УДК 517.929

Л.Д. Блистанова, Л.Г. Каляда, А.И. Нечаев,
М.В. Стрекопытова, Н.Г. Ужегов

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

L.D. Blistanova, L.G. Kalyada, A.I. Nechaev,
M.V. Strecopitova, N.G. Uzhegov

St. Petersburg State University,
35 Universitetsky Pr., St. Petersburg, 195251, Russia

THE STABILITY OF CONSERVATIVE SYSTEMS WITH CYCLIC COORDINATES

В данной статье производится исследование консервативных систем с циклическими координатами на устойчивость. Показано, что задача о построении управлений, обеспечивающих существование заданного многообразия, сводится к построению управлений, обеспечивающих движение с заданным импульсом.

СООТНОШЕНИЕ. СИСТЕМА. ВЕЛИЧИНА. ФОРМА. СКОРОСТЬ. СВЯЗЬ. ИМПУЛЬС.

The given article focuses on the investigation for stability of conservative systems with cyclic coordinates. The problem on construction of controls maintaining the existence of diversity predetermined has been demonstrated to reduce to that construction maintaining the motion with the momentum predetermined.

RELATIONSHIP. SYSTEM. VALUE. FORM. SPEED. CONTACT. MOMENTUM.

Рассмотрим консервативную систему, состояние которой задается при помощи m позиционных координат $q_j\,(j=1,\dots,m)$ и $n-m$ циклических $q_\alpha\,(\alpha=m+1,\dots,n)$. Движение такой системы описывается уравнениями Гамильтона

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_j},\ \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_j}, \tag{1}$$

где $H=H(p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_m)$. Пусть H – положительно определенная функция переменных $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_m$ равномерно по $p_{m+1},\dots,p_n$. Пусть также функции $\frac{\partial H}{\partial p_j}$ и $\frac{\partial H}{\partial q_j}$ обращаются в нуль при $p_1=\dots=p_m=q_1=\dots=q_m=0$. Тогда у системы (1) есть семейство стационарных движений

$$p_1=p_2=\dots=p_m=q_1=q_2=\dots=q_m=0; \tag{2}$$

$$p_\alpha=p_\alpha^0,\ q_\alpha=\frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha}(t-t_0)+q_\alpha^0,\ \alpha=m+1,\dots,n,$$

представляющее собой $2(n-m)$-мерную плоскость в фазовом пространстве системы (1).

Будем считать, что семейство (2) устойчиво, если по любому $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$ такое, что при $\sum_{j=1}^{m}|p_j^0|+|q_j^0|<\delta$ будет выполняться при $t\ge 0$ следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^{m}|p_j(t,p^0,q^0)|+|q_j(t,p^0,q^0)|<\varepsilon.$$

Если же $\delta>0$ можно выбрать так, чтобы последняя сумма стремилась к нулю при $t\to\infty$, то семейство (2) будем называть асимптотически устойчивым. При сделанных выше предположениях относительно функции H можно показать, что семейство (2) устойчиво [1].

Рассмотрим систему следующего вида:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \mu Q_i; \ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ (\mu \geq 0), \qquad (3)$$

которая совпадает с системой (1) при □ = 0.

Пусть $Q_i = Q_i(p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m)$ обращается в нуль при

$$p_1 = \ldots = p_m = q_1 = \ldots = q_m = 0 .$$

Тогда система (3) имеет семейство стационарных движений (2). Наша задача будет состоять в исследовании этого семейства на устойчивость.

Теорема 1. *Если функция*

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} Q_i$$

является неположительной, то семейство (2) системы (3) устойчиво. Если же U – отрицательно определенная относительно переменных p_j, q_j $(j = 1, \ldots, m)$, то семейство (2) системы (3) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Продифференцировав функцию H, в силу системы (3) убеждаемся, что она удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости в первом случае и об асимптотической устойчивости – во втором [2].

По теореме о канонической структуре векторного силового поля функции Q_i могут быть представлены в следующем виде [3]:

$$Q_i = \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_i} + R_i,$$

где R_i – гироскопические силы, т. е. $\sum_{i=1}^{n} R_i \dot{q}_i = 0.$

Будем считать, что функции Q_i могут быть разложены в ряды по степеням величин $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ так, что

$$Q = \sum V^{(k)}(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m) .$$

Здесь $V^{(k)}$ представляют собой однородные формы степени k относительно величин $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если при сделанных выше предположениях относительно функции H функция $V^{(2)}$ является отрицательно определенной относительно величин $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ равномерно относительно $p_1, \ldots, p_n, \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n$, то семейство (2) системы (3) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Покажем, что

$$\Sigma_t = \sum_{j=1}^{m} | p_j(t, p^0, q^0) | + | q_j(t, p^0, q^0) | \to 0$$

при $t \to \infty$. Другими словами, по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $T(\varepsilon) > 0$ такое, что $\Sigma_t < \varepsilon$ при $t > T(\varepsilon)$. Отметим, что, зафиксировав ε, мы можем найти $\lambda = \inf_{\Sigma_t = \varepsilon} M$. Тогда по непрерывности H существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что $H < \lambda$ при $\Sigma_{t_0} < \delta$.

