



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 539.3

В.В. Тихомиров

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАКРОТРЕЩИНЫ С ДУГООБРАЗНЫМИ МИКРОТРЕЩИНАМИ В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА

V.V. Tikhomirov

St. Petersburg State Polytechnical University,
29 Politekhnikeskaya St., St. Petersburg, Russia

MACROCRACK INTERACTION WITH ARCHED MICROCRACKS UNDER ANTIPLANE SHEAR

В статье рассматривается взаимодействие полубесконечной трещины моды III с системой дугообразных трещин, расположенных на дуге окружности с центром в вершине основной трещины. В результате использования обобщенного интегрального преобразования Меллина задача сведена к сингулярному интегральному уравнению, точное решение которого получено в замкнутой форме. Изучена зависимость коэффициента интенсивности напряжений от микроструктурных параметров системы.

ДУГООБРАЗНЫЕ ТРЕЩИНЫ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАКРОТРЕЩИНЫ С МИКРОТРЕЩИНАМИ. ПЛОТНОСТЬ ТРЕЩИН.

The paper focuses on the semi-infinite III-mode crack interaction with a structure of arched cracks that arranged in the arc centered at the main crack vertex. Through the use of a generalized integral Mellin transform the problem has been reduced to a singular integral equation with a closed-form exact solution. The relationship between the stress intensity factor and the microstructure parameters has been studied.

ARC CIRCULAR CRACKS. MACROCRACK INTERACTION WITH MICROCRACKS. CRACK DENSITY.

Характерной особенностью микроструктуры многих материалов, в особенности металлов, керамики и горных пород, является наличие микротрещин. По этой причине проблема учета влияния подобных микроструктурных дефектов на прочностные характеристики твердых тел вызывает большой интерес механиков уже несколько десятилетий. При этом можно выделить два направления исследований:

изучение влияния трещиноподобных дефектов на макроскопические свойства

упругих тел и нахождение упругих модулей материалов;

анализ локального упрочнения или разупрочнения материалов и распространения микротрещин, находящихся в поле массивов микротрещин. Поскольку настоящая работа лежит в русле последнего направления, то приводимый далее краткий литературный обзор в основном будет касаться работ именно этого направления.

Влияние микротрещин на напряженное состояние в вершине макротрещины про-

является возникновением одного из двух противоположных эффектов:

экранирования (shielding effect), при котором коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в ее вершине уменьшается по сравнению с бездефектной средой, что обуславливает локальное упрочнение материала;

ослабления (amplification effect), связанного с уменьшением КИН и приводящего к локальному разупрочнению материала.

Преобладание какого-либо из этих эффектов определяется расположением и ориентацией микротрещин [1]. Даже для одного и того же массива микротрещин возможны различные результаты [2], так как это зависит от микроструктурных геометрических параметров.

С математической точки зрения проблема взаимодействия трещин для произвольного их расположения в упругой плоскости сводится к системе сингулярных интегральных уравнений [3]. Точные решения на настоящий момент получены для частных видов периодических систем прямолинейных и дугообразных трещин [3, 4]. В силу циклической симметрии такие задачи по сути дела сводятся к рассмотрению одной трещины. Возможно, что единственным примером, имеющим точное решение, может служить задача о взаимодействии полубесконечной трещины с периодической системой коллинеарных микротрещин [5].

В связи с этим для оценки влияния на КИН произвольно ориентированных систем микротрещин, расположенных вблизи вершины макротрещины, разработаны два приближенных подхода: континуальный и дискретный. При первом подходе зона микрорастрескивания, прилегающая к вершине магистральной трещины, рассматривается как зона поврежденного материала, имеющего пониженные эффективные упругие модули [6, 7]. Определенные сомнения в адекватности моделирования зоны микрорастрескивания материалом с эффективными свойствами высказаны в работах [8, 9]. В дискретном подходе многочисленные микротрещины принимаются во внимание как отдельные дискретные элементы структуры упругой среды. В силу возникаю-

щих на этом пути математических трудностей, для реализации дискретного подхода разработан ряд приближенных методов.

Исторически в первых работах, относящихся к данному подходу, учет взаимодействия между микротрещинами не производился [2]. Простейший способ учета взаимодействий трещин был предложен М. Качановым в 1985 году [10]. Основная идея метода состояла в том, что эффект воздействия микротрещины A на любую другую микротрещину B обуславливается только осредненной нагрузкой на берегах трещины A . Помимо приближенного характера, данный метод имеет еще ряд ограничений. Существенно, что он опирается на допущение о локализации всех микротрещин в зоне, прилегающей к вершине макротрещины, и использует асимптотики напряжений в этой зоне. Кроме того, метод Качанова требует знания фундаментальных решений, которые доступны в плоских задачах для прямолинейных трещин, и, следовательно, данный метод ограничен трещинами только такой формы [11].

Аппроксимации усилий на берегах трещин полиномами более высоких порядков породили другие приближенные методы учета взаимодействий микротрещин [12, 13]. Численный метод граничных элементов привлекался для анализа проблемы в работе [14].

