# РАДИОФИЗИКА

УДК 621.746.62

И.Л. Никулин, А.В. Перминов

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНДУКЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРОВОДЯЩЕМ ЦИЛИНДРЕ, ПОМЕЩЕННОМ В НЕОДНОРОДНОЕ ПЕРЕМЕННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### I.L. Nikulin, A.V. Perminov

Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Pr., Perm, 614990, Russia

## SIMULATION OF THE INDUCTION PROCESSES IN THE CONDUCTIVE CYLINDER PLACED IN THE NON-UNIFORM VARIABLE MAGNETIC FIELD

В статье предложена математическая модель, описывающая возникновение индукционного магнитного поля, токов и Джоулевой теплоты в проводящем цилиндре, находящемся в неоднородном переменном магнитном поле. Приведены и проанализированы результаты вычислительных экспериментов.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ МАГНИТ-НОГО ПОЛЯ. МАГНИТНОЕ ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА. ИНДУКЦИОННЫЕ ТОКИ.

In this paper the mathematical model of generating of induction magnetic field, electric currents and Joule heat in conductive cylinder placed in non-uniform variable magnetic field is suggested. The results of the computational experiments are given and analyzed.

MATHEMATICAL SIMULATION. MAGNETIC FIELD. MAGNETIC FIELD DIFFUSION EQUATION. REYN-OLDS MAGNETIC NUMBER. INDUCTION CURRENTS.

Технологический прогресс в авиастроении в значительной мере определяется качеством применяемых конструкционных материалов. Так, при индукционной плавке никелевых жаропрочных сплавов возникают проблемы, связанные с распределением примесей в расплаве, которые могут быть решены управлением течениями металла в тигле на этапе подготовки металла к заливке в формы. Поскольку плавление жаропрочного сплава происходит при температурах около 1500 °C в закрытой цилиндрической вакуумной камере, наиболее доступным средством для изучения основных закономерностей процесса является математическое моделирование.

При индукционной плавке металла в расплаве возникают значительные градиенты температуры, приводящие к интенсивным конвективным движениям. Необходимо учитывать взаимное влияние переменных и неоднородных магнитных полей и конвективных течений, что приводит к постановке сложной магнитно-гидродинамической задачи. Однако особенности технологического процесса таковы, что полная задача может быть разбита на несколько подзадач, включающих следующие расчеты:

пространственного распределения магнитного поля без учета движения расплава;

индукционных токов и объемного распределения источников теплоты;

конвективных течений с известным распределением внутренних источников теплоты.

Работы в области взаимодействия металлического расплава и переменного электромагнитного поля ведутся весьма широко как в черной [1], так и цветной металлургии [2], и включают как экспериментальные [3], так и теоретические работы [4 – 6]. Известны положительные эффекты влияния магнитного поля на металлургическую продукцию, например сокращение технологического цикла по времени, измельчение зерна при затвердевании, гомогенизация химического состава, выравнивание температурного поля.

В научной литературе встречаются работы, посвященные влиянию переменных магнитных полей на движение расплава в цилиндрической полости, например [4, 5]. В работе [6] рассматривался расплав в цилиндрической жидкой зоне, находящейся во вращающемся магнитном поле. Показано, что для умеренных частот вращения магнитное поле практически однородно в каждый момент времени как вне, так и внутри жидкой зоны.

В большинстве случаев, описанных в литературе, исследуются слабые и однородные по пространству магнитные поля. Изучение влияния сильных и существенно неоднородных полей на состояние расплавленного металла представляет интерес как с теоретической точки зрения, так и со стороны его технологических приложений.

Целью настоящей работы является разработка математической модели, описывающей распределение магнитного поля в электропроводящем расплаве, генерацию индукционных токов и Джоулевой теплоты.

В качестве объекта для моделирования был выбран технологический процесс индукционной плавки, реализованный в цехе точного литья ОАО «Протон – Пермские моторы», г. Пермь.