Возможны два случая.

1. Существует T такое, что $\Sigma_r < \delta$ при $\Sigma_{t_0 r} < \delta$ и, следовательно, $\Sigma_t < \varepsilon \ \forall t > T$, поскольку H – невозрастающая.

2. Не существует такого T, т. е. $\forall t \geq t_0$ всегда будет $\Sigma_t > \delta$. В этом случае заметим, что по условию теоремы функция

$$\frac{dH}{dt} = \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_i}$$

удовлетворяет в окрестности начала координат неравенству

$$\frac{\partial H}{\partial t} \leq -\alpha \, (\alpha > 0) ,$$

интегрируя которое, получаем:

$$H \leq -\alpha\left(t - t_0\right) + H_0. \qquad (4)$$

Так как $\Sigma_t > \delta$ и H – положительно определенная, то $H(p(t), q(t)) \geq \beta > 0$. Правая же часть неравенства (4) при $t \to \infty$ стремится к $-\infty$. Это противоречие и показывает, что случай 2 невозможен, т. е. имеет место случай 1, соответствующий тому, что $\Sigma_t \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда семейство стационарных решений (4) системы (1), в которую переходит система (3) при $\mu = 0$, не является устойчивым.

Укажем условия, при которых силовая функция Q будет обеспечивать требуемое качество движения системы (3) в окрестности семейства (2). Параметр μ в этой постановке считаем равным единице.

Перепишем систему (3) в виде системы уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\tilde{Q}_i,\quad \tilde{Q}_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}+Q_i; \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0,\ \alpha,\ i=m+1,\dots,n,$$

где $L=T-\Pi$ – функция Лагранжа. Кинетическая энергия такой системы может быть представлена в виде

$$T=T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)},$$

где

$$T^{(2)}=\frac{1}{2}(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)^* A(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$$

есть положительно определенная квадратичная форма значений $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n$; $T^{(1)}$ – линейная форма этих величин; $T^{(1)}=\sum_{i=1}^{n}a_i\dot{q}_i$, $T^0=T^0(q_1,\dots,q_n)$ – свободный член, не зависящий от обобщенных скоростей $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n$.

Предположим, что обобщенные силы $\tilde{Q}_1,\dots,\tilde{Q}_n$ определяются по формулам

$$\tilde{Q}_i=\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \dot{q}_i}+R_i,$$

где $\tilde{Q}=\sum_{k=1}^{n}V^{(k)}$, а $V^{(k)}$ – однородные формы степени k относительно $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m$, причем

$$V^{(1)}=-\sum\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\Pi+T^{(0)}\right)\dot{q}_j\right),$$

$$V^{(2)}=V^{(1)}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}T^{(2)}.$$

Функция Π разлагается в ряд $\Pi=\sum_{m=1}^{n}\Pi^{(m)}$, сходящийся в окрестности множества $q_1=\dots=q_m=0$.

Отметим, что устойчивость многообразия (2) системы (1) эквивалентна устойчивости многообразия

$$q_1=q_2=\dots=q_m=\dot{q}_1=\dot{q}_2=\dots=\dot{q}_m=0, \tag{6}$$

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha},\ q_\alpha=\frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha}(t-t_0)+q_\alpha^0,\ \alpha=m+1,\dots,n,$$

системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) квадратичная форма $T^{(2)}$ значений $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m$ имеет положительно определенную матрицу A, равномерно ограниченную в окрестности (6);

2) квадратичная форма $V^{(2)}$ отрицательно определена по отношению к $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m$ равномерно по $\dot{q}_{m+1},\dots,\dot{q}_n$;

3) квадратичная форма $\Pi^{(r)}$ положительно определена по отношению к величинам $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m$.