В настоящей работе с помощью обобщенного интегрального преобразования Меллина (так называемого преобразования «через дефект») [15] построено точное решение антиплоской задачи о взаимодействии полубесконечной трещины с дугообразными трещинами, расположенными на дуге окружности. При этом не делалось допущений о близости расположения микротрещин к вершине магистральной трещины и о способе их распределения по дуге окружности.

Постановка задачи

Макротрещину, находящуюся в однородной изотропной среде в условиях антиплоского сдвига, будем рассматривать как полубесконечную. К ее берегам на расстоянии r_0 от вершины приложены само-

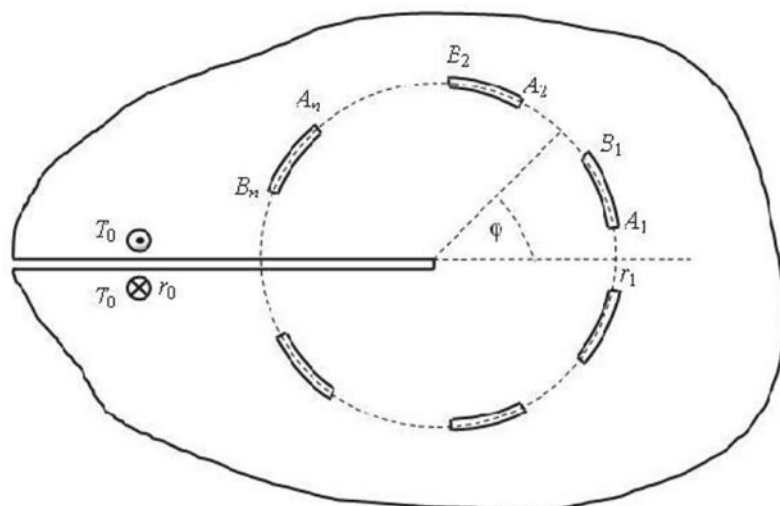


Рис. 1. Схема к постановке задачи: полубесконечная трещина моды III, взаимодействующая с системой дугообразных трещин; A_k, B_k – вершины микротрещин; r_1 – радиус окружности; r_0 – расстояние от центра окружности до точки приложения нагрузки T_0

уравновешенные сосредоточенные силы T_0 . На окружности радиуса r_1 с центром в вершине макротрещины расположены симметричным образом относительно ее линии дугообразные трещины $A_k B_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) (рис. 1). Пусть вершины микротрещин A_k и B_k определяются центральными углами α_{k1} и α_{k2} , соответственно, причем $\alpha_{k1} < \alpha_{k2}$ и $\alpha_{n2} < \pi$. Последнее неравенство означает, что рассматривается неособая система микротрещин, т. е. не имеющая пересечений с магистральной трещиной.

В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть только верхнюю полуплоскость, в которой расположено n микротрещин. Пусть контур L_α представляет собой совокупность разомкнутых дуг $L_{\alpha k} = A_k B_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а L_α^* – совокупность перемычек между вершинами микротрещин. Тогда перемещение $w(r, \varphi)$ (r, φ – полярные координаты) является гармонической функцией и удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$w(r, 0) = 0; \quad \tau_{\varphi z}(r, \pi) = T_0 \delta(r - r_0); \quad (1)$$

$$\tau_{rz}(r_1, \varphi) = 0 \quad \text{на } L_\alpha; \quad (2)$$

($\delta(r)$ – дельта-функция), а касательные напряжения определяются формулами

$$\tau_{\varphi z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \quad \tau_{rz} = \mu \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3)$$

С точки зрения механики разрушения интерес представляют коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещин.

Сингулярное интегральное уравнение задачи и его решение

С помощью обобщенного интегрального преобразования Меллина [15] аналогичным образом, как это было сделано в работах [16, 17], удовлетворяя гармоническому уравнению равновесия и граничным условиям (1), получаем

$$w(r, \varphi) = w_0(r, \varphi) + R(r) \int_{L_\alpha} u(\theta) \chi(r, \varphi, \theta) d\theta. \quad (4)$$

Здесь функция

$$u(\theta) = w(r_1 - 0, \theta) - w(r_1 + 0, \theta) \quad (\theta \in L_\alpha)$$

представляет собой относительное проскальзывание берегов трещины, $w_0(r, \varphi)$ – решение задачи о полубесконечной трещине, находящейся в однородной среде, которое определяется формулой

$$w_0(r, \varphi) = \frac{T_0}{2\pi\mu} \ln \frac{r + r_0 + 2\sqrt{rr_0} \sin \frac{\varphi}{2}}{r + r_0 - 2\sqrt{rr_0} \sin \frac{\varphi}{2}},$$

а остальные функции в представлении (4) имеют вид

$$R(r) = (r_1 - r)\sqrt{r_1 r} / (2\pi),$$

$$\chi(r, \varphi, \theta) = \frac{\cos(\theta + \varphi) / 2}{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos(\theta + \varphi)} - \frac{\cos(\theta - \varphi) / 2}{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos(\theta - \varphi)}.$$

Определяя согласно формулам (3) касательные напряжения τ_{rz} и удовлетворяя граничному условию (2), которое отражает отсутствие напряжений на берегах дугообразных трещин, приходим к сингулярному интегральному уравнению:

$$\int_{L_\alpha} \frac{\cos \theta / 2}{\cos \theta - \cos \varphi} u'_*(\theta) d\theta = f(\varphi) \quad (\varphi \in L_\alpha), \quad (5)$$

где

$$f(\varphi) = \frac{\sqrt{\rho(\rho - 1)}}{1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2}, \quad \rho = \frac{r_0}{r_1};$$

$$u'_*(\theta) = \frac{\mu}{T_0} \frac{d}{d\theta} [w(r_1 - 0, \theta) - w(r_1 + 0, \theta)].$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде

$$u'_*(\theta) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \nu(\theta), \quad (6)$$

где $\nu(\theta)$ – новая неизвестная функция.

