



# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 519.6: 612

*А.Б. Степанов*

## **ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ПРИ СИНТЕЗЕ ВЕЙВЛЕТОВ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**

*A.B. Stepanov*

The Bonch-Bruевич St. Petersburg State University of Telecommunications,  
22 Bolshevikov Pr., St. Petersburg, 193232, Russia

## **THE APPLICATION OF NEURAL NETWORKS IN THE WAVELET SYNTHESIS TO THE CONTINUOUS WAVELET TRANSFORMATION**

---

Рассматриваются основные принципы синтеза вейвлетов для непрерывного вейвлет-преобразования с применением искусственных нейронных сетей. Приводятся теоретические и практические обоснования выбора математического аппарата.

ВЕЙВЛЕТ. ИСКУССТВЕННАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ. СИНТЕЗ. ПОЛИНОМ. ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММА.

The article analyses the basic principles of the wavelet synthesis for continuous wavelet-transformation with the use of artificial neural networks. Theoretical and practical substantiations for the choice of a mathematical apparatus are presented.

WAVELET. ARTIFICIAL NEURAL NETWORK. SYNTHESIS. POLYNOMIAL. ELECTROENCEPHALOGRAM.

---

Работа посвящена синтезу вейвлетов для непрерывного вейвлет-преобразования одномерных сигналов с применением искусственных нейронных сетей.

Вейвлеты – это обобщенное название особых функций сложной формы, с нулевым интегральным значением, локализованных по оси независимой переменной времени, способных к сдвигу по ней и масштабированию [1].

Актуальность работы обусловлена необходимостью дополнения математического аппарата вейвлетов, с тем, чтобы создать воз-

можности для разработки методов, которые бы позволили выявлять так называемые тонкие особенности сигналов – графоэлементы малой протяженности во времени (как правило, менее 1 с). Последние соответствуют тем или иным физическим или физиологическим состояниям источника сигнала.

Подобные методы могут применяться к одномерным сигналам различной природы, к которым относятся и биомедицинские. В качестве примера в работе рассматривается электроэнцефалограмма (ЭЭГ).



Электроэнцефалограмма – это сложный сигнал, зарегистрированный с поверхности головы. Такой сигнал есть результат суммирования и фильтрации элементарных электрических процессов отдельных нейронов головного мозга [2]. Под фильтрацией в данном случае необходимо понимать процесс ослабления ряда частотных составляющих при прохождении через покровы головы. Кроме того, в состав аппаратной части электроэнцефалографа, как правило, входит набор фильтров и устройств, позволяющих ограничить высокочастотную и удалить постоянную составляющие.

В качестве тонких особенностей ЭЭГ могут выступать графоэлементы патологической активности либо артефакты (явления, не связанные с деятельностью мозга).

Рассмотрим фрагмент ЭЭГ (рис. 1), соответствующий кратковременному нарушению сознания человека (абсансу).

Для выявления тонких особенностей сигналов будем использовать математический аппарат вейвлетов. Как известно [3], для этих целей наиболее пригодно непрерывное вейвлет-преобразование (НВП) функции  $f(t) \in L^2(R)$ :

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (1)$$

где  $\psi(t)$  – базисная функция вейвлета;  $a$  – параметр, который определяет размер вейвлета;  $b$  – параметр, который задает сдвиг по оси времени, так что  $a, b \in R, a \neq 0$ .

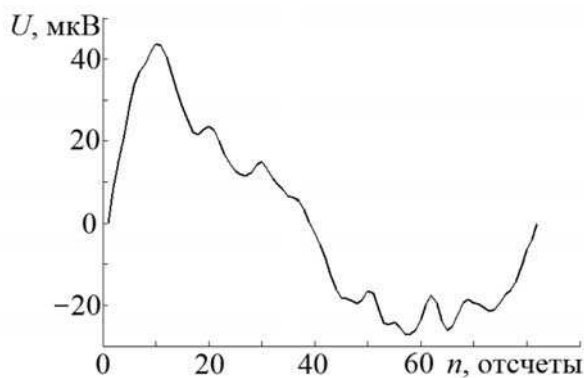


Рис. 1. Фрагмент электроэнцефалограммы, соответствующий абсансу

На практике для дискретного сигнала  $f(t_n)$  ( $t_n = n\Delta t$ , где  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) вместо формулы (1) может быть использовано выражение [3]:

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \overline{\psi\left(\frac{t_n-b}{a}\right)}. \quad (2)$$

В этом случае необходимо говорить об оценке непрерывного вейвлет-преобразования (в литературе термин «оценка» часто опускается). Для краткости далее мы также будем опускать указанный термин, однако все необходимые расчеты будем выполнять на основе выражения (2).

