a(t-s)u^n - b\int\limits_0^t w_3^n(\tau,t,x)d\tau); \\ v^n(t,x) = \psi(x - c\int\limits_0^t w_4^n(\tau,t,x)d\tau - g(t-s)v^n); \\ \eta_1^n(s,t,x) = x - a(t-s)u^n - b\int\limits_s^t w_3^n(\tau,t,x)d\tau; \\ \eta_2^n(s,t,x) = x - c\int\limits_0^t w_4^n(\tau,t,x)d\tau - g(t-s)v^n; \\ w_3^n(s,t,x) = w_2^{n-1}(s,s,\eta_1^n(s,t,x)); \\ w_4^n(s,t,x) = w_1^{n-1}(s,s,\eta_2^n(s,t,x)). \end{cases}$$

В последней системе интегральных уравнений рассматриваются отдельно пары уравнений, причем для доказательства существования их решений при каждом конкретном n применяется свой метод последовательных приближений. Использование рекуррентных уравнений, а не рекуррентных соотношений связано с тем, что в уравнения системы (4) входят суперпозиции неизвестных функций. Рекуррентные уравнения дают возможность при доказательстве сходимости последовательных приближений от неизвестной функции, стоящей в качестве аргумента, брать на каждом этапе функцию от функции как известную функцию. При этом из простых оценок убеждаемся в существовании константы T_0, определяющей интервал изменения переменной t, в котором решение задачи существует.

Для доказательства существования нелокального решения исходной задачи и вывода для него глобальных оценок, надо дополнить систему (4) двумя уравнениями.

Существование нелокального решения

Дополнительная система уравнений. Продифференцируем систему уравнений (1) по переменной x и обозначим

$$p(t,x) = u_x(t,x), \;\; q(t,x) = v_x(t,x);$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial_t p + (au + bv)\partial_x p = -ap^2 - bpq; \\ \partial_t q + (cu + gv)\partial_x q = -gq^2 - cpq; \\ p(0, x) = \varphi'(x), q(0, x) = \psi'(x). \end{cases} \quad (5)$$

Добавим к системе уравнений (4) два уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -a\gamma_1^2(s,t,x) - \\ - b\gamma_1(s,t,x)\gamma_2(s,s,\eta_1); \\ \dfrac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = -g\gamma_2^2(s,t,x) - \\ - c\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2(s,t,x), \end{cases} \quad (6)$$

с условиями

$$\gamma_1(0,t,x) = \varphi'(\eta_1), \gamma_2(0,t,x) = \psi'(\eta_2).$$

Перепишем систему уравнений (6) в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi'(\eta_1) - \\ - \int\limits_0^s [a\gamma_1^2 - b\gamma_1\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1)]d\tau; \\ \gamma_2(s,t,x) = \psi'(\eta_2) - \\ - \int\limits_0^s [g\gamma_2^2 - c\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2]d\tau. \end{cases} \quad (7)$$

Докажем сначала существование непрерывного решения системы (7) с помощью метода последовательных приближений при выполнении условия:

$$t < \min\left(\frac{1}{10lC'_\varphi}, \frac{1}{10lC'_\psi}\right), \quad (8)$$

где

$$l := \max\{a,b,c,g\},$$

$$C'_\varphi = \sup|\varphi'(x)|, C'_\psi = \sup|\psi'(x)|.$$

Определим последовательные приближения:

$$\begin{cases} \gamma_1^{n+1}(s,t,x) = \varphi'(\eta_1) - \\ - \int\limits_0^s [a(\gamma_1^n)^2 - b\gamma_1^n\gamma_2^n(\tau,\tau,\eta_1)]d\tau; \\ \gamma_2^{n+1}(s,t,x) = \psi'(\eta_2) - \\ - \int\limits_0^s [g(\gamma_2^n)^2 - c\gamma_1^n(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2^n]d\tau, \end{cases} \quad (9)$$

при этом

$$\gamma_1^0(s,t,x) = \varphi'(\eta_1), \gamma_2^0(s,t,x) = \psi'(\eta_2).$$

Путем непосредственных оценок получаем:

$$\begin{cases} |\gamma_1^1| \le C'_\varphi + lt(C'^2_\varphi + C'_\varphi C'_\psi) \le \\ \le \left(1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10}\right) = 1{,}2C'_\varphi; \\ |\gamma_2^1| \le C'_\psi + lt(C'^2_\psi + C'_\varphi C'_\psi) \le 1{,}2C'_\psi. \end{cases}$$

Пусть

$$|\gamma_1^n| \le 1{,}4C'_\varphi; \ |\gamma_2^n| \le 1{,}4C'_\psi; \quad (10)$$

тогда для последовательных приближений (9) следуют оценки:

$$|\gamma_1^{n+1}| \le C'_\varphi + lt(1{,}96C'^2_\varphi + 1{,}96C'_\varphi C'_\psi) \le$$
$$\le C'_\varphi + \left(\frac{1{,}96}{10} + \frac{1{,}96}{10}\right)C'_\varphi < 1{,}4C'_\varphi;$$

$$|\gamma_2^{n+1}| \le C'_\psi + lt(1{,}96C'^2_\psi + 1{,}96C'_\varphi C'_\psi) < 1{,}4C'_\psi.$$

Это означает, что неравенства (10) справедливы при всех n.