Тогда многообразие (6) является устойчивым, причем для движений, начинающихся в некоторой окрестности (6), справедливо выражение

$$\sum_{i=1}^{m}|\dot{q}_j|\xrightarrow[t\to\infty]{}0.$$

Доказательство. Подставим в систему (5) T и $\tilde{Q}$, умножим на $\dot{q}_i$ и просуммируем по i от 1 до n. Получим

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T^{(0)}}{\partial q_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Отметим, что

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T^{(2)}}{dt}+\frac{\partial T^{(2)}}{\partial t}.$$

Отсюда имеем равенство

$$\frac{dT^{(2)}}{dt}+\frac{\partial T^{(2)}}{\partial T}+\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\dot{a}_i-\sum\frac{\dot{q}_i\partial T^{(0)}}{\partial q_i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i}(\Pi+T^{(0)})+ \tag{7}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\dot{a}_i+\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial V^{(2)}}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial T^{(2)}}{\partial t}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(T^{(2)}+\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\dot q_i\frac{\partial V^{(2)}}{\partial \dot q_i}. \qquad (8)$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и найдем

$$\lambda=\inf_{\sum_{j=1}^{m}|\dot q_j|+|q_j|=0} T^{(2)}+\Pi.$$

По свойствам функций $T^{(2)}$ и Π существует $\delta>0$ такое, что в окрестности $\dot q_j=q_j=0$ выполняется неравенство

$$T^{(2)}+\Pi<\lambda \text{ при } \sum_{j=1}^{m}|\dot q_j|+|q_j|<\delta.$$

Из устойчивости многообразия (6) следует, что $T^{(2)}+\Pi$ – невозрастающая функция. Тогда

$$T^{(2)}+\Pi\le T_0^{(2)}+\Pi_0<\lambda \text{ при } \sum_{j=1}^{m}|\dot q_j^0|+|q_j^0|<\delta,$$

и, следовательно, $\sum_{j=1}^{m}|\dot q_j|<\varepsilon\ \forall t\ge T$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{m}|\dot q_j|\to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

Но не существует такого T, т. е. $\forall t\ge t_0$ справедливо $\sum_{j=1}^{m}|q_j|\ge\delta>0$, следовательно, $V^{(2)}\le-\alpha\ (\alpha>0)$. Из выражения (8) имеем:

$$\frac{d}{dt}(T^{(2)}+\Pi)\le-\alpha'\ (\alpha'>0).$$

Интегрируя, получаем

$$T^{(2)}+\Pi\le-\alpha'(t-t_0)+T_0^{(2)}+\Pi_0.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к $-\infty$ при $t\to\infty$. Левая же часть должна оставаться положительной по условиям теоремы. Полученное противоречие показывает, что возможен лишь случай 1 (см. теорему 2), т. е. $\sum|\dot q_j|\to 0$ при $t\to\infty$.

Теорема 3 доказана.

Замечание. Под устойчивостью многообразия (6) мы понимали его устойчивость по отношению лишь к фазовым переменным $q_1, q_2, \ldots, q_m$, но если понимать устойчивость (6) несколько шире, т. е. и по отношению к $\dot q_{m+1}, \ldots, \dot q_n$, то справедливо следующее утверждение [1].

Теорема 4. *Если $T^{(2)}$ есть квадратичная форма значений $q_1, \ldots, q_m$ $\left(q_\alpha-\dfrac{\partial H_0}{\partial p_\alpha}\right)$ с положительно определенной, равномерно ограниченной в окрестности (6) матрицей А и если выполнены условия 2) и 3) предыдущей теоремы, то семейство (6) устойчиво по отношению к фазовым переменным $q_1, q_2, \ldots, q_m, \dot q_1, \ldots, \dot q_n$.*

Рассмотрим теперь управляемую механическую голономную систему, описываемую системой уравнений Лагранжа 1-го рода [2]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}= \\ =Q_j(q_1,\ldots,q_k,\dot q_1,\ldots,\dot q_k,t)+\sum_{i=1}^{k}B_{ji}u_i, \qquad (9)$$

где $j=1,\ldots,k$, $q_1,\ldots,q_k$ – обобщенные координаты системы; $\dot q_1,\ldots,\dot q_k$ – обобщенные скорости; T – кинетическая энергия; $(k\times k)$-матрица $B=\{B_{ij}\}$ является неособенной; $U=(u_1,\ldots,u_k)^*$ представляет собой вектор управлений [3].

Поставим задачу о построении управлений U таким образом, чтобы система (9) имела асимптотически устойчивое интегральное многообразие

$$\dot q=\eta(q,t). \qquad (10)$$

Здесь и далее мы будем обозначать как q – вектор обобщенных координат $(q_1,\ldots,q_k)^*$, а $\dot q$ – вектор обобщенных скоростей $(\dot q_1,\ldots,\dot q_k)^*$. Вектор обобщенных сил $(Q_1,\ldots,Q_k)^*$ обозначим Q.

Кинетическая энергия T системы (9) определяется соотношением

$$r=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\dot r_i^2}{2},$$

где n – число точек системы, m_i – масса i-й точки, r_i – радиус-вектор этой точки в правой декартовой системе координат O_{xyz}.