Результаты непрерывного вейвлет-преобразования можно визуализировать в виде вейвлет-спектрограммы – трехмерного графика, отображающего корреляцию между базисной функцией вейвлета, помещенной в точку  $b$ , и деталью анализируемого сигнала с центром в той же точке, для различных значений масштаба [3]. Изображение вейвлет-спектрограммы осуществляется в трехмерном пространстве координат:  $a, b, W(a,b)$ . На приведенных графиках значения по оси  $W(a,b)$  откладываются для наглядности насыщенностью тона.

Как следует из выражений (1), (2), важным этапом при проведении процедуры непрерывного вейвлет-преобразования является выбор базисной функции вейвлета.

Проведенные исследования [1] показали, что традиционные вейвлеты не позволяют получить локализованного отображения особенности на вейвлет-спектрограмме. Продемонстрируем это на примере вейвлета Морле (рис. 2).

Сгенерируем тестовый сигнал (рис. 3, а). Используя фрагмент ЭЭГ, соответствующий абсансу, дополним его слева и справа нулями.

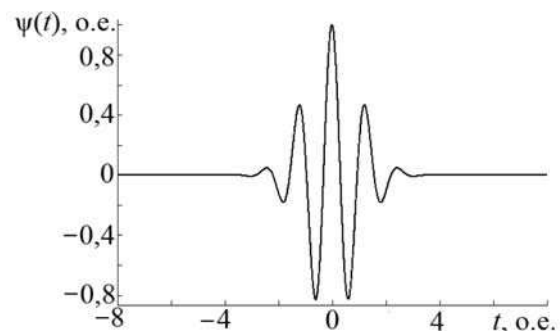


Рис. 2. Вейвлет Морле

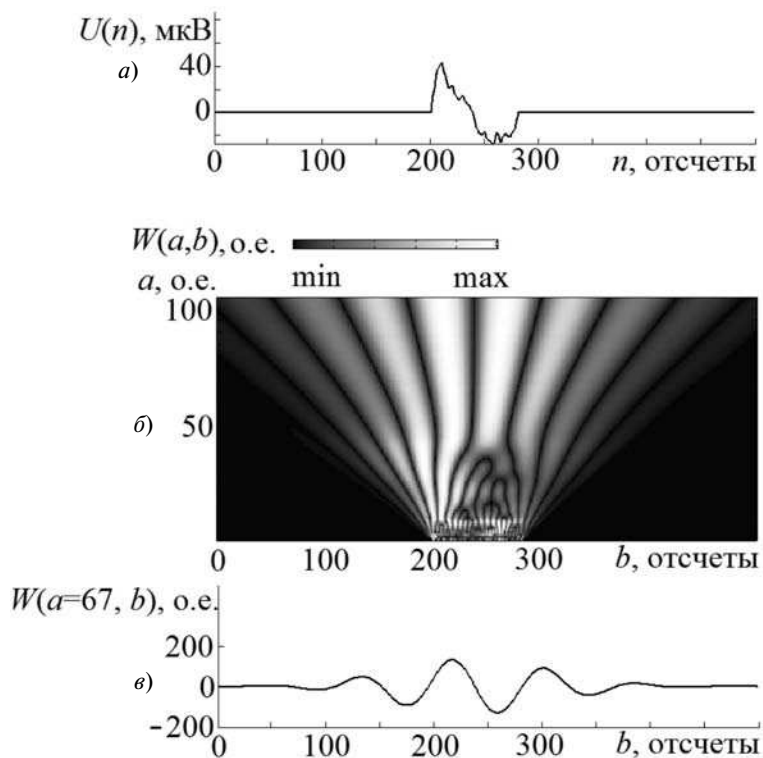


Рис. 3. Вейвлет-спектрограмма (б) и график вейвлет-коэффициентов (в) тестового сигнала, содержащего особенность (а); использован вейвлет Морле

На рис. 3, б, в показаны вейвлет-спектрограмма и график вейвлет-коэффициентов (ГВК) тестового сигнала, полученные с применением вейвлета Морле. При построении ГВК (рис. 3, в) были выбраны вейвлет-коэффициенты, соответствующие основной частоте особенности (3 Гц, что соответствует значению  $a = 67$ ).