Подставляя представление (6) в уравнение (5) и производя очевидную замену переменной $\xi = \cos \theta$, получим:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_\beta} \frac{V(\xi) d\xi}{\xi - x} = F(x), \quad (7)$$

$$V(\xi) = \nu(\arccos \xi), \quad F(x) = \gamma(1 + 2\rho x + x^2)^{-1},$$

$$\gamma = \sqrt{\rho(\rho - 1)} / \pi.$$

Контур L_β представляет совокупность отрезков $[\beta_{k2}, \beta_{k1}]$ ($\beta_{kj} = \cos \alpha_{kj}$, $k = 1, 2, \dots; j = 1, 2$), расположенных в интервале $(-1, 1]$.

Общее решение уравнения (7) имеет вид [4]:

$$V(\xi) = \frac{1}{\pi X(\xi)} \left[- \int_{L_\beta} \frac{X(t)F(t)}{t - \xi} dt + Q_{n-1}(\xi) \right]. \quad (8)$$

Здесь $X(\xi)$ – каноническая функция

Племеля, определяемая формулой

$$X(\xi) = [(\beta_{11} - \xi)(\xi - \beta_{12})(\xi - \beta_{21}) \dots \dots (\xi - \beta_{n1})(\xi - \beta_{n2})]^{1/2}, \quad (9)$$

а $Q_{n-1}(\xi)$ – полином степени $n - 1$.

Заметим, что представление канонической функции в форме (9) обеспечивает ее вещественность при любом $\xi \in L_\beta$.

Интеграл, входящий в представление (8), можно вычислить, если использовать подход, предложенный в работе [4]:

$$\int_{L_\beta} \frac{X(t)F(t)}{t - \xi} dt = \pi \gamma D[d^{-2}(\xi) + q_{n-1}(\xi)], \quad (10)$$

$$d^2(\xi) = 1 + 2\rho\xi + \rho^2, \quad D = (2\rho)^{-2n} \prod_{k=1}^n d_{k1} d_{k2};$$

$$d_{kj} = \sqrt{1 + 2\rho \cos \alpha_{kj} + \rho^2} \quad (k = 1, 2, \dots; j = 1, 2);$$

$q_{n-1}(\xi)$ – полином степени $n-1$ с известными коэффициентами.

Заметим, что величины d_{kj} представляют собой безразмерные расстояния от точки приложения нагрузки до вершин микротрещин.

Тогда, на основании формул (6), (8) и (10) для производной безразмерного скачка смещений на берегах микротрещин, получим выражение:

$$u'_*(\theta) = - \frac{2\gamma D \sin \theta / 2}{X(\cos \theta)} \times \quad (11)$$

$$\times [d^{-2}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)];$$

$$P_{n-1}(\xi) = c_0 + c_1 \xi + \dots + c_{n-1} \xi^{n-1}.$$

Коэффициенты полинома c_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$), входящего в формулу (11), получим из условий однозначности перемещений на каждой дугообразной трещине-разрезу:

$$\int_{\alpha_{k1}}^{\alpha_{k2}} u'_*(\theta) d\theta = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

В результате подстановки представления (11) в условия (12) приходим к системе n линейных алгебраических уравнений относительно констант c_k :

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_k \int_{\beta_{k2}}^{\beta_{k1}} \frac{\xi^j d\xi}{\sqrt{1 + \xi X(\xi)}} = \quad (13)$$

$$= \int_{\beta_{k2}}^{\beta_{k1}} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi X(\xi)} (1 + 2\rho\xi + \rho^2)} d\xi$$

($k = 1, 2, \dots, n$).

Коэффициенты интенсивности напряжений

Вычислим на основе представления (4) касательные напряжения на продолжении макротрещины с помощью формул (3). При $r \rightarrow 0$ получим следующее выражение:

$$\tau_{r\tau}(r, 0) \sim \frac{T_0}{\pi\sqrt{r_0}} \left[1 - \sqrt{\rho} \int_{L_\alpha} u'_*(\theta) \cos \frac{\theta}{2} d\theta \right] r^{1/2}.$$

Подставим сюда представление (11) и определим КИН стандартной формулой

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{\varphi z}(r, 0).$$

Тогда для нормализованного КИН в вершине макротрещины получаем:

$$N = \frac{K_{III}}{K_{III}^0} = 1 + \frac{\rho(\rho - 1)D}{\pi} \times \int_{L_\beta} \left[d^{-2}(\xi) - P_{n-1}(\xi) \right] \frac{d\xi}{X(\xi)}. \quad (14)$$

Здесь $K_{III}^0 = \sqrt{2 / (\pi r_0)} T_0$ представляет собой КИН для полубесконечной трещины в однородной среде при таком же нагружении и отсутствии микротрещин [16]. Отсюда вытекает, что интегральное слагаемое в выражении (14) определяет добавку в КИН, которая обусловлена взаимодействием трещин.