Докажем сходимость последовательных приближений (9). Рассмотрим неравенства:

$$|\gamma_1^{n+1} - \gamma_1^n| \le \left|\int\limits_0^s [a((\gamma_1^n)^2 - (\gamma_1^{n-1})^2) + b(\gamma_1^n\gamma_2^n -\right.$$
$$\left. -\gamma_1^{n-1}\gamma_2^{n-1})]d\tau\right| \le lt(\|\gamma_1^n + \gamma_1^{n-1}\| \cdot \|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\| +$$
$$+\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\| \cdot \|\gamma_2^n\| + \|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\| \cdot \|\gamma_1^{n-1}\|) \le$$
$$\le 1{,}4lt[(2C'_\varphi + C'_\psi)\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\| + C'_\varphi\|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\|],$$

$$\|\gamma_1^{n+1} - \gamma_1^n\| \le \frac{4{,}2}{10}\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\| + \frac{1{,}4}{10}\|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\|.$$

Аналогично получаем оценки для второй функции:

$$|\gamma_2^{n+1} - \gamma_2^n| \le \left|\int\limits_0^s [g((\gamma_2^n)^2 - (\gamma_2^{n-1})^2) + c(\gamma_1^n\gamma_2^n -\right.$$
$$\left. -\gamma_1^{n-1}\gamma_2^{n-1})]d\tau\right| \le lt(\|\gamma_2^n + \gamma_2^{n-1}\| \cdot \|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\| +$$
$$+\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\| \cdot \|\gamma_2^{n-1}\| + \|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\| \cdot \|\gamma_1^{n-1}\|) \le$$
$$\le 1{,}4lt[(2C'_\psi + C'_\varphi)\|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\| + C'_\psi\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\|],$$

$$\|\gamma_2^{n+1} - \gamma_2^n\| \le \frac{4{,}2}{10}\|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\| + \frac{1{,}4}{10}\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\|.$$

Сложим последние неравенства и в результате получим:

$$\left\|\gamma_1^{n+1}-\gamma_1^n\right\|+\left\|\gamma_2^{n+1}-\gamma_2^n\right\|\le$$

$$\le\frac{5,6}{10}[\left\|\gamma_1^n-\gamma_1^{n-1}\right\|+\left\|\gamma_2^n-\gamma_2^{n-1}\right\|].$$

Таким образом, приходим к выводу, что последовательные приближения (9) сходятся к непрерывному решению системы (7). Для решения будут справедливы оценки:

$$|\gamma_1|\le 1,4C'_\varphi,\ |\gamma_2|\le 1,4C'_\psi.$$

Для системы (7) осталось доказать существование производных по t и x.

Существование производной по переменной *x*. Продифференцируем по переменной x последовательные приближения (9):

$$\begin{cases}\gamma_{1x}^{n+1}(s,t,x)=\varphi''(\eta_1)\eta_{1x}-\int\limits_0^s[2a\gamma_1^n\gamma_{1x}^n+\\ +b\gamma_{1x}^n\gamma_2^n(\tau,\tau,\eta_1)+b\gamma_1^n\gamma_{2x}^n(\tau,\tau,\eta_1)\eta_{1x}]d\tau;\\ \gamma_{2x}^{n+1}(s,t,x)=\psi''(\eta_2)\eta_{2x}-\int\limits_0^s[2g\gamma_2^n\gamma_{2x}^n+\\ +c\gamma_{1x}^n(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2^n\eta_{2x}+c\gamma_1^n(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_{2x}^n]d\tau.\end{cases}\quad(11)$$

$$\begin{cases}\eta_{1x}(s,t,x)=1-a(t-s)u_x-b\int\limits_s^t w_{3x}d\tau;\\ \eta_{2x}(s,t,x)=1-c\int\limits_s^t w_{4x}d\tau-g(t-s)v_x.\end{cases}$$

Тогда при выполнении условия (3) получим неравенства:

$$|\eta_{1x}|\le 1,\ |\eta_{2x}|\le 1.$$

Пусть выполнены неравенства

$$\left\|\gamma_{1x}^n\right\|<2,3C'';\ \left\|\gamma_{2x}^n\right\|<2,3C'',$$

где $C''=\max\{C''_\varphi,C''_\psi\}$.

При выполнении условия (8) получаем оценки:

$$\left|\gamma_{1x}^{n+1}\right|\le C''+1,4lt(2C'_\varphi+C'_\psi)2,3C''+$$
$$+1,4ltC'_\varphi 2,3C''\le C''+\frac{4,2}{10}2,3C''+$$
$$+\frac{1,4}{10}2,3C''=\frac{22,88}{10}C'';$$

$$\left|\gamma_{2x}^{n+1}\right|\le C''+1,4lt(3C'_\psi+C'_\varphi)2,3C''\le\frac{22,88}{10}C'',$$

откуда выполняются неравенства:

$$\left\|\gamma_{1x}^{n+1}\right\|\le\frac{22,88}{10}C'',\ \left\|\gamma_{2x}^{n+1}\right\|\le\frac{22,88}{10}C''.\quad(12)$$

Таким образом, неравенства (12) справедливы при всех n.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases}\omega_{21}=\varphi''(\eta_1)\eta_{1x}-\int\limits_0^s[2a\gamma_1\omega_{21}+\\ +b\omega_{21}\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1)+b\gamma_1\omega_{22}(\tau,\tau,\eta_1)\eta_{1x}]d\tau,\\ \omega_{22}=\psi''(\eta_2)\eta_{2x}-\int\limits_0^s[2g\gamma_2\omega_{22}+\\ +c\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2)\omega_{22}+c\omega_{21}(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2\eta_{2x}]d\tau.\end{cases}\quad(13)$$

Докажем существование непрерывного решения системы (13) с помощью метода последовательных приближений:

$$\begin{cases}\omega_{21}^{n+1}=\varphi''(\eta_1)\eta_{1x}-\int\limits_0^s[2a\gamma_1\omega_{21}^n+\\ +b\omega_{21}^n\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1)+b\gamma_1\omega_{22}^n(\tau,\tau,\eta_1)\eta_{1x}]d\tau;\\ \omega_{22}^{n+1}=\psi''(\eta_2)\eta_{2x}-\int\limits_0^s[2g\gamma_2\omega_{22}^n+\\ +c\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2)\omega_{22}^n+c\omega_{21}^n(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2\eta_{2x}]d\tau.\end{cases}$$

Пусть выполнены неравенства

$$\left\|\omega_{21}^n\right\|<2,3C'',\ \left\|\omega_{22}^n\right\|<2,3C''.$$

При выполнении условия (8) получаем:

$$\left|\omega_{21}^{n+1}\right|\le C''+lt(2,8C'_\varphi+1,4C'_\psi+1,4C'_\varphi)2,3C''\le$$
$$\le C''+\left(\frac{2,8}{10}+\frac{1,4}{10}+\frac{1,4}{10}\right)2,3C''=$$
$$=\frac{22,88}{10}C''<2,3C'';$$
$$\left\|\omega_{21}^{n+1}\right\|<2,3C''.$$

Аналогично, имеем: $\left\|\omega_{22}^{n+1}\right\|\le 2,3C''$.