#### Геометрические и физические параметры задачи

Принципиальная схема теплового узла печи представлена на рис. 1. Шихта жаропрочного



Рис. 1. Эскиз теплового узла индукторной печи (правая половина вертикального сечения): 1 – никелевый расплав, 2 – тигель из смеси электрокорунда и шамота, 3 – медный индуктор, 4 – асбестовое основание, 5 – электрокорундовый стакан

никелевого сплава 1 помещается в тигель 2, спекаемый из смеси шамота и электрокорунда, находящийся внутри водоохлаждаемого медного индуктора 3, установленного на асбестовом основании 4. Заливка металла происходит через носик электрокорундового стакана 5. Индукторная печь находится внутри вакуумной камеры, а процесс электромагнитного переплава происходит в условиях технического вакуума ( $10^{-3}$  Па). Верхняя граница расплава считается свободной. Параметры технологического процесса, в том числе физические свойства никелевого расплава [7], использованные для моделирования, приведены в таблице.

#### Основные уравнения и допущения

Рассматривается заполненная парамагнитным ( $\mu \approx 1$ ) проводящим расплавом вертикальная цилиндрическая область (см. рис. 1), которая находится во внешнем неоднородном переменном магнитном поле

$$\mathbf{H}^{out} = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \sin \omega t.$$

Параметр	Обозначение	Значение
Геометрические параметры теплово	ого узла печи (см. рис. 1)	•
Толщина стенок тигля, мм	δ <sub>r</sub>	10
Высота электрокорундового стакана, мм	h <sub>3</sub>	50-100
Высота шамотного тигля, мм	h <sub>iii</sub>	200 - 300
Высота асбестового основания, мм	h <sub>a</sub>	50 - 60
Радиус витка, мм	R <sub>вит</sub>	150
Диаметр медного проводника, мм	d <sub>np</sub>	35
Внутренний радиус тигля, мм	R <sub>M</sub>	125
Высота столба расплава металла, мм	h <sub>M</sub>	200 - 250
Физические параметры	индуктора	
Рабочий ток, А	Ι	250
Частота переменного тока, кГц	ω/2π	1-2
Число витков	N	8-12
Физические параметры нике	глевого расплава	
Теплопроводность, Вт/(м·К)	λ	100
Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	С	655
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	ρ	7770
Удельная проводимость, МСм/м	σ	13,3
Динамическая вязкость, мПа·с	η	41,0
Коэффициент объемного расширения, К <sup>-1</sup>	β	38,5.10-6

Параметры, использованные для моделирования технологического процесса

Пространственное распределение внешнего поля будет определено ниже, но на данном этапе оно считается известным. В дальнейшем полагается, что диэлектрические стенки не влияют на магнитное поле, созданное индуктором. Характерные частоты и параметры катушки индуктора приведены в таблице.

Переменное магнитное поле генерирует в расплаве токи, которые являются объемными источниками тепла. За счет неравномерного распределения тепловых источников в жидкости возникает неравновесный (в общем случае) градиент температуры, который порождает конвективное течение в расплаве.

Система уравнений, описывающих состояние расплава, состоит из уравнений Максвелла, закона Ома и уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска, в которых учтена сила Лоренца и Джоулево тепло в уравнении теплопроводности:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0;$$
$$\mathbf{J} = \sigma \left( \mathbf{E} + \mu\mu_0 \left[ \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right] \right);$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left( \mathbf{v} \nabla \right) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \beta T + \frac{\mu\mu_0}{\rho} \mathbf{J} \times \mathbf{H}; \quad ^{(1)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = a\nabla^2 T + \frac{\mathbf{J}^2}{\rho c\sigma}, \quad \text{div}\mathbf{v} = 0,$$

где **H** – напряженность магнитного поля, t – время,  $\mu$  – магнитная проницаемость,  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\sigma$  – удельная электрическая проводимость, **v** – скорость, T – температура, a – коэффициент температуропроводности, **J** – плотность электрического тока,  $\rho$  – плотность, c – удельная теплоемкость, p – давление, v –кинематическая вязкость, **g** – ускорение свободного падения,  $\beta$  – коэффициент объемного расширения. Проанализируем взаимное влияние магнитного поля и конвективных течений в расплаве на основе оценок некоторых слагаемых в системе уравнений (1). Следуя [8], оценим глубину проникновения магнитного поля в расплав. Пусть имеется неподвижный расплав во внешнем поле. Комбинируя первые два уравнения системы (1), получим одно уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\mu_0\sigma} \nabla^2 \mathbf{H}.$$
 (2)

Оценивая порядок левой и правой частей уравнения (2), для характерной глубины проникновения магнитного поля в расплав получаем значение  $\delta \approx \sqrt{1/\sigma\mu_0\omega} \approx 3 \cdot 10^{-3}$  м. Для оценки здесь и далее использованы данные, приведенные в таблице. Глубина проникновения магнитного поля в расплав значительно меньше размеров тигля. Это говорит о том, что влияние магнитного поля на движение в расплаве будет существенно только в пределах гартмановских пограничных слоев, примыкающих к границам полости [9].