Для нахождения коэффициентов интенсивности в вершинах микротрещин A_k и B_k вычислим касательные напряжения на перемычках между микротрещинами:

$$\tau_{r\tau}(r_1, \varphi) = \tau_{r\tau}^0(r_1, \varphi) - \frac{T_0}{\pi r_0} \sin \frac{\varphi}{2} \int_{L_\alpha} \frac{\cos \theta / 2}{\cos \theta - \cos \varphi} u'_*(\theta) d\theta \quad (15)$$

$(\varphi \in L_\alpha^*).$

Подчеркнем, что первое слагаемое в правой части (15), определяемое точечной нагрузкой на макротрещине при отсутствии микротрещин, особенностей не имеет, а интеграл во втором слагаемом является регулярным. Определим КИН в вершине B_k формулой

$$K_{III}^{B_k} = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha_{k2} + 0} \sqrt{2\pi r_1(\varphi - \alpha_{k2})} \cdot \tau_{r\tau}(r_1, \varphi). \quad (16)$$

Очевидно, что вклад в КИН будет да-

вать только интеграл по дуге $L_{\alpha k}$. Отсюда, применяя формулы (11) и (15), приходим к необходимости вычисления следующего предела:

$$K_{III}^{B_k} = \frac{T_0}{\pi r_1} \gamma D \sin \frac{\alpha_{k2}}{2} \lim_{\varphi \rightarrow \alpha_{k2} + 0} \sqrt{2\pi r_1(\varphi - \alpha_{k2})} \times \int_{\alpha_{k1}}^{\alpha_{k2}} \frac{\sin \theta}{X(\cos \theta)(\cos \theta - \cos \varphi)} d\theta.$$

Используя значение интеграла

$$\int_{\alpha_{k1}}^{\alpha_{k2}} \frac{\sin \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \varphi)^{3/2}} = 2[(\cos \alpha_{k2} - \cos \varphi)^{-1/2} - (\cos \alpha_{k1} - \cos \varphi)^{-1/2}],$$

находим:

$$N_{B_k} = \frac{K_{III}^{B_k}}{K_{III}^0} = \frac{2\rho(\rho - 1)D}{\pi\sqrt{\sin \alpha_{k2}}} \Phi(\cos \alpha_{k2}) \sin \frac{\alpha_{k2}}{2}; \quad (17)$$

$$\Phi(t) = [d^{-2}(t) - P_{n-1}(t)] X_*^{-1}(t).$$

Здесь значок звездочки означает, что в функции (9) множитель $\sqrt{\xi - \beta_{k2}}$ отсутствует.

Аналогичным путем приходим к выражению для нормализованного КИН в вершинах A_k :

$$N_{A_k} = \frac{K_{III}^{A_k}}{K_{III}^0} = - \frac{2\rho(\rho - 1)D}{\pi\sqrt{\sin \alpha_{k1}}} \Phi(\cos \alpha_{k1}) \sin \frac{\alpha_{k1}}{2}. \quad (18)$$

Таким образом, согласно формулам (15), (17) и (18), коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещин зависят от $2n + 1$ микроструктурных параметров: ρ , α_{k1} и α_{k2} ($k = 1, 2, \dots, n$).

Две симметричные дугообразные трещины

В этом случае в верхней полуплоскости находится только одна дугообразная трещина (либо ее половина, если трещина центральная, у которой $\alpha_{11} = 0$) и, следовательно, $n = 1$. При этом система (13) вырождается в одно уравнение, решение которого выражается через полные эллиптические интегралы $K(\lambda)$ и $\Pi(\pi/2, \eta, \lambda)$ пер-

вого и третьего рода, соответственно [18]:

$$c_0 = \frac{\Pi(\pi/2, \eta, \lambda)}{d_{11}^2 K(\lambda)}; \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta_{11} - \beta_{12}}{1 + \beta_{11}}};$$

$$\eta = -\frac{2\rho(\beta_{11} - \beta_{12})}{d_{11}^2}.$$

Интегралы, входящие в представление (14), вычисляются в замкнутой форме, и нормализованный КИН в вершине полубесконечной трещины принимает вид:

$$N = 1 + \frac{\rho - 1}{2} \left[1 - \frac{d_{12}}{d_{11}} \frac{\Pi(\pi/2, \eta, \lambda)}{K(\lambda)} \right]. \quad (19)$$

Отметим, что второе слагаемое в этой формуле представляет собой вклад, который вносит в КИН взаимодействие между макротрещиной и микротрещинами. Из формулы (19) видно, что если окружность, на которой располагаются микротрещины, проходит через точку приложения нагрузки (т. е. $\rho = r_0/r_1 = 1$), то этот вклад будет равен нулю.