Как следует из рис. 3, особенность плохо локализована на вейвлет-спектрограмме и графике вейвлет-коэффициентов. Решить проблему локализации позволяет применение при НВП синтезированных вейвлетов.

Процедура синтеза предполагает выбор фрагмента реального сигнала, называемого образцом, в качестве основы для будущего вейвлета. Далее производится математическое описание образца и его проверка на соответствие достаточному условию допустимости и дополнительным линейным ограничениям. В случае необходимости применяются меры, направленные на модификацию образца. С этой целью может использоваться метод прямого приближения.

Математическое описание образца – важный этап проведения процедуры синтеза. Чем лучше полученный вейвлет приближен к оригинальному сигналу, тем более он пригоден для анализа этого сигнала.

При этом рекомендуется использовать аппроксимацию, так как данная методика позволяет избежать информационной избыточности, что актуально в свете особенностей НВП, требующего больших вычислительных затрат.

Рассмотрим пример синтеза вейвлета с применением аппроксимации методом наименьших квадратов и полинома степени  $m$ :

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m.$$

В качестве достоинства данного метода можно отметить возможность аналитического представления базисной функции вейвлета, в качестве недостатка – ограничения, накладываемые на выбор максимальной степени полинома, что связано с проблемой плохой обусловленности.



На рис. 4,а показан вейвлет, полученный при помощи данного метода. В процессе моделирования был выбран полином степени  $m = 20$ , позволяющий получить минимальное значение среднего квадратического отклонения (СКО = 1,7725 мкВ). При этом максимальное отклонение (МО) составило 4,8170 мкВ (см. таблицу). Дальнейшее увеличение степени полинома было связано с увеличением среднеквадратического отклонения. Приведенные результаты свидетельствуют о значительных искажениях полученной базисной функции вейвлета. Визуальный анализ подтверждает количественный неудовлетворительный результат оценки.

Таким образом, можно заключить, что данный подход не позволяет получить приемлемых результатов при синтезе вейвлетов для НВП.

Для выхода из такой ситуации нами предлагается использовать для процедуры аппроксимации искусственные нейронные сети.

Как известно [4], нейронная сеть может рассматриваться как универсальный аппроксиматор. При этом возможно применение многослойного персептрона, имеющего один и более скрытых слоев, или нейронных сетей на основе радиальных базисных функций.

На рис. 5,а показан пример многослойного персептрона с одним скрытым слоем. Для фрагмента электроэнцефалограммы длительностью 82 отсчета, соответствующего абсансу, экспериментальным путем была получена однонаправленная нейронная сеть, содержащая 16 нейронов в скрытом слое и один в выходном, позволяющая получить минимальную ошибку аппроксимации. При этом использовались следующие функции активации: в скрытом слое — функция гиперболического тангенса, в выходном — линейная. Важно, что принципиальное условие нелинейности выполняется.

Обучение нейронной сети осуществлялось согласно алгоритму Левенберга — Марквардта, главным достоинством которого является скорость обучения [5].

Синтезированный вейвлет (рис. 4, б) лучше приближен к образцу, чем вейвлет, полученный первым методом. Визуальные оценки

базисной функции подтверждают и количественные. Среднее квадратическое отклонение вейвлета от оригинального сигнала составляет 1,2877 мкВ, что значительно меньше, чем при использовании полинома степени  $m = 20$ , однако максимальное отклонение составило 5,9422 мкВ.

Основным преимуществом многослойного персептрона с одним скрытым слоем является относительно простая организация. К недостаткам следует отнести сложность управления аппроксимацией, наличие эффекта глобального взаимодействия нейронов, которое может приводить к значительной ошибке аппроксимации. Для решения данной проблемы могут применяться нейронные сети, содержащие два скрытых слоя. Таким образом, процесс аппроксимации образца может быть более управляемым: извлечение локальных признаков происходит в первом слое, а глобальных — во втором [4].