Для оценки влияния конвекции на распределение магнитного поля и электрических токов возьмем ротор от обеих частей равенства, выражающего закон Ома, и используем теорему о циркуляции электрического поля (1):

$$\operatorname{rot} \mathbf{J} = - \, \sigma \mu \mu_0 \, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \big( \, \mathbf{v} \times \mu \mu_0 \mathbf{H} \big).$$

При выполнении неравенства  $\omega \gg v R^{-1}$  вторым слагаемым в правой части данного равенства, а значит и влиянием конвективного движения на распределение токов, можно пренебречь.

Исходя из того, что в уравнении Навье – Стокса конвективное слагаемое  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$  и слагаемое с подъемной силой  $\mathbf{g}\beta\Delta T$  имеют один порядок, для характерного значения скорости получим оценку  $v \sim \sqrt{g\beta R\theta}$ , где характерная разность температур  $\theta = 20$  К, а течение считалось установившимся. В этом случае получаем

$$vR^{-1} = R^{-1}\sqrt{g\beta R\theta} = 0,4 \text{ c}^{-1}.$$

Значение частоты колебаний тока в индукторе изменяется в пределах 1 — 2 кГц и значительно превосходит критические, при которых генерируемые конвективным движением расплава электрические токи влияют на распределение магнитного поля внутри расплава.

Таким образом, сопряженная магнитногидродинамическая задача может рассматриваться последовательным решением следующих подзадач:

расчет пространственного распределения магнитного поля индуктора в объеме расплава без учета его движения;

расчет индукционных токов *J* и объемной мощности источников Джоулевой теплоты;

решение задачи тепломассопереноса с известным распределением магнитного поля и внутренних источников теплоты.

# Распределение магнитного поля и внутренних источников тепла

Решение уравнения диффузии магнитного поля в металле (2) будем искать в виде суперпозиции составляющих магнитного поля: внешней гармонической  $\mathbf{H}^{out}$ , создаваемой индуктором, и внутренней  $\mathbf{H}^{ind}$ , создаваемой индукционными токами:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{out} \cos \omega t + \mathbf{H}^{ind} \,. \tag{3}$$

Внутри рассматриваемой области rot $\mathbf{H}^{out} = 0$ .

Выберем в качестве характерных масштабов следующие величины: для координаты — внутренний радиус тигля  $R_{\rm M}$ , для времени — обратную частоту пульсаций магнитного поля в индукторе  $\omega^{-1}$ , для магнитного поля —  $H_0$ , равную

$$H_0 = NI/4\pi R_{\rm M} \approx 10^3 \, A \cdot {\rm M}^{-1}$$

Учитывая выражение (3), запишем безразмерное уравнение для индукционной составляющей магнитного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{ind}}{\partial \tau} = \frac{1}{\mathrm{Re}_m} \nabla^2 \mathbf{H}^{ind} + \mathbf{H}^{out} \sin \tau, \qquad (4)$$

где  $\operatorname{Re}_m = \mu_0 \sigma R_M^2 \omega$  — магнитное число Рейнольдса.

Подстановка физических констант и характерных величин технологического процесса (см. таблицу) дает значение для  $\text{Re}_m \sim 10^3$ .

Уравнение (4) решалось в цилиндрической системе координат. Решение полагалось не зависящим от азимутальной координаты и сим-

метричным относительно оси *z*, что позволило свести задачу к двумерному варианту и проводить расчеты в половине вертикального сечения цилиндра. За пределами расплава индукционным полем пренебрегаем в силу малости по сравнению с внешним, а на оси симметрии отсутствует нормальная компонента плотности тока:

$$\begin{cases} \mathbf{H}^{ind} = 0 \quad \text{при} \quad r = 1, \ z = 0, \ z = h; \\ \mathbf{J} = rot \mathbf{H}^{ind} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \end{cases}$$
(5)

Внешнее магнитное поле создается индуктором, который представляет собой короткую катушку. Стенка тигля не проводит электрического тока и при температуре расплава диамагнитна, следовательно, на основании теоремы о циркуляции магнитного поля, не влияет на напряженность магнитного поля индуктора **H**<sup>out</sup>.