Используя представления полных эллиптических интегралов в виде рядов [18], нетрудно показать, что в случае очень боль-

шого удаления микротрещин от вершины макротрещины $N \rightarrow 1$ при $\rho \rightarrow 0$. В противоположной предельной ситуации, когда $\rho \rightarrow \infty$ (что имеет место при очень близком расположении дугообразных трещин к вершине основной трещины), получаем асимптотическую формулу:

$$N \sim 1 + \frac{\beta_{11} - \beta_{12}}{2} \left[1 - 2 \frac{D(\pi/2, \lambda)}{K(\lambda)} \right],$$

где $D(\pi/2, \lambda)$ – эллиптический интеграл третьего рода [18].

Из общих представлений (17) и (18), при $n = 1$, вытекают следующие формулы для коэффициентов интенсивности в вершинах A и B дугообразных трещин:

$$N_{A(B)} = \frac{\rho - 1}{2} \Lambda_{A(B)}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \rho) \times \frac{\sin \alpha_{A(B)}/2}{\sqrt{(\cos \alpha_{11} - \cos \alpha_{12}) \sin \alpha_{A(B)}}}, \quad (20)$$

где

$$\Lambda_A = \frac{d_{12}}{d_{11}} \left[\frac{\Pi(\pi/2, \eta, \lambda)}{K(\lambda)} - 1 \right];$$

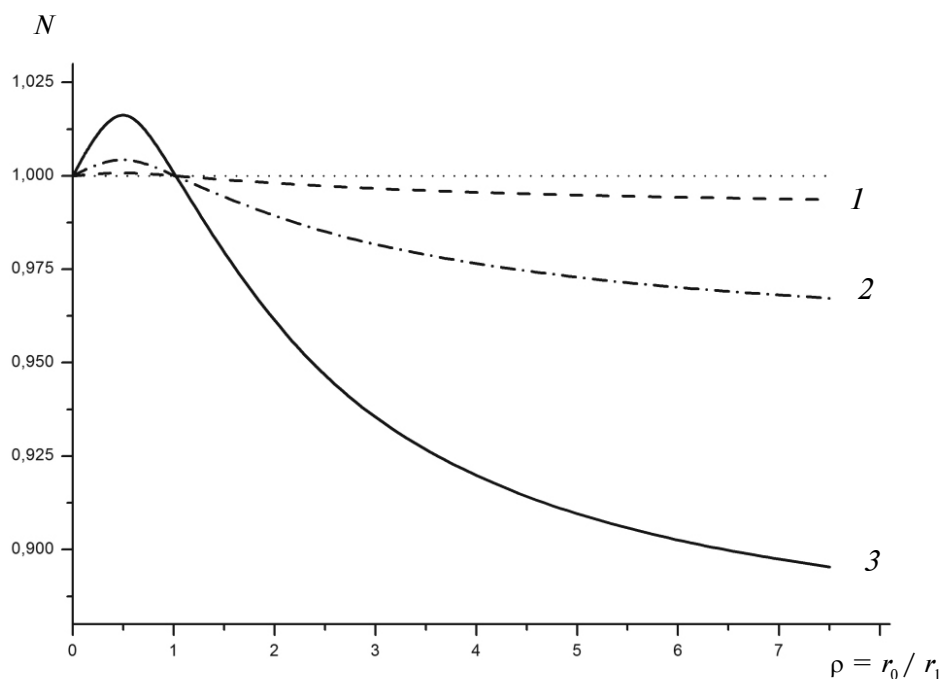


Рис. 2. Зависимости нормализованного КИН в вершине микротрещины, взаимодействующей с центральной микротрещиной, от безразмерного расстояния при различных значениях угла α_{12} , град: 60 (1), 90 (2), 120 (3); $\alpha_{11} = 0$