На рис. 5,б показан пример нейронной сети с двумя скрытыми слоями. Число нейронов в каждом слое определялось в ходе эксперимента. При использовании данной сети был получен вейвлет (см. рис. 4,в), который лучше приближен к образцу. Максимальное и среднее квадратическое отклонения вейвлета от оригинального сигнала составляют 2,4583 и 1,0685 мкВ соответственно, что меньше, чем при использовании многослойного персептрона с одним скрытым слоем.

Применение нейронных сетей на основе радиальных базисных функций позволило значительно уменьшить ошибку аппроксимации. На рис. 4,г приведен вейвлет, полученный при использовании нейронной сети на основе РБФ с 82 нейронами в скрытом слое (рис. 5,в). В качестве функции активации применялась функция Гаусса.

Как следует из рисунка, полученный вейвлет достаточно точно приближен к образцу оригинального сигнала. Максимальное и среднее квадратическое отклонения вейвлета от оригинального сигнала составляют  $20,783 \cdot 10^{-14}$  и  $4,1879 \cdot 10^{-14}$  мкВ соответственно, что меньше, чем при использовании многослойного персептрона с двумя скрытыми слоями.

Результаты всех экспериментов сведены в таблицу.

**Использованные методы и количественные оценки синтезированных вейвлетов**

Поз. на рис. 4	Использованная конструкция метода синтеза	СКО, мкВ	МО, мкВ
a)	Полином степени $m = 20$	1,7725	4,8170
б)	Многослойный перцептрон с одним скрытым слоем	1,2877	5,9422
в)	То же с двумя скрытыми слоями	1,0685	2,4583
г)	Нейронная сеть на основе радиальных базисных функций	$4,1879 \cdot 10^{-14}$	$20,783 \cdot 10^{-14}$

СКО, МО – среднеквадратическое и максимальное отклонения полученного вейвлета от оригинального сигнала