Мы будем считать, что в общем случае система подчинена реономным связям $r_i=r_i(q,t)$. Тогда кинетическая энергия системы представима в виде

$$r=r_2+r_1+r_0,$$

где $r_2 = \dot{q}^* A(q,t)\dot{q}$ — квадратичная форма обобщенных скоростей $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_k$, $r_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i(q,t)\dot{q}_i$ — линейная форма обобщенных скоростей, а r_0 представляет собой члены, не зависящие от величин $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_k$. Заметим, что если связи являются стационарными, т. е. $r_i = r_i(q)$, то $T = T_2$.

Перепишем уравнение (9) в форме Гамильтона:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j},\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial p_j} + Q_j + \sum_{i=1}^{k} B_{ji}u_i,\ j = 1, ..., k, \quad (11)$$

где величины $p_1, ..., p_k$ называемые обобщенными импульсами, определяются соотношениями

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad (12)$$

а функция H определяется соотношением [4]:

$$H = \sum_{i=1}^{k} p_i q_i - T.$$

В соотношении (11) заменим обобщенные скорости $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_k$ на величины $f_j(p,q,t)$, получаемые из уравнений (12) при решении их относительно величин $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_k$. Таким образом, мы получим функцию H в виде $H = H(t,q,p)$. Заметим, что, задавая многообразие (10), мы тем самым задаем импульсы p_j для системы (12):

$$p_j = \pi_j(t,q). \quad (13)$$

Таким образом, задача сводится к построению управлений, обеспечивающих движение с заданным импульсом.

При условии существования многообразия (13) у системы (11) выполнено соотношение

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \pi_j}{\partial q_i}\eta_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_j + \sum_{i=1}^{k} B_{ji}u_i.$$

Положим

$$U_0 = B^{-1}\left(\frac{\partial H(t,q,\pi)}{\partial q} - Q + \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\partial \pi}{\partial q}\eta\right); \quad (14)$$

$$U = U_0 - k(p - \pi). \quad (15)$$

Параметр k будем называть коэффициентом усиления. Подставим уравнение (15) в систему (11), получим следующие соотношения [5]:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = \dot{\pi} - k(p - \pi). \quad (16)$$

Система (13) имеет при $k > 0$ устойчивое интегральное многообразие (13), определяемое соотношениями (10). Для доказательства этого факта достаточно продифференцировать положительно определенную функцию Ляпунова $V = (p - \pi)^2$ в силу системы (16). Мы получим, что производная этой функции является отрицательной величиной при $k > 0$. Тем самым и доказывается асимптотическая устойчивость системы (16) по отношению к величине $p - \pi$.

В данной статье исследована устойчивость консервативных систем с циклическими координатами. Показано, что задача о построении управлений, обеспечивающих существование заданного многообразия, сводится к построению управлений, обеспечивающих движение с заданным импульсом. Рассмотрены режимы стабилизации системы за конечное время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зубов, А.В.** Динамическая безопасность управляемых систем [Текст] / А.В. Зубов, Н.В. Зубов. – СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2009. – 172 с.

2. **Зубов, А.В.** Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений [Текст] /А.В. Зубов, С.В. Зубов. – СПб: АООТ «Мобильность-плюс», 2012. – 357 с.

3. **Зубов, А.В.** Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений [Текст] /А.В. Зубов, С.В. Зубов. – СПб: ВВМ, 2011. – 323 с.

4. **Зубов, С.В.** Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость [Текст] /С.В. Зубов, М.В. Стрекопытова. – СПб.: СПбГУ, 2010. – 446 с.

5. **Зубов, И.В.** Анализ управляемых систем и равновесных движений [Текст] /И.В. Зубов, Н.В. Зубов, М.В. Стрекопытова. – СПб.: ВВМ, 2012. – 322 с.

БЛИСТАНОВА Лидия Дмитриевна – *доктор физико-математических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного университета факультета Прикладной математики – Процессов управления.*
198504, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., 35

КАЛЯДА Леонид Герасимович – *аспирант Санкт-Петербургского государственного университета факультета Прикладной математики – Процессов управления.*
198504, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., 35

НЕЧАЕВ Алексей Иванович – *аспирант Санкт-Петербургского государственного университета факультета Прикладной математики – Процессов управления.*
198504, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., 35

СТРЕКОПЫТОВА Мария Владимировна – *кандидат физико-математических наук, доцент Санкт-Петербургского государственного университета факультета Прикладной математики – Процессов управления.*
198504, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., 35.
ddemidova@mail.ru

УЖЕГОВ Николай Григорьевич – *аспирант Санкт-Петербургского государственного университета факультета Прикладной математики – Процессов управления.*
198504, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., 35.