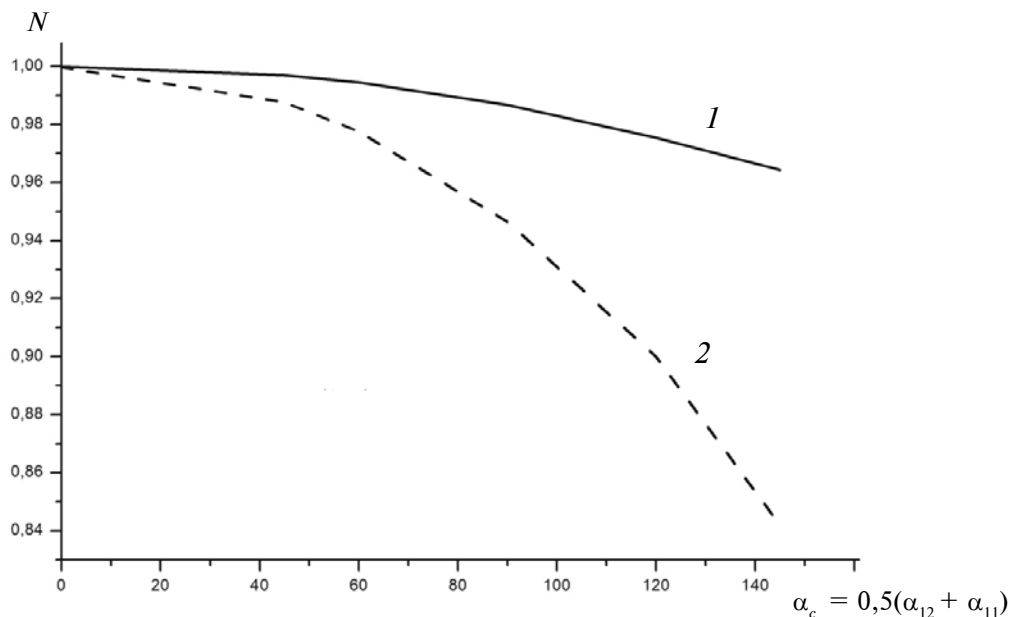


Рис. 3. Зависимости нормализованного КИН в вершине макротрещины от положения центра α_c для симметрично расположенных микротрещин при различных значениях их относительной длины $l/r_1 = \alpha_{12} - \alpha_{11}$, град: 30 (1) и 60 (2)

$$\Lambda_B = \frac{d_{11}}{d_{12}} - \frac{d_{12}}{d_{11}} \frac{\text{П}(\pi/2, \eta, \lambda)}{K(\lambda)}$$

$$\sin \alpha_A = \sin \alpha_{11}, \quad \sin \alpha_B = \sin \alpha_{12}.$$

Легко установить, что при $\rho \rightarrow 0$ нормализованные коэффициенты интенсивности (20) стремятся к единице, а при $\rho \rightarrow \infty$ их предельные значения определяются асимптотиками

$$N_A \sim \frac{D(\pi/2, \lambda)}{\sqrt{2}K(\lambda)} \times \sqrt{(\cos \alpha_{11} - \cos \alpha_{12}) \text{tg} \frac{\alpha_{11}}{2}};$$

$$N_B \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{D(\pi/2, \lambda)}{K(\lambda)} \right] \times \sqrt{(\cos \alpha_{11} - \cos \alpha_{12}) \text{tg} \frac{\alpha_{12}}{2}}.$$

Из формулы (20), в частности, следует, что при $\alpha_{11} = 0$, т. е. для центральной трещины, $N_A = 0$, а N_B неограниченно растет при $\alpha_{12} \rightarrow \pi$.

На рис. 2 представлены зависимости от параметра ρ нормализованного КИН (N) в

вершине основной трещины, взаимодействующей с центральным дугообразным разрезом ($\alpha_{11} = 0$), при различных углах α_{12} . Рисунок 3 иллюстрирует изменение величины N в зависимости от положения дугообразного разреза на окружности, задаваемого углом $\alpha_c = (\alpha_{12} + \alpha_{11})/2$, которой соответствует центру разреза, при двух значениях относительных длин разрезов $l/r_1 = \alpha_{12} - \alpha_{11}$. Представленные данные показывают, что при $\rho > 1$ наличие дугообразной трещины приводит к уменьшению КИН в вершине основной трещины, т. е. к эффекту экранирования (упрочнения) материала, а при $\rho < 1$ наблюдается противоположный эффект, т. е. эффект ослабления материала. С увеличением относительной длины трещины, а также с возрастанием угла α_c эти эффекты усиливаются. Таким образом, доминирующая роль того или иного эффекта определяется не положением микротрещины на дуге окружности, а относительным расстоянием $\rho = r_0/r_1$ до точки приложения нагрузки.

Зависимости нормализованных коэффициентов интенсивности в вершинах микротрещин от их расположения на окружности