Аксиальная и радиальная компоненты напряженности магнитного поля индуктора в безразмерной форме, рассчитанные на основании закона Био – Савара – Лапласа, имеют вид

$$H_{z} = \sum_{k=1}^{N} \int_{0}^{2\pi} \frac{R(R - r_{k} \cos \varphi)}{\left[R^{2} + r_{k}^{2} + z_{k}^{2} - 2Rr_{k} \cos \varphi\right]^{\frac{3}{2}}} \cdot d\varphi;$$
(6)

$$H_{r} = \sum_{k=1}^{N} \int_{0}^{2\pi} \frac{Rz_{k} \cos \varphi}{\left[R^{2} + r_{k}^{2} + z_{k}^{2} - 2Rr_{k} \cos \varphi\right]^{\frac{3}{2}}} \cdot d\varphi,$$

где  $R = 1 + \delta_{\rm T} / R_{\rm M}$  — безразмерный радиус витка индуктора;  $r_k, z_k$  — компоненты радиус-вектора от элемента тока *k*-го кольца индуктора к точке наблюдения;  $\varphi$  — азимутальный угол цилиндрических координат. Схема для расчета по формулам (6) приведена на рис. 2.

Алгоритм решения задачи (4) – (6) реализован в виде пакета программ, написанных на языке Фортран. При апроксимации уравнения (4) использовалась явная конечно-разностная схема. Квазистационарное решение считалось установившимся, если относительная погрешность в определении амплитуды  $\mathbf{H}^{ind}$  не превышала  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

#### Результаты вычислительных экспериментов

На рис. 3 показаны распределение магнитного поля соленоида  $\mathbf{H}^{iut}$ , результирующее поле в расплаве при  $\operatorname{Re}_m = 1000$ , азимутальная со-



Рис. 2. Схема к определению магнитного поля кольца в точке с координатами (*r<sub>k</sub>*, *z<sub>k</sub>*, 0)

ставляющая плотности индукционных токов и мощность Джоулевых источников теплоты  $q_V = J^2$ . Для перехода к размерным величинам J и  $q_V$  необходимо их умножить на размерные коэффициенты:

$$J_0 = \frac{H_0}{R_0} \sim 10^4 \frac{A}{M^2}; \ q_0 = \frac{H_0^2}{\sigma R_0^2} \sim 500 \frac{BT}{M^3}.$$

Для установления закономерностей генерации теплоты проведены вычислительные эксперименты с различными магнитными числами Рейнольдса Re<sub>m</sub>, результаты которых приведены на рис. 4.

Из рис. 3,  $\epsilon$  и 4,  $a, \delta$  видно, что магнитное поле присутствует только в приграничной области, а в центральной части полностью гасится индукционным полем, что хорошо согласуется с оценками, приведенными выше. В области, где градиенты магнитного поля велики, возникают электрические токи, причем на торцевых гранях и на боковой поверхности области токи противонаправлены (рис. 3, $\partial$  и 4, $\theta$ , $\epsilon$ ). Следует отметить, что токи на боковой поверхности значительно превышают таковые на торцах (см. рис. 4, $\theta$ , $\epsilon$ ). Области интенсивного выделения теплоты локализованы около боковой поверхности, тепловыделение на торцевых гранях значительно слабее (рис. 4, $\partial$ , $\epsilon$ ).

Установлено, что с ростом магнитного числа Рейнольдса магнитное поле проникает в проводник на меньшую глубину, индукционные токи и тепловыделение возрастают и локализуются ближе к поверхности области.