При выполнении условия (8) получаем:

$$\left|\omega_{21}^{n+1}-\omega_{21}^n\right|\le l\int\limits_0^s[(2|\gamma_1|+|\gamma_2|)\left|\omega_{21}^n-\omega_{21}^{n-1}\right|+$$
$$+|\gamma_1|\cdot\left|\omega_{22}^n(\tau,\tau,\eta_1)-\omega_{22}^{n-1}(\tau,\tau,\eta_1)\right|]d\tau\le$$
$$\le 1,4lt[(2C'_\varphi+C'_\psi)\left\|\omega_{21}^n-\omega_{21}^{n-1}\right\|+C'_\varphi\left\|\omega_{22}^n-\omega_{22}^{n-1}\right\|]\le$$
$$\le\frac{4,2}{10}\left\|\omega_{21}^n-\omega_{21}^{n-1}\right\|+\frac{1,4}{10}\left\|\omega_{22}^n-\omega_{22}^{n-1}\right\|;$$

$$\left\|\omega_{21}^{n+1}-\omega_{21}^n\right\|\le 0,42\left\|\omega_{21}^n-\omega_{21}^{n-1}\right\|+0,14\left\|\omega_{22}^n-\omega_{22}^{n-1}\right\|,$$

и аналогично имеем:

$$\left\|\omega_{22}^{n+1}-\omega_{22}^{n}\right\| \le 0,42\left\|\omega_{22}^{n}-\omega_{22}^{n-1}\right\|+0,14\left\|\omega_{21}^{n}-\omega_{21}^{n-1}\right\|.$$

Сложим последние неравенства и в результате имеем:

$$\left\|\omega_{21}^{n+1}-\omega_{21}^{n}\right\|+\left\|\omega_{22}^{n+1}-\omega_{22}^{n}\right\| \le$$
$$\le 0,56(\left\|\omega_{21}^{n}-\omega_{21}^{n-1}\right\|+\left\|\omega_{22}^{n}-\omega_{22}^{n-1}\right\|).$$

Это означает, что последовательные приближения сходятся, т. е. система (13) имеет непрерывное решение.

Докажем сходимость последовательных приближений, определяемых системой рекуррентных соотношений (11). Рассмотрим соотношения:

$$\left\|\gamma_{1x}^{n+1}-\omega_{21}\right\| \le \left|\int_0^s [2a\gamma_1^n\gamma_{1x}^n+b\gamma_{1x}^n\gamma_2^n(\tau,\tau,\eta_1)+\right.$$
$$+b\gamma_1^n\gamma_{2x}^n(\tau,\tau,\eta_1)\eta_{1x}-2a\gamma_1\omega_{21}-b\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1)\omega_{21}-$$
$$\left.-b\gamma_1\omega_{22}(\tau,\tau,\eta_1)\eta_{1x}]d\tau\right| \le \left|\int_0^s [2a\gamma_1(\gamma_{1x}^n-\omega_{21})+\right.$$
$$+b\gamma_2^n(\tau,\tau,\eta_1)(\gamma_{1x}^n-\omega_{21})+$$
$$\left.+b\gamma_1(\gamma_{2x}^n(\tau,\tau,\eta_1)-\omega_{22}(\tau,\tau,\eta_1))\eta_{1x}]d\tau\right|+\left|\sigma_{31}^n\right|,$$

где

$$\sigma_{31}^n=\int_0^s [(2a\gamma_{1x}^n+b\gamma_{2x}^n\eta_{1x})(\gamma_1^n-\gamma_1)+$$
$$+b\gamma_{1x}^n(\gamma_2^n-\gamma_2)]d\tau.$$

При выполнении условия (8) выведем неравенство:

$$\left\|\gamma_{1x}^{n+1}-\omega_{21}\right\| \le \frac{1,4}{10}\left[3\left\|\gamma_{1x}^n-\omega_{21}\right\|+\right.$$
$$\left.+\left\|\gamma_{2x}^n-\omega_{22}\right\|\right]+\left|\sigma_{31}^n\right|.$$

Аналогично получаем:

$$\left\|\gamma_{2x}^{n+1}-\omega_{22}\right\| \le \frac{1,4}{10}\left[3\left\|\gamma_{2x}^n-\omega_{22}\right\|+\right.$$
$$\left.+\left\|\gamma_{1x}^n-\omega_{21}\right\|\right]+\left|\sigma_{41}^n\right|.$$

Сложим последние неравенства и в результате получим:

$$\left\|\gamma_{1x}^{n+1}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{n+1}-\omega_{22}\right\| \le$$
$$\le 0,56(\left\|\gamma_{1x}^n-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^n-\omega_{22}\right\|)+\left|\sigma_{31}^n\right|+\left|\sigma_{41}^n\right|.$$

Пользуясь равномерной сходимостью $\gamma_1^n \Rightarrow \gamma_1, \gamma_2^n \Rightarrow \gamma_2,$, выберем $n = N$ так, чтобы $\left|\sigma_{31}^n\right|+\left|\sigma_{41}^n\right| < \varepsilon$.