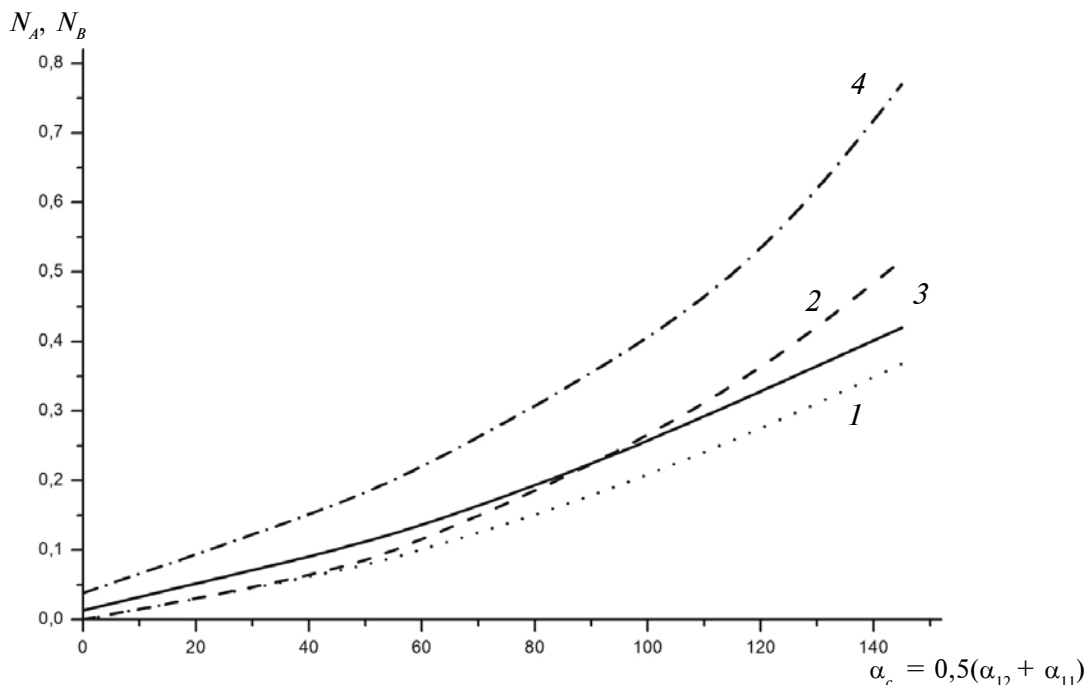


Рис. 4. Зависимости нормализованных КИН N_A (1, 2) и N_B (3, 4) в вершинах микротрещин A и B от положения их центра α_c при различных значениях их относительной длины $l / r_1 = \alpha_{12} + \alpha_{11}$, град: 30° (1, 3) и 60° (2, 4)

показаны на рис. 4. Видно, что с увеличением угла α_c величины N_A и N_B монотонно возрастают и, следовательно, возрастает вероятность роста микротрещин.

Система симметричных дугообразных трещин

В случае нескольких дугообразных трещин, когда $n > 1$, интегралы, входящие в систему (13) и формулу для КИН (14), могут быть оценены только численно (хотя при $n = 2$ интегралы в (14) выражаются через полные эллиптические интегралы). При этом удобно использовать квадратурную формулу Гаусса–Чебышева.

В дальнейшем будем рассматривать регулярные системы дугообразных трещин, у которых

$$\Delta = \alpha_{k1} - \alpha_{(k-1)1} = \alpha_{k2} - \alpha_{(k-1)2} = \text{const} \quad (k = 2, 3, \dots, n),$$

причем $\Delta \leq \pi/n$. Параметр Δ можно назвать шагом системы трещин, а в случае ее периодичности – периодом.

Отсюда вытекает, что в случае регуляр-

ной системы n дугообразных трещин число микроструктурных параметров уменьшается до четырех, в качестве которых, например, можно выбрать следующие: ρ , α_{11} , $\alpha = \alpha_{k2} - \alpha_{k1}$, Δ . Параметр α , определяющий длину микротрещин l , связан с линейной плотностью дугообразных трещин ω соотношением

$$\omega = \frac{1}{\pi r_1} \sum_{k=1}^n l_k = \frac{n\alpha}{\pi}.$$

Вычисления по формулам (13) и (14) проводились для $n = 4$ и $\rho = 5$, что соответствует достаточно близкому расположению микротрещин к вершине магистральной трещины. Остальные микроструктурные параметры подвергались варьированию. Для сравнения находились значения N_* нормализованного КИН, полученные в предположении, что дугообразные трещины не взаимодействуют друг с другом. На основе формулы (19) для N_* имеем:

$$N_* = 1 + \frac{\rho - 1}{2} \sum_{s=1}^n \left[1 - \frac{d_{s2}}{d_{s1}} \frac{\Pi(\pi/2, \eta_s, \lambda_s)}{K(\lambda_s)} \right];$$

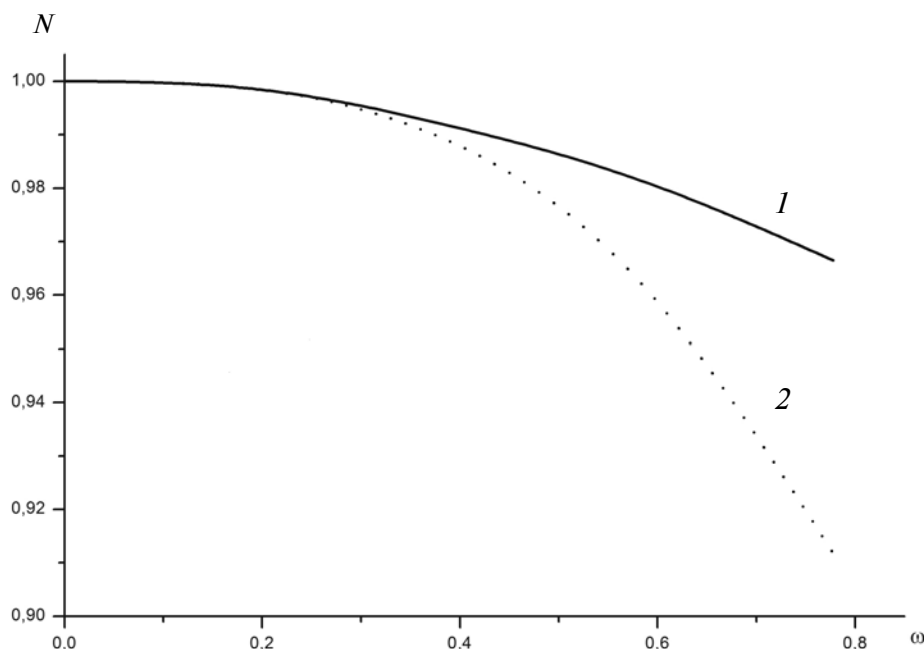


Рис. 5. Зависимости нормализованного КИН в вершине макротрещины от линейной плотности микротрещин с учетом (1) и без учета (2) их взаимодействий

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{\beta_{s1} - \beta_{s2}}{1 + \beta_{s1}}}, \quad \eta_s = -\frac{2\rho(\beta_{s1} - \beta_{s2})}{d_{s1}^2}.$$

Результаты вычислений коэффициентов интенсивности N и N_* приведены на рис. 5 для $\alpha_{11} = 20^\circ$, $\alpha = 35^\circ$ и $\Delta = 40^\circ$.