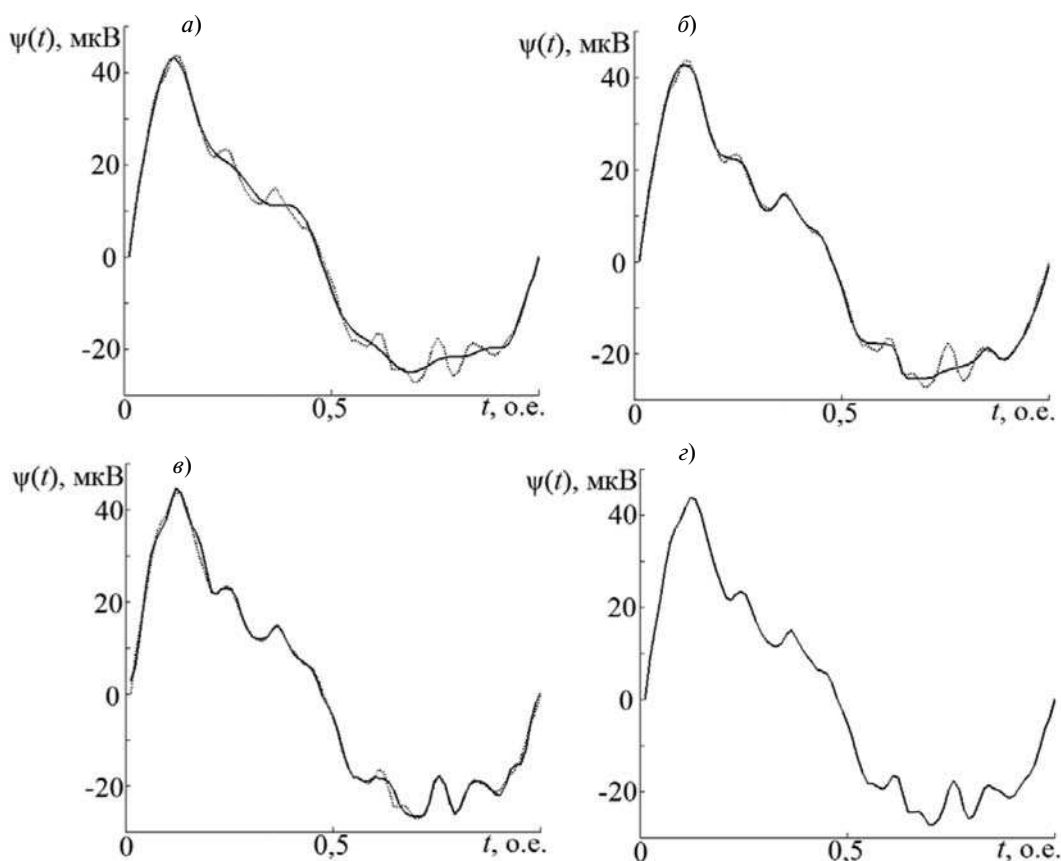


Рис. 4. Синтезированные вейвлеты (сплошные линии) и образец реального сигнала (пунктиры); использованные методы приведены в таблице

СКО позволяет оценить отклонение полученного вейвлета от образца оригинального сигнала, МО – отдельные выбросы.

Результаты, приведенные в таблице, свидетельствуют о том, что при процедуре синтеза могут применяться все рассмотренные методы,

но наилучшее приближение к образцу реального сигнала обеспечивает применение нейронных сетей на основе радиальных базисных функций.

Построим и оценим график вейвлет-спектрограммы для вейвлета, полученного с применением данной нейронной сети (рис. 6,б).

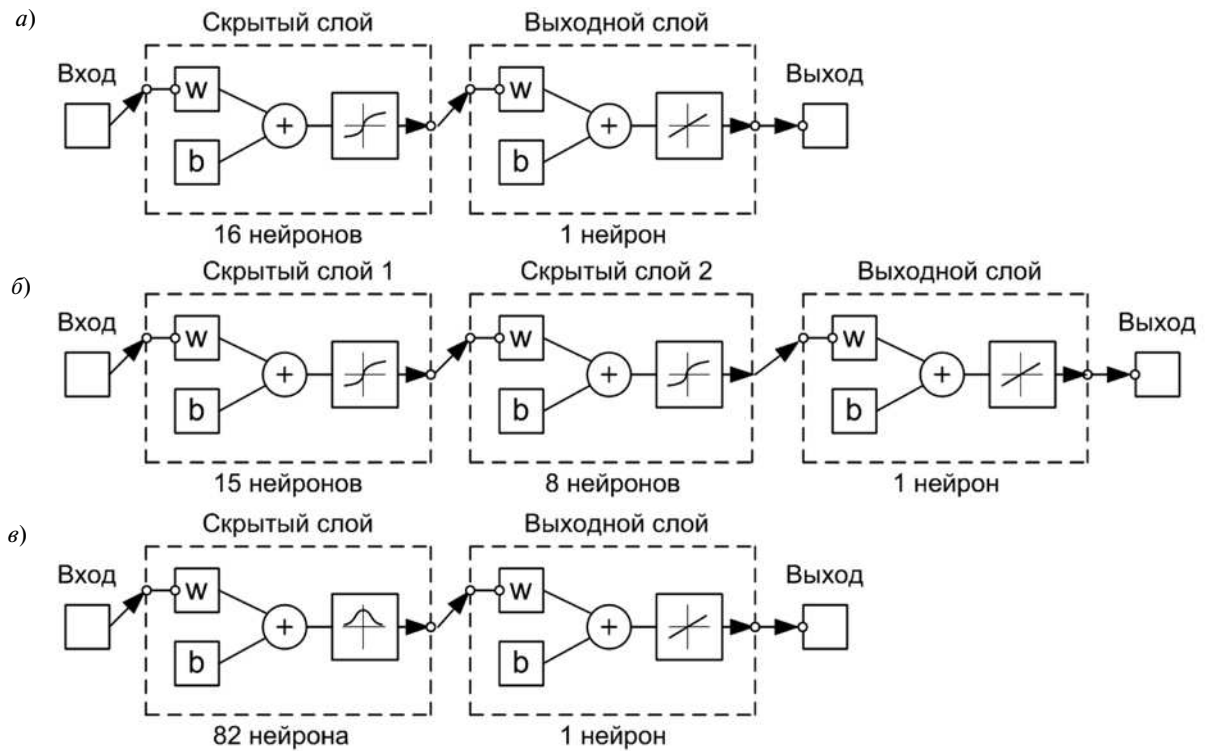


Рис. 5. Используемые нейронные сети: многослойный персептрон с одним (а) и двумя (б) скрытыми слоями, а также сеть на основе радиальных базисных функций (в)