Обозначим

$$S_{1N} := \left\|\gamma_{1x}^N-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^N-\omega_{22}\right\|,$$

тогда имеем:

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+1}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+1}-\omega_{22}\right\| \le 0,56S_{1N}+\varepsilon;$$

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+p}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+p}-\omega_{22}\right\| \le \left(\frac{5,6}{10}\right)^p S_{1N}+$$
$$+(1+0,56+\ldots+(0,56)^{p-1})\varepsilon<$$
$$<(0,56)^p S_{1N}+\frac{1}{0,44}\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+p}-\omega_{21}\right\|+\left\|\gamma_{2x}^{N+p}-\omega_{22}\right\| \to 0$$

при $N \to \infty, p \to \infty$.

А значит, последовательности $\{\gamma_{1x}^n\}, \{\gamma_{2x}^n\}$ сходятся, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_{1x}^n=\omega_{21},\ \lim_{n\to\infty}\gamma_{2x}^n=\omega_{22}.$$

Тем самым доказано существование непрерывных производных решения системы (7):

$$\gamma_{1x}=\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}=\omega_{21},\ \gamma_{2x}=\frac{\partial\gamma_2}{\partial x}=\omega_{22},$$
$$\left\|\gamma_{1x}\right\|<2,3C'',\ \left\|\gamma_{2x}\right\|<2,3C''.$$

Существование производной по переменной *t*. Продифференцируем по переменной *t* систему уравнений (7):

$$\begin{cases}\gamma_{1t}=\varphi''(\eta_1)\eta_{1t}-\int_0^s [2a\gamma_1\gamma_{1t}+\\ +b\gamma_{1t}\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1)+b\gamma_1\gamma_{2x}(\tau,\tau,\eta_1)\eta_{1t}]d\tau;\\ \gamma_{2t}=\psi''(\eta_2)\eta_{2t}-\int_0^s [2g\gamma_2\gamma_{2t}+\\ +c\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_{2t}+c\gamma_{1x}(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2\eta_{2t}]d\tau;\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\gamma_{1t}}{\partial s}=-(2a\gamma_1+b\gamma_2)\gamma_{1t}-b\gamma_1\gamma_{2x}\eta_{1t};\\ \dfrac{\partial\gamma_{2t}}{\partial s}=-(2g\gamma_2+c\gamma_1)\gamma_{2t}-c\gamma_{1x}\gamma_2\eta_{2t},\end{cases}$$

с условиями

$$\gamma_{1t}(0,t,x)=\varphi''(\eta_1)\eta_{1t};\ \ \gamma_{2t}(0,t,x)=\psi''(\eta_2)\eta_{2t}.$$

Тогда имеем:

$$\gamma_{1t} = \varphi''(\eta_1)\eta_{1t}e^{-\int_0^s(2a\gamma_1+b\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1))d\tau} -$$

$$-\int_0^s b\gamma_1\gamma_{2x}(\tau,\tau,\eta_1)\eta_{1t}e^{-\int_\tau^s(2a\gamma_1+b\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1))d\xi}d\tau;$$

$$\gamma_{2t} = \psi''(\eta_2)\eta_{2t}e^{-\int_0^s(2g\gamma_2+c\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2))d\tau} -$$

$$-\int_0^s c\gamma_{1x}(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2\eta_{2t}e^{-\int_\tau^s(2g\gamma_2+c\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2))d\xi}d\tau.$$

Следовательно, существуют функции γ_{1t}, γ_{2t}, удовлетворяющие системе (14).

Продифференцировав по переменной t последовательные приближения (9), докажем сходимость $\gamma_{1t}^n \to \gamma_{1t}$, $\gamma_{2t}^n \to \gamma_{2t}$, тем самым установим, что

$$\gamma_{1t} = \frac{\partial\gamma_1}{\partial t}, \quad \gamma_{2t} = \frac{\partial\gamma_2}{\partial t}.$$

Итак, мы доказали существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (6). Это означает, что

$$\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Вывод глобальных оценок

Для указанного вывода отметим, что из системы уравнений (4) следуют оценки:

$$\|u(t,x)\| \le C_\varphi; \ \|v(t,x)\| \le C_\psi. \tag{15}$$

Далее, из системы (7) имеем:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi'(\eta_1)e^{-\int_0^s(a\gamma_1+b\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1))d\tau}; \\ \gamma_2(s,t,x) = \psi'(\eta_2)e^{-\int_0^s(g\gamma_2+c\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2))d\tau}. \end{cases}$$

При выполнении условия (3) получаем:

$$\|\gamma_1\| \le C'_\varphi; \ \|\gamma_2\| \le C'_\psi,$$

следовательно,

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\| \le C'_\varphi, \ \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\| \le C'_\psi. \tag{16}$$

Для продолжения решения осталось получить нелокальные оценки для функций

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Дифференцируем систему уравнений (7) по переменной x, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma_{1x}}{ds} = -2a\gamma_1\gamma_{1x} - b\gamma_2(s,s,\eta_1)\gamma_{1x} - \\ -b\gamma_1\gamma_{2x}(s,s,\eta_1)\eta_{1x}; \\ \dfrac{d\gamma_{2x}}{ds} = -2g\gamma_2\gamma_{2x} - c\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_{2x} - \\ -c\gamma_{1x}(s,s,\eta_2)\gamma_2\eta_{2x}, \end{cases} \tag{17}$$

с условиями

$$\gamma_{1x}(0,t,x) = \varphi''(\eta_1)\eta_{1x}, \gamma_{2x}(0,t,x) = \psi''(\eta_2)\eta_{2x}.$$

Обозначив

$$A_{11} := 2a\gamma_1 + -\gamma_2(s,s,\eta_1); \ A_{12} := b\gamma_1\eta_{1x};$$

$$A_{22} := 2g\gamma_2 + c\gamma_1(s,s,\eta_2); \ A_{21} := c\gamma_2\eta_{2x},$$

получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma_{1x}}{ds} = -A_{11}\gamma_{1x}(s,t,x) - A_{12}\gamma_{2x}(s,s,\eta_1); \\ \dfrac{d\gamma_{2x}}{ds} = -A_{21}\gamma_{2x}(s,t,x) - A_{22}\gamma_{1x}(s,s,\eta_2). \end{cases} \tag{18}$$

Здесь $A_{11} > 0$, $A_{22} > 0$, поэтому из системы уравнений (18) следует, что

$$\gamma_{1x}(s,t,x) = \varphi''(\eta_1)\eta_{1x}e^{-\int_0^s A_{11}d\tau} -$$

$$-\int_0^s A_{12}e^{-\int_\tau^s A_{11}d\xi}\gamma_{2x}(\tau,\tau,\eta_1)d\tau;$$

$$\gamma_{2x}(s,t,x) = \psi''(\eta_2)\eta_{2x}e^{-\int_0^s A_{22}d\tau} -$$

$$-\int_0^s A_{21}e^{-\int_\tau^s A_{22}d\xi}\gamma_{1x}(\tau,\tau,\eta_2)d\tau.$$

Поскольку

$$|\psi''(\eta_2)\eta_{2x}| \le E_{21}, |A_{21}| \le C_{21},$$

имеем:

$$|\gamma_{2x}(s,t,x)| \le E_{21} + C_{21}\int_0^s |\gamma_{1x}(\tau,\tau,\eta_2)|d\tau;$$

$$|\gamma_{2x}(t,t,x)| \le E_{21} + C_{21}\int_0^t |\gamma_{1x}(\tau,\tau,\eta_2)|d\tau;$$

$$|\gamma_{2x}(t,t,x)| \le E_{21} + C_{21}\int_0^t \sup_x|\gamma_{1x}(\tau,\tau,x)|d\tau;$$

$$\sup_x|\gamma_{2x}(t,t,x)| \le E_{21} + C_{21}\int_0^t \sup_x|\gamma_{1x}(\tau,\tau,x)|d\tau.$$

Аналогично получаем неравенства для производной первой функции. Поскольку

$$\left|\varphi''(\eta_1)\eta_{1x}\right| \le E_{11}, \left|A_{12}\right| \le C_{12},$$

имеем:

$$\left|\gamma_{1x}(t,t,x)\right| \le E_{11} + C_{12}\int_0^s \left|\gamma_{2x}(\tau,\tau,\eta_1)\right| d\tau;$$

$$\left|\gamma_{1x}(t,t,x)\right| \le E_{11} + C_{12}\int_0^t \left|\gamma_{2x}(\tau,\tau,\eta_1)\right| d\tau;$$

$$\left|\gamma_{1x}(t,t,x)\right| \le E_{11} + C_{12}\int_0^t \sup_x \left|\gamma_{2x}(\tau,\tau,x)\right| d\tau;$$

$$\sup_x \left|\gamma_{1x}(t,t,x)\right| \le E_{11} + C_{12}\int_0^t \sup_x \left|\gamma_{2x}(\tau,\tau,x)\right| d\tau.$$

В связи с тем, что

$$\sup_x \left|\gamma_{2x}(t,t,x)\right| \le E_{21} + C_{21}\int_0^t \sup_x \left|\gamma_{1x}(\tau,\tau,x)\right| d\tau,$$

имеем

$$\sup_x \left|\gamma_{1x}(t,t,x)\right| \le E_{11} + C_{12}\int_0^t E_{21} d\tau +$$

$$+\ C_{12}C_{21}\int_0^t\int_0^\tau \sup_x \left|\gamma_{1x}(\xi,\xi,x)\right| d\xi d\tau;$$

$$\sup_R \left|\gamma_{1x}(t,t,x)\right| \le E_{11} + C_{12}tE_{21} +$$

$$+\ C_{12}C_{21}\int_0^t\int_0^\tau \sup_x \left|\gamma_{1x}(\xi,\xi,x)\right| d\xi d\tau.$$

Докажем для этого неравенства аналог леммы Гроноулла:

$$z(t) \le E_{11} + C_{12}E_{21}t + C_{12}C_{21}\int_0^t\int_0^\tau z(\xi)d\xi d\tau.$$

Обозначим

$$V(t) = E_{11} + C_{12}E_{21}t + C_{12}C_{21}\int_0^t\int_0^\tau z(\xi)d\xi d\tau,$$

тогда $z(t) \le V(t)$.

Находим первую и вторую производную функции $V(t)$:

$$V'(t) = C_{12}E_{21} + C_{12}C_{21}\int_0^t z(\tau)d\tau;$$

$$V''(t) = C_{12}C_{21}z(t);\ \ V''(t) \le C_{12}C_{21}V(t);$$

$$V(0) = E_{11},\ V'(0) = C_{12}E_{21}.$$

Введем замену:

$$V(t) = \tilde{z}(t)e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}},$$

тогда

$$V'(t) = (\tilde{z}'(t) - \tilde{z}(t)\sqrt{C_{12}C_{21}})e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}};$$

$$V''(t) = (\tilde{z}''(t) - 2\tilde{z}'(t)\sqrt{C_{12}C_{21}} +$$

$$+\tilde{z}(t)C_{12}C_{21})e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}}.$$

Поскольку

$$V''(t) \le C_{12}C_{21}V(t),$$

$$\tilde{z}''(t)e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}} - 2\tilde{z}'(t)\sqrt{C_{12}C_{21}}e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}} +$$

$$+C_{12}C_{21}\tilde{z}(t)e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}} \le C_{12}C_{21}\tilde{z}(t)e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}};$$

$$\tilde{z}''(t) \le 2\sqrt{C_{12}C_{21}}\tilde{z}'(t);$$

$$\tilde{z}'(0) \le C_{12}E_{21} + E_{11}\sqrt{C_{12}C_{21}};$$

$$\frac{d\tilde{z}'}{\tilde{z}'} \le 2\sqrt{C_{12}C_{21}}dt.$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства, получим:

$$\ln\left|\tilde{z}'(t)\right| - \ln\left|\tilde{z}'(0)\right| \le 2t\sqrt{C_{12}C_{21}},$$