Полученные численные данные позволяют сделать ряд выводов:

- система дугообразных трещин, независимо от их расположения на окружности, вызывает при $\rho > 1$ экранирующий эффект, т. е. уменьшение коэффициента интенсивности в вершине магистральной трещины;
- с ростом линейной плотности микротрещин (что достигается путем увеличения

их длины либо путем возрастания их числа) эффект экранирования усиливается;

модель, не учитывающая взаимодействия микротрещин между собой, дает при $\rho > 1$ нижнюю оценку коэффициента интенсивности в вершине основной трещины при любых значениях микроструктурных параметров;

уменьшение шага системы микротрещин Δ при сохранении всех остальных микроструктурных параметров приводит к ослаблению экранирующего эффекта;

коэффициент интенсивности напряжений в вершине основной трещины слабо чувствителен к изменению структурного параметра α_{11} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Meguid, S.A.** Maincrack-microcrack interaction under mode I, II and III loadings: Shielding and amplification [Text] / S.A. Meguid, S.X. Gong, P.E. Gaultier // Int. J. Mech. Sci. – 1991. – Vol. 33. – № 5. – P. 351–359.
2. **Kachanov, M.** On the effective elastic properties of cracked solids – editor’s comments [Text] / M. Kachanov // Int. J. Fracture – 2007. – Vol. 146. – № 2. – P. 295–299.
3. **Панасюк, В.В.** Распределение напряжений

- около трещин в пластинах и оболочках [Текст] / В.В.Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – Киев: Наукова Думка, 1976. – 444 с.
4. **Саврук, М.П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М.П. Саврук. – Киев: Наукова Думка, 1981. – 324 с.
5. **Rubinstein, A.A.** Macrocrack interaction with semi-infinite microcrack array [Text] / A. A. Rubinstein // Int. J. Fracture. – 1985. – Vol. 27. – № 1. – P. 113–119.

6. **Hutchinson, J.W.** Crack tip shielding by micro-cracking in brittle solids [Text] / J.W. Hutchinson // *Acta Metall.* – 1987. – Vol. 35. – № 7. – P. 1605–1619.
7. **Ortiz, M.** A continuum theory of crack shielding in ceramics [Text] / M. Ortiz // *Trans. ASME. Ser.E. J. Appl. Mech.* – 1987. – Vol. 54. – № 1. – P. 54–58.
8. **Kachanov, M.** Mechanics of crack-microcrack interactions [Text] / M. Kachanov, E.L.E. Montagut, J.P. Laures // *Mech. Materials.* – 1990. – Vol. 10. – № 1. – P. 59–71.
9. **Wu, S.** Effect of microcrack array on stress intensity factor of main crack [Text] / S. Wu, A. Chudnovsky // *Int. J. Fracture.* – 1993. – Vol. 59. – № 1. – P. 41–52.
10. **Kachanov, M.** A simple technique of stress analysis in elastic solids with many cracks [Text] / M. Kachanov // *Int. J. Fracture.* – 1985. – Vol. 28. – № 1. – P. R11–R19.
11. **Kachanov, M.** On the problems of crack interactions and crack coalescence [Text] / M. Kachanov // *Int. J. Fracture.* – 2003. – Vol. 120. – № 3. – P. 537–543.
12. **Gross, D.** Stress intensity factors of systems of cracks [Text] / D. Gross // *Ing.- Archiv.* – 1982. – Vol. 51. – P. 301–310.
13. **Horii, H.** Elastic fields of interacting inhomogeneities [Text] / H. Horii, S. Nemat-Nasser // *Int. J. Solids Struct.* – 1985. – Vol. 21. – P. 731–745.
14. **Brencich, A.** Interaction of a main crack with ordered distributions of microcracks: a numerical technique by displacement discontinuity boundary elements. [Text] / A. Brencich, A. Carpinteri // *Int. J. Fracture.* – 1996. – Vol. 76. – № 3. – P. 373–389.
15. **Попов, Г.Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений [Текст] / Г.Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
16. **Тихомиров, В.В.** Трещина продольного сдвига, частично проникающая в упругое круговое включение с покрытием [Текст] / В.В. Тихомиров // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.* – 2011. – № 2(122). – С. 142–149.
17. **Тихомиров, В.В.** Антиплоская задача для трещины, проникающей в упругое включение при неидеальном контакте фаз [Текст] / В.В. Тихомиров // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.* – 2011. – № 2(146). – С. 150–155.
18. **Градштейн, И.С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст]: справочник / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
victikh@mail.ru