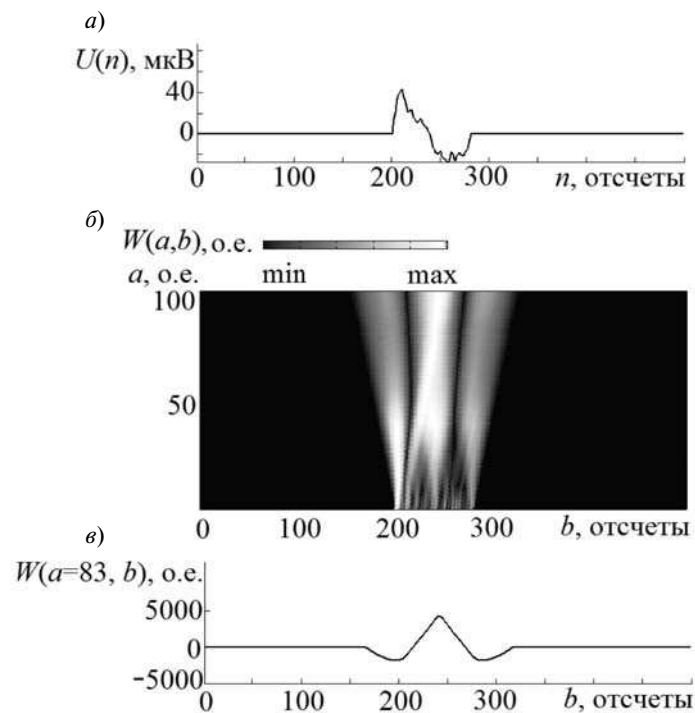


Рис. 6. Вейвлет-спектрограмма (б) и график вейвлет-коэффициентов (в) тестового сигнала (а).  
 Использован вейвлет, полученный с применением нейронной сети на основе радиальных базисных функций

Как следует из рисунка, тонкая особенность хорошо локализована на вейвлет-спектрограмме. График вейвлет-коэффициентов для частоты 3 Гц (соответствует значению параметра  $a = 83$ ) также служит удобным инструментом для индикации особенностей подобного рода.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что при процедуре синтеза вейвлетов для непрерывного вейвлет-преобразования на этапе математического описания наиболее предпочтительным является метод аппроксимации нейронной сетью на основе радиальных базисных функций.

Точное приближение вейвлета к образцу оригинального сигнала позволяет получить локализованное отображение на вейвлет-спектрограмме, даже сдвинутой во времени, и масштабированной тонкой особенностью сигнала, что объясняется основными свойствами НВП. Существенные изменения сравнительного положения и амплитуд отдельных пиков особенности приведет к расширению соответствующей области на вейвлет-спектрограмме и графике вейвлет-коэффициентов, однако результаты НВП останутся информативными, что подтверждается многочисленными экспериментами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арбузов, С.М.** Применение методов вейвлет-анализа в электроэнцефалографии [Текст] / С.М. Арбузов, А.Б. Степанов. – СПб.: Линк, 2009. – 104 с.
2. **Зенков, Л.Р.** Функциональная диагностика нервных болезней: руководство для врачей [Текст] / Л.Р. Зенков, М.А. Ронкин; 4-е изд. – М.: МЕДпресс-информ, 2011. – 488 с.
3. **Витязев, В.В.** Вейвлет-анализ временных рядов [Текст] / В.В. Витязев. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. – С. 9 – 27.
4. **Хайкин, С.** Нейронные сети: полный курс [Текст]: Пер. с англ.; 2-е изд. – М.: ИД «Вильямс», 2008. – С. 282 – 287.
5. Нейронные сети. STATISTICA Neural Networks: Методология и технологии современного анализа данных [Текст] / Под редакцией В.П. Боровикова.; 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Горячая линия – Телеком, 2008. – С. 94.

---

**СТЕПАНОВ Андрей Борисович** – старший преподаватель кафедры цифровой обработки сигналов Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича.  
193232, г. Санкт-Петербург, пр. Большевиков, 22  
sabiko@yandex.ru