следовательно,

$$\left|\tilde{z}'(t)\right| \le \left|\tilde{z}'(0)\right| e^{2t\sqrt{C_{12}C_{21}}},$$

то есть

$$-\tilde{z}'(0)e^{2t\sqrt{C_{12}C_{21}}} \le \tilde{z}'(t) \le \tilde{z}'(0)e^{2t\sqrt{C_{12}C_{21}}};$$

$$\tilde{z}(t) - \tilde{z}(0) \le \int_0^t \tilde{z}'(0)e^{2\tau\sqrt{C_{12}C_{21}}}d\tau;$$

$$\tilde{z}(t) \le \tilde{z}(0) + \frac{\tilde{z}(0)}{2\sqrt{C_{12}C_{21}}}(e^{2t\sqrt{C_{12}C_{21}}} - 1).$$

Поскольку

$$V(t) = \tilde{z}(t)e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}};$$

$$\tilde{z}'(0) = C_{12}E_{21} + E_{11}\sqrt{C_{12}C_{21}},$$

то

$$V(t) \le E_{11}e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}} +$$

$$+(e^{t\sqrt{C_{12}C_{21}}} - e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}})\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}}E_{21} + E_{11}\right),$$

$$V(t) \le E_{11}\ \mathrm{ch}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) +$$

$$+E_{21}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}}\mathrm{sh}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}).$$

В связи с тем, что

$$\sup_R \left|\gamma_{1x}(t,t,x)\right| = \sup_R \left|p_x(t,x)\right| = \sup_R \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \le V(t),$$

получим требуемую оценку:

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| < E_{11}\ \mathrm{ch}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) + +E_{21}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}}\mathrm{sh}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}), \qquad (19)$$

справедливую при всех значениях переменных t, x.

Аналогично повторим все рассуждения для функции γ_{2x}. Из системы уравнений (18) следует, что

$$\gamma_{2x}(s,t,x) = \psi''(\eta_2)\eta_{2x}e^{-\int_0^s A_{22}d\tau} - -\int_0^s A_{21}e^{-\int_\tau^s A_{22}d\xi}\gamma_{1x}(\tau,\tau,\eta_2)d\tau.$$

Поскольку

$$|\psi''(\eta_2)\eta_{2x}| \le E_{21},\ |A_{21}| \le C_{21},$$

получаем:

$$|\gamma_{2x}(t,t,x)| \le E_{21} + C_{21}\int_0^t \sup_R|\gamma_{1x}(\tau,\tau,\eta_2)|d\tau,$$

$$\sup_R|\gamma_{2x}(t,t,x)| \le E_{21} + C_{21}\int_0^t \sup_R|\gamma_{1x}(\tau,\tau,x)|d\tau.$$

В связи с тем, что

$$\sup_R|\gamma_{1x}(t,t,x)| \le E_{11} + C_{12}\int_0^t \sup_R|\gamma_{2x}(\tau,\tau,x)|d\tau,$$

выполняется неравенство

$$\sup_R|\gamma_{2x}(t,t,x)| \le E_{21} + C_{12}\int_0^t E_{11}d\tau + +C_{12}C_{21}\int_0^t\int_0^\tau \sup_R|\gamma_{2x}(\xi,\xi,x)|\,d\xi d\tau;$$

$$\sup_R|\gamma_{2x}(t,t,x)| \le E_{21} + C_{12}tE_{11} + +C_{12}C_{21}\int_0^t\int_0^\tau \sup_R|\gamma_{2x}(\xi,\xi,x)|\,d\xi d\tau.$$

Докажем неравенство:

$$z_1(t) \le E_{11} + C_{12}E_{11}t + C_{12}C_{21}\int_0^t\int_0^\tau z_1(\xi)d\xi d\tau.$$

Обозначим

$$V_1(t) = E_{21} + C_{12}E_{11}t + C_{12}C_{21}\int_0^t\int_0^\tau z_1(\xi)d\xi d\tau,$$

тогда $z_1(t) \le V_1(t)$.

Находим первую и вторую производные функции $V_1(t)$:

$$V_1'(t) = C_{21}E_{21} + C_{12}C_{21}\int_0^t z_1(\tau)d\tau;$$

$$V_1''(t) = C_{12}C_{21}z_1(t);\ V_1''(t) \le C_{12}C_{21}V_1(t);$$

$$V_1(0) = E_{21};\ V_1'(0) = C_{21}E_{11}.$$

Введем замену:

$$V_1(t) = y(t)e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}},$$

тогда

$$V_1'(t) = (y'(t) - y(t)\sqrt{C_{12}C_{21}})e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}};$$

$$V_1''(t) = (y''(t) - 2y'(t)\sqrt{C_{12}C_{21}} + +y(t)C_{12}C_{21})e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}}.$$

Так как

$$V_1''(t) \le C_{12}C_{21}V_1(t),$$

то

$$y''(t)e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}} - 2y'(t)\sqrt{C_{12}C_{21}}e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}} + +y(t)C_{12}C_{21}e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}} \le y(t)C_{12}C_{21}e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}};$$

$$y''(t) \le 2y'(t)\sqrt{C_{12}C_{21}};\ y(0) = V_1(0) = E_{21};$$

$$y'(0) = C_{12}E_{11} + E_{21}\sqrt{C_{12}C_{21}};\ \frac{dy'}{y'} \le 2\sqrt{C_{12}C_{21}}dt.$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства, получим:

$$\ln|y'(t)| - \ln|y'(0)| \le 2t\sqrt{C_{12}C_{21}};$$

$$|y'(t)| \le |y'(0)|\,e^{2t\sqrt{C_{12}C_{21}}};$$

$$-y'(0)e^{2t\sqrt{C_{12}C_{21}}} \le y'(t) \le y'(0)e^{2t\sqrt{C_{12}C_{21}}};$$

$$y(t) - y(0) \le \int_0^t y'(0)e^{2s\sqrt{C_{12}C_{21}}}ds;$$

$$y(t) \le y(0) + \frac{y'(0)}{2\sqrt{C_{12}C_{21}}}(e^{2t\sqrt{C_{12}C_{21}}} - 1).$$

Поскольку

$$y(0) = V_1(0) = E_{21};\ y'(0) = C_{12}E_{11} + E_{21}\sqrt{C_{12}C_{21}},$$

то

$$y(t) \le E_{21} + \frac{C_{12}E_{11} + E_{21}\sqrt{C_{12}C_{21}}}{2\sqrt{C_{12}C_{21}}}e^{2t\sqrt{C_{12}C_{21}}} - -\frac{C_{12}E_{11} + E_{21}\sqrt{C_{12}C_{21}}}{2\sqrt{C_{12}C_{21}}};$$

$$y(t) \le \frac{E_{11}}{2}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}}e^{2t\sqrt{C_{12}C_{21}}} + \frac{E_{21}}{2}e^{2t\sqrt{C_{12}C_{21}}} - -\frac{E_{11}}{2}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}} - \frac{E_{21}}{2}.$$

Так как

$$V_1(t) = y(t)e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}},$$

то

$$V_1(t) \le \frac{E_{11}}{2}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}}e^{t\sqrt{C_{12}C_{21}}} + \frac{E_{21}}{2}e^{t\sqrt{C_{12}C_{21}}} -$$

$$-\frac{E_{11}}{2}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}}e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}} - \frac{E_{21}}{2}e^{-t\sqrt{C_{12}C_{21}}};$$

$$V_1(t) \le E_{21}\mathrm{ch}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) +$$

$$+E_{11}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}}\mathrm{sh}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}).$$

В связи с тем, что

$$\sup_R|\gamma_{2x}(t,t,x)| = \sup_R|q_x(t,x)| = \sup_R\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| \le V_1(t),$$

получим требуемую оценку:

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| < E_{21}\ \mathrm{ch}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) + +E_{11}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}}\mathrm{sh}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}), \qquad (20)$$

справедливую при всех значениях переменных t, x.

Полученные глобальные оценки (15), (16), (19), (20) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0, T]$.

Возьмем в качестве начальных значений $u(T_0, x), v(T_0, x)$ и продлим решение на некоторый промежуток $[T_0, T_1]$, а затем, взяв в качестве начальных значений $u(T_1, x), v(T_1, x)$, продлим решение на промежуток $[T_1, T_2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется величинами $\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|$, а эти величины (в силу глобальных оценок (16)) ограничены значениями C'_φ, C'_ψ на любом промежутке разрешимости глобальными оценками, справедливыми на любом этом промежутке. В частности,

$$u(T_k, x) \in \bar{C}^2(R^1),\ v(T_k, x) \in \bar{C}^2(R^1),$$

$$|u(T_k, x)| \le C_\varphi,\ |v(T_k, x)| \le C_\psi,$$

$$|\partial_x u(T_k, x)| \le C'_\varphi,\ |\partial_x v(T_k, x)| \le C'_\psi.$$

Для вторых производных справедливы оценки (19), (20), где в качестве t можно взять T. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0, T]$.

Единственность решения задачи Коши (1), (2) доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

Общий итог исследования представим в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi, \psi \in \bar{C}^2(R^1)$ *и выполнены условия*:

$$a > 0, b > 0, g > 0, c > 0;$$

$$\varphi'(x) > 0, \psi'(x) > 0.$$

Тогда для любого $T > 0$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение*

$$u(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}([0,\ T]\times R^1),$$

$$v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}([0,\ T]\times R^1),$$

которое определяется из системы интегральных уравнений (4).

В заключение отметим, что метод дополнительного аргумента позволил определить условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с разными характеристическими направлениями и получить глобальные оценки для решения этой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рождественский, Б.Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике [Текст] / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1968. – 592 с.

2. **Иманалиев, М.И.** К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН СССР. – 1992. – Т. 323. – № 3. – С. 410–414.

3. **Иманалиев, М.И.** К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН СССР. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С. 1111–1115.

4. **Иманалиев, М.И.** К теории нелиней-

ных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН СССР. – 1993. – Т. 329. – № 5. – С. 543–546.

5. **Иманалиев, М.И.** К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады РАН. – 2001. – Т. 379. – № 1. – С. 16–21.

6. **Alekseenko, S.N.** A basic scheme to investigate two first order quasi-linear partial differential equations [Text] / S.N. Alekseenko // Analytical and Approximate Methods / H.-P. Blatt, R. Felix, L.G. Lelevkina, M. Sommer (Eds.) International Conference at the Kyrgyz–Russian–Slavic University. Bishkek – Aachen: Shaker Verlag, 2003. –P. 1–14.

7. **Алексеенко, С.Н.** Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в гиперболическом случае [Текст] / С.Н. Алексеенко, Т.А. Шемякина, К.Г. Круц // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 35. – С. 142–147.

8. **Алексеенко, С.Н.** Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в эллиптическом случае [Текст] / С.Н. Алексеенко, Т.А. Шемякина, В.Г. Чезганов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 35. – С. 148–152.

9. **Алексеенко, С.Н.** Построение расширенной характеристической системы уравнений для частного случая системы Франкля эллиптического типа [Текст] / С.Н. Алексеенко, Т.А. Шемякина // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2009. – № 3 (83). – С. 73–82.

10. **Шемякина, Т.А.** Построение расширенной характеристической системы для системы Франкля в гиперболическом случае [Текст] /Т.А. Шемякина // Труды Средне-Волжского матем об-ва: докл. III Междунар. научной школы. –Ульяновск, 2007. – Т. 9. – № 1. – С. 264–273.

11. **Шемякина, Т.А.** Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае [Текст] / Т.А. Шемякина // Журнал Средне-Волжского матем. об-ва. – 2011. – Т. 13. – № 2. – С. 127–131.

12. **Шемякина, Т.А.** Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа [Текст] / Т.А. Шемякина // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (146). – С. 130–131.

13. **Шемякина, Т.А.** Примеры решения задачи Коши для некоторых вариантов системы Франкля эллиптического типа [Текст] / Т.А. Шемякина // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2011. – № 4 (134). – С. 191–197.

14. **Шемякина, Т.А.** Примеры решения задачи Коши для некоторых вариантов системы Франкля гиперболического типа [Текст] / Т.А. Шемякина // Материалы IX Междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ’2012) . – Алушта. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2012. – С. 525–528.

15. **Шемякина, Т.А.** Численное решение задачи Коши для системы Франкля на основе метода дополнительного аргумента [Текст] / Т.А. Шемякина // Материалы XVII Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС’11). – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. – С. 669–672.

REFERENCES

1. **Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N.** Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniia k gazovoi dinamike. Moscow, Nauka, 1968, 592 p. (rus)

2. **Imanaliev M.I., Alekseenko S.N.** K teorii nelineinykh integro–differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh tipa Uizema. *Doklady AN SSSR*, 1992, Vol. 323, № 3, pp. 410–414. (rus)

3. **Imanaliev M.I., Alekseenko S.N.** K teorii sistem nelineinykh integro-differentsial’nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh tipa Uizema. Doklady *AN SSSR*, 1992, Vol. 325, № 6, pp. 1111–1115. (rus)

4. **Imanaliev M.I., Alekseenko S.N.** K teorii nelineinykh uravnenii s differentsial’nym operatorom tipa polnoi proizvodnoi po vremeni. *Doklady AN SSSR*, 1993, Vol. 329, № 5, pp. 543–546. (rus)

5. **Imanaliev M.I., Alekseenko S.N.** K voprosu sushchestvovaniia gladkogo ogranichennogo resheniia dlia sistemy dvukh nelineinykh differentsial’nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poriadka. *Doklady RAN*, 2001, Vol. 379, № 1, pp. 16–21. (rus)

6. **Alekseenko S.N.** A basic scheme to investigate two first order quasi – linear partial differential equations. Analytical and Approximate Methods. International Conference at the Kyrgyz–Russian–Slavic University. Bishkek – Aachen, Shaker Verlag, 2003, pp. 1–14.

7. **Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Kruts**

K.G. Lokal'noe sushchestvovanie ogranichennogo resheniia sistemy Franklia v giperbolicheskom sluchae. Issledovaniia po integro–differentsial'nym uravneniiam, Bishkek, Ilim, 2006, № 35, pp. 142–147. (rus)

8. **Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Chezganov V.G.** Lokal'noe sushchestvovanie ogranichennogo resheniia sistemy Franklia v ellipticheskom sluchae. Issledovaniia po integro–differentsial'nym uravneniiam, Bishkek, Ilim, 2006, № 35, pp. 148–152. (rus)

9. **Alekseenko S.N., Shemyakina T.A.** The construction of the extended characteristic system for a special case of Frankl equations of the elliptic type. *St.-Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and mathematics*, 2009, № 3 (83), pp. 73–82. (rus)

10. **Shemyakina T.A.** Postroenie rasshirennoi kharakteristicheskoi sistemy dlia sistemy Franklia v giperbolicheskom sluchae. Trudy Sredne-Volzhskogo matem ob-va: dokl. III Mezhdunar. nauch. shkola. Ul'ianovsk, 2007, Vol. 9, № 1, pp. 264–273. (rus)

11. **Shemyakina T.A.** Usloviia sushchestvovaniia i differentsiruemosti resheniia sistemy Franklia v giperbolicheskom sluchae. *Zhurnal Sredne-Volzhskogo matem. ob-va*, 2011, Vol. 13, № 2, pp. 127–131. (rus)

12. **Shemyakina T.A.** The theorem on existence of a bounded solution of the Cauchy problem for the Frankl system of hyperbolic type. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and mathematics*, 2012, № 2 (146), pp. 130–131. (rus)

13. **Shemyakina T.A.** Solution examples of the Cauchy problem for some variants of the Frankl system of elliptic type. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and mathematics*, 2011, № 4 (134), pp. 191–197. (rus)

14. **Shemyakina T.A.** Primery resheniia zadachi Koshi dlia nekotorykh variantov sistemy Franklia giperbolicheskogo tipa. Materialy IX Mezhdunar. konf. po neravnovesnym protsessam v soplakh i struiakh (NPNJ'2012), Moscow, Izd-vo MAI-PRINT, 2012, pp. 525–528. (rus)

15. **Shemyakina T.A.** Chislennoe reshenie zadachi Koshi dlia sistemy Franklia na osnove metoda dopolnitel'nogo argumenta. Materialy XVII Mezhdunar. konf. po vychislitel'noi mekhanike i sovremennym prikladnym programmnym sistemam(VMSPPS'11), Moscow: Izd-vo MAI-PRINT, 2011. pp. 669–672. (rus)

ШЕМЯКИНА Татьяна Алексеевна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

sh_tat@mail.ru

АЛЕКСЕЕНКО Сергей Николаевич – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Нижегородского государственного технического университета имени Р.Е. Алексеева.*

603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24

sn-alekseenko@yandex.ru

ДОНЦОВА Марина Владимировна – *аспирантка Нижегородского государственного педагогического университета.*

603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24

dontsowa.marina2011@yandex.ru