Рис. 3. Вычисленные распределения основных величин по расплаву в цилиндрической полости: вектора  $\mathbf{H}^{out}(a)$ , его радиальной  $(H_r^{out})(\delta)$  и аксиальной  $(H_z^{out})(e)$  компонент; результирующего магнитного поля H(z); плотности токов  $J(\partial)$  и мощности  $q_V$  внутренних источников тепла (e)



Рис. 4. Зависимости аксиальной компоненты результирующего магнитного поля (*a*, *b*), плотности тока (*b*, *c*) и объемной мощности источников тепла (*d*, *e*) от радиуса (*a*, *b*, *d*) и высоты (*b*, *c*, *e*) расплава в цилиндрической полости для различных значений числа Рейнольдса Re<sub>m</sub>: 10<sup>2</sup> (*I*), 10<sup>3</sup> (*2*), 10<sup>4</sup> (*3*) На вставках представлены зависимости для всей области (Re<sub>m</sub> = 10<sup>3</sup>), на основных графиках – только для приграничных областей (но подробно)

Таким образом, разработана математическая модель, описывающая магнитное поле в электропроводящем цилиндре, который помещен во внешнее неоднородное переменное магнитное поле индуктора. Модель позволяет рассчитывать распределение индукционных токов и генерацию Джоулевой теплоты.

Методами вычислительного эксперимента получены распределения напряженности магнитного поля, индукционных токов и объемной плотности источников теплоты в металлическом расплаве, находящемся в цилиндрической полости. На основе результатов вычислительных экспериментов выявлены закономерности в изменениях указанных выше величин при варьировании управляющего параметра — магнитного числа Рейнольдса. Эта информация в перспективе позволит моделировать конвективные течения в расплаве и выявить эффекты, важные для понимания процессов, влияющих на распределения примесей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цаплин, А.И. Теплофизика внешних воздействий при кристаллизации стальных слитков на машинах непрерывного литья [Текст] / А.И. Цаплин. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. – 238 с.

2. Шейден, О. Разработки в области электромагнитного перемешивания (ЭМП) расплава в печах для плавки алюминия [Текст] / О. Шейден, А. Леман // Цветные металлы Сибири. Сб. научн. статей. – Красноярск: ООО «Версо», 2009. – С. 648 – 656.

3. **Хрипченко, С.Ю.** Кристаллизация цилиндрических алюминиевых слитков при МГД-перемешивании [Текст]/ С.Ю. Хрипченко, В.М. Долгих, С.А. Денисов [и др.] // Рос. конф. по магнитной гидродинамике. Тез. докл. Пермь, 18 – 22 июня 2012 г. – Пермь: ИМСС УрО РАН, 2012. – С. 101.

4. **Lyubimova, T.P.** Numerical investigation of dynamic magnetic field influence on vertical Bridgman crystal growth [Text] / T.P. Lyubimova, P. Dold, A. Croell [et al.]// Proc. of Int. Conf. 'Advanced Problems in Thermal Convection'. – Perm, 2004. – P. 343 – 349.

5. Любимова, Т.П. Численное исследование влия-

ния бегущего магнитного поля на тепломассоперенос в жидкой зоне [Текст] / Т.П. Любимова, И.С. Файзрахманова // Гидродинамика: Сб. науч. трудов. Вып. 11. – Пермь: Изд.-во Перм. ун.-та, 2004. – С. 173 – 190.

6. Демин, В.А. Влияние вращающегося магнитного поля на расплав в цилиндрической жидкой зоне [Текст] / В.А. Демин, Д.В. Макаров // Вестник Пермского университета. Вып. 1. Физика. – Пермь, 2004. – С. 106 – 111.

7. Дрица, М.Е. Свойства элементов [Текст]: Справ. изд. в 2-х кн. Кн. 1. Под ред. М.Е. Дрицы; 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Металлургия, ГУП «Журнал "Цветные металлы"», 1997. – 432 с.

9. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред [Текст] / Л.Д. Ландау, И.М. Лившиц. – М.: Наука, 1982. – 620 с.

10. **Lyubimov, D.V.** Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 2. Effect of a magnetic field [Text] / D.V. Lyubimov, T.P. Lyubimova, A.V. Perminov [et al.] // J. Fluid Mech.-2009.-Vol. 635.- P. 297 - 319.

**НИКУЛИН Илларион Леонидович** — кандидат технических наук, доцент кафедры общей физики Пермского национального исследовательского политехнического университета.

614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29 nikulin.illarion@mail.ru

ПЕРМИНОВ Анатолий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Пермского национального исследовательского политехнического университета. 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29

perminov1973@mail.ru